Angel • Runde



Intermedia Álgebra

Pearson

Álgebra intermedia

9e

Allen R. Angel
MONROE COMMUNITY COLLEGE

Dennis C. Runde
STATE COLLEGE OF FLORIDA

Traducción

Víctor Campos Olguín
Traductor profesional

Revisión técnica

Jonathan Reyes González
CECyT 9 "Juan de Dios Bátiz" (Voca 9)
Instituto Politécnico Nacional

Adrián Velázquez Osorio
Instituto Politécnico Nacional

Dr. Juan A. Jiménez Gallegos
Centro de Invastigación en Ciencia y Tecnología Avanzada-IPN

Dr. Jorge Balmaseda Era
Universidad Nacional Autónoma de México

Pearson

Datos de catalogación

Allen R. Angel; Dennis C. Runde

Álgebra Intermedia

Novena edición

Pearson Educación de México, S.A. de C.V., México, 2019

ISBN: 978-607-32-4855-6

Área: Matemáticas/Álgebra

Formato: 21 × 27 cm Páginas: 832

Álgebra Intermedia

El proyecto educativo Álgebra intermedia es una obra colectiva creada por un equipo de profesionales, quienes cuidaron el nivel y pertinencia de los contenidos, lineamientos y estructuras establecidos por Pearson Educación.

Traducción autorizada de la edición en idioma inglés titulada Intermediate Algebra for College Students, 10a. Edición por Allen R. Angel and Dennis C. Runde, con ISBN 978-0-13-475899-2 publicada por Pearson Education, Inc. Copyright © 2019. Todos los derechos reservados.

Esta edición en español es la única autorizada.

Novena edición en español
Dirección general: Sergio Fonseca ■ **Dirección de innovación y servicios educativos:** Alan David Palau ■ **Gerencia de contenidos y servicios editoriales:** Jorge Luis Íñiguez ■ **Coordinación de desarrollo de contenidos:** Lilia Moreno ■ **Coordinación de arte y diseño:** Mónica Galván ■ **Especialista en contenidos de aprendizaje:** Berenice Torruco ■ **Edición de desarrollo:** Juan A. Jiménez ■ **Corrección de estilo:** María Luisa Román ■ **Lectura de pruebas:** Antonio J. Gallegos, Adrián Velázquez y Kimberly Enriquez. ■ **Diseño de interiores:** Indra Ortiz ■ **Composición y diagramación:** Ediciones OVA ■ **Iconografía:** María del Carmen Gutiérrez ■ **Imágenes:** Pearson Asset Library.

Contacto: soporte@pearson.com

Novena edición, 2019

ISBN LIBRO IMPRESO: 978-607-32-4855-6
ISBN E-BOOK: 978-607-32-4856-3

D.R. © 2019 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Avenida Antonio Dovalí Jaime No. 70
Torre B, piso 6, Colonia Zedec, ED Plaza Santa Fe, Delegación Álvaro Obregón, Ciudad de México, C.P. 01210

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana Reg. Núm. 1031

www.pearsonenespañol.com

Impreso en México. *Printed in Mexico*.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 – 21 20 19 18

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

Pearson Hispanoamérica

Argentina ■ Belice ■ Bolivia ■ Chile ■ Colombia ■ Costa Rica ■ Cuba ■ República Dominicana ■ Ecuador ■ El Salvador ■ Guatemala Honduras ■ México ■ Nicaragua ■ Panamá ■ Paraguay ■ Perú ■ Uruguay ■ Venezuela

Para mi esposa, Kathy,
y nuestros hijos, Robert y Steven
Allen R. Angel

Para mi esposa, Kristin,
y nuestros hijos Alex, Nick y Max
Dennis C. Runde

Breve descripción de los contenidos

1 Conceptos básicos 1

2 Ecuaciones y desigualdades 66

3 Gráficas y funciones 145

4 Sistemas de ecuaciones y desigualdades 232

5 Polinomios y funciones polinomiales 298

6 Expresiones y ecuaciones racionales 386

7 Raíces, radicales y números complejos 454

8 Funciones cuadráticas 526

9 Función exponencial y logarítmica 603

10 Secciones cónicas 673

11 Sucesiones, series y el teorema del binomio 717

Contenido

Prefacio xiii

Para el estudiante xx

1 Conceptos básicos 1

1.1 Habilidades de estudio para tener éxito en matemáticas y en el uso de una calculadora 2
1.2 Conjuntos y otros conceptos básicos 6
1.3 Propiedades de y operaciones con números reales 17
1.4 Orden de las operaciones 29
Examen de mitad de capítulo: secciones 1.1-1.4 40
1.5 Exponentes 41
1.6 Notación científica 51
Capítulo 1 Resumen 58
Capítulo 1 Ejercicios de repaso 62
Capítulo 1 Examen de práctica 65

2 Ecuaciones y desigualdades 66

2.1 Resolución de ecuaciones lineales 67
2.2 Resolución de problemas y uso de fórmulas 78
2.3 Aplicaciones del álgebra 88
Examen de mitad de capítulo: secciones 2.1-2.3 101
2.4 Problemas aplicados adicionales 102
2.5 Resolución de desigualdades lineales 113
2.6 Resolución de ecuaciones y de desigualdades que contienen valores absolutos 127
Capítulo 2 Resumen 137
Capítulo 2 Ejercicios de repaso 140
Capítulo 2 Examen de práctica 143
Examen de repaso acumulativo 144

3 Gráficas y funciones 145

3.1 Gráficas 146
3.2 Funciones 158
3.3 Funciones lineales: gráficas y aplicaciones 173
3.4 La forma pendiente-intersección con el eje de las *y* de una ecuación lineal 183
Examen de mitad de capítulo: secciones 3.1-3.4 197
3.5 La forma punto-pendiente de una ecuación lineal 198
3.6 El Álgebra de las funciones 208

3.7 Gráficas de desigualdades lineales 217
Capítulo 3 Resumen 221
Capítulo 3 Ejercicios de repaso 225
Capítulo 3 Examen de práctica 229
Examen de repaso acumulativo 230

4 Sistemas de ecuaciones y desigualdades 232

4.1 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales de dos variables 233
4.2 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales de tres variables 245
4.3 Sistemas de ecuaciones lineales: aplicaciones y resolución de problemas 252
Examen de mitad de capítulo: secciones 4.1-4.3 265
4.4 Resolución de sistemas de ecuaciones usando matrices 266
4.5 Resolución de sistemas de ecuaciones usando determinantes y la regla de Cramer 275
4.6 Resolución de sistemas de desigualdades lineales 282
Capítulo 4 Resumen 288
Capítulo 4 Ejercicios de repaso 294
Capítulo 4 Examen de práctica 296
Examen de repaso acumulativo 297

5 Polinomios y funciones polinomiales 298

5.1 Suma y resta de polinomios 299
5.2 Multiplicación de polinomios 309
5.3 División de polinomios y división sintética 319
5.4 Factorización de un monomio, a partir de un polinomio y factorización por agrupación 329
Examen de mitad de capítulo: secciones 5.1-5.4 338
5.5 Factorización de trinomios 339
5.6 Fórmulas especiales de factorización 350
5.7 Repaso general de la factorización 359
5.8 Ecuaciones polinomiales 363
Capítulo 5 Resumen 375
Capítulo 5 Ejercicios de repaso 380
Capítulo 5 Examen de práctica 384
Examen de repaso acumulativo 385

6 Expresiones y ecuaciones racionales 386

6.1 Dominios de funciones racionales, y multiplicación y división de expresiones racionales 387
6.2 Suma y resta de expresiones racionales 397
6.3 Fracciones complejas 407
6.4 Resolución de ecuaciones racionales 413
Examen de mitad de capítulo: secciones 6.1-6.4 425
6.5 Ecuaciones racionales: aplicaciones y resolución de problemas 426

6.6 Variación 436
Capítulo 6 Resumen 446
Capítulo 6 Ejercicios de repaso 449
Capítulo 6 Examen de práctica 452
Examen de repaso acumulativo 453

7 Raíces, radicales y números complejos 454

7.1 Raíces y radicales 455
7.2 Exponentes racionales 463
7.3 Simplificación de radicales 472
7.4 Suma, resta y multiplicación de radicales 479
Examen de mitad de capítulo: secciones 7.1-7.4 487
7.5 Racionalización de denominadores 487
7.6 Resolución de ecuaciones radicales 497
7.7 Números complejos 509
Capítulo 7 Resumen 517
Capítulo 7 Ejercicios de repaso 521
Capítulo 7 Examen de práctica 524
Examen de repaso acumulativo 525

8 Funciones cuadráticas 526

8.1 Resolución de ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado 527
8.2 Resolución de ecuaciones cuadráticas mediante la fórmula cuadrática 537
8.3 Ecuaciones cuadráticas: aplicaciones y resolución de problemas 550
Examen de mitad de capítulo: secciones 8.1-8.3 559
8.4 Ecuaciones en la forma cuadrática 560
8.5 Gráficas de funciones cuadráticas 566
8.6 Desigualdades cuadráticas, polinomiales y racionales en una variable 584
Capítulo 8 Resumen 595
Capítulo 8 Ejercicios de repaso 597
Capítulo 8 Examen de práctica 601
Examen de repaso acumulativo 602

9 Función exponencial y logarítmica 603

9.1 Función compuesta y función inversa 604
9.2 Funciones exponenciales 616
9.3 Funciones logarítmicas 625
9.4 Propiedades de los logaritmos 633
Examen de mitad de capítulo: secciones 9.1-9.4 639
9.5 Logaritmos comunes 640
9.6 Ecuación exponencial y logarítmica 647
9.7 Función exponencial natural y función logarítmica natural 653
Capítulo 9 Resumen 665
Capítulo 9 Ejercicios de repaso 669

Capítulo 9 Examen de práctica 671
Examen de repaso acumulativo 672

10 Secciones cónicas 673

10.1 La parábola y la circunferencia 674
10.2 La elipse 686
Examen de mitad de capítulo: secciones 10.1-10.2 693
10.3 La hipérbola 694
10.4 Sistemas de ecuaciones no lineales y sus aplicaciones 702
Capítulo 10 Resumen 710
Capítulo 10 Ejercicios de repaso 713
Capítulo 10 Examen de práctica 715
Examen de repaso acumulativo 716

11 Sucesiones, series y el teorema del binomio 717

11.1 Sucesiones y series 718
11.2 Sucesiones y series aritméticas 725
11.3 Sucesiones y series geométricas 734
Examen de mitad de capítulo: secciones 11.1-11.3 746
11.4 El teorema del binomio 746
Capítulo 11 Resumen 752
Capítulo 11 Ejercicios de repaso 755
Capítulo 11 Examen de práctica 758
Examen de repaso acumulativo 759

Apéndice de fórmulas geométricas 760

Respuestas A1

Índice de aplicaciones I1

Índice de materias I6

Créditos de fotografías C1

Prefacio

¡Bienvenido a la 9ª edición de *Álgebra intermedia*! Este libro lo han usado miles de estudiantes y otros personas que nunca han estado expuestos al álgebra, o que han estado expuestos, pero necesitan un curso de actualización. Nuestra principal meta fue escribir un libro que los estudiantes puedan leer, entender y disfrutar. Para lograr esta meta hemos usado oraciones breves, explicaciones claras y muchos ejemplos trabajados al detalle. Hemos intentado hacer el libro relevante, usando aplicaciones prácticas del álgebra a lo largo del texto.

Lo nuevo en esta edición

Una de las características más importantes del texto es su énfasis en la legibilidad. El libro es muy comprensible para estudiantes en todo nivel de habilidad lectora. La novena edición conserva este énfasis y ha sido revisada con un enfoque en la mejora de la accesibilidad y el abordaje de las necesidades y estilos de aprendizaje de los estudiantes de la actualidad. Para este fin, se realizaron los siguientes cambios:

Cambios en el contenido

- Realizamos una extensa revisión de las series de ejercicios, incluido un análisis de datos analíticos acerca del uso de los ejercicios, lo que condujo a las siguientes modificaciones en los ejercicios y en las series de ejercicios:
  - Las series de ejercicios se han modificado para garantizar una graduación precisa yendo de simples a más complejos. Esto crea una mejor experiencia global para los estudiantes, al tiempo que conecta mejor el material del libro con la tarea que realizan los estudiantes.
  - Se ha logrado una correlación precisa entre cada ejercicio impar y par. Los impares pueden usarse como ejemplos y se proporcionan las soluciones; mientras que los pares pueden asignarse como tarea para la casa.
  - Se revisaron los ejercicios de Ahora intenta, con particular enfoque en la combinación de impar-par.
- Enfoque renovado en la sección Comprende el Álgebra a lo largo del libro. Muchos recuadros de Comprende el Álgebra son nuevos o se revisaron para mayor claridad. El nuevo diseño de los recuadros Comprende el Álgebra, los hará destacar más.

Características del texto

Precisión

La precisión en un texto de matemáticas es esencial. Para asegurar la precisión en este libro, profesores de matemáticas de todo el país leyeron cuidadosamente las páginas en busca de errores tipográficos y revisaron todas las respuestas.

Formando conexiones

Muchos de los estudiantes no comprenden por completo nuevos conceptos la primera vez que se les presentan. En este texto motivamos a los estudiantes a realizar conexiones. Esto es: se introduce un concepto, después más tarde en el texto se le reintroduce brevemente y se construye en torno a él. Con frecuencia, un concepto importante se usa en muchas secciones del texto. Los conceptos importantes también se refuerzan a lo largo del texto en los Ejercicios de repaso acumulativo y en los Exámenes de repaso acumulativo.

Aplicación al inicio de capítulo

Cada capítulo comienza con una aplicación de la vida real relacionada con el material abordado en el capítulo. Para cuando los estudiantes concluyan el capítulo, deberán tener el conocimiento para trabajar el problema.

Objetivo del capítulo

Esta característica, en la página de inicio del capítulo, ofrece a los estudiantes una presentación preliminar del capítulo y también indica dónde se usará este material nuevamente en otros capítulos del libro. Este material ayuda a los estudiantes a ver las conexiones entre varios temas del libro y la conexión con situaciones del mundo real.

Objetivos de sección referenciados

Cada sección abre con una lista de habilidades que el estudiante debe aprender en dicha sección. Los objetivos son entonces referenciados con las partes adecuadas de las secciones con números verdes, como por ejemplo 1.

Resolución de problemas

En la sección 1.2 se estudia el método de cinco pasos de Pólya para resolver problemas. A lo largo del libro se enfatiza la resolución de problemas y el método de Pólya para resolver problemas.

Aplicaciones prácticas

A lo largo del texto se destacan aplicaciones prácticas de álgebra. Los estudiantes necesitan aprender cómo traducir problemas aplicados a símbolos algebraicos. El enfoque de resolución de problemas utilizado a lo largo de este texto, proporciona a los estudiantes mucha práctica para plantear y resolver problemas aplicados. Los estudiantes se sienten motivados con el uso de aplicaciones prácticas.

Ejemplos resueltos de manera detallada

Se han trabajado, paso a paso, de forma detallada, un cúmulo de ejemplos. Los pasos importantes están resaltados

en color, y no se omiten pasos sino hasta después de que el estudiante haya visto un número suficiente de ejemplos similares.

Ahora resuelve el ejercicio

En cada sección, después de cada ejemplo, se pide a los estudiantes trabajar un ejercicio análogo al ejemplo dado en el texto. Los ejercicios planteados en "Ahora resuelve el ejercicio" convierten al estudiante en aprendiz *activo*, en vez de pasivo, y refuerzan los conceptos conforme los estudiantes trabajan los ejercicios. A través de estos ejercicios, los estudiantes tienen la oportunidad de aplicar de inmediato lo que aprenden. Después de cada ejemplo, los ejercicios de Ahora resuelve el ejercicio, se encuentran señalados con un fondo verde como **Ahora resuelve el ejercicio 27**. También se encuentran señalados, con texto en color verde, en las series de ejercicios, como 27.

Sección de habilidades de estudio

Los estudiantes que toman este curso pueden beneficiarse de un repaso de habilidades básicas de estudio. Dichas habilidades de estudio son esenciales para tener éxito en matemáticas. La sección 1.1, la primera sección del texto, discute dichas habilidades de estudio. Esta sección será de gran utilidad para sus estudiantes y podrá ayudarlos a lograr el éxito en matemáticas.

Comprende el Álgebra

Los recuadros **Comprende el Álgebra** aparecen en el margen, a lo largo del texto. Colocados en puntos clave, los recuadros Comprende el Álgebra ayuda a los estudiantes a enfocarse en los conceptos y hechos importantes que necesitan dominar.

Sugerencias útiles

Los recuadros **Sugerencias útiles** ofrecen sugerencias útiles para la resolución de problemas y otros temas variados. Destacan de manera especial, para asegurar que los estudiantes los lean.

Cómo evitar errores comunes

Se ilustran los errores comunes de los estudiantes. Se ofrecen explicaciones de por qué los procedimientos mostrados son incorrectos. También se presentan explicaciones de cómo los estudiantes pueden evitar tales errores.

Series de ejercicios

Las series de ejercicios se dividen en tres categorías principales: Ejercicios de calentamiento, Practica tus habilidades y Resolución de problemas. Muchas series de ejercicios también contienen Ejercicios conceptuales y de redacción, Problemas de desafío o Actividades grupales. Cada serie de ejercicios está clasificada con base en su dificultad, y los ejercicios están organizados por pares. Los primeros problemas ayudan a desarrollar la confianza de los estudiantes, y posteriormente, de manera gradual, se va introduciendo a los estudiantes a problemas más difíciles. Cada sección contiene una cantidad y variedad suficiente de ejemplos para que los estudiantes puedan resolver hasta los ejercicios más difíciles. El número de ejercicios en cada sección es más que amplio para las tareas y para la práctica de los estudiantes.

Ejercicios de calentamiento

Las series de ejercicios comienzan con Ejercicios de calentamiento. Estos ejercicios, en donde hay que llenar los espacios en blanco, se enfatizan en el vocabulario. Sirven como una buena preparación para los ejercicios que se dejan de tarea en casa o para pruebas de cinco minutos.

Ejercicios de Practica tus habilidades

Los ejercicios de Practica tus habilidades refuerzan los conceptos y procedimientos abordados en la sección. Estos ejercicios proporcionan a los estudiantes la práctica necesaria para trabajar problemas similares a los ejemplos dados en el texto. En muchas secciones los ejercicios de Practica tus habilidades son la parte principal y más importante de las series de ejercicios.

Ejercicios de Resolución de problemas

Estos ejercicios ayudan a los estudiantes a convertirse en mejores pensadores y solucionadores de problemas. Muchos de estos ejercicios involucran aplicaciones del Álgebra a la vida real. Es importante que los estudiantes puedan aplicar lo que aprenden a situaciones de la vida real. Muchos ejercicios de Resolución de problemas ayudan con esto.

Ejercicios conceptuales y de redacción

La mayoría de las series de ejercicios incluyen ejercicios en donde se requiere que los estudiantes escriban las respuestas empleando palabras. Estos ejercicios mejoran el conocimiento y la comprensión del material por parte de los estudiantes. Muchos de estos ejercicios involucran conceptualización y resolución de problemas, y ayudan a desarrollar un mejor razonamiento y habilidades de pensamiento crítico.

Problemas de desafío

Estos ejercicios, que forman parte de numerosas series de ejercicios, ofrecen diversos problemas. Muchos fueron escritos para estimular el razonamiento del estudiante. Algunos proporcionan aplicaciones adicionales del álgebra o presentan material de secciones futuras del libro, de modo que los estudiantes puedan ver y aprender el material por su cuenta, antes de ser abordado en clase. Otros son más desafiantes que los de la serie regular de ejercicios.

Actividades grupales

Muchas series de ejercicios contienen ejercicios de Actividad grupal que conducen a interesantes discusiones en grupo. Muchos estudiantes aprenden bien en una atmósfera de aprendizaje colaborativo, y estos ejercicios harán que los estudiantes hablen de matemáticas entre ellos.

Ejercicios de repaso acumulativo

Todas las series de ejercicios (comenzando con la sección 1.3) contienen preguntas de secciones previas del capítulo y de capítulos anteriores. Estos Ejercicios de repaso acumulativo reforzarán los temas que se abordaron anteriormente y ayudarán a los estudiantes a retener el material previo, mientras que aprenden el material nuevo. Para beneficio de los estudiantes, los Ejercicios de repaso acumulativo están referenciados a la sección donde se abordó el material, usando corchetes, como [3.4].

Exámenes de mitad de capítulo

En medio de cada capítulo hay un Examen de mitad de capítulo. Los estudiantes deben realizar cada Examen de mitad de capítulo para asegurarse de que entienden el material presentado en el capítulo hasta ese momento. En las respuestas del estudiante, se usan corchetes como [2.3] para indicar la sección donde se presentó por primera vez el material.

Resumen del capítulo

Al final de cada capítulo hay un resumen exhaustivo del capítulo que incluye datos importantes del capítulo y ejemplos que ilustran dichos datos.

Ejercicios de repaso del capítulo

Al final de cada capítulo hay ejercicios de repaso que abarcan todos los tipos de ejercicios presentados en el capítulo. Los ejercicios de repaso se encuentran referenciados, usando números a color y corchetes, como [1.5], a las secciones donde el material se presentó por primera vez.

Exámenes de práctica del capítulo

Los exhaustivos exámenes de práctica de final del capítulo, permiten a los estudiantes ver qué tan bien están preparados para el examen real en clase. La sección donde el material se presentó por primera vez, se indica en corchetes en las respuestas para el estudiante.

Exámenes de repaso acumulativo

Estas evaluaciones, que aparecen al final de cada capítulo a partir del primero, ponen a prueba el conocimiento de los estudiantes sobre el material visto desde el comienzo del libro hasta el final de dicho capítulo. Los estudiantes pueden usar estas evaluaciones para repasar, así como para prepararse para el examen final. Estos exámenes, como los Ejercicios de repaso acumulativo, sirven para reforzar los temas estudiados anteriormente. En la sección de respuestas, después de cada respuesta, se hace referencia a la sección donde se abordó dicho material, entre corchetes.

Respuestas

Se proporcionan las *respuestas de los ejercicios impares* para las series de ejercicios. Se proporcionan *todas las respuestas* para los Ejercicios de repaso acumulativo, los Exámenes de mitad de capítulo, los Ejercicios de repaso del capítulo, los Exámenes para practicar el capítulo y los Exámenes de repaso acumulativo. No se proporcionan a los estudiantes las respuestas de los ejercicios de Actividad, porque queremos que los estudiantes lleguen a acuerdos dentro de sus grupos sobre de las respuestas a dichos ejercicios.

Requisitos previos

El requisito previo para este curso es un conocimiento operativo del álgebra elemental. Aunque se repasan algunos temas de álgebra elemental brevemente, los estudiantes deben tener una comprensión básica del álgebra elemental antes de tomar el curso.

Modos de instrucción

El formato y legibilidad de este libro, y sus muchos recursos y complementos, lo hacen adecuado para distintos modelos de enseñanza. El refuerzo constante de los conceptos resultará en una mayor comprensión y retención del material por parte de los estudiantes.

Las características del texto y sus complementos lo hacen adecuado para adaptarse a diversos modelos pedagógicos, incluidos:

- Cursos presenciales
- Cursos híbridos o mixtos
- Cursos especiales
- Educación a distancia
- Cursos intensivos
- Aprendizaje autodidáctico
- Aula inversa
- Trabajo cooperativo o grupal

Agradecimientos

Agradecemos a nuestras esposas, Kathy Angel y Kris Runde, por su apoyo y aliento a lo largo del proyecto. Estamos agradecidos por su maravilloso apoyo y comprensión mientras trabajábamos en este libro.

También agradecemos a nuestros hijos: Robert y Steven Angel, y Alex, Nick y Max Runde. Ellos también nos dieron su apoyo y aliento, y fueron muy comprensivos cuando no podíamos pasar tanto tiempo con ellos como quisiéramos debido a los plazos del libro. Un agradecimiento especial a mi nuera Kathy; suegra, Patricia; y suegro, Scott. Sin el apoyo y la comprensión de nuestras familias, este libro no sería una realidad.

Queremos agradecer a Brianna Kurtz, Rhea Meyerholtz, Laurie Semarne y Hal Whipple, por revisar con precisión las páginas y comprobar todas las respuestas.

Muchas personas en Pearson merecen agradecimiento, incluidos todos los mencionados en la página legal. En particular, agradecemos a Michael Hirsch, editor en jefe; Rachel Reeve, productora de contenido; Shannon Bushee, asistente editorial; Shana Siegmund, productora; Eric Gregg, desarrollador de contenido en jefe; Alicia Frankel, gerente de mercadotecnia de producto; y Brooke Imbornone, asistente de mercadotecnia de producto.

Queremos agradecer a los siguientes revisores y participantes en grupos de enfoque de esta novena edición (marcados con asterisco) y ediciones recientes, por sus profundos comentarios y sugerencias.

Laura Adkins, *Missouri Southern State College, MO*
Arthur Altshiller, *Los Angeles Valley College, CA*
Jacob Amidon, *Cayuga Community College, NY*
Bhagirathi Anand, *Long Beach City College, CA*
Sheila Anderson, *Housatonic Community College, CT*
Peter Arvanites, *State University of New York-Rockland Community College, NY*
Jannette Avery, *Monroe Community College, NY*
Mary Lou Baker, *Columbia State Community College, TN*
Linda Barton, *Ball State University, IN*
Jon Becker, *Indiana University, IN*
Mark Bellavia, *Monroe Community College, NY*
Paul Boisvert, *Oakton Community College, IL*
Beverly Broomell, *Suffolk County Community College, NY*
Lavon Burton, *Abilene Christian University, TX*
Marc Campbell, *Daytona State College, FL*
Mitzi Chaffer, *Central Michigan University, MI*
Terry Cheng, *Irvine Valley College, CA*
Ted Corley, *Arizona State University and Glendale Community College, AZ*
Charles Curtis, *Missouri Southern State College, MO*
Joseph de Guzman, *Riverside City College (Norco), CA*
Marla Dresch Butler, *Gavilan Community College, CA*
Gary Egan, *Monroe Community College, NY*
Karen Egedy, *Baton Rogue Community College, LA*
Mark W. Ernsthausen, *Monroe Community College, NY*
Daniel Fahringer, *Harrisburg Area Community Collge, PA*
Elizabeth Farber, *Bucks County Community College, PA*
Warrene Ferry, *Jones County Junior College, MS*
Christine Fogal, *Monroe Community College, NY*
Gary Glaze, *Spokane Falls Community College, WA*
James Griffiths, *San Jacinto College, TX*
Kathy Gross, *Cayuga Community College, NY*
Abdollah Hajikandi, *State University of New York-Buffalo, NY*
Sharon Hansa, *Longview Community Collge, MO*
Cynthia Harrison, *Baton Rouge Community College, LA*
Janet Harding, *Washington and Jefferson College, PA*
Mary Beth Headlee, *State College of Florida, FL*
Kelly Jahns, *Spokane Community College, WA*
Cheryl Kane, *University of Nebraska-Lincoln, NE*
Judy Kasabian, *El Camino College, CA*
Dan Kernler, *Elgin Community College, IL*
Maryanne Kirkpatrick, *Laramie County Community College, WY*
Marcia Kleinz, *Atlantic Cape Community College, NJ*
Gayle L. Krzemian, *Pike's Peak Community College, CO*
Shannon Lavey, *Cayuga Community College, NY*
Kimberley A. Martello, *Monroe Community College, NY*
Terri Martin, *Elgin Community College, IL*
*Mehdi Mirfattah, *Long Beach City College, CA*
Mark Molino, *Erie Community College, NY*
Shywanda Moore, *Meridian Community College, MS*
Sean Moroney, *Wayland Baptist University, TX*
Catherine Moushon, *Elgin Community College, IL*
Kris Mudunuri, *Long Beach City College, CA*
Kathy Nickell, *College of DuPage, IL*
Jean Olsen, *Pikes Peak Community College, CO*
Shelle Patterson, *Moberly Area Community College, MO*
Fred Peskoff, *Borough of Manhattan Community College, NY*
Patricia Pifko, *Housatonic Community College, CT*
David Price, *Tarrant County College, TX*
Elise Price, *Tarrant County College, TX*
Adrian Ranic, *Erie Community College, NY*
Dennis Reissig, *Suffolk County Community College, NY*
Linda Retterath, *Mission College, CA*
Dale Rohm, *University of Wisconsin-Stevens Point, WI*
Troy Rux, *Spokane Falls Community College, WA*
Hassan Saffari, *Prestonburg Community College, KY*
Dale Siegel, *Kingsborough Community College, NY*
Rick Silvey, *St. Mary College, KS*
Julia Simms, *Southern Illinois University-Edwardsville, IL*
Linda Smoke, *Central Michigan University, MI*
Jed Soifer, *Atlantic Cape Community College, NJ*
Richard C. Stewart, *Monroe Community College, NY*
Shirley Stewart, *Pike's Peak Community College, CO*
Elizabeth Suco, *Miami-Dade College, FL*
Harold Tanner, *Orangeburg-Calhoun Technological College, SC*
Dale Thielker, *Ranken Technological College, MO*
Ken Wagman, *Gavilan Community College, CA*
James Wan, *Long Beach City College, CA*
Patrick Ward, *Illinois Central College, IL*
Robert E. White, *Allan Hancock College, CA*
Cindy Wilson, *Henderson State University, AZ*
Christopher Yarish, *Harrisburg Area Community College, PA*

Para el estudiante

Álgebra es un curso que requiere participación activa. Debes leer el texto y poner atención en clase, y, sobre todo, debes trabajar los ejercicios. Mientras más ejercicios trabajes, mejor.

El texto se escribió contigo en mente. Se usan oraciones breves y claras, y se proporcionan muchos ejemplos para ilustrar puntos específicos. El texto resalta aplicaciones útiles del álgebra. Con suerte, mientras avances a través del curso, llegarás a darte cuenta de que álgebra no es sólo otro curso de matemáticas que debes tomar, sino que es un curso que ofrece un cúmulo de información y aplicaciones útiles.

Los recuadros marcados como **Comprende el Álgebra** deben estudiarse cuidadosamente. En ellos se enfatizan conceptos y hechos que debes dominar para triunfar. Las **Sugerencias útiles** deben ser estudiadas cuidadosamente, debido a que en ellas se destaca la información importante. Asegúrate de estudiar los recuadros de **Cómo evitar errores comunes**. Estos recuadros señalan errores comunes y proporcionan los procedimientos correctos para resolver dichos problemas.

Después de cada ejemplo, verás una referencia de Ahora resuelve el ejercicio, como **Ahora resuelve el ejercicio 27**. El ejercicio indicado es muy similar al ejemplo proporcionado en el libro. Quizás quieras intentar el ejercicio indicado después de leer el ejemplo, para asegurarte de que realmente entendiste el ejemplo. En la serie de ejercicios, los ejercicios de Ahora resuelve el ejercicio, se encuentran destacados en color verde, como 27.

Tal vez quieras formar un grupo de estudio con otros estudiantes de tu clase. Muchos estudiantes encuentran que, trabajar en grupos pequeños, proporciona una excelente manera de aprender el material. Al discutir y explicar los conceptos y ejercicios entre ustedes, refuerzas tu propia comprensión. Una vez que se determinen los lineamientos y procedimientos de tu grupo, asegúrate de seguirlos.

Una de las primeras cosas que debes hacer es leer la sección 1.1, Habilidades de estudio para tener éxito en matemáticas. Lee esta sección, lenta y cuidadosamente, y pon particular atención a las sugerencias e información dadas. Ocasionalmente, vuelve a consultar esta sección. Esta podría ser la sección más importante del libro. Presta especial atención en el material para hacer tu tarea y en asistir a clase.

Al final de todas las series de ejercicios (comenzando con la sección 1.3) hay **Ejercicios de repaso acumulativo**. Trabaja estos problemas de manera regular, incluso si no se asignan como tarea. Estos problemas son tomados de secciones y capítulos anteriores del texto, y refrescarán tu memoria y reforzarán dichos temas. Si tienes algún problema al momento de trabajar estos ejercicios, lee la sección adecuada del texto o estudia tus notas que correspondan a dicho material. La sección del texto, donde se presentó el Ejercicio de repaso acumulativo, se señala entre corchetes, [ ], a la izquierda del ejercicio. Después de revisar el material, si todavía tienes algún problema, concierta una cita para ver a tu profesor. Trabajar los Ejercicios de repaso acumulativo, a lo largo del semestre, también te ayudará a prepararte para resolver tu examen final.

Casi a la mitad de cada capítulo, hay un **Examen de mitad de capítulo**. Resuelve cada Examen de mitad de capítulo para asegurarte de que entiendes el material hasta el momento. La sección donde se presentó el material por primera vez, se indica entre corchetes después de la respuesta en la sección de respuestas del libro.

Al final de cada capítulo hay un **Resumen del capítulo**, **Ejercicios de repaso del capítulo**, un **Examen de práctica del capítulo** y un **Examen de repaso acumulativo**. Antes de cada examen, debes revisar este material cuidadosamente y resolver el Examen de práctica del capítulo. Si te va bien en el Examen de práctica del capítulo, te debería ir bien en el examen de la clase. Las preguntas en los Ejercicios de repaso están marcados para indicar la sección en la cual se presentó por primera vez dicho material. Si tienes algún problema con una pregunta del Ejercicio de repaso, vuelve a leer la sección indicada. Tal vez también quieras resolver el Examen de repaso acumulativo que aparece al final de cada capítulo (a partir del capítulo 2).

Al final del texto hay una **sección de respuestas** que contiene las respuestas de los ejercicios *con número impar*, incluyendo los Problemas de desafío. Se proporcionan las respuestas a *todos* los Ejercicios de repaso acumulativo, Exámenes de mitad de capítulo, Ejercicios de repaso del capítulo, Exámenes de práctica del capítulo, y Exámenes de repaso acumulativo. Las respuestas a los ejercicios de Actividad grupal no se proporcionan, porque queremos que los estudiantes logren acuerdos con sus compañeros sobre las respuestas de dichos ejercicios. Las respuestas se deben usar sólo para comprobar tu trabajo. Para los Exámenes de mitad de capítulo, Exámenes de práctica del capítulo y los Exámenes de repaso acumulativo, después de cada respuesta se proporciona el número de sección donde se abordó dicho tipo de ejercicio.

Hemos intentado hacer este texto tan claro y libre de errores como fuera posible. Sin embargo, ningún texto es perfecto. Si encuentras un error en el texto, o un ejemplo o sección, que consideres que puede mejorarse, apreciaremos enormemente escuchar tus sugerencias. Puedes enviar tus comentarios a soporte@pearson.com, con asunto dirigido a Soporte Pearson.

Allen R. Angel
Dennis C. Runde

1 Conceptos básicos

1.1 Habilidades de estudio para tener éxito en matemáticas y en el uso de una calculadora

1.2 Conjuntos y otros conceptos básicos

1.3 Propiedades de y operaciones con números reales

1.4 Orden de las operaciones

Examen de mitad de capítulo: secciones 1.1-1.4

1.5 Exponentes

1.6 Notación científica



Alguna vez te has preguntado, "¿cuándo usaré el álgebra?" En este capítulo, y a lo largo del libro, usaremos el álgebra para estudiar muchas aplicaciones de la vida cotidiana. Las aplicaciones incluyen el cálculo de la distancia de frenado de un vehículo en el Ejercicio 10 de la página 35; el cálculo de la ganancia anual de un negocio de limpieza profunda de botes en el Ejercicio 124 de la página 39; y el cálculo del tiempo que le tomaría a una nave espacial para llegar a otra estrella en el Ejercicio 82 de la página 56. A lo largo de este libro, discutiremos muchas formas interesantes en las que las matemáticas se usan todos los días.

Objetivos del capítulo

En este capítulo se revisan los conceptos del álgebra, los cuales son centrales para tu éxito en este curso. A lo largo de este capítulo, y en todo el libro, se usan ejemplos de la vida real para mostrar cómo las matemáticas son relevantes en tu vida diaria. En la sección 1.1 se presentan algunos consejos para ayudarte a establecer hábitos y habilidades de estudio efectivos. Otros temas que se estudian en este capítulo son: conjuntos, números reales y exponentes.

1.1 Habilidades de estudio para tener éxito en matemáticas y en el uso de una calculadora

1. **Tener una actitud positiva**
2. **Prepárense y asistan a clase**
3. **Prepárense y presenten exámenes**
4. **Buscar ayuda**
5. **Aprender a usar una calculadora**

Necesitas adquirir ciertas habilidades de estudio que te ayudarán a completar este curso de forma exitosa. Estas habilidades de estudio también te ayudarán a triunfar en cualquier otro curso de matemáticas que quieras tomar.

Es importante que te des cuenta de que este curso es la base para cursos de matemáticas más avanzados. Si tienes una comprensión profunda del álgebra, descubrirás que es más sencillo tener éxito en cursos posteriores de matemáticas.

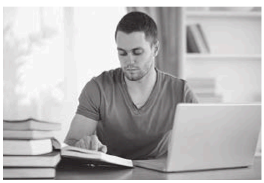
1 Tener una actitud positiva

Muchos estudiantes pueden sentirse preocupados por aprender matemáticas o, en algunos casos, pueden experimentar lo que suele llamarse *ansiedad matemática*. Dichos sentimientos son bastante comunes entre los estudiantes. Si te sientes de esta manera, tienes que saber que no estás solo. Uno de los objetivos de este libro es hacer a las matemáticas más entendibles y menos intimidantes. Para ayudar a los estudiantes a aprender matemáticas, alentamos a los estudiantes a mantener una mente abierta y a intentar desarrollar una actitud positiva hacia el aprendizaje de las matemáticas.

Si te basas en tus experiencias pasadas en matemáticas, quizás sientas que esto será difícil. Sin embargo, las matemáticas son algo que necesitas trabajar. Muchos de ustedes, que ahora están tomando este curso, son más maduros ahora de lo que eran cuando tomaron cursos de matemáticas previos. Tu madurez y deseo de aprender son extremadamente importantes y pueden hacer una tremenda diferencia en tu habilidad para triunfar en matemáticas. Nosotros creemos que puedes tener éxito en este curso, pero tú también necesitas creerlo.

2 Prepárense y asistan a clase

Revisión previa del material Antes de la clase, debes tomar algunos minutos para revisar cualquier material nuevo del libro de texto. Todavía no tienes que entender todo lo que leas. Sólo familiarízate con las definiciones y los conceptos que serán tratados. Esta rápida revisión preliminar te ayudará a entender lo que tu profesor explique durante la clase. Después de que el material se explique en clase, lee las secciones correspondientes del texto, lenta y cuidadosamente, palabra por palabra.



Lee el texto Un texto de matemáticas no es una novela. Los libros de texto de matemáticas deben leerse de manera lenta y cuidadosa. Si no entiendes lo que lees, vuelve a leer el material. Cuando encuentres un concepto o definición nuevos, quizás quieras subrayarlo o resaltarlo de modo que destaque. De esta forma, cuando lo busques más adelante, será más fácil encontrarlo. Cuando llegues a un ejemplo resuelto, lee y sigue el ejemplo cuidadosamente. No sólo lo leas superficialmente. Intenta resolver el ejemplo tú mismo en otra hoja de papel. También trabaja en los ejercicios **Ahora resuelve el ejercicio** que aparecen después de cada ejemplo. Estos ejercicios están diseñados de modo que tengas la oportunidad de aplicar de inmediato las nuevas ideas presentadas. Toma notas de todo lo que no entiendas para preguntarle a tu profesor.

Haz la tarea *Dos compromisos muy importantes que debes hacer para tener éxito en este curso, son asistir a clase y hacer tu tarea con regularidad.* Las tareas debes trabajarlas concienzuda y completamente. Las matemáticas no se pueden aprender por mera observación. Necesitas practicar lo que hayas escuchado en clase. Al hacer la tarea, verdaderamente aprendes el tema.

No olvides verificar las respuestas de tus tareas. Las respuestas de los ejercicios con número impar están en la parte final de este libro. Además, se proporcionan las respuestas de todos los Ejercicios de repaso acumulativo, Exámenes de mitad de capítulo, Ejercicios

de repaso del capítulo, Exámenes para practicar el capítulo y Exámenes de repaso acumulativo. Para los Exámenes de mitad de capítulo, Exámenes para practicar el capítulo y Exámenes de repaso acumulativo, la sección donde el material se presentó por primera vez se proporciona entre corchetes después de cada respuesta. Las respuestas de los Ejercicios de Actividad grupal no se proporcionan, porque queremos que llegues a las respuestas junto con el grupo.

Si tienes dificultad con alguno de los ejercicios, márcalo y no temas preguntar por ellos en clase. No debes sentirte cómodo sino hasta que entiendas todos los conceptos necesarios para trabajar cualquier problema asignado.

Cuando hagas tu tarea, asegúrate de escribirla limpia y cuidadosamente. Pon particular atención en copiar correctamente signos y exponentes. Haz tu tarea paso a paso. De esta forma puedes consultarla de nuevo más adelante y todavía entender lo que escribiste.



Asiste y participa en clase Debes asistir a todas las clases. Por lo general, mientras más ausencias tengas, menor será tu calificación. Cada vez que faltas a clase, pierdes información importante. Si debes faltar a clase, contacta a tu profesor por anticipado y consigue la lectura que abordarán y la tarea.

Mientras estés en clase, pon atención a lo que dice tu profesor. Si no entiendes algo, pide a tu profesor que repita o explique el material. Si no preguntas, tu profesor no sabrá que tienes problemas para comprender el tema.

En clase, toma notas detalladas. Escribe los números y letras de manera clara, de modo que puedas leerlos más adelante. No es necesario escribir cada palabra que diga tu profesor. Copia los puntos principales y los ejemplos que no aparezcan en el texto. No debes tomar notas de manera tan frenética puedes perder la pista de lo que tu profesor está diciendo.

Estudia Estudia en una atmósfera adecuada. En una área donde no te distraigas constantemente, de modo que tu atención pueda estar enfocada a lo que lees. El área donde estudies debe estar bien ventilada e iluminada. Debes tener suficiente espacio de escritorio para colocar todos tus materiales. Tu silla debe ser cómoda. Debes intentar minimizar las distracciones mientras estudies. No debes estudiar durante horas interminables. Pequeños lapsos de estudio son una buena idea.

Cuando estudies, no sólo debes entender cómo trabajar un problema, también debes saber por qué sigues los pasos específicos que realizas para resolver el problema. Si no comprendes por qué se sigue un proceso específico, no podrás resolver problemas similares.

Administra el tiempo Es recomendable que los estudiantes empleen al menos dos horas para estudiar y hacer la tarea, por cada hora de clase. Algunos estudiantes requieren más tiempo que otros. Encontrar el tiempo necesario para estudiar no siempre es sencillo. Las siguientes son algunas sugerencias que pueden serte útiles.

1. Planea por anticipado. Determina cuándo tendrás tiempo para estudiar y hacer tu tarea. No programes otras actividades para estos periodos de tiempo. Intenta espaciar estos periodos equitativamente a lo largo de la semana.
2. Organízate de modo que no tengas que perder tiempo buscando tus libros, pluma, calculadora o notas.
3. Usa una calculadora para realizar cálculos tediosos.
4. Cuando pares de estudiar, marca claramente en el texto dónde te detuviste.
5. Trata de no tomar responsabilidades adicionales. Debes establecer tus prioridades. Si tu educación tiene alta prioridad, como debe ser, quizás debas reducir el tiempo que empleas en otras actividades.
6. Si el tiempo es un problema, no te excedas inscribiéndote en demasiados cursos. Considera tomar menos créditos. Si no tienes suficiente tiempo para estudiar, tu comprensión y tus calificaciones en todos los cursos podrían verse afectadas.

3 Prepárense y presenten los exámenes

Estudia para un examen Si estudias un poco cada día, no necesitarás quemarte las pestañas la noche previa al examen. Si esperas hasta el último minuto, no tendrás tiempo para buscar la ayuda que pudieras necesitar. Para repasar para un examen:

1. Lee tus notas de clase.
2. Revisa tus tareas.
3. Estudia las fórmulas, definiciones y procedimientos que necesitarás para el examen.
4. Lee cuidadosamente los recuadros de Cómo evitar errores comunes y los de Sugerencias útiles.
5. Lee el resumen al final de cada capítulo.
6. Resuelve los ejercicios de repaso al final de cada capítulo. Si tienes dificultades, vuelve a estudiar dichas secciones. Si todavía tienes problemas, busca ayuda.
7. Resuelve los Exámenes de mitad de capítulo y los Exámenes de práctica del capítulo.
8. Vuelve a trabajar las pruebas anteriores si el material cubierto en esas pruebas se incluirá en el examen.
9. Resuelve el Examen de repaso acumulativo si el material de los capítulos anteriores se incluirá en la evaluación.

Para tomar un examen Asegúrate de dormir bien el día anterior al examen. Si estudiaste de forma adecuada, no tendrás necesidad de permanecer despierto hasta altas horas de la noche para prepararte para el examen. Llega temprano al lugar del examen para que tengas algunos minutos para relajarte antes del examen. Si debes correr para llegar al examen, comenzarás nervioso y ansioso. Después de recibir el examen, haz lo siguiente:

1. Escribe cuidadosamente cualquier fórmula o idea que quieras recordar.
2. Revisa rápidamente el examen para tener una idea de su longitud y para asegurarte de que no le faltan páginas. Deberás administrar tu tiempo para asegurarte de que completes todo el examen. Prepárate para pasar más tiempo en problemas que valen más puntos.
3. Lee cuidadosamente las indicaciones del examen.
4. Lee cuidadosamente cada problema. Responde por completo cada pregunta y asegúrate de responder la pregunta específica que se plantea.
5. Comienza con el número 1, resuelve cada pregunta en orden. Si te topas con alguna pregunta que no estás seguro de su respuesta, no pases mucho tiempo en ella. Sigue trabajando con las preguntas que entiendas. Después de completar las otras preguntas, regresa y termina aquellas preguntas en las que no estabas seguro. No pases demasiado tiempo en una sola pregunta.
6. Intenta resolver cada problema. Quizás puedas obtener al menos un crédito parcial.
7. Trabaja cuidadosamente y escribe con claridad, de modo que tu profesor pueda leer tu trabajo. Es fácil cometer errores cuando no escribes con claridad.
8. Revisa tu trabajo y tus respuestas si tienes tiempo.
9. No te preocupes si otros terminan el examen antes que tú. No te preocupes si eres el último en terminar. Usa todo tu tiempo adicional para revisar tu trabajo.

4 Buscar ayuda

Usa los complementos Este libro contiene varios complementos. Al inicio del semestre, averigua con tu profesor cuáles complementos están disponibles y cuáles pueden serte benéficos. Los complementos de lectura no deben sustituir la lectura del libro de texto. Mas bien, los complementos deben mejorar tu comprensión del material.

Busca ayuda Una cosa en la que hacemos énfasis con nuestros propios estudiantes es: *¡obtén ayuda tan pronto como la necesites!* ¡No esperes! En matemáticas, el material de un

día, por lo general, se basa en el material del día previo. De modo que si no entiendes el material hoy, quizás no puedas entender el material mañana.

¿Dónde debes buscar ayuda? Con frecuencia hay algunos lugares donde puedes obtener ayuda dentro de la escuela. Trata de hacer amigos en la clase con quienes puedas estudiar. Con frecuencia pueden ayudarse mutuamente. Tal vez quieras formar un grupo de estudio con otros estudiantes de tu clase. Discutir los conceptos y la tarea con tus compañeros, reforzará tu comprensión del material.

No debes dudar en visitar a tu profesor cuando tengas problemas con el material. Asegúrate de leer el material asignado e intenta hacer la tarea antes de reunirte con tu profesor. Llega preparado con preguntas específicas para discutir.

Usualmente se encuentran disponibles otras fuentes de ayuda. Muchas escuelas tienen clases de nivelación para matemáticas donde están disponibles tutores para ayudar a los estudiantes. Pregunta a tu profesor, al principio del semestre, si hay tutores disponibles e investiga dónde están ubicados. Después, recurre a dichos tutores cuando sea necesario.



5 Aprender a usar una calculadora

Muchos profesores piden a sus estudiantes comprar y usar una calculadora en clase. Debes investigar, tan pronto como sea posible, qué calculadora, si hay alguna en específico, es la que tu profesor espera que uses. Si planeas tomar cursos adicionales de matemáticas, debes investigar qué calculadora se requerirá en dichos cursos y considera comprarla para usar en este curso, si es que tu profesor lo permite. Muchos profesores solicitan una calculadora científica y muchos otros requieren una calculadora graficadora.

En este libro se ofrece información acerca de ambos tipos de calculadoras. Siempre lee y guarda el manual de usuario de cualquier calculadora que compres. En los recuadros de Usa tu calculadora graficadora, se proporcionarán secuencias de teclas para las calculadoras graficadoras TI-83 Plus y TI-84 Plus. Si usas una calculadora graficadora diferente, quizás necesites leer el manual de la calculadora o debas consultar en línea para determinar las secuencias equivalentes de teclas.

1.1 SERIE DE EJERCICIOS

¿Conoces toda la información siguiente? Si no, pregúntasela a tu profesor tan pronto como sea posible.

1. ¿Cuál es el nombre de tu profesor?
2. ¿Cuál es el horario de oficina de tu profesor?
3. ¿Dónde se ubica la oficina de tu profesor?
4. ¿Cuál es la mejor forma de consultar a tu profesor?
5. ¿Dónde puedes obtener ayuda si tu profesor no está disponible?
6. ¿Qué complementos están disponibles para ayudarte a aprender?
7. ¿Tu profesor recomienda o requiere alguna calculadora en específico? Si es así, ¿cuál?
8. ¿Cuándo puedes usar una calculadora? ¿Se puede usar en clase, en las tareas, en los exámenes?
9. ¿Cuál es la política de asistencia de tu profesor?
10. ¿Por qué es importante que asistas a todas las clases posibles?
11. ¿Conoces el nombre y número telefónico de algún amigo de la clase?
12. Por cada hora de clase, ¿cuántas horas fuera de clase se recomiendan para realizar la tarea y estudiar?
13. Menciona qué debes hacer para estar adecuadamente preparado para cada clase.
14. Explica cómo debe leerse un libro de matemáticas.
15. Escribe un resumen de los pasos que debes seguir cuando presentas un examen.
16. Tener una actitud positiva es muy importante para el éxito en este curso. ¿Comienzas este curso con una actitud positiva? ¡Es importante que lo hagas!
17. Necesitas hacer un compromiso para pasar el tiempo necesario para aprender el material, para hacer la tarea y para asistir a clase regularmente. Explica por qué crees que este compromiso es necesario para tener éxito en este curso.

18. ¿Cuáles son tus razones para tomar este curso?

19. ¿Cuáles son tus objetivos para este curso?

20. ¿Has pensado en estudiar con algún amigo o con un grupo de amigos? ¿Puedes ver alguna ventaja de hacerlo? ¿Puedes ver alguna desventaja de hacerlo?

1.2 Conjuntos y otros conceptos básicos

1. **Identificación de conjuntos**
2. **Identificación y uso de desigualdades**
3. **Uso de la notación constructiva de conjuntos**
4. **Determinación de la unión e intersección de conjuntos**
5. **Identificación de conjuntos importantes de números**

Variable

Cuando una letra es utilizada para representar varios números, se le conoce como **variable**.

Por ejemplo, si $t =$ el tiempo, en horas, que un automóvil viaja, entonces t es una variable, pues el tiempo cambia de forma constante conforme el automóvil viaja. Con frecuencia se usan las letras x, y, z y t para representar las variables. Sin embargo, pueden usarse otras letras.

Si una letra representa un valor en particular, se le conoce como **constante**. Por ejemplo, si $s =$ el número de segundos en un minuto, entonces s representa una constante, porque siempre hay 60 segundos en un minuto. El número de segundos en un minuto no varía. En este libro, las letras que representan tanto variables como constantes aparecen en cursivas.

El término **expresión algebraica**, o simplemente **expresión**, se usará con frecuencia en el texto. Una expresión es cualquier combinación de números, variables, exponentes, símbolos matemáticos (distintos a los signos de igualdad) y operaciones matemáticas.

1 Identificación de conjuntos

Un **conjunto** es una colección de objetos. Los objetos en un conjunto se llaman **elementos** del conjunto. Los conjuntos se indican mediante llaves, { }, y con frecuencia se nombran con letras mayúsculas. Cuando los elementos de un conjunto se mencionan dentro de las llaves, como se ilustra a continuación, se dice que el conjunto está en **forma de lista**.

Conjunto	Número de elementos
$A = \{a, b, c\}$	3
$B = \{\text{amarillo, verde, azul, rojo}\}$	4
$C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$	5

El símbolo $\in$ se usa para indicar que un objeto es un elemento de un conjunto. Dado que 2 es un elemento del conjunto C, se puede escribir:

$$2 \in C$$

2 es un elemento de C

Esto se lee "2 es un elemento del conjunto C".

Un conjunto puede ser finito o infinito. Los conjuntos A, B y C tienen cada uno un número finito de elementos y, por tanto, son *conjuntos finitos*. En algunos conjuntos es imposible enlistar a todos los elementos. Estos se conocen como *conjuntos infinitos*. El siguiente conjunto, llamado el conjunto de los **números naturales** o **números cardinales**, es un ejemplo de un conjunto infinito.

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Los tres puntos después de la última coma se llaman **ellipsis** o **puntos suspensivos**. Indican que el conjunto continúa sin parar de la misma manera.

Otro importante conjunto infinito es el de los enteros. A continuación se presenta el conjunto de los **enteros**.

$$I = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Observa que el conjunto de los enteros incluye los enteros, tanto positivos como negativos, y al número 0.

Comprende el Álgebra

Los *enteros positivos* son:
1, 2, 3, 4, 5, 6, . . .
Los *enteros negativos* son:
−1, −2, −3, −4, −5, −6, . . .

Si escribes:

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 163\}$$

se entiende que el conjunto continúa de la misma manera hasta el número 163. El conjunto D es el conjunto de los primeros 163 números naturales. Por tanto, D es un conjunto finito.

Un conjunto especial que no contiene elementos se llama **conjunto nulo**, o **conjunto vacío**, y se escribe como $\{\ \}$ o $\emptyset$. Por ejemplo, el conjunto de estudiantes en tu clase menores de tres años de edad es el conjunto nulo o vacío.

2 Identificación y uso de desigualdades

Símbolos de desigualdad

$>$ se lee "es mayor que".
$\geq$ se lee "es mayor o igual que".
$<$ se lee "es menor que".
$\leq$ se lee "es menor o igual que".
$\neq$ se lee "no es igual que".

Las desigualdades pueden explicarse usando la recta numérica real (**Figura 1.1**).

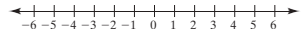


FIGURA 1.1

El número a es mayor que el número b, $a > b$, cuando a está a la derecha de b en la recta numérica (**Figura 1.2**). También se puede afirmar que el número b es menor que a, $b < a$, cuando b está a la izquierda de a en la recta numérica. La desigualdad $a \neq b$ significa que $a < b$ o que $a > b$.

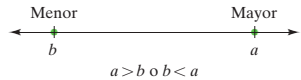


FIGURA 1.2

EJEMPLO 1 Inserta $>$ o $<$ en el área sombreada entre los números para formar una proposición verdadera.

a) 2 ▭ 6 **b)** 1 ▭ −7 **c)** −5 ▭ −4

Solución Indica la posición de los números de los incisos **a)**, **b)** y **c)** en una recta numérica, como se muestra en la **Figura 1.3**.

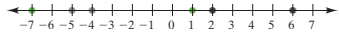


FIGURA 1.3

a) Dado que 2 está a la izquierda de 6 en la recta numérica, 2 es menor que 6, y se escribe $2 < 6$.

b) Puesto que 1 está a la derecha de −7 en la recta numérica, 1 es mayor que −7, y se escribe $1 > -7$.

c) Como −5 está a la izquierda de −4 en la recta numérica, −5 es menor que −4, y se escribe $-5 < -4$.

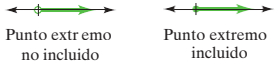
Ahora resuelve el ejercicio 15

SUGERENCIA ÚTIL

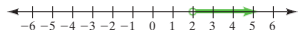
Recuerda que el símbolo utilizado en una desigualdad, si es verdadera, siempre apunta hacia el menor de los dos números.

Notación	Significado
$x > 2$	x es cualquier número real mayor que 2.
$x \leq -3$	x es cualquier número real menor que o igual que -3.
$-4 \leq x < 3$	x es cualquier número real mayor que o igual que -4 y menor que 3.

En las desigualdades $x > 2$ y $x \leq -3$, el 2 y el -3 se conocen como **puntos extremos.** En la desigualdad $-4 \leq x < 3$, -4 y 3 son los puntos extremos. Las soluciones a las desigualdades que usan ya sea $<$ o $>$, no incluyen a los puntos extremos, pero las soluciones a las desigualdades que usan ya sea $\leq$ o $\geq$, sí incluyen a los puntos extremos. Esto se muestra de la siguiente manera.



A continuación hay tres ilustraciones.

Desigualdad	Desigualdad indicada sobre la recta numérica
$x > 2$	
$x \leq -1$	
$-4 \leq x < 3$	

La palabra *entre* indica que los puntos extremos no están incluidos en la respuesta. Por ejemplo, el conjunto de números naturales entre 2 y 6 es $\{3, 4, 5\}$. Si queremos incluir los puntos extremos, podemos usar la frase *que los contienen*. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales entre 2 y 6 , incluidos ellos, es $\{2, 3, 4, 5, 6\}$.

3 Uso de la notación constructiva de conjuntos

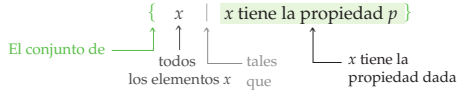
Un segundo método para describir un conjunto se llama **notación constructiva de conjuntos**. Un ejemplo de notación constructiva de conjuntos es:

$$E = \{x | x \text{ es un número natural mayor que } 7\}$$

Esto se lee "el conjunto E es el conjunto de todos los elementos x, tales que x es un número natural mayor que 7". En forma de lista, este conjunto se escribe:

$$E = \{8, 9, 10, 11, 12, \ldots\}$$

La forma general de la notación constructiva de conjuntos es:



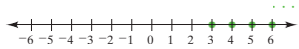
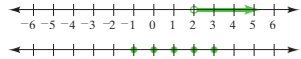
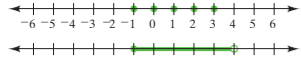
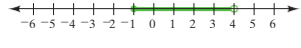
Con frecuencia se usará la variable x cuando se utilice la notación constructiva de conjuntos, aunque puede usarse cualquier variable.

A continuación se presentan dos formas condensadas de escribir el conjunto $E = \{x | x \text{ es un número natural mayor que } 7\}$ en notación constructiva de conjuntos.

$$E = \{x | x > 7 \text{ y } x \in N\} \text{ o } E = \{x | x \geq 8 \text{ y } x \in N\}$$

El conjunto $A = \{x | -3 < x \leq 4 \text{ y } x \in I\}$ es el conjunto de enteros mayores que -3 y menores o iguales que 4. El conjunto escrito en forma de lista es $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Observa que el punto extremo -3 no se incluye en el conjunto, pero el punto extremo 4 sí se incluye.

¿Cómo difieren los conjuntos $B = \{x | x > 2 \text{ y } x \in N\}$ y $C = \{x | x > 2\}$? El conjunto B contiene solamente los números naturales mayores que 2, es decir, $\{3, 4, 5, 6, \ldots\}$. El conjunto C contiene no solamente los números naturales mayores que 2, sino también fracciones y números decimales mayores que 2. Dado que no hay un número menor mayor que 2, este conjunto no puede escribirse en forma de lista. Estos dos conjuntos se ilustran en la recta numérica en la parte superior de la siguiente página. También se ilustran otros dos conjuntos.

Conjunto	Conjunto indicado en la recta numérica
$\{x \mid x > 2 \text{ y } x \in N\}$	
$\{x \mid x > 2\}$	
$\{x \mid -1 \leq x < 4 \text{ y } x \in I\}$	
$\{x \mid -1 \leq x < 4\}$	

En la sección 2.5 se estudia otro método para indicar desigualdades, llamado *notación de intervalo*.

4 Determinación de la unión e intersección de conjuntos

Así como se pueden realizar *operaciones* de suma y multiplicación sobre números, también es posible realizar operaciones sobre conjuntos. Dos operaciones de conjuntos son la *unión* y la *intersección*.

Unión de dos conjuntos

La unión del conjunto A y el conjunto B, escrita como $A \cup B$, es el conjunto de los elementos que pertenecen ya sea al conjunto A *o* al conjunto B.

Puesto que la palabra *como* significa pertenecer al conjunto A o al conjunto B o a ambos conjuntos, la unión se forma al combinar, o unir, los elementos en el conjunto A con aquellos del conjunto B. Si un objeto es un elemento o del conjunto A o del conjunto B o de ambos conjuntos, entonces es un elemento de la unión de los conjuntos, $A \cup B$. Si un elemento aparece en ambos conjuntos, solamente se le enlista una vez cuando se escribe la unión de dos conjuntos.

Ejemplos de unión de conjuntos

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$	$B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$	$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$A = \{a, b, c, d, e\}$	$B = \{x, y, z\}$	$A \cup B = \{a, b, c, d, e, x, y, z\}$

En la notación constructiva de conjuntos se puede expresar a $A \cup B$ como:

Unión

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Intersección de dos conjuntos

La **intersección** del conjunto A con el conjunto B, escrita como $A \cap B$, es el conjunto de todos los elementos que son comunes tanto al conjunto A *como* al conjunto B.

Debido a que la palabra *como* significa pertenecer *tanto* al conjunto A como al conjunto B, la intersección se forma usando solamente aquellos elementos que están tanto en el conjunto A como en el conjunto B. Si un objeto es un elemento en únicamente uno de los dos conjuntos, entonces no es un elemento en la intersección de los conjuntos.

Ejemplos de intersección de conjuntos

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$	$B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$	$A \cap B = \{3, 4, 5\}$
$A = \{a, b, c, d, e\}$	$B = \{x, y, z\}$	$A \cap B = \{\ \}$ o $\varnothing$

Observa que, en el último ejemplo, los conjuntos A y B no tienen elementos en común. Por tanto, su intersección es el conjunto vacío. En notación constructiva de conjuntos, $A \cap B$ se puede expresar como:

Intersección

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}$$

5 Identificación de conjuntos importantes de números

En el siguiente recuadro se describen diferentes conjuntos de números y se proporcionan letras que se usan frecuentemente para representar estos conjuntos de números.

Conjuntos importantes de números

Números reales	$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ es un punto sobre la recta numérica}\}$
Números naturales o cardinales	$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
Números enteros no negativos	$W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
Enteros	$I = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
Números racionales	$Q = \left\{ \dfrac{p}{q} \,\middle|\, p \text{ y } q \text{ son enteros, } q \neq 0 \right\}$
Números irracionales	$H = \{x \mid x \text{ es un número real que no es racional}\}$

Comprende el Álgebra

Un *número racional* puede expresarse como el *cociente* de dos enteros:

$$\frac{\text{entero}}{\text{entero}}$$

donde el denominador no es cero.

Un **número racional** es cualquier número que puede representarse como un cociente de dos números enteros, cuyo denominador es distinto de 0.

Ejemplos de números racionales

$$\frac{3}{5}, \quad -\frac{2}{3}, \quad 0, \quad 1.63, \quad 7, \quad -17, \quad \sqrt{4}$$

Observa que 0, o cualquier otro entero, también es un número racional, porque puede escribirse como una fracción con un 1 como denominador. Por ejemplo, $0 = \dfrac{0}{1}$ y $7 = \dfrac{7}{1}$.

El número 1.63 puede escribirse como $\dfrac{163}{100}$ y, por tanto, es un cociente de dos enteros. Dado que $\sqrt{4} = 2$ y 2 es un entero, $\sqrt{4}$ es un número racional. *Todo número racional, cuando se escribe como un número decimal, será ya sea un número decimal periódico o finito.*

Comprende el Álgebra

Un número racional, cuya representación decimal está acotada, es un *número decimal finito*. Un número racional, cuya representación decimal se repite, es un *número decimal periódico*.

Ejemplos de decimales periódicos

$$\frac{2}{3} = 0.6666\dots$$

Se repite el 6.

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857\dots$$

Se repite el 142857.

Ejemplos de decimales finitos

$$\frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{9}{4} = 2.25$$

Para mostrar que un dígito o grupo de dígitos se repite, se puede colocar una barra sobre el dígito, o grupo de dígitos, que se repite. Por ejemplo, se puede escribir:

$$\frac{2}{3} = 0.\overline{6} \quad \text{y} \quad \frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$$

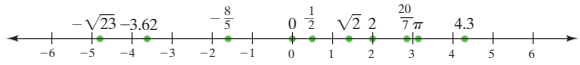
Un **número irracional** es un número real que no es un número racional. Algunos números irracionales son $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ y $\sqrt{6}$. Otro número irracional es pi, π. Cuando se proporciona un valor decimal para un número irracional, sólo se está proporcionando una *aproximación* del valor del número irracional. El símbolo $\approx$ significa "es aproximadamente igual que".

$$\pi \approx 3.14 \qquad \sqrt{2} \approx 1.41 \qquad \sqrt{3} \approx 1.73 \qquad \sqrt{10} \approx 3.16$$

SUGERENCIA ÚTIL

Recuerda: al escribir una *aproximación*, usa el símbolo $\approx$.

Los **números reales** se forman al tomar la *unión* de los números racionales y los números irracionales. Por tanto, cualquier número real debe ser ya sea un número racional o un número irracional. Con frecuencia se usa el símbolo $\mathbb{R}$ para representar el conjunto de los números reales. La **Figura 1.4** ilustra varios números reales sobre la recta numérica.



Algunos ejemplos de números reales

FIGURA 1.4

Subconjunto

El conjunto A es un **subconjunto** del conjunto B, cuando todo elemento de A también es un elemento de B, y se denota por $A \subseteq B$.

Por ejemplo, el conjunto de los números naturales, $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, es un subconjunto del conjunto de números enteros no negativos $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$, porque todo elemento, en el conjunto de los números naturales, también es un elemento en el conjunto de números enteros no negativos. La **Figura 1.5** ilustra las relaciones entre los diversos subconjuntos de los números reales. En la **Figura 1.5a**, puedes ver que el conjunto de los números naturales es un subconjunto del conjunto de números enteros no negativos, del conjunto de enteros y del conjunto de números racionales. Por tanto, todo número natural también debe ser un número entero no negativo, un entero, un número racional y un número real.

Todo número natural también es:

- un número entero no negativo,
- un entero,
- un número racional y
- un número real.

Usando el mismo razonamiento, puedes ver que el conjunto de los números enteros no negativos es un subconjunto de los enteros, del conjunto de los números racionales y del conjunto de los números reales; y que el conjunto de los enteros es un subconjunto del conjunto de los números racionales y del conjunto de los números reales.

Al observar la **Figura 1.5b,** se ve que los enteros positivos, el 0 y los enteros negativos, conforman a los enteros; que los enteros y los números racionales no enteros conforman los números racionales, etcétera.

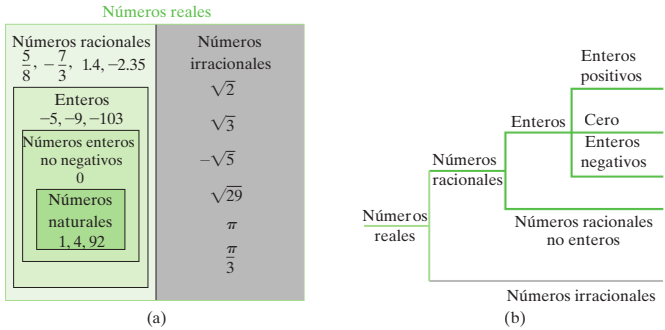


FIGURA 1.5

EJEMPLO 2 Considera el siguiente conjunto:

$$\left\{-8, 0, \frac{5}{9}, 12.25, \sqrt{7}, -\sqrt{11}, \frac{22}{7}, 5, 7.1, -54, \pi\right\}$$

Menciona los elementos del conjunto que son:

a) números naturales. **b)** números enteros no negativos.
c) enteros. **d)** números racionales.
e) números irracionales. **f)** números reales.

Solución

a) Números naturales: 5 **b)** Números enteros no negativos: 0, 5

c) Enteros: $-8, 0, 5, -54$

d) Los números racionales pueden escribirse en la forma $\frac{p}{q}, q \neq 0$. Cada uno de los siguientes puede ser escrito de esta forma y es un número racional.

$$-8, 0, \frac{5}{9}, 12.25, \frac{22}{7}, 5, 7.1, -54$$

e) Los números irracionales son números reales que no son racionales. Los siguientes números son irracionales.

$$\sqrt{7}, -\sqrt{11}, \pi$$

f) Todos los números en el conjunto son números reales. La unión de los números racionales y los números irracionales conforma a los números reales.

$$-8, 0, \frac{5}{9}, 12.25, \sqrt{7}, -\sqrt{11}, \frac{22}{7}, 5, 7.1, -54, \pi$$

Ahora resuelve el ejercicio 39

No todos los números son números reales. Algunos números, que discutimos más adelante en el texto, que no son números reales, son los números complejos y los números imaginarios.

1.2 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s), de la siguiente lista.

vacío	constante	racional	conjunto	variable	unión
aproximadamente	elementos	subconjunto	intersección	irracional	algebraica

1. Una letra utilizada para representar varios números es una _____.

2. Una letra que representa un valor en particular es una _____.

3. Cualquier combinación de números, variables, exponentes, símbolos matemáticos y operaciones se llama expresión _____.

4. Una colección de objetos es un _____.

5. Los objetos en un conjunto se llaman _____.

6. El conjunto que no contiene elementos es el conjunto _____.

7. Si todo elemento del conjunto A es un elemento del conjunto B, entonces el conjunto A es un _____ del conjunto B.

8. $A \cup B$ representa la _____ de los dos conjuntos, A y B.

9. $A \cap B$ representa la _____ de los dos conjuntos, A y B.

10. Un número que puede representarse como un cociente de dos enteros, denominador no 0, es un número _____.

11. Un número real que no es un número racional es un número _____.

12. El símbolo $\approx$ significa que es _____ igual que.

Practica tus habilidades

Inserta $<$, $>$ o $=$ en el área sombreada para hacer cada enunciado verdadero.

13. $7 \square 2$

14. $5 \square 9$

15. $-7 \square -2$

16. $-5 \square -9$

17. $-9 \square 7$

18. $1 \square -3$

19. $\dfrac{-4}{2} \square -2$

20. $\dfrac{9}{-3} \square -3$

21. $-14.98 \square -14.99$

22. $-3.001 \square -3.01$

23. $-\pi \square -4$

24. $\pi \square 3.2$

25. $\frac{1}{4} \square \frac{1}{2}$

26. $\frac{1}{8} \square \frac{1}{16}$

27. $-\dfrac{7}{8} \square -\dfrac{10}{11}$

28. $-\dfrac{4}{7} \square -\dfrac{5}{9}$

En los ejercicios 29-38, escribe cada conjunto en forma de lista.

29. $A = \{x \mid -2 \le x < 1 \text{ y } x \in 1\}$

30. $B = \{y \mid -7 < y \le 3 \text{ y } y \in N\}$

31. $C = \{z \mid z$ es un entero par mayor que 16 y menor que o igual que $20\}$

32. $D = \{y \mid y$ es un número natural impar menor que $6\}$

33. $E = \{a \mid -\pi \le a \le \pi \text{ y a} \in I\}$

34. $F = \left\{x \,\middle|\, -\dfrac{6}{5} \le x < \dfrac{15}{4} \text{y } x \in N\right\}$

35. $G = \{x \mid x$ es un número entero no negativo múltiplo de $7\}$

36. $J = \{x \mid x$ es un entero mayor que $-5\}$

37. $K = \{x \mid x \text{ I y } x < 4\}$

38. $L = \{x \mid x \in W \text{ y } x > 5\}$

39. Considera al conjunto:

$$\left\{2, 4, -5.33, \frac{11}{2}, \sqrt{5}, \sqrt{2}, -100, -7, 4.7\right\}$$

Enlista los elementos que son:

a) números enteros no negativos.

b) números naturales.

c) números racionales.

d) enteros.

e) números irracionales.

f) números reales.

40. Considera al conjunto:

$$\left\{-2, 4, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, 0, \sqrt{2}, \sqrt{8}, -1.23, \frac{78}{79}\right\}$$

Enlista los elementos que son:

a) números naturales.

b) números enteros no negativos.

c) enteros.

d) números racionales.

e) números irracionales.

f) números reales.

Determina $A \cup B$ y $A \cap B$ para cada conjunto A y B.

41. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{2, 4, 6, 8\}$

42. $A = \{5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{1, 3, 5, 7\}$

43. $A = \{-3, -1, 1, 3\}, B = \{-4, -3, -2, -1, 0\}$

44. $A = \{-3, -2, -1, 0\}, B = \{-1, 0, 1, 2\}$

45. $A = \{\ \}, B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

46. $A = \{0, 10, 20, 30\}, B = \{5, 15, 25\}$

47. $A = \{2, 4, 6\}, B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

48. $A = \{1, 3, 5\}, B = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

49. $A = \{-1, 0, 1, e, i, \pi\}, B = \{-1, 0, 1\}$

50. $A = \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{6}, \ldots\right\}, B = \left\{\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{10}\right\}$

Describe cada conjunto.

51. $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

52. $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

53. $\{0, 3, 6, 9, \ldots\}$

54. $\{\ldots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots\}$

55. $\{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$

56. $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

Un ejercicio con número verde, como el 15 , indica un ejercicio de tipo Ahora resuelve el ejercicio.

Dibuja cada conjunto sobre una recta numérica.

57. $\{x \mid x \geq 0\}$

58. $\{w \mid w > -5\}$

59. $\{z \mid z \leq 2\}$

60. $\{y \mid y < 4\}$

61. $\{p \mid -6 \leq p < 3\}$

62. $\{x \mid -1.67 \leq x < 5.02\}$

63. $\{q \mid q > -3 \text{ y } q \in N\}$

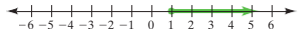
64. $\{x \mid -1.93 \leq x \leq 2 \text{ y } x \in I\}$

65. $\{r \mid r \leq \pi \text{ y } r \in W\}$

66. $\left\{x \mid \frac{5}{12} < x \leq \frac{7}{12} \text{ y } x \in N\right\}$

Expresa en notación constructiva de conjuntos a cada conjunto de números que se indica sobre la recta numérica.

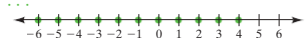
67.



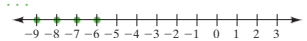
68.



69.



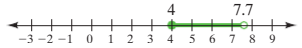
70.



71.



72.



73.



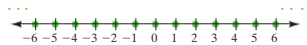
74.



75.



76.



Consulta el recuadro de la página 10 para los significados de $\mathbb{R}$, N, W, I, Q y H. Después determina si el primer conjunto es un subconjunto del segundo conjunto, para cada par de conjuntos.

77. N, W

78. W, I

79. I, Q

80. Q, $\mathbb{R}$

81. W, N

82. Q, H

83. H, $\mathbb{R}$

84. I, $\mathbb{R}$,

Resolución de problemas

85. Construye un conjunto que contenga cinco números racionales entre 1 y 2.

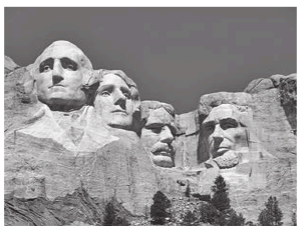
86. Construye un conjunto que contenga cinco números racionales entre 0 y 1.

87. Determina dos conjuntos A y B, tales que $A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 8, 9\}$ y $A \cap B = \{4, 5, 9\}$.

88. Determina dos conjuntos A y B, tales que $A \cup B = \{3, 5, 7, 8, 9\}$ y $A \cap B = \{5, 7\}$.

89. Destinos para vacacionar Jaime y Estela intentan decidir a dónde ir de vacaciones. En la tabla de la derecha, se muestra cada una de sus cinco opciones principales.

Jaime	Estela
1. El Gran Cañón	1. Disney World
2. Parque Nacional Yosemite	2. Monte Rushmore
3. Disney World	3. Las Vegas
4. Las Vegas	4. El Gran Cañón
5. Monte Rushmore	5. Nueva Orleáns



Monte Rushmore

a) Determina el conjunto de opciones que están *tanto* en la lista de Jaime *como* en la de Estela.

b) ¿El inciso **a)** representa la unión o la intersección de los dos conjuntos de opciones?

c) Determina el conjunto de opciones que están en la lista de Jaime o en la lista de Estela.

d) ¿El inciso **c)** representa la unión o la intersección de los dos conjuntos de opciones?

90. **Carreras** La tabla de la siguiente página, muestra a los corredores que participaron en una carrera de 3 kilómetros (km) y una carrera de 5 kilómetros.

3 kilómetros	5 kilómetros
Antonio	Luisa
Karla	Beatriz
Luisa	Daniel
Diego	Diego
Carmen	Francisco
Esteban	Jorge
Martha	Antonio

a) Determina el conjunto de corredores que participaron en una carrera de 3 km o en una de 5 km.

b) ¿El inciso **a)** representa la unión o la intersección de los corredores?

c) Determina el conjunto de corredores que participaron en una carrera de 3 km y en una de 5 km.

d) ¿El inciso **c)** representa la unión o la intersección de corredores?

91. Países más poblados La siguiente tabla muestra los cinco países más poblados en 1950 y en 2017, así como los cinco países que se espera sean los más poblados en 2050.

1950	2017	2050
China	China	India
India	India	China
Estados Unidos	Estados Unidos	Nigeria
Rusia	Indonesia	Estados Unidos
Japón	Brasil	Indonesia

Fuente: U.S. Census Bureau

a) Determina el conjunto de los cinco países más poblados en 2017 o en 2050.

b) Determina el conjunto de los cinco países más poblados en 1950 o en 2050.

c) Determina el conjunto de los cinco países más poblados en 1950 y en 2017.

d) Determina el conjunto de los cinco países más poblados en 2017 y en 2050.

e) Determina el conjunto de los cinco países más poblados en 1950 y en 2017 y en 2050.

92. Concurso de escritura La siguiente tabla muestra a los estudiantes de una clase de inglés que participaron en tres concursos de escritura en un bachillerato local.

Primer concurso	Segundo concurso	Tercer concurso
Jimena	Tomás	Patricia
Samanta	Irene	Ricardo
Tomás	Roberto	Armando
Patricia	Diana	Diana
Irene	Samanta	Karen
Ricardo	Jimena	
	Karen	

a) Determina el conjunto de estudiantes que participaron en el primer concurso o en el segundo concurso.

b) Determina el conjunto de estudiantes que participaron en el segundo concurso o en el tercer concurso.

c) Determina el conjunto de estudiantes que participaron en el primer concurso y en el segundo concurso.

d) Determina el conjunto de estudiantes que participaron en el primer concurso y en el tercer concurso.

e) Determina el conjunto de estudiantes que participaron en el primer concurso y en el segundo concurso y en el tercer concurso.

93. Cub Scouts Los Cub Scouts, en el Pack 108, deben completar cuatro actividades para obtener su Insignia de Lobo. El Sr. Morales, su líder de cubil, tiene la siguiente tabla en su bitácora. Un *Sí* indica que el Cub Scout completó dicho mérito.

	Mérito			
Scout	1	2	3	4
Alejandro	Sí	Sí	Sí	Sí
David	Sí	Sí	No	No
Jorge	No	Sí	No	Sí
Carlos	No	Sí	No	Sí
Sergio	No	No	Sí	No

Sea A = el conjunto de scouts que completaron el mérito 1: *Proeza de Habilidades*.

Sea B = el conjunto de scouts que completaron el mérito 2: *Tu Bandera*.

Sea C = el conjunto de scouts que completaron el mérito 3: *Cocinar* y *Comer*.

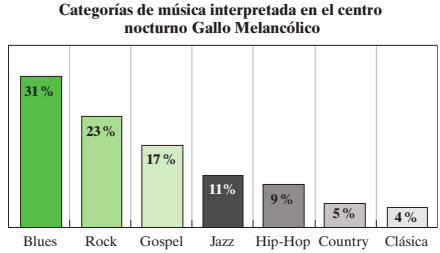
Sea D = el conjunto de scouts que completaron el mérito 4: *Toma de Decisiones*.

a) Escribe cada conjunto A, B, C y D usando el método de lista.

b) Determina el conjunto $A \cap B \cap C \cap D$, es decir, encuentra el conjunto de elementos que sean comunes a los cuatro conjuntos.

c) ¿Cuáles scouts reúnen todos los requisitos para recibir su Insignia de Lobo?

94. Obras musicales El año pasado, el centro nocturno Gallo Melancólico fue anfitrión de obras musicales, que se categorizaron como se muestra en la siguiente gráfica.



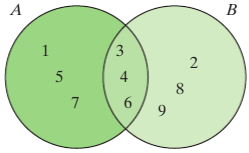
a) Determina el conjunto de categorías de música interpretada en el Gallo Melancólico más de 10% del tiempo.

b) Determina el conjunto de categorías de música interpretada en el Gallo Melancólico menos de 20% del tiempo.

95. El siguiente diagrama se llama *diagrama de Venn*. A partir del diagrama, determina los siguientes conjuntos:

a) A **b)** B

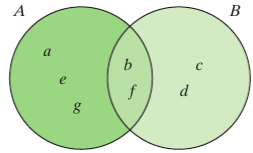
c) $A \cup B$ **d)** $A \cap B$



96. Usa el siguiente diagrama de Venn para determinar los siguientes conjuntos:

a) A **b)** B

c) $A \cup B$ **d)** $A \cap B$



97. Diagrama de Venn de vacaciones Dibuja un diagrama de Venn para los datos dados en el ejercicio 89 de la página 14.

98. Diagrama de Venn de corredores Dibuja un diagrama de Venn para los datos dados en el ejercicio 90 de la página 15.

Ejercicios conceptuales y de redacción

En los ejercicios 99 y 100, **a)** *escribe cómo se leería cada conjunto;* **b)** *escribe el conjunto en forma de lista.*

99. $A = \{x|x < 7 \text{ y } x \in N\}$

100. $B = \{x|x$ es una de las últimas cinco letras mayúsculas del alfabeto$\}$

101. a) Explica la diferencia entre los siguientes conjuntos de números: $A = \{x|x \text{ 1 y } x \in > 1\}$.

b) Escribe el primer conjunto en forma de lista.

c) ¿Puedes escribir el segundo conjunto en forma de lista? Explica tu respuesta.

102. Repite el ejercicio 101 para los conjuntos $\{x|2 < x < 6 \text{ y } x \in N$ y $\{x|2 < x < 6\}$.

103. Determina el conjunto de enteros *entre* 3 y 7.

104. Determina el conjunto de enteros *entre* -1 y 3 *que los contienen*.

105. El conjunto de los números naturales o cardinales, ¿es un conjunto finito o infinito? Explica tu respuesta.

106. Explica por qué todo entero también es un número racional.

En los ejercicios 107–116, indica si cada enunciado es verdadero o falso.

107. Todo número natural es un número entero no negativo.

108. Todo número entero no negativo es un número natural.

109. Algunos números racionales son enteros.

110. Todo entero es un número racional.

111. Todo número racional es un entero.

112. La unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales forma el conjunto de los números reales.

113. La intersección del conjunto de números racionales y el conjunto de números irracionales, es el conjunto vacío.

114. El conjunto de los números naturales es un conjunto finito.

115. El conjunto de enteros entre π y 4 es el conjunto vacío.

116. El conjunto de números racionales entre 3 y π es un conjunto infinito.

Problemas de desafío

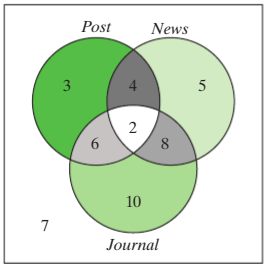
117. a) Escribe los números decimales equivalentes a $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, y $\frac{3}{9}$.

b) Escribe las fracciones equivalentes a $0.\overline{4}$, $0.\overline{5}$, y $0.\overline{6}$.

c) ¿A qué es igual $0.\overline{9}$? Explica cómo determinaste tu respuesta.

Actividad grupal

118. Preferencias de sitios web de noticias El siguiente diagrama de Venn muestra los resultados de una encuesta aplicada a 45 personas. El diagrama muestra el número de personas en la encuesta que leen los sitios web del *New York Post*, del *New York Daily News* y del *The Wall Street Journal*.



a) Miembro 1 del grupo: determina el número de encuestados que leen *tanto* el *Post como* el *News*; es decir: *Post* ∩ *News*.

b) Miembro 2 del grupo: determina el número que lee *tanto* el *Post como* el *Journal*; es decir: *Post* ∩ *Journal*.

c) Miembro 3 del grupo: determina el número que lee *tanto* el *News como* el *Journal*; es *News* ∩ *Journal*.

d) Comparte tu respuesta con los otros miembros del grupo y ve si el grupo concuerda con tu respuesta.

e) En su grupo, determinen el número de personas que leen los tres sitios web.

f) En su grupo, determinen el número de personas que no leen alguno de los tres sitios web.

1.3 Propiedades y operaciones con números reales

1. **Evaluación de valores absolutos**
2. **Suma de números reales**
3. **Resta de números reales**
4. **Multiplicación de números reales**
5. **División de números reales**
6. **Uso de las propiedades de los números reales**

Dos números que están a la misma distancia de 0 sobre la recta numérica, pero en direcciones opuestas, se llaman **inversos aditivos**, u **opuestos**, uno del otro. Por ejemplo, 3 es el inverso aditivo de −3, y −3 es el inverso aditivo de 3. El número 0 es su propio inverso aditivo. La suma de un número y su inverso aditivo es 0. ¿Cuáles son los inversos aditivos de -56.3 y $\frac{76}{5}$? Sus inversos aditivos son 56.3 y $-\frac{76}{5}$, respectivamente.

Inversos aditivos

-56.3 y 56.3

$\frac{76}{5}$ y $-\frac{76}{5}$

0 y 0

Observa que el inverso aditivo de un número positivo es un número negativo, y el inverso aditivo de un número negativo es un número positivo.

Comprende el Álgebra

El inverso aditivo
- de un número positivo, es un número negativo.
- de un número negativo, es un número positivo.
- de cero, es cero.

Inverso aditivo

Para cualquier número real a, su inverso aditivo es $-a$.

Considera el número −5. Su inverso aditivo es −(−5). Dado que se sabe que este número debe ser positivo, esto implica que −(−5) = 5. Este es un ejemplo de la propiedad de la doble negación.

Propiedad de la doble negación

Para cualquier número real a, $-(-a) = a$.

Por la propiedad de la doble negación, $-(-7.4) = 7.4$ y $-\left(-\frac{12}{5}\right) = \frac{12}{5}$.

1 Evaluación de valores absolutos

Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número es la distancia desde el número hasta el 0 en la recta numérica real. Se usa el símbolo | | para indicar valor absoluto.

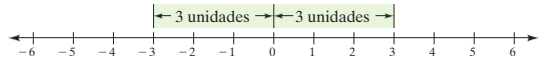


FIGURA 1.6

Considera los números 3 y −3 (**Figura 1.6**). Ambos números están a 3 unidades del 0 sobre la recta numérica. Por tanto,

$$|3| = 3 \quad \text{y} \quad |-3| = 3$$

EJEMPLO 1 Evalúa.

a) $|7|$ **b)** $|-11|$ **c)** $|0|$ **d)** $\left|-\frac{2}{3}\right|$ **e)** $|6.5|$

Solución

a) $|7| = 7$, pues 7 está a 7 unidades del 0 sobre la recta numérica.

b) $|-11| = 11$, pues −11 está a 11 unidades del 0 sobre la recta numérica.

c) $|0| = 0$, pues 0 está a 0 unidades del 0 sobre la recta numérica.

d) $\left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$, pues $-\frac{2}{3}$ es $\frac{2}{3}$ de una unidad del 0 sobre la recta numérica.

e) $|6.5| = 6.5$, pues 6.5 está a 6.5 unidades del 0 sobre la recta numérica.

Ahora resuelve el ejercicio 13

Para determinar el valor absoluto de un número real sin usar una recta numérica, se usa la siguiente definición.

Comprende el Álgebra

El valor absoluto de cualquier número distinto de cero siempre será un número positivo, y el valor absoluto de 0 es 0.

Valor absoluto

Si a representa cualquier número real, entonces

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

El valor absoluto de cualquier número *no negativo* es el número mismo. El valor absoluto de un número *negativo* es el inverso aditivo, u opuesto, del número. En el siguiente ejemplo se usa la definición de valor absoluto para evaluar varias expresiones.

EJEMPLO 2 Evalúa usando la definición de valor absoluto.

a) $|0|$ **b)** $|3|$ **c)** $|-5|$ **d)** $-|3|$ **e)** $-|-5|$

Solución

a) Dado que 0 es no negativo, $|0| = 0$.

b) Dado que 3 es no negativo, $|3| = 3$.

c) Dado que −5 es negativo, $|-5| = -(-5) = 5$.

d) Se pide determinar el inverso aditivo de $|3|$. En el inciso **b)** se determinó que $|3| = 3$. Por tanto, $-|3| = -3$.

e) Se pide determinar el inverso aditivo de $|-5|$. En la parte **c)** se determinó que $|-5| = 5$. Por tanto, $-|-5| = -5$.

Ahora resuelve el ejercicio 19

EJEMPLO 3 Inserta $<$, $>$ o $=$, en el área sombreada entre los dos valores para hacer verdadero cada proposición.

a) $|8|$ ☐ $|-8|$ **b)** $|-1|$ ☐ $-|-3|$

Solución

a) Dado que tanto $|8|$ como $|-8|$ son iguales a 8, se tiene que $|8| = |-8|$.

b) Dado que $|-1| = 1$ y $-|-3| = -3$, se tiene que $|-1| > -|-3|$.

Ahora intenta el ejercicio 29

2 Suma de números reales

Para sumar dos números con el mismo signo (ambos positivos o ambos negativos)

Suma sus valores absolutos y coloca el signo común antes de la suma.

La suma de dos números positivos siempre será un número positivo, y la suma de dos números negativos siempre será un número negativo.

EJEMPLO 4 Evalúa $-4 + (-7)$.

Solución Dado que ambos números a sumar son negativos, la suma será negativa. Es necesario sumar los valores absolutos de estos números y después colocar un signo negativo antes del valor. Primero, determina el valor absoluto de cada número.

$$|-4| = 4 \qquad |-7| = 7$$

Después suma los valores absolutos.

$$|-4| + |-7| = 4 + 7 = 11$$

Finalmente, dado que ambos números son negativos, la suma debe ser negativa. En consecuencia,

$$-4 + (-7) = -11$$

Ahora resuelve el ejercicio 45

Para sumar dos números con signos diferentes (uno positivo y el otro negativo)

Resta el menor valor absoluto del mayor valor absoluto. La respuesta tendrá el signo del número con el mayor valor absoluto.

La suma de un número positivo y un número negativo puede ser positiva, negativa o cero. El signo de la respuesta será el mismo que el signo del número con el mayor valor absoluto.

Comprende el Álgebra

- La suma de dos números positivos *siempre* será un número positivo.
- La suma de dos números negativos siempre será un número negativo.
- La suma de un número positivo y un número negativo puede ser positiva, negativa o cero.

EJEMPLO 5 Evalúa $5 + (-9)$.

Solución Dado que los números a sumar tienen signos opuestos, se resta el menor valor absoluto del mayor valor absoluto. Primero obtén el valor absoluto.

$$|5| = 5 \qquad |-9| = 9$$

Ahora determina la diferencia, $9 - 5 = 4$. El número -9 tiene mayor valor absoluto que el número 5, de modo que su suma es negativa.

$$5 + (-9) = -4$$

Ahora resuelve el ejercicio 43

En el inciso b) del siguiente ejemplo, se sumarán fracciones con diferentes denominadores. Para hacer esto, necesitarás reescribir las fracciones con el *mínimo común denominador*.

Mínimo común denominador

El **mínimo común denominador (MCD)** de un conjunto de denominadores, es el número más pequeño que divide cada denominador sin residuo.

En el ejemplo 6 **b)**, mostrado abajo, los dos denominadores son 8 y 6. El MCD de estos denominadores es 24, pues 24 es el número más pequeño que divide, tanto 8 como 6, sin residuo.

EJEMPLO 6 Evalúa. **a)** $1.3 + (-2.7)$ **b)** $-\frac{7}{8} + \frac{5}{6}$

Solución

a) $1.3 + (-2.7) = -1.4$

b) Comienza por escribir ambas fracciones con el mínimo común denominador, 24.

$$-\frac{7}{8} + \frac{5}{6} = -\frac{21}{24} + \frac{20}{24} = \frac{(-21) + 20}{24} = \frac{-1}{24} = -\frac{1}{24}$$

Ahora resuelve el ejercicio 51

EJEMPLO 7 **Profundidad de fosas marinas** La fosa de Palau, en el Océano Pacífico, se encuentra a 26 424 pies bajo el nivel del mar. La fosa marina más profunda, la fosa Mariana, es 9 416 pies más profunda que la fosa Palau (observa la **Figura 1.7**). Determina la profundidad de la fosa Mariana.

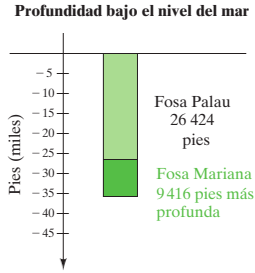


FIGURA 1.7

Solución Considera la distancia bajo el nivel del mar como negativa. Por tanto, la profundidad total es:

$$-26\,424 + 1 - 94\,162 = -35\,840 \text{ pies}$$

o 35 840 pies bajo el nivel del mar.

Ahora resuelve el ejercicio 127

3 Resta de números reales

Todo problema de resta puede expresarse como un problema de suma usando la siguiente regla.

Resta de números reales

$$a - b = a + (-b)$$

Para restar b de a, suma el opuesto (o inverso aditivo) de b a a.

Por ejemplo, $5 - 7$ significa $5 - (+7)$. Para restar $5 - 7$, suma el opuesto de $+7$, que es -7, a 5.

$$5 - 7 = 5 + (-7)$$

resta; 7 positivo; suma; 7 negativo

Dado que $5 + (-7) = -2$, entonces $5 - 7 = -2$.

EJEMPLO 8 Evalúa.

a) $8 - 3$ **b)** $2 - 9$ **c)** $-5 - 2$ **d)** $-5 - 8$

Solución

a) $8 - 3 = 8 + 1-32 = 5$

b) $2 - 9 = 2 + 1-92 = -7$

c) $-5 - 2 = -5 + 1-22 = -7$

d) $-5 - 8 = -5 + 1-82 = -13$

Ahora resuelve el ejercicio 55

EJEMPLO 9 Evalúa $8 - (-15)$.

Solución En este problema, se resta un número negativo. El procedimiento para restar sigue siendo el mismo.

$$8 - (-15) = 8 + 15 = 23$$

resta; 15 negativo; suma; 15 positivo

Por tanto, $8 - (-15) = 23$.

Ahora resuelve el ejercicio 47

A partir del ejemplo 9 y de otros ejemplos, se tiene el siguiente principio.

Resta de un número negativo

$$a - (-b) = a + b$$

Se puede usar este principio para evaluar problemas como $8 - (-15)$ y otros problemas donde *se resta una cantidad negativa*.

EJEMPLO 10 Evalúa $-17 - (-8)$.

Solución $-17 - 1-82 = -17 + 8 = -9$

Ahora resuelve el ejercicio 49

EJEMPLO 11 **a)** Resta 35 de -42. **b)** Resta $-\frac{3}{5}$ de $-\frac{5}{9}$.

Solución

a) $-42 - 35 = -77$

b) $-\frac{5}{9} - \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{5}{9} + \frac{3}{5} = -\frac{25}{45} + \frac{27}{45} = \frac{2}{45}$

Ahora resuelve el ejercicio 99

EJEMPLO 12 **Temperaturas extremas** La temperatura más calurosa de todos los tiempos registrada en Estados Unidos fue de 134°F, la cual ocurrió en Greenland Ranch, California, en Death Valley, el 10 de julio de 1913. La temperatura más fría de todos los tiempos registrada en Estados Unidos fue −79.8°F, la cual ocurrió en Prospect Creek Camp, Alaska, en las montañas Endicott, el 23 de enero de 1971 (observa la **Figura 1.8**). Determina la diferencia entre estas dos temperaturas.

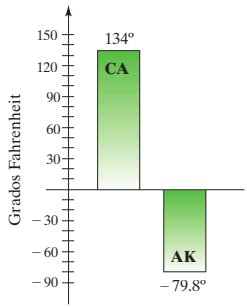


FIGURA 1.8

Solución Para determinar la diferencia, se resta.

$$134° - (-79.8°) = 134° + 79.8° = 213.8°$$

Ahora resuelve el ejercicio 125

Con frecuencia, la suma y la resta se combinan en el mismo problema, como en los siguientes ejemplos. A menos que estén presentes paréntesis, si la expresión involucra solamente la suma y la resta, se suma y se resta de izquierda a derecha. Cuando se usan paréntesis, primero se suma y se resta dentro de los paréntesis, después se continúa con la suma y con la resta de izquierda a derecha.

EJEMPLO 13 Evalúa $-15 + (-37) - (5 - 9)$.

Solución

$$\begin{aligned} -15 + (-37) - (5 - 9) &= -15 + (-37) - (-4) \\ &= -15 - 37 + 4 \\ &= -52 + 4 = -48 \end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 87

EJEMPLO 14 Evalúa $2 - |-3| + 4 - (6 - |-8|)$.

Solución Comienza por sustituir los números con signos de valor absoluto con sus equivalentes numéricos; después evalúa.

$$\begin{aligned} 2 - |-3| + 4 - (6 - |-8|) &= 2 - 3 + 4 - (6 - 8) \\ &= 2 - 3 + 4 - (-2) \\ &= 2 - 3 + 4 + 2 \\ &= -1 + 4 + 2 \\ &= 3 + 2 = 5 \end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 59

4 Multiplicación de números reales

Comprende el Álgebra

El *producto* de dos números con

- signos *iguales*, es positivo.
- signos *distintos*, es negativo.

Multiplicación de dos números reales

1. Para multiplicar dos números con *signos iguales*, ya sea ambos positivos o ambos negativos, multiplica sus valores absolutos. El producto es *positivo*.
2. Para multiplicar dos números con *signos distintos*, uno positivo y el otro negativo, multiplica sus valores absolutos. El producto es *negativo*.

EJEMPLO 15 Evalúa. **a)** $(4.2)(-1.6)$ **b)** $(-18)\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Solución

a) $(4.2)(-1.6) = -6.72$ Los números tienen signos distintos. El producto es negativo.

b) $(-18)\left(-\frac{1}{2}\right) = 9$ Los números tienen signos iguales, ambos negativos. El producto es positivo.

Ahora resuelve el ejercicio 65

EJEMPLO 16 Evalúa $4(-2)(-3)(1)$.

Solución $4(-2)(-3)(1) = (-8)(-3)(1) = 24(1) = 24.$

Ahora resuelve el ejercicio 67

Comprende el Álgebra

Cuando multipliques más de dos números negativos, el producto será

- *negativo*, si hay un número *impar* de números negativos.
- *positivo*, si hay un número *par* de números negativos.

Cuando multipliques más de dos números, el producto será *negativo* cuando haya un número *impar* de números negativos. El producto será *positivo* cuando haya un número *par* de números negativos.

Propiedad multiplicativa del cero

Para cualquier número a,

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

Por la propiedad multiplicativa del cero, $5(0) = 0$ y $(-7.3)(0) = 0$

EJEMPLO 17 Evalúa $-6 \cdot 7 \cdot 0 \cdot (-2.97) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$.

Solución Si uno o más de los factores es 0, todo el producto es igual que 0. Por tanto:

$$-6 \cdot 7 \cdot 0 \cdot (-2.97) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = 0$$

Ahora resuelve el ejercicio 101

5 División de números reales

Las reglas para la división de números reales son similares a las de la multiplicación de números reales.

Comprende el Álgebra

El *cociente* de dos números con

- signos *iguales*, es positivo.
- signos *distintos*, es negativo.

División de dos números reales

1. Para dividir dos números con *signos iguales*, ya sea ambos positivos o ambos negativos, divide sus valores absolutos. El cociente es *positivo*.
2. Para dividir dos números con *signos distintos*, uno positivo y el otro negativo, divide sus valores absolutos. El cociente es *negativo*.

EJEMPLO 18 Evalúa. **a)** $-24, 4$ **b)** $-6.45, (-0.4)$.

Solución

a) $\dfrac{-24}{4} = -6$ Los números tienen signos distintos. El cociente es negativo.

b) $\dfrac{-6.45}{-0.4} = 16.125$ Los números tienen signos iguales. El cociente es positivo.

Ahora resuelve el ejercicio 71

EJEMPLO 19 Evalúa $\left(\dfrac{-3}{8}\right) \div \left|\dfrac{-2}{5}\right|$.

Solución Dado que $\left|\dfrac{-2}{5}\right|$ es igual que $\dfrac{2}{5}$, se escribe:

$$\frac{-3}{8} \div \left|\frac{-2}{5}\right| = \frac{-3}{8} \div \frac{2}{5}$$

Ahora multiplica por el recíproco del divisor.

$$\frac{-3}{8} \div \frac{2}{5} = \frac{-3}{8} \cdot \frac{5}{2} = \frac{-3 \cdot 5}{8 \cdot 2} = \frac{-15}{16} \text{ o } -\frac{15}{16}$$

Ahora resuelve el ejercicio 75

Cuando el denominador de una fracción es un número negativo, por lo general, la fracción se reescribe con un denominador positivo. Para hacer esto, se usa lo siguiente.

Comprende el Álgebra

Una fracción negativa puede tener el signo menos en el denominador, o en el numerador, o enfrente de la fracción. Por tanto,

$$\frac{3}{-4} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}.$$

Signo de una fracción

Para cualquier número a y cualquier número b distinto de cero,

$$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$$

Por tanto, cuando tengas un cociente de $\dfrac{1}{-2}$, reescríbelo ya sea como $\dfrac{-1}{2}$ o $-\dfrac{1}{2}$.

6 Uso de las propiedades de los números reales

Ya se discutió la propiedad de la doble negación y la propiedad multiplicativa del cero. La **Tabla 1.1** presenta otras propiedades básicas para las operaciones de suma y multiplicación con números reales.

Tabla 1.1

PARA NÚMEROS REALES a, b y c	SUMA	MULTIPLICACIÓN
Propiedad conmutativa	$a + b = b + a$	$ab = ba$
Propiedad asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(ab)c = a(bc)$
Propiedad de la identidad	$a + 0 = 0 + a = a$ (0 se denomina **elemento de identidad aditiva**.)	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (1 se denomina **elemento de identidad multiplicativo**.)
Propiedad del inverso	$a + (-a) = (-a) + a = 0$ ($-a$ se denomina **inverso aditivo** u **opuesto** de a.)	$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ ($\frac{1}{a}$ se denomina **inverso multiplicativo** o **recíproco** de a, $a \neq 0$.)
Propiedad distributiva (de la multiplicación sobre la suma)	$a(b + c) = ab + ac$	

Observa que la propiedad conmutativa involucra un cambio en el *orden*, y la propiedad asociativa involucra un cambio en el *agrupamiento*.

La propiedad distributiva también se aplica cuando existen más de dos números dentro de los paréntesis.

$$a(b + c + d + \cdots + n) = ab + ac + ad + \cdots + an$$

EJEMPLO 20 Nombra la propiedad que se ilustra.

a) $x \cdot 2 = 2 \cdot x$ **b)** $(x + 5) + 7 = x + (5 + 7)$

c) $6 + x = x + 6$ **d)** $2(4x) = (2 \cdot 4)x$ **e)** $2(x + y) = 2x + 2y$

Solución

a) El *orden* de la multiplicación cambió. Por tanto, $x \cdot 2 = 2 \cdot x$ demuestra la propiedad conmutativa de la multiplicación.

b) El *agrupamiento* de la suma cambió. Por tanto, $(x + 5) + 7 = x + (5 + 7)$ demuestra la propiedad asociativa de la suma.

c) El *orden* de la suma cambió. Por tanto, $6 + x = x + 6$ demuestra la propiedad conmutativa de la suma.

d) El *agrupamiento* de la multiplicación cambió. Por tanto, $(4x) = (2 \cdot 4)x$ demuestra la propiedad asociativa de la multiplicación.

e) El número 2 se distribuye a x y y. Por tanto, $2(x + y) = 2x + 2y$ demuestra la propiedad distributiva.

Ahora resuelve el ejercicio 113

EJEMPLO 21 Nombra la propiedad que se ilustra.

a) $\pi \cdot 1 = \pi$ **b)** $\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$ **c)** $6 + (-6) = 0$ **d)** $7 \cdot \frac{1}{7} = 1$

Solución

a) Propiedad de la identidad de la multiplicación

b) Propiedad de la identidad de la suma

c) Propiedad del inverso aditivo

d) Propiedad del inverso multiplicativo

Ahora resuelve el ejercicio 115

1.3 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

resta	d	negativo	distributiva	absoluto
reflexiva	positivo	aditivo	suma	asociativa
conmutativa	c	0	$-c$	

1. La suma de dos números positivos es un número _____.

2. La suma de dos números negativos es un número _____.

3. Para cualquier número real a, su inverso _____ es $-a$.

4. Para cualquier número real c, $-(-c) =$ _____.

5. Para sumar dos números con el mismo signo, _____ sus valores absolutos y conserva el signo común con la suma.

6. Para sumar dos números con signos diferentes, _____ el menor valor absoluto del mayor valor absoluto, y conserva el signo del número con el mayor valor absoluto.

7. El valor _____ de un número es su distancia desde 0 sobre la recta numérica.

8. La propiedad $(ab)c = a(bc)$ es la propiedad _____ de la multiplicación.

9. La propiedad $a(b + c) = ab + ac$ es la propiedad _____.

10. La propiedad $d + e = e + d$ es la propiedad _____ de la suma.

Practica tus habilidades

Evalúa cada expresión de valor absoluto.

11. $|2|$ **12.** $|11|$ **13.** $|-7|$ **14.** $|-8|$

15. $|-8.61|$ **16.** $|-2.78|$ **17.** $\left|-\frac{11}{16}\right|$ **18.** $-|1|$

19. $-|-7|$ **20.** $-|-\pi|$ **21.** $-\left|\frac{5}{9}\right|$ **22.** $-\left|\frac{3}{7}\right|$

Inserta $<$, $>$ o $=$, en el área sombreada para formar una proposición verdadera.

23. $|17|$ ☐ 17 **24.** 11 ☐ $|11|$ **25.** $|-8|$ ☐ -8 **26.** -7 ☐ $|-7|$

27. $|-9|$ ☐ $|9|$ **28.** $|\pi|$ ☐ $|-\pi|$ **29.** $|-2|$ ☐ -6 **30.** -9 ☐ $|-8|$

31. $-(-3)$ ☐ $-|-3|$ **32.** $-|-11|$ ☐ $-(-11)$ **33.** $-\left|\frac{3}{8}\right|$ ☐ $-\left|-\frac{5}{8}\right|$ **34.** $-\left|-\frac{6}{7}\right|$ ☐ $-\left|\frac{2}{7}\right|$

Ordena los valores de menor a mayor.

35. $-1, -2, |-3|, 4, -|5|$

36. $-8, -12, -|9|, -|20|, -|-17|$

37. $-32, |-7|, 15, -|4|, 4$

38. $\pi, -\pi, |-3|, -|-3|, -2, |-2|$

39. $-6.1, |-6.3|, -|-6.5|, 6.8, |6.4|$

40. $-2.1, -2, -2.4, |-2.8|, -|2.9|$

41. $\frac{1}{3}, \left|-\frac{1}{2}\right|, -2, \left|\frac{3}{5}\right|, \left|-\frac{3}{4}\right|$

42. $\left|-\frac{5}{2}\right|, \frac{3}{5}, |-3|, \left|-\frac{5}{3}\right|, \left|-\frac{2}{3}\right|$

Evalúa cada problema de suma y resta.

43. $8 + (-11)$ **44.** $-13 + 7$ **45.** $-12 + (-10)$

46. $-15 + (-18)$ **47.** $-5 - (-7)$ **48.** $-8 - (-17)$

49. $-9 - (-5)$ **50.** $-12 - (-4)$ **51.** $\frac{4}{5} - \frac{6}{7}$

52. $\frac{3}{8} - \frac{5}{7}$ **53.** $|-5 + 8| + |3 - 13|$ **54.** $|-9 + 6| + |7 - 4|$

55. $-5 - 7$ **56.** $-3 - 9$ **57.** $|17 - 12| - |3|$

58. $|11 - 4| - 10$ **59.** $-|-3| - |7| + 6 + |-2|$ **60.** $|-4| - |-4| - |-4 - 4|$

61. $\left(\frac{3}{5} + \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2}$ **62.** $\frac{4}{5} - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)$

Evalúa cada problema de multiplicación y división.

63. $-5 \cdot 8$ **64.** $(-9)(-3)$ **65.** $-4\left(-\frac{5}{16}\right)$

66. $-4\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$ **67.** $(-1)(-2)(-1)(2)(-3)$ **68.** $(-3)(-2)(-1)(-2)(-3)$

69. $(-0.01)(-0.1)(-1)(-10)(-100)$ **70.** $(-0.02)(-0.2)(-2)(-20)(-200)$ **71.** $-66 \div (-6)$

72. $-16 \div 8$ **73.** $-\frac{7}{9} \div \frac{-7}{9}$ **74.** $-4 \div \left(-\frac{1}{4}\right)$

75. $\left(-\frac{3}{4}\right) \div |-16|$ **76.** $\left|\frac{3}{8}\right| \div (-4)$ **77.** $\left|\frac{-7}{6}\right| \div \left|\frac{-1}{2}\right|$ **78.** $\left|-\frac{1}{2}\right| \cdot \left|\frac{-3}{4}\right|$

Evalúa.

79. $-15 + (-3)$ **80.** $-15 - (-3)$ **81.** $(-15)(-3)$ **82.** $(-15) \div (-3)$

83. $-\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{6}\right)$ **84.** $-\frac{4}{3} + \frac{3}{8}$ **85.** $-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{6}\right)$ **86.** $-\frac{4}{3}\left(\frac{3}{8}\right)$

87. $-14.4 - (-9.6) - 15.8$ **88.** $(1.32 - 2.76) - (-3.85 + 4.28)$ **89.** $\left|\frac{-9}{4}\right| \div \left|\frac{-4}{9}\right|$

90. $-\left|\frac{-24}{5}\right| \cdot \left|\frac{3}{8}\right|$ **91.** $|(-4)(-3)(-2)| + |2(-3)(-4)|$ **92.** $|-4 - 3 - 2| + |2 - 3 - 4$

93. $5 - |-7| + 3 - |-2|$ **94.** $(|-9| - 8) - (3 \cdot |-5|)$ **95.** $\left(-\frac{3}{5} - \frac{4}{9}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right)$

96. $\left(\frac{3}{8} - \frac{4}{7}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)$ **97.** $(25 - |32|)(-7 - 4)$ **98.** $\left[(-2)\left|-\frac{1}{2}\right|\right] \div \left|-\frac{1}{4}\right|$

99. Resta 29 de -10. **100.** Resta $-\frac{1}{2}$ de $-\frac{2}{3}$. **101.** $7(3)(0)(-193)$

102. $16(-5)(-10)(0)$

Nombra la propiedad que se ilustra.

103. $r + s = s + r$ **104** $(5 + x) + 3x = 5 + (x + 3x)$

105. $b \cdot 0 = 0$ **106.** $c \cdot d = d \cdot c$

107. $(x + 3) + 6 = x + (3 + 6)$ **108.** $x + 0 = x$

109. $x = 1 \cdot x$ **110.** $x(y + z) = xy + xz$

111. $2(xy) = (2x)y$ **112.** $(2x \cdot 3y) \cdot 6y = 2x \cdot (3y \cdot 6y)$

113. $4(x + y + 2) = 4x + 4y + 8$ **114.** $-(-2) = 2$

115. $5 + 0 = 5$ **116.** $4 \cdot \frac{1}{4} = 1$

117. $3 + (-3) = 0$ **118.** $234\,567 \cdot 1 = 234\,567$

119. $-(-x) = x$ **120.** $x + (-x) = 0$

121. $4 \cdot (x \cdot 7) \cdot x = 4 \cdot (7 \cdot x) \cdot x$ **122.** $y + (7 + 3y) + 8 = y + (3y + 7) + 8$

123. $1 = \frac{1}{316} \cdot 316$ **124.** $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 0 = 0$

Resolución de problemas

125. Cambio de temperatura El cambio de temperatura más inusual, de acuerdo con el *Libro Guinness de Récords Mundiales*, ocurrió de las 7:30 a.m. a las 7:32 a.m. el 22 de enero de 1943 en Spearfish, Dakota del Sur. Durante estos dos minutos temperatura cambió de -4 °F a 45 °F. Determina el aumento en la temperatura durante estos dos minutos.

126. La película *Gold* Durante la filmación del documental *Gold* (Oro), el equipo de producción experimentó severos cambios de temperatura. En una mina sudafricana de oro, a 3 millas bajo la superficie de la tierra, la temperatura era de 140 °F. En una montaña cerca de Cuzco, Perú, la temperatura era de 40 °F. Determina la diferencia en temperatura entre estos dos sitios de filmación. *Fuente:* sitio Web de History Channel.

127. Buceo submarino Un submarino está a 358.9 pies de profundidad. Poco tiempo después, el submarino sube a una profundidad de 210.7 pies. Determina la profundidad final del submarino a partir de su punto de partida. Considera como negativa la distancia en dirección hacia abajo.



128. Cuenta de cheques Gerardo tenía un saldo de −$32.64 en su cuenta de cheques cuando depositó un cheque por $99.38. ¿Cuál es su nuevo saldo?

129. Temperaturas extremas La menor temperatura de todos los tiempos registrada en Estados Unidos fue de −79.8°F el 23 de enero de 1971, en Prospect Creek, Alaska. La temperatura más baja en los estados contiguos (todos los estados, excepto Alaska y Hawai) fue de −69.7°F el 20 de enero de 1954, en Rogers Pass, Montana. Determina la diferencia en estas temperaturas.

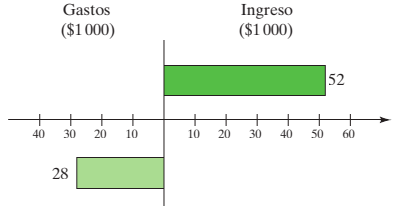
130. Impuestos estimados Julia hizo cuatro pagos trimestrales, por estimaciones del impuesto sobre la renta, por $3000 cada uno. Cuando ella completó su declaración de impuestos, su impuesto total fue de $10 125.

a) ¿Puede Julia solicitar una devolución, o debe más impuestos? Explica.

b) ¿Cuánto recibirá de devolución o cuánto más debe pagar de impuestos?

131. Precios de acciones Rodrigo compró 100 acciones de Facebook, a $30.30 por acción. Seis meses después, Rodrigo vendió las 100 acciones por un precio de $42.37 por acción. ¿Cuál fue la ganancia o pérdida de Rodrigo por esta transacción?

132. Negocios pequeños En la siguiente gráfica se muestran los gastos promedio de primer año, y los ingresos promedio del primer año para pequeños negocios emergentes. Estima el rendimiento promedio del primer año restando los gastos promedio del primer año del ingreso promedio del primer año.



Ejercicio conceptuales y de redacción

En los ejercicios 133–138, determina el(los) número(s) desconocido(s). Explica cómo determinaste tu respuesta.

133. Todos los números a, tales que $|a| = |-a|$

134. Todos los números a, tales que $|a| = a$

135. Todos los números a, tales que $|a| = 6$

136. Todos los números a, tales que $|a| = -a$

137. Todos los números a, tales que $|a| = -9$

138. Todos los números x, tales que $|x - 3| = |3 - x|$

139. Explica cómo sumar dos números con el mismo signo.

140. Explica cómo sumar dos números con signos diferentes.

141. Explica cómo restar números reales.

142. Explica cómo son similares las reglas para multiplicación y división de números reales.

143. Menciona otras dos formas en que puede escribirse la fracción $\frac{a}{-b}$.

144. Usa un ejemplo para explicar por qué la suma no es distributiva sobre la multiplicación. Es decir, explica por qué $a + (b \cdot c) \neq (a + b) \cdot (a + c)$.

Problemas de desafío

145. Evalúa $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + 99 - 100$. (*Sugerencia:* agrupa en pares de dos números.)

146. Evalúa $1 + 2 - 3 + 4 + 5 - 6 + 7 + 8 - 9 + 10 + 11 - 12 + \cdots + 22 + 23 - 24$. (*Sugerencia:* examina en grupos de tres números.)

147. Evalúa $\dfrac{(1) \cdot |-2| \cdot (-3) \cdot |4| \cdot (-5)}{|-1| \cdot (-2) \cdot |-3| \cdot (4) \cdot |-5|}$.

148. Evalúa $\dfrac{(1)(-2)(3)(-4)(5) \cdots (97)(-98)}{(-1)(2)(-3)(4)(-5) \cdots (-97)(98)}$.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.2] **149.** Responde verdadero o falso: todo número irracional es un número real.

150. Escribe el conjunto de números naturales.

151. Considera el conjunto $\left\{3, 4, -2, \frac{5}{6}, \sqrt{11}, 0\right\}$. Indica los elementos que son

a) enteros,

b) números racionales

c) números irracionales,

d) números reales.

152. $A = \{4, 7, 9, 12\}$; $B = \{1, 4, 7, 19\}$. Determina

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

153. Ilustra $\{x \mid -4 < x \leq 5\}$ sobre una recta numérica.

1.4 Orden de las operaciones

1. **Evaluación de expresiones exponenciales**
2. **Evaluación de raíces cuadradas y superiores**
3. **Evaluación de expresiones usando el orden de las operaciones**
4. **Evaluación de expresiones que contienen variables**

Antes de discutir el orden de las operaciones, es necesario hablar brevemente acerca de los exponentes y las raíces.

1 Evaluación de expresiones exponenciales

En la multiplicación, los números o expresiones que se multiplican se llaman **factores**. Si $a \cdot b = c$, entonces a y b son factores de c. Por ejemplo, dado que $2 \cdot 3 = 6$, tanto 2 como 3 son factores de 6. El número 1 es un factor de todo número y expresión.

La cantidad 3^2 se llama **expresión exponencial**. En la expresión, el 3 se llama **base** y el 2 se llama **exponente**. La expresión 3^2 se lee "tres al cuadrado" o "tres a la segunda potencia".

Observa que

$$3^{\overset{\leftarrow \text{ exponente}}{2}} \quad \overset{\leftarrow \text{ base}}{3}$$

$$3^2 = \underbrace{3 \cdot 3}_{\text{2 factores de 3}}$$

SUGERENCIA ÚTIL

Consejo de estudio

Ten cuidado al escribir o copiar exponentes. Dado que los exponentes son pequeños, es muy fácil escribir o copiar un exponente y, más tarde, no reconocer lo que escribiste.

La expresión 5^3 se lee "cinco al cubo" o "cinco a la tercera potencia". Observa que

$$5^3 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{\text{3 factores de 5}}$$

En general, la base b a la *enésima* potencia se escribe b^n. Para cualquier número natural n,

$$b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{n \text{ factores de } b}$$

EJEMPLO 1 Evalúa.

a) $(-2)^4$ **b)** $(-2)^7$ **c)** 1^{27} **d)** 0^{27} **e)** $\left(\frac{5}{6}\right)^3$

Solución

a) $(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$

b) $(-2)^7 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -128$

c) $1^{27} = 1$; 1 elevado a cualquier potencia, es igual a 1.

d) $0^{27} = 0$; 0 elevado a cualquier potencia distinta de cero, es igual a 0. Observa que 0^0 es *indeterminado*.

e) $\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{125}{216}$

Ahora resuelve el ejercicio 17

Siempre que un número o variable se escriba sin un exponente, se asume que el exponente es 1. Por ejemplo, $3 = 3^1$ y $x = x^1$. En la mayoría de los casos, no se escriben los exponentes de 1.

CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

Cuando evalúes expresiones de la forma $-x^2$, recuerda que la expresión $-x^2$ significa $-1 \cdot x^2$, no $(-x)^2$. Por ejemplo, $-5^2 = -1 \cdot 5^2 = -1 \cdot 5 \cdot 5 = -25$. En comparación, $(-5)^2 = (-5)(-5) = 25$. *En general*, $-x^m = -1 \cdot x^m$.

EJEMPLO 2 Evalúa. **a)** -7^2 **b)** $(-7)^2$

Solución

a) $-7^2 = -1 \cdot 7^2 = -1 \cdot 7 \cdot 7 = -49$

b) $(-7)^2 = (-7)(-7) = 49$

Ahora resuelve el ejercicio 41

EJEMPLO 3 Evalúa. **a)** -4^3 **b)** $(-4)^3$

Solución

a) $-4^3 = -1 \cdot 4^3 = -1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = -64$

b) $(-4)^3 = (-4)(-4)(-4) = -64$

Ahora resuelve el ejercicio 49

USA TU CALCULADORA

Evaluar expresiones exponenciales en una calculadora científica y en una graficadora

En muchas calculadoras científicas y graficadoras, la tecla x^2 se puede usar para elevar al cuadrado un número. A continuación, se muestra la secuencia de teclas a oprimir para evaluar 5^2.



Calculadora científica: 5 x^2 25 (respuesta mostrada)



Calculadora graficadora: 5 x^2 ENTER 25 (respuesta mostra

(*Continúa*)

(*Continuación*)

Para evaluar la expresión exponencial con otros exponentes, puedes usar las teclas $\boxed{y^x}$ o $\boxed{\wedge}$. Muchas calculadoras científicas tienen una tecla $\boxed{y^x}$*, mientras que las calculadoras graficadoras usan la tecla $\boxed{\wedge}$. Para evaluar expresiones exponenciales usando estas teclas, primero ingresa la base, luego oprime ya sea $\boxed{y^x}$ o $\boxed{\wedge}$, y después ingresa el exponente. Por ejemplo, para evaluar 6^4 se hace lo siguiente:



Calculadora científica:

$6\ \boxed{y^x}\ 4\ \boxed{=}\ 1\,296$ ← respuesta mostrada



Calculadora graficadora:

$6\ \boxed{\wedge}\ 4\ \boxed{\text{ENTER}}\ 1\,296$ ← respuesta mostrada

Existen muchos modelos de calculadoras tanto científicas como graficadoras. Para esta y otras actividades con calculadora, si las instrucciones dadas no funcionan para tu calculadora, puedes a) leer el manual que viene con tu calculadora, b) entrar a internet y buscar las instrucciones adecuadas para tu modelo de calculadora, o c) pedir ayuda a tu profesor.

*En lugar de la tecla $\boxed{y^x}$, muchas calculadoras científicas tienen una de las siguientes teclas; $\boxed{\wedge}$, $\boxed{x^y}$ o $\boxed{x^{\blacksquare}}$.

2 Evaluación de raíces cuadradas y superiores

El símbolo que se usa para indicar una raíz, $\sqrt{\ }$, se llama **signo radical**. El número o expresión adentro del signo de radical se llama **radicando**. En $\sqrt{25}$, el radicando es 25. La **raíz cuadrada principal o positiva** de un número positivo a, escrito $\sqrt{a}$, es el número positivo que, cuando se multiplica por sí mismo, produce a. Por ejemplo, la raíz cuadrada principal de 4 es 2, que se escribe $\sqrt{4} = 2$, porque $2 \cdot 2 = 4$. En general, $\sqrt{a} = b$ si $b \cdot b = a$. Siempre que se usen las palabras *raíz cuadrada*, se hace referencia a la "raíz cuadrada principal".

EJEMPLO 4 Evalúa. **a)** $\sqrt{25}$ **b)** $\sqrt{\frac{81}{4}}$ **c)** $\sqrt{0.64}$ **d)** $-\sqrt{49}$

Solución

a) $\sqrt{25} = 5$, pues $5 \cdot 5 = 25$.

b) $\sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$, pues $\frac{9}{2} \cdot \frac{9}{2} = \frac{81}{4}$.

c) $\sqrt{0.64} = 0.8$, pues $(0.8)(0.8) = 0.64$.

d) $-\sqrt{49}$ significa $-(\sqrt{49})$. Se determina que $\sqrt{49} = 7$, pues $7 \cdot 7 = 49$. Por tanto, $-\sqrt{49} = -7$.

Ahora resuelve el ejercicio 21

Las raíces cuadradas de números como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, y $\sqrt{5}$ son números irracionales. Los valores decimales de tales números nunca pueden proporcionarse con exactitud, pues los números irracionales son números decimales no finitos ni periódicos. El valor *aproximado* de $\sqrt{2}$ y otros números irracionales, puede determinarse con una calculadora.

$$\sqrt{2} \approx 1.414213562 \quad \text{De una calculadora}$$

En esta sección se introducen las raíces cuadradas; las raíces cúbicas, simbolizadas mediante $\sqrt[3]{\ }$; y raíces superiores. El número usado para indicar la raíz se llama **índice**.

índice, signo de radical

$$\sqrt[n]{a} \leftarrow \text{radicando}$$

El índice de una raíz cuadrada es 2. Sin embargo, por lo general, no se muestra el índice 2. Por tanto, $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$.

El concepto usado para explicar las raíces cuadradas puede extenderse para explicar las raíces cúbicas y raíces superiores. La raíz cúbica de un número a se escribe $\sqrt[3]{a}$.

$$\sqrt[3]{a} = b \quad \text{si} \quad \underbrace{b \cdot b \cdot b}_{\text{3 factores de } b} = a$$

Por ejemplo, $\sqrt[3]{8} = 2$, porque $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. La expresión $\sqrt[n]{a}$ se lee "la raíz *enésima* de a".

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{si} \quad \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{n \text{ factores de } b} = a$$

EJEMPLO 5 Evalúa. **a)** $\sqrt[3]{125}$ **b)** $\sqrt[4]{81}$ **c)** $\sqrt[5]{32}$

Solución

a) $\sqrt[3]{125} = 5$, pues $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

b) $\sqrt[4]{81} = 3$, pues $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

c) $\sqrt[5]{32} = 2$, pues $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.

Ahora resuelve el ejercicio 23

EJEMPLO 6 Evalúa. **a)** $\sqrt[4]{256}$ **b)** $\sqrt[3]{\frac{1}{27}}$ **c)** $\sqrt[3]{-8}$ **d)** $-\sqrt[3]{8}$

Solución

a) $\sqrt[4]{256} = 4$, pues $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$.

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$, pues $\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}$.

c) $\sqrt[3]{-8} = -2$, pues $(-2)(-2)(-2) = -8$.

d) $-\sqrt[3]{8}$ significa $-(\sqrt[3]{8})$. Se determina que $\sqrt[3]{8} = 2$, pues $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Por tanto, $-\sqrt[3]{8} = -2$.

Ahora resuelve el ejercicio 25

USA TU CALCULADORA

Evaluación de raíces en una calculadora científica

Las raíces cuadradas de números pueden determinarse en muchas calculadoras con una tecla de raíz cuadrada, $\boxed{\sqrt{x}}$ o $\boxed{\sqrt{\ }}$. Para evaluar $\sqrt{25}$ en la mayoría de las calculadoras que tienen esta tecla, oprime:

respuesta mostrada

$$25 \ \boxed{\sqrt{x}} \ 5$$

Las raíces superiores pueden determinarse en calculadoras que contengan ya sea la tecla $\boxed{\sqrt[x]{y}}$ o la tecla $\boxed{y^x}$. Para evaluar $\sqrt[4]{625}$ en una calculadora con la tecla $\boxed{=}$, haz lo siguiente:

respuesta mostrada

$$625 \ \boxed{\sqrt[x]{y}} \ 4 \ \boxed{=} \ 5$$

Observa que se coloca el número dentro del signo de radical (el radicando), 625, después se oprime la tecla $\boxed{\sqrt[x]{y}}$ y luego se ingresa la raíz (o índice), 4. Cuando se oprime la tecla $\boxed{=}$, se muestra la respuesta 5.

Para evaluar $\sqrt[4]{625}$ en una calculadora con la tecla $\boxed{y^x}$, usa la tecla inversa del modo siguiente:

respuesta mostrada

$$625 \ \boxed{\text{INV}} \ \boxed{y^x} \ 4 \ \boxed{=} \ 5$$

*Recuerda que las instrucciones y teclas de la calculadora varían en cada modelo. Muchas calculadoras tienen las teclas $\boxed{\wedge}$, $\boxed{x^y}$, o $\boxed{x\ \blacksquare}$ en lugar de la tecla $\boxed{y^x}$. Muchas calculadoras tienen una tecla $\boxed{\text{2nd}}$ o $\boxed{\text{shift}}$, en lugar de la tecla $\boxed{\text{INV}}$. Si las instrucciones dadas no funcionan para tu modelo de calculadora, puedes a) leer el manual que viene con tu calculadora, b) entrar a internet y buscar las instrucciones para tu modelo de calculadora, o c) pedir ayuda a tu profesor.

USA TU CALCULADORA GRAFICADORA

Evaluación de raíces en una calculadora graficadora

Para determinar la raíz cuadrada en una calculadora graficadora, usa $\sqrt{\ }$. El signo $\sqrt{\ }$ aparece arriba de la tecla x^2, así que deberás oprimir la tecla 2nd para evaluar raíces cuadradas. Por ejemplo, para evaluar $\sqrt{25}$ oprime

2nd x^2 25 ENTER 5 ← respuesta mostrada

Cuando presionas 2nd x^2, la Texas Instruments TI–84 Plus genera $\sqrt{\ }$(. Luego, se inserta el radicando, seguido del paréntesis derecho y se oprime ENTER. Para aprender cómo determinar raíces cúbicas y superiores, consulta el manual de tu calculadora graficadora. Con la TI–84 Plus puedes usar la tecla MATH. Cuando oprimes esta tecla, obtienes algunas opciones que incluyen 4 y 5, que se muestran a continuación.

4: $\sqrt[3]{\ }$(5: $\sqrt[x]{\ }$

La opción 4 puede usarse para determinar raíces cúbicas, y la opción 5 puede usarse para determinar raíces superiores, como se muestra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO Evalúa $\sqrt[3]{120}$.

Solución

MATH 4 120) ENTER 4.932424149

(respuesta mostrada; 4: selecciona la opción 4; 120: ingresa el radicando)

Para determinar la raíz con un índice mayor que 3, primero ingresa el índice, después presiona la tecla MATH y luego presiona la opción 5.

EJEMPLO Evalúa $\sqrt[4]{625}$.

Solución

4 MATH 5 625 ENTER 5

(respuesta mostrada; 4: índice; MATH 5: selecciona la opción; 625: ingresa el radicando)

En la sección 7.2, cuando se estudien los exponentes racionales, se mostrará otra forma para determinar raíces en una calculadora graficadora.

3 Evaluación de expresiones usando el orden de las operaciones

Comprende el Álgebra

El acrónimo *PE MD AS* puede ser útil para recordar el orden de las operaciones.

P: Paréntesis
E: Exponentes
M: Multiplicación
D: División
A: Adición (suma)
S: Sustracción (resta)

Observa que la multiplicación y la división se realizan durante el mismo paso, y se trabajan de izquierda a derecha. También la suma y la resta se realizan durante el mismo paso, y de izquierda a derecha.

Con frecuencia tendrás que evaluar expresiones que contengan múltiples operaciones. Para hacer esto, sigue el **orden de las operaciones** que se indica a continuación.

Orden de las operaciones

Para evaluar expresiones matemáticas, usa el siguiente orden:

1. Primero, evalúa las expresiones dentro de los símbolos de agrupamiento, incluidos los paréntesis, ( ), corchetes, [ ], llaves, { }, y valor absoluto | |. Si la expresión contiene símbolos de agrupamiento anidados (un par de símbolos de agrupamiento dentro de otro par), evalúa primero la expresión en los símbolos de agrupamiento más internos.
2. A continuación, evalúa todas las expresiones que contengan exponentes y radicales.
3. Luego, evalúa todas las multiplicaciones o divisiones en el orden en el que ocurran, y trabaja de izquierda a derecha.
4. Finalmente, evalúa todas las sumas o restas en el orden en el que ocurran, y trabaja de izquierda a derecha.

Debes observar que una barra de fracción actúa como un símbolo de agrupamiento. Por tanto, cuando evalúes expresiones que contengan una barra de fracción, trabaja por separado las partes de arriba y abajo de la barra de fracción. Con frecuencia se usan corchetes en lugar de paréntesis para ayudar a evitar confusión. Por ejemplo, la expresión $7((5\cdot 3) + 6)$ es más fácil de seguir cuando se escribe $7[(5\cdot 3) + 6]$. Recuerda evaluar primero el grupo más interno.

EJEMPLO 1 Evalúa $6 + 3\cdot 5^2 - 17$.

Solución Se usará el sombreado para indicar el orden en el cual deben evaluarse las operaciones. Dado que no hay paréntesis, primero evalúa 5^2.

$$6 + 3\cdot 5^2 - 17 = 6 + 3\cdot 25 - 17$$

A continuación, realiza multiplicaciones o divisiones de izquierda a derecha.

$$= 6 + 75 - 17$$

Finalmente, realiza sumas o restas de izquierda a derecha.

$$= 81 - 17 = 64$$

Ahora resuelve el ejercicio 65

EJEMPLO 8 Evalúa $10 + \{6 - [4(5 - 2)]\}^2$.

Solución Primero, evalúa la expresión dentro de los símbolos de agrupamiento más internos, los paréntesis. Después, continúa de acuerdo con el orden de las operaciones.

$$\begin{aligned} 10 + \{6 - [4(5 - 2)]\}^2 &= 10 + \{6 - [4(3)]\}^2 \\ &= 10 + [6 - (12)]^2 \\ &= 10 + (-6)^2 \\ &= 10 + 36 \\ &= 46 \end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 77

EJEMPLO 9 Evalúa $\dfrac{6 \div \frac{1}{2} + 5|7 - 3|}{1 + (3 - 5) \div 2}$.

Solución Recuerda que la barra de fracción actúa como un símbolo de agrupamiento. Trabaja por separado las partes de arriba y abajo de la barra de fracción.

$$\frac{6 \div \frac{1}{2} + 5|7 - 3|}{1 + (3 - 5) \div 2} = \frac{6 \div \frac{1}{2} + 5|4|}{1 + (-2) \div 2}$$

$$= \frac{12 + 20}{1 + (-1)} = \frac{32}{0}$$

Dado que la división entre 0 no es posible, la expresión original es *indefinida*.

Ahora resuelve el ejercicio 83

Comprende el Álgebra

Recuerda que una barra de fracción actúa como un símbolo de agrupamiento. En el ejemplo 9 se trabajan por separado las partes de arriba y abajo de la barra de fracción.

4 Evaluación de expresiones que contienen variables

Para evaluar expresiones matemáticas, se usa el orden de las operaciones recién proporcionado. El ejemplo 10 es un problema aplicado, en el cual se usa el orden de las operaciones.

EJEMPLO 10 **Distancia de frenado** La distancia de frenado se define como la distancia que le toma a un automóvil para llegar a un alto total, después de que el conductor aplica los frenos del automóvil. La distancia de frenado aproximada, en pies, para un automóvil que viaja sobre pavimento seco, puede estimarse mediante la ecuación:

$$\text{distancia de frenado} = 0.05x^2 + 2.2x$$

donde x representa la rapidez del automóvil, en millas por hora (mph). Estima la distancia de frenado de un automóvil que viaja a **a)** 40 mph y a **b)** 80 mph.

Fuente: CSGNetwork.com



Solución

a) Sustituye 40 por x para estimar la distancia de frenado a 40 mph.

$$\begin{aligned}\text{distancia de frenado} &= 0.05x^2 + 2.2x\\ &= 0.05(40)^2 + 2.2(40)\\ &= 0.05(1600) + 88\\ &= 80 + 88\\ &= 168\end{aligned}$$

Por tanto, la distancia de frenado de un automóvil que viaja a 40 mph es de aproximadamente 168 pies.

b) Sustituye 80 por x para estimar la distancia de frenado a 80 mph.

$$\begin{aligned}\text{distancia de frenado} &= 0.05x^2 + 2.2x\\ &= 0.05(80)^2 + 2.2(80)\\ &= 0.05(6400) + 176\\ &= 320 + 176\\ &= 496\end{aligned}$$

Por tanto, la distancia de frenado de un automóvil que viaja a 80 mph es de aproximadamente 496 pies.

Ahora resuelve el ejercicio 123

EJEMPLO 11 Evalúa $-x^3 - xy - y^2$ cuando $x = -2$ y $y = 5$.

Solución Sustituye -2 para cada x, y 5 para cada y en la expresión. Después evalúa.

$$\begin{aligned}-x^3 - xy - y^2 &= -(-2)^3 - (-2)(5) - (5)^2\\ &= -(-8) - (-10) - 25\\ &= 8 + 10 - 25\\ &= -7\end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 101

EJEMPLO 12

a) Determina una expresión algebraica para el siguiente enunciado. Suma 3 a la variable y. Multiplica esta suma por 8. Luego resta 20 de este producto. Finalmente, divide esta diferencia entre 5.

b) Evalúa la expresión algebraica del inciso **a)** cuando $y = 2$.

Solución

a) Traduce los enunciados en expresiones algebraicas, como se muestra a continuación.

Enunciado	Expresión algebraica
Suma 3 a la variable y.	$y + 3$
Multiplica esta suma por 8.	$8(y + 3)$
Luego resta 20 a este producto.	$8(y + 3) - 20$
Finalmente, divide esta diferencia entre 5.	$\dfrac{8(y + 3) - 20}{5}$

b) Para evaluar esta expresión algebraica, cuando $y = 2$, sustituye 2 por y.

$$\frac{8(y+3)-20}{5} \quad \text{Expresión algebraica.}$$

$$= \frac{8(2+3)-20}{5} \quad \text{Sustituido 2 por } y.$$

$$= \frac{8(5)-20}{5} \quad \text{Sumado } 2+3=5.$$

$$= \frac{40-20}{5} \quad \text{Multiplicado } 8 \cdot 5 = 40.$$

$$= \frac{20}{5} \quad \text{Restado } 40-20=20.$$

$$= 4 \quad \text{Dividido } \frac{20}{5} = 4.$$

Ahora resuelve el ejercicio 109

1.4 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

base	índice	positivo	negativo	factores	radicando	16	64
exponente	exponencial	radical	3	6	real	9	18

1. Los números o expresiones que se multiplican juntos se llaman _____.
2. La cantidad 7^2, se llama expresión _____.
3. En la expresión 4^3, el 3 se llama _____.
4. En la expresión 4^3, el 4 se llama _____.
5. El valor de 4^3 es _____.
6. En la expresión $\sqrt{81}$, el $\sqrt{\ }$ se llama signo _____.
7. En la expresión $\sqrt{81}$, el 81 se llama _____.
8. La raíz cuadrada principal o positiva de 81 es _____.
9. En la expresión $\sqrt[4]{81}$, el 4 se llama _____.
10. El valor de $\sqrt[4]{81}$ es _____.
11. El valor de $\sqrt[4]{-81}$ no es un número _____.
12. La raíz cúbica de un número negativo, es un número _____.

Practica tus habilidades

Evalúa cada expresión sin usar una calculadora.

13. **a)** 3^2 **b)** -3^2 **c)** $(-3)^2$ **d)** $-(-3)^2$

14. **a)** 5^2 **b)** -5^2 **c)** $(-5)^2$ **d)** $-(-5)^2$

15. **a)** 2^3 **b)** -2^3 **c)** $(-2)^3$ **d)** $-(-2)^3$

16. **a)** 2^5 **b)** -2^5 **c)** $(-2)^5$ **d)** $-(-2)^5$

17. **a)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^1$ **b)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$ **c)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$ **d)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$

18. **a)** $\left(-\frac{3}{4}\right)^1$ **b)** $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$ **c)** $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$ **d)** $\left(-\frac{3}{4}\right)^4$

19. $(0.2)^3$

20. $(0.3)^2$

21. $\sqrt{49}$

22. $\sqrt{169}$

23. $\sqrt[3]{-27}$

24. $\sqrt[3]{-64}$

25. $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$

26. $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$

Usa una calculadora para evaluar cada expresión. Redondea las respuestas a la milésima más cercana.

27. 0.97^5

28. 1.07^4

29. -2.13^4

30. -3.06^3

31. $\left(-\frac{13}{12}\right)^8$

32. $\left(-\frac{21}{11}\right)^4$

33. $6.721^{5.9}$

34. $5.382^{6.9}$

35. $\sqrt[3]{26}$

36. $\sqrt[3]{537}$

37. $\sqrt[5]{362.65}$

38. $\sqrt[5]{-171}$

39. $-\sqrt[3]{\frac{20}{53}}$

40. $\sqrt[3]{-\frac{15}{19}}$

Evalúa **a)** x^2 *y* **b)** $-x^2$, *para cada valor de x dado.*

41. 3

42. 7

43. -10

44. -2

45. $\frac{1}{3}$

46. $\frac{3}{4}$

47. $-\frac{1}{2}$

48. $-\frac{4}{5}$

Evalúa **a)** x^3 *y* **b)** $-x^3$, *para cada valor de x dado.*

49. 3

50. 5

51. -5

52. -3

53. $\frac{2}{5}$

54. $\frac{3}{7}$

55. $-\frac{2}{3}$

56. $-\frac{3}{4}$

Evalúa cada expresión.

57. $4^2 + 2^3 - 2^2 - 3^3$

58. $(-1)^2 + (-1)^3 - 1^4 + 1^5$

59. $-2^2 - 2^3 + 1^{10} + (-2)^3$

60. $(-3)^3 - 2^2 - (-2)^2 + (9-9)^2$

61. $-7.4^2 + 1.8^3 - (-5.6)^2$

62. $4.1^3 - 5.7^2 + 8.6^2$

63. $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3$

64. $\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} - \left(-\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3$

Evalúa cada expresión.

65. $10 - 3\cdot 4^2 + 11$

66. $13 + 4\cdot 2^3 - 17$

67. $5 - |-3| - (6-2^4)$

68. $-3 - |-7| + (4 - 5^2)$

69. $16 \div 4\cdot 2 - 4\cdot 3^2$

70. $81 \div 9\cdot 3 + 5\cdot 2^3$

71. $\frac{2}{3} \div \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{2} - \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3} \div \frac{2}{9}$

72. $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} - \frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$

73. $10 \div [(3+2^2) - (2^4 - 8)]$

74. $[(7-3^2) + (7-3)^2] \div (35 \div 5)$

75. $[16 \div 2\cdot 3 - (4 - 3^2)^2]^3$

76. $[3 - (4 - 2^3)^2]^2$

77. $\{[(12-15) - 3] - 2\}^2$

78. $4\{6 - [(25 \div 5) - 2]\}^3$

79. $3[5(16-6) \div (25 \div 5)^2]^2$

80. $\{5 + [4^2 - 3(2-7)] - 5\}^2$

81. $\dfrac{4 - (2+3)^2 - 6}{4(3-2) - 3^2}$

82. $\dfrac{15 \div 3 + 7\cdot 2}{\sqrt{25} \div 5 + 8 \div 2}$

83. $\dfrac{8 + 4 \div 2\cdot 3 + 9}{5^2 - 3^2\cdot 2 - 7}$

84. $\dfrac{6(-3) + 4\cdot 7 - 4^2}{-6 + \sqrt{4}(2^2 - 1)}$

85. $\dfrac{8 - [4 - (3-1)^2]}{5 - (-3)^2 + 4 \div 2}$

86. $\dfrac{5 - |-15| \div |3|}{2(4 - |5|) + 9}$

87. $\dfrac{7|-12+9|}{\sqrt{5^2 - 4^2}} + \dfrac{3\sqrt{29+7}}{|-15+9|}$

88. $\dfrac{-5\sqrt{9\cdot 7 + 2\cdot 9}}{|-10-5|} - \dfrac{7|2\cdot 5 - 4^3|}{9\sqrt{2^4 - (-3\cdot 11)}}$

89. $\dfrac{6 - |-4| - 4|8-5|}{5 - 6\cdot 2 \div |-6|}$

90. $\dfrac{10 - |-8| \div |5-9|}{6 + 8 \div 1\cdot 4 - 5\cdot 2^3}$

91. $\frac{2}{5}\left[\sqrt[3]{27} - |-9| + 4 - 3^2\right]^2$

92. $\frac{3}{7}\left[\sqrt[5]{32} - (-8) - 6^2 \div 3^2\right]$

93. $\dfrac{24 - 5 - 4^2}{|-8| + 4 - 2(3)} + \dfrac{4 - (-3)^2 + |4|}{3^2 - 4\cdot 3 + |-7|}$

94. $\dfrac{3(12-9)^2}{-3^2} - \dfrac{2(3^2 - 4^2)}{4 - (-2)}$

Evalúa cada expresión para el valor, o valores, dado(s).

95. $5x^2 + 7x$ cuando $x = 2$

96. $5x^2 - 2x + 17$ cuando $x = 3$

97. $-9x^2 + 3x - 29$ cuando $x = -1$

98. $-5x^2 - x + 7$ cuando $x = -3$

99. $-7x + 3y^2$ cuando $x = 2, y = 4$

100. $4x^2 - 3y - 10$ cuando $x = 4, y = -2$

101. $3(a+b)^2 + 4(a+b) - 6$ cuando $a = 4, b = -1$

102. $-2(p-q)^2 + 8(p-q) - 4$ cuando $p = 3$ y $q = -3$

103. $2(lw + lh + wh)$ cuando $l = 2, w = 3, h = 4$

104. $2(lw + lh + wh)$ cuando $l = 5, w = 6, h = 7$

105. $\dfrac{(x+3)^2}{25} - \dfrac{(y-2)^2}{9}$ cuando $x = -5$ y $y = 5$

106. $\dfrac{(x-3)^2}{9} + \dfrac{(y+5)^2}{16}$ cuando $x = 4, y = 3$

107. $\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ cuando $a = 6, b = -11, c = 3$

108. $\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ cuando $a = 2, b = 1, c = -10$

Resolución de problemas

En los ejercicios 109–114, escribe una expresión algebraica para cada problema. Luego evalúa la expresión para el valor dado de la variable o variables.

109. Multiplica la variable y por 7. Resta 14 a este producto. Ahora divide esta diferencia entre 2. Determina el valor de esta expresión cuando $y = 6$.

110. Resta 4 de z. Multiplica esta diferencia por 5. Ahora eleva al cuadrado el producto. Determina el valor de esta expresión cuando $z = 10$.

111. Seis se suma al producto de 3 y x. Luego, esta expresión se multiplica por 6. Después, se le resta nueve a este producto. Determina el valor de la expresión cuando $x = 3$.

112. La suma de x y y se multiplica por 2. Luego, se resta 5 de este producto. Después, esta expresión se eleva al cuadrado. Determina el valor de la expresión cuando $x = 2$ y $y = -3$.

113. Se suma tres a x. Esta suma se divide entre el doble de y. Después, este cociente se eleva al cuadrado. Finalmente, se le resta 3 a esta expresión. Determina el valor de la expresión cuando $x = 5$ y $y = 2$.

114. Se resta cuatro a x. Esta suma se divide entre $10y$. Después, el cociente se eleva al cubo. Finalmente, se suma 19 a esta expresión. Determina el valor de la expresión cuando $x = 64$ y $y = 3$.

Usa una calculadora para responder los ejercicios 115–128.

115. Paseo en bicicleta Francisco puede viajar en su bicicleta a una razón de 8.2 millas por hora. La distancia, en millas, recorrida después de viajar en su bicicleta x horas, está determinada por:

$$\text{distancia} = 8.2x$$

¿Cuán lejos puede viajar Francisco en

a) 3 horas?

b) 7 horas?

116. Viaje en patineta Samanta puede pasear en su patineta a una razón de 11.5 millas por hora. La distancia, en millas, recorrida después de viajar en su patineta t horas, está determinada por:

$$\text{distancia} = 11.5t$$

¿Cuán lejos puede viajar Samanta en

a) 0.25 horas?

b) 0.75 horas?

117. Lanzamiento de una bola Carlos lanzó una bola de béisbol hacia arriba desde una ventana del dormitorio. La altura de la bola sobre el suelo, en pies, está determinada por:

$$\text{altura} = -16x^2 + 72x + 22$$

donde x es el número de segundos después de lanzar la bola de béisbol desde la ventana. Determina la altura de la bola

a) 2 segundos

b) 4 segundos

después de que se le lanza por la ventana.

118. Velocidad Consulta el ejercicio 117. Después de que la bola se lanza desde la ventana, su velocidad (o rapidez), en pies por segundo, está determinada por:

$$\text{velocidad} = -32x + 72$$

Determina la rapidez de la bola

a) 2 segundos

b) 4 segundos

después de que se le lanza por la ventana.

119. Parques para perros El número de perros que visitan los parques para perros del condado Franklin cada año, se puede aproximar por:

$$\text{número de perros} = 1950 + 75t$$

donde t es el número de años desde 2014. Sustituye 1 por t para determinar el número de perros en 2015, 2 por t para determinar el número de perros en 2016, etcétera. Si supones que esta tendencia continúa, determina el número de perros que visitarán los parques para perros del contado Franklin en:

a) 2020

b) 2025





120. Lectores de periódicos El número de estadounidenses que leen el diario baja de manera constante. El porcentaje de quienes leen el diario puede aproximarse por:

$$\text{porcentaje} = -6.2x + 82.2$$

donde x representa el número de periodos de 10 años desde 1960. Sustituye 1 por x para obtener el porcentaje para 1970, 2 por x para obtener el porcentaje para 1980, 3 por x para obtener el porcentaje para 1990, etcétera.

a) Determina el porcentaje de adultos estadounidenses que leen el diario en 1970.

b) Si supones que esta tendencia continúa, determina el porcentaje de adultos estadounidenses que leerán el diario en 2020.

121. Casitas para pájaros Como pasatiempo, Marcos fabrica y vende casitas para pájaros. Marcos descubrió que el número de casas que vende en un mes, puede estimarse mediante:

$$\text{casitas vendidas} = 30 - \frac{1}{4}x$$

donde x es el precio que Marcos cobra por casita.

Determina el número de casitas para pájaros que Marcos vende en un mes, si él cobra:

a) \$20

b) \$40

122. Fabricante de vestidos Gabriela es propietaria de una tienda de vestidos en Colorado Springs. Gabriela descubrió que el número de vestidos que vende en un mes, puede estimarse mediante:

$$\text{vestidos vendidos} = 200 - \frac{4}{3}x$$

donde x es el precio que Gabriela cobra por vestido.

Determina el número de vestidos que vende Gabriela en un mes, si cobra:

a) \$90

b) \$120

123. Limpieza de casas Elías dirige un servicio de limpieza de casas. Elías determinó que su rendimiento anual, en dólares, puede estimarse mediante:

$$\text{rendimiento anual} = -8x^2 + 1\,200x - 5200$$

donde x es el monto que Elías cobra por limpiar una casa. Estima el rendimiento anual de Elías, si él cobra:

a) \$50

b) \$75

c) \$100

124. Limpieza profunda de botes Regina dirige un negocio de limpieza profunda de botes. Regina ha determinado que su rendimiento anual, en dólares, puede estimarse mediante:

$$\text{rendimiento anual} = -x^2 + 400x - 200$$

donde x es el monto que Regina cobra por bote. Estima el rendimiento anual de Regina, si ella cobra los siguientes montos por bote.

a) \$150

b) \$200

c) \$250

125. Niños cuyos padres trabajan El número de *niños que cuidan de ellos mismos* mientras sus padres trabajan, aumenta con la edad. El porcentaje de niños de diferentes edades, de 5 a 14 años de edad, que cuidan de ellos mismos se puede aproximar por:

$$\text{porcentaje de niños} = 0.23x^2 - 1.98x + 4.42$$

El valor x representa la edad del niño. Por ejemplo, sustituye 5 por x para obtener el porcentaje de todos los niños de 5 años de edad que cuidan de ellos mismos, sustituye 6 por x para obtener el porcentaje de todos los de 6 años de edad que cuidan de ellos mismos, y así sucesivamente.

a) Determina el porcentaje de todos los niños de 10 años de edad que cuidan de ellos mismos.

b) Determina el porcentaje de todos los niños de 14 años de edad que cuidan de ellos mismos.

126. Centenarios Las personas que viven 100 años o más, se conocen como centenarios. El número aproximado de centenarios que viven en Estados Unidos entre los años 1995 y 2050, en miles, se puede estimar mediante:

$$\text{número de centenarios} = 0.30x^2 - 3.69x + 92.04$$

donde x representa años desde 1995. Sustituye 1 por x para obtener el número de centenarios en 1996, 2 por x para obtener el número de centenarios en 1997, etcétera. *Fuente:* U.S. Census Bureau

a) Estima el número de centenarios que vivían en Estados Unidos en 2017.

b) Estima el número de centenarios que vivirán en Estados Unidos en 2050.

127. Comida orgánica Las ventas, en miles de millones de dólares, de los alimentos orgánicos, pueden estimarse mediante:

$$\text{ventas} = 0.07t^2 + 2.84t + 26.81$$

donde t representa el número de años desde 2010. Sustituye 1 por t para estimar las ventas en 2011, 2 por t para estimar las ventas en 2012, etcétera.



Fuente: Organic Trade Association

a) Estima las ventas de alimentos orgánicos en 2017.

b) Si supones que esta tendencia continúa, estima las ventas de alimentos orgánicos en 2025.

128. Conductores de servicio compartido de viaje El número de conductores, en miles, de servicios compartido de viaje, como Uber y Lyft, pueden estimarse mediante:

$$\text{número de conductores} = 29t^2 - 42t + 8$$

donde t representa el número de años desde 2012. Sustituye 1 por t para estimar el número de conductores en 2013, 2 por t para estimar el número de conductores en 2014, etcétera.

Fuente: Departamento de Transporte de Estados Unidos.

a) Estima el número de conductores de servicios compartidos de viaje en 2017.

b) Si supones que esta tendencia continúa, estima el número de conductores de servicios compartidos de viaje en 2020.

Ejercicios conceptuales y de redacción

129. ¿Cuál es el significado de a^n?

130. ¿Qué se entiende si $\sqrt[n]{a} = b$?

131. ¿Cuál es la raíz cuadrada principal de un número positivo?

132. Explica por qué $\sqrt{-4}$ no puede ser un número real.

133. Explica por qué, una raíz impar de un número negativo, será negativa.

134. Explica por qué, una raíz impar de un número positivo, será positiva.

135. Explica el orden de operaciones a seguir, cuando se evalúa una expresión matemática.

136. a) Explica, paso a paso, ¿cómo evaluarías?

$$\frac{5 - 18 \div 3^2}{4 - 3 \cdot 2}$$

b) Evalúa la expresión.

137. a) Explica, paso a paso, ¿cómo evaluarías?

$16 \div 2^2 + 6 \cdot 4 - 24 \div 6.$

b) Evalúa la expresión.

138. a) Explica, paso a paso, ¿cómo evaluarías?

$\{5 - [4 - (3 - 8)]\}^2.$

b) Evalúa la expresión.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.2] **139.** $A = \{a, b, c, d, f\}$, $B = \{b, c, f, g, h\}$. Determina:

a) $A \cap B$,

b) $A \cup B$,

[1.3] *En los ejercicios 140–142, la letra a representa un número real. ¿Para qué valores de a será verdadero cada enunciado?*

140. $|a| = |-a|$

141. $|a| = a$

142. $|a| = 8$

143. Ordena de menor a mayor: $-|6|, -4, -|5|, -|-2|, 0$.

144. Nombra la siguiente propiedad:

$$(7 + 3) + 9 = 7 + (3 + 9).$$

EXAMEN DE MITAD DE CAPÍTULO: 1.1–1.4

Para descubrir cuán bien entiendes el material del capítulo abordado hasta este punto, resuelve esta breve evaluación. Las respuestas, y la sección donde se discutió inicialmente el material, se proporcionan en la parte final del libro. Revisa cualquier pregunta que respondas de manera incorrecta.

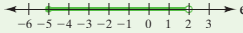
1. ¿Dónde está la oficina de tu profesor? ¿Cuál es el horario de oficina de tu profesor?

2. Dados $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ y $B = \{-1, 1, 3, 5\}$, determina $A \cup B$ y $A \cap B$.

3. Describe el conjunto $D = \{0, 5, 10, 15, \ldots\}$.

4. Ilustra el conjunto $\{x \mid x \geq 3\}$ sobre una recta numérica.

5. Inserta $<$ o $>$ en el área sombreada de $\frac{3}{5} \square \frac{4}{9}$, para hacer una proposición verdadera.

6. Expresa  en notación constructiva de conjuntos.

7. ¿Es W un subconjunto de N? Explica.

8. Ordena los valores de menor a mayor: $-15, |-17|, |-6|, 7$.

En los ejercicios 9–13, evalúa cada expresión.

9. $7 - 2.3 - (-4.5)$

10. $\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}$

11. $(5)(-2)(3.2)(-8)$

(*Continúa*)

(*Continuación*)

12. $\left|-\frac{8}{13}\right| \div (-2)$

13. $(7 - |-2|) - (-8 + |16|)$

14. Nombra la propiedad ilustrada por $5(x + y) = 5x + 5y$.

15. Simplifica $\sqrt{0.81}$.

16. Evalúa

a) -11^2

b) $(-11)^2$

17. **a)** Escribe el orden de las operaciones.

b) Evalúa $4 - 2 \cdot 3^2$ y explica cómo determinaste tu respuesta.

Evalúa cada expresión.

18. $5 \cdot 4 \div 10 + 2^5 - 11$

19. $\frac{1}{4}\{[(12 \div 4)^2 - 7]^3 \div 2\}^2$

20. $\dfrac{\sqrt{16} + (\sqrt{49} - 6)^4}{\sqrt[3]{-27} - (4 - 3^2)}$

1.5 Exponentes

1. Uso de la regla del producto para exponentes
2. Uso de la regla del cociente para exponentes
3. Uso de la regla del exponente cero
4. Uso de la regla del exponente negativo
5. Uso de la regla para elevar una potencia a otra potencia
6. Uso de la regla para elevar un producto a una potencia
7. Uso de la regla para elevar un cociente a una potencia

Comprende el Álgebra

Cuando *multipliques* expresiones con la misma base, mantén la base y *suma los exponentes*.

$2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8 = 256$

En esta sección se analizará las reglas de los exponentes.

1 Uso de la regla del producto para exponentes

Considera la multiplicación $x^3 \cdot x^5$. Esta expresión se puede simplificar del siguiente modo:

$$x^3 \cdot x^5 = (x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x) = x^8$$

Este problema también se podría simplificar usando la **regla del producto para exponentes**.*

Regla del producto para exponentes

Si m y n son números naturales y a es cualquier número real, entonces

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Para multiplicar expresiones exponenciales, conserva la base común y suma los exponentes.

$$x^3 \cdot x^5 = x^{3+5} = x^8$$

EJEMPLO 1 Simplifica. **a)** $2^2 \cdot 2^3$ **b)** $k^4 \cdot k^5$ **c)** $m^7 \cdot m$

Solución

a) $2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$

b) $k^4 \cdot k^5 = k^{4+5} = k^9$

c) $m^7 \cdot m = m^7 \cdot m^1 = m^{7+1} = m^8$

Ahora resuelve el ejercicio 9

2 Uso de la regla del cociente para exponentes

Considera la división $x^7 \div x^4$. Esta expresión se puede simplificar del siguiente modo:

$$\frac{x^7}{x^4} = \frac{\overset{1}{\cancel{x}} \cdot \overset{1}{\cancel{x}} \cdot \overset{1}{\cancel{x}} \cdot x \cdot x \cdot x}{\underset{1}{\cancel{x}} \cdot \underset{1}{\cancel{x}} \cdot \underset{1}{\cancel{x}} \cdot \underset{1}{\cancel{x}}} = x \cdot x \cdot x = x^3$$

Este problema también se podría simplificar usando la **regla del cociente para exponentes**.

Regla del cociente para exponentes

Si a es cualquier número real distinto de cero, y m y n son enteros, entonces

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

*Las reglas presentadas en esta sección, también se aplican para exponentes racionales o fraccionarios.

Comprende el Álgebra

Cuando se *dividen* expresiones con la misma base, conserva la base y *resta los exponentes*.

$$\frac{5^6}{5^4} = 5^{6-4} = 5^2 = 25$$

Para dividir expresiones en forma exponencial, conserva la base común y resta los exponentes.

$$\frac{x^7}{x^4} = x^{7-4} = x^3$$

EJEMPLO 2 Simplifica. **a)** $\frac{6^4}{6^2}$ **b)** $\frac{x^7}{x^3}$ **c)** $\frac{y^4}{y}$

Solución **a)** $\frac{6^4}{6^2} = 6^{4-2} = 6^2 = 36$ **b)** $\frac{x^7}{x^3} = x^{7-3} = x^4$ **c)** $\frac{y^4}{y} = \frac{y^4}{y^1} = y^{4-1} = y^3$

Ahora resuelve el ejercicio 11

3 Uso de la regla del exponente cero

La siguiente regla que se estudiará, es la **regla del exponente cero**. Cualquier número distinto de cero dividido entre sí mismo, es 1. Por tanto,

$$\frac{x^5}{x^5} = 1.$$

Por la regla de cocientes para exponentes,

$$\frac{x^5}{x^5} = x^{5-5} = x^0.$$

Dado que $x^0 = \frac{x^5}{x^5}$ y $\frac{x^5}{x^5} = 1$, entonces:

$$x^0 = 1.$$

Regla del exponente cero

Si a es cualquier número real distinto de cero, entonces

$$a^0 = 1$$

La regla del exponente cero ilustra que *cualquier número real distinto de cero con exponente* 0, *es igual a* 1. Se debe especificar que $a \neq 0$ porque 0^0 es indefinido.

EJEMPLO 3 Simplifica. Supón que todas las variables son distintas de cero.

a) $2018°$ **b)** $3x°$ **c)** $-z°$ **d)** $-(3x-7)°$

Solución

a) $2018^0 = 1$

b) $3x^0 = 3 \cdot x^0 = 3 \cdot 1 = 3$

c) $-z^0 = -1 \cdot z^0 = -1 \cdot 1 = -1$

d) $-(3x-7)^0 = -1 \cdot (3x-7)^0 = -1 \cdot 1 = -1$

Ahora resuelve el ejercicio 29

4 Uso de la regla del exponente negativo

Considera la expresión $\frac{y^2}{y^5}$. Por la regla del cociente, se obtiene $\frac{y^2}{y^5} = y^{2-5} = y^{-3}$. Observa que esta expresión contiene un exponente negativo. A continuación se evaluará esta expresión al dividir los factores comunes.

$$\frac{y^2}{y^5} = \frac{\overset{1}{\cancel{y}} \cdot \overset{1}{\cancel{y}}}{\underset{1}{\cancel{y}} \cdot \underset{1}{\cancel{y}} \cdot y \cdot y \cdot y} = \frac{1}{y^3}$$

Al dividir los factores comunes y usar el resultado de la regla del cociente, se puede razonar que $y^{-3} = \frac{1}{y^3}$. Este es un ejemplo de la **regla del exponente negativo**.

Comprende el Álgebra

Cuando se simplifican expresiones con una base elevada a un *exponente negativo*, la respuesta es una fracción con un *numerador* de 1 y un *denominador* de la base elevada al *exponente positivo*:

$$4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$

Regla del exponente negativo

Para cualquier número real distinto de cero a y cualquier número entero no negativo m,

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

Una expresión elevada a un exponente negativo, es igual a 1 *dividido por la expresión elevada al exponente positivo.*

EJEMPLO 4 Escribe cada expresión sin exponentes negativos.

a) 7^{-2} **b)** $8a^{-6}$ **c)** $\frac{1}{c^{-5}}$

Solución

a) $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$ **b)** $8a^{-6} = 8 \cdot \frac{1}{a^6} = \frac{8}{a^6}$

c) $\frac{1}{c^{-5}} = 1 \div c^{-5} = 1 \div \frac{1}{c^5} = \frac{1}{1} \cdot \frac{c^5}{1} = c^5$

Ahora intenta el ejercicio 37

SUGERENCIA ÚTIL

En el ejemplo 4 **c)** se demostró que $\frac{1}{c^{-5}} = c^5$. En general, para cualquier número real distinto de cero a y cualquier número entero no negativo m, $\frac{1}{a^{-m}} = a^m$. Cuando un factor del numerador, o del denominador, se eleva a un exponente negativo, el factor se puede mover al otro lado de la barra de fracción, siempre que el signo del exponente se haga positivo. Por ejemplo:

$$\frac{2a^{-3}}{b^2} = \frac{2}{a^3 b^2} \qquad \frac{a^{-2}b^4}{c^{-3}} = \frac{b^4 c^3}{a^2}$$

Nota: cuando usas este procedimiento, el signo de la base no cambia, sólo el signo del exponente. Por ejemplo,

$$-c^{-3} = -1 \cdot (c^{-3}) = -1 \cdot \left(\frac{1}{c^3}\right) = -\frac{1}{c^3}$$

Por lo general, no se dejan expresiones exponenciales con exponentes negativos. *Cuando se indica que una expresión exponencial se debe simplificar, significa que la respuesta debe escribirse sin exponentes negativos.*

El ejemplo 5 **d),** que se muestra a continuación, tiene una fracción que contiene expresiones exponenciales con exponentes negativos, tanto en el numerador como en el denominador. Cuando se simplifican dichas fracciones, si la misma variable aparece tanto en el numerador como en el denominador, usualmente la variable con *menor exponente* se mueve hacia el lado opuesto de la barra de fracción. Esto resultará en que el exponente de la variable se vuelva positivo cuando se aplique la regla del producto.

EJEMPLO 5 Simplifica.

a) $\frac{5xz^2}{y^{-4}}$ **b)** $4^{-2}x^{-1}y^2$ **c)** $-3^3x^2y^{-6}$ **d)** $\frac{a^2b^{-4}c^{-6}}{a^{-3}b^2c^{-2}}$

Comprende el Álgebra

Cuando un factor distinto de cero, del numerador o del denominador, se eleva a un exponente negativo, el factor se puede mover hacia el otro lado de la barra de fracción, siempre que el signo del exponente se haga positivo:

$$\frac{a^{-2}b^{-3}}{c^{-4}d^{-5}} = \frac{c^4d^5}{a^2b^3}$$

Solución

a) $\dfrac{5xz^2}{y^{-4}} = 5xy^4z^2$

b) $4^{-2}x^{-1}y^2 = \dfrac{1}{4^2}\cdot\dfrac{1}{x^1}\cdot y^2 = \dfrac{y^2}{16x}$

c) $-3^3x^2y^{-6} = -(3^3)x^2\cdot\dfrac{1}{y^6} = -\dfrac{27x^2}{y^6}$

d) $\dfrac{a^2b^{-4}c^{-6}}{a^{-3}b^2c^{-2}} = \dfrac{a^2a^3}{b^2b^4c^{-2}c^6} = \dfrac{a^{2+3}}{b^{2+4}c^{-2+6}} = \dfrac{a^5}{b^6c^4}$

Ahora resuelve el ejercicio 41

Observa que, las expresiones en el ejemplo 5, no involucran la suma o resta. La presencia de un signo más o un signo menos, conduce a un problema muy diferente, como se verá en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 Simplifica. **a)** $4^{-1}+6^{-1}$ **b)** $2\cdot3^{-2}+7\cdot6^{-2}$

Solución

a) $4^{-1} + 6^{-1} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6}$ Regla del exponente negativo

$= \dfrac{3}{12} + \dfrac{2}{12}$ Reescribe con el MCD, 12.

$= \dfrac{3+2}{12} = \dfrac{5}{12}$

b) $2\cdot3^{-2} + 7\cdot6^{-2} = 2\cdot\dfrac{1}{3^2} + 7\cdot\dfrac{1}{6^2}$ Regla del exponente negativo

$= \dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{1}{9} + \dfrac{7}{1}\cdot\dfrac{1}{36}$

$= \dfrac{2}{9} + \dfrac{7}{36}$

$= \dfrac{8}{36} + \dfrac{7}{36}$ Reescribe con el MCD, 36.

$= \dfrac{8+7}{36} = \dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}$

Ahora resuelve el ejercicio 75

5 Uso de la regla para elevar una potencia a una potencia

Considera la expresión $(x^3)^2$. Esta expresión se puede simplificar del siguiente modo:

$$(x^3)^2 = x^3\cdot x^3 = x^{3+3} = x^6$$

Este problema también se podría simplificar usando la regla para **elevar una potencia a otra potencia** (también llamada **regla de la potencia**).

Comprende el Álgebra

Cuando una *potencia* se eleva a otra *potencia*, conserva la base y *multiplica* los exponentes:

$$(a^4)^3 = a^{4\cdot3} = a^{12}$$

Elevar una potencia a otra potencia (la regla de la potencia)

Si a es un número real, y m y n son enteros, entonces

$$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$$

Para elevar una expresión exponencial a una potencia, mantén la base y multiplica los exponentes.

$$(x^3)^2 = x^{3\cdot2} = x^6$$

EJEMPLO 7 Simplifica. Supón que todas las variables son distintas de cero.

a) $(3^3)^2$ **b)** $(y^5)^8$ **c)** $(w^{-5})^{-2}$ **d)** $(3^{-2})^4$

Solución

a) $(3^3)^2 = 3^{3\cdot 2} = 3^6 = 729$

b) $(y^5)^8 = y^{5\cdot 8} = y^{40}$

c) $(w^{-5})^{-2} = w^{(-5)\cdot(-2)} = w^{10}$

d) $(3^{-2})^4 = 3^{(-2)\cdot(4)} = 3^{-8} = \dfrac{1}{3^8} = \dfrac{1}{6\,561}$

Ahora resuelve el ejercicio 79

SUGERENCIA ÚTIL

Los estudiantes con frecuencia confunden la *regla del producto*

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

con la *regla de la potencia*

$$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$$

Por ejemplo, $(x^3)^2 = x^6$, no x^5, y $(y^2)^5 = y^{10}$, no y^7.

6 Uso de la regla para elevar un producto a una potencia

Considera la expresión $(xy)^2$. Esta expresión se puede simplificar del modo siguiente:

$$(xy)^2 = (xy)(xy) = x \cdot x \cdot y \cdot y = x^2y^2$$

Esta expresión también se podría simplificar usando la regla para **elevar un producto a una potencia**.

Comprende el Álgebra

Cuando un producto se eleva a una potencia, eleva cada factor del producto a la potencia:

$$(3\cdot 5)^2 = 3^2 \cdot 5^2 = 9 \cdot 25 = 225$$

Elevar un producto a una potencia

Si a y b son números reales, y m es un entero, entonces

$$(ab)^m = a^m b^m$$

Para elevar un producto a una potencia, eleva todos los factores dentro de los paréntesis a la potencia afuera de los paréntesis.

EJEMPLO 8 Simplifica. **a)** $(-9x^3)^2$ **b)** $(3x^{-5}y^4)^{-3}$

Solución

a) $(-9x^3)^2 = (-9)^2(x^3)^2 = 81x^6$

b) $(3x^{-5}y^4)^{-3} = 3^{-3}(x^{-5})^{-3}(y^4)^{-3}$ Eleva un producto a una potencia.

$= \dfrac{1}{3^3} \cdot x^{15} \cdot y^{-12}$ Regla del exponente negativo, regla de la potencia.

$= \dfrac{1}{27} \cdot x^{15} \cdot \dfrac{1}{y^{12}}$ Regla del exponente negativo.

$= \dfrac{x^{15}}{27y^{12}}$

Ahora resuelve el ejercicio 93

7 Uso de la regla para elevar un cociente a una potencia

Considera la expresión $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2$. Esta expresión se puede simplificar del siguiente modo:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} = \frac{x \cdot x}{y \cdot y} = \frac{x^2}{y^2}$$

Esta expresión también se podría simplificar usando la regla para **elevar un cociente a una potencia**.

Comprende el Álgebra

Cuando un cociente se eleva a un exponente, escribe el numerador elevado al exponente dividido entre el denominador elevado al exponente.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$$

Elevar un cociente a una potencia

Si a y b son números reales, y m es un entero, entonces

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \qquad b \neq 0$$

Para elevar un cociente a una potencia, eleva todos los factores en los paréntesis al exponente afuera de los paréntesis.

EJEMPLO 9 Simplifica. **a)** $\left(\frac{5}{x^2}\right)^3$ **b)** $\left(\frac{2x^{-2}}{y^3}\right)^{-4}$

Solución

a) $\left(\frac{5}{x^2}\right)^3 = \frac{5^3}{(x^2)^3} = \frac{125}{x^6}$

b) $\left(\frac{2x^{-2}}{y^3}\right)^{-4} = \frac{2^{-4}(x^{-2})^{-4}}{(y^3)^{-4}}$ Eleva un cociente a una potencia.

$= \frac{2^{-4}x^8}{y^{-12}}$ Regla de la potencia.

$= \frac{x^8 y^{12}}{2^4}$ Regla del exponente negativo.

$= \frac{x^8 y^{12}}{16}$

Ahora resuelve el ejercicio 99

Considera $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$. Usando la regla para elevar un cociente a una potencia, se obtiene

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Comprende el Álgebra

Cuando se tiene un número racional distinto de cero elevado a un exponente negativo, se puede tomar el recíproco de la base y hacer positivo el exponente:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$$

Usando este resultado, se ve que, cuando se tiene un número racional elevado a un exponente negativo, se puede tomar el recíproco de la base y cambiar el signo del exponente, del modo siguiente:

$$\left(\frac{8}{9}\right)^{-3} = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \qquad \left(\frac{x^2}{y^3}\right)^{-4} = \left(\frac{y^3}{x^2}\right)^4$$

Ahora se trabajarán algunos ejemplos que combinan algunas de las propiedades. Estos ejemplos pueden simplificarse en más de una forma.

EJEMPLO 10 Simplifica. **a)** $\left(\frac{15x^2y^4}{5x^2y}\right)^2$ **b)** $\left(\frac{6x^4y^{-2}}{12xy^3z^{-1}}\right)^{-3}$

Solución

a) $\left(\frac{15x^2y^4}{5x^2y}\right)^2 = (3y^3)^2 = 9y^6$

b) Comienza por simplificar la expresión dentro de los paréntesis.

$$\left(\frac{6x^4y^{-2}}{12xy^3z^{-1}}\right)^{-3} = \left(\frac{1x^4z^1}{2xy^3y^2}\right)^{-3}$$ Se simplifica $\frac{6}{12}$ y se reescriben los factores dentro de los paréntesis con exponentes positivos.

$$= \left(\frac{x^3z}{2y^5}\right)^{-3}$$ $\frac{x^4}{x} = x^3; z^1 = z;$ y $y^3y^2 = y^5$

$$= \left(\frac{2y^5}{x^3z}\right)^{3}$$ Se toma el recíproco de la expresión dentro de los paréntesis y se hace positivo el exponente.

$$= \frac{2^3(y^5)^3}{(x^3)^3z^3}$$ Cada factor dentro de los paréntesis se eleva a la potencia de 3.

$$= \frac{8y^{15}}{x^9z^3}$$ Se usa de la regla de la potencia.

Ahora resuelve el ejercicio 109

EJEMPLO 11 Simplifica $\dfrac{(2p^{-3}q^5)^{-2}}{(p^{-5}q^4)^{-3}}$.

Solución Primero se usará la regla de la potencia tanto en el numerador como en el denominador. Después se reescribirán todos los factores con exponentes positivos.

$$\frac{(2p^{-3}q^5)^{-2}}{(p^{-5}q^4)^{-3}} = \frac{2^{-2}(p^{-3})^{-2}(q^5)^{-2}}{(p^{-5})^{-3}(q^4)^{-3}}$$ Cada factor se eleva en el numerador a una potencia de -2. Cada factor se eleva en el denominador a una potencia de -3.

$$= \frac{2^{-2}p^6q^{-10}}{p^{15}q^{-12}}$$ Se usa la regla de la potencia.

$$= \frac{p^6q^{12}}{2^2p^{15}q^{10}}$$ Se vuelven a escribir los factores con exponentes positivos.

$$= \frac{1}{2^2}\cdot\frac{p^6}{p^{15}}\cdot\frac{q^{12}}{q^{10}}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p^9}\cdot q^2$$ Se usa la regla del cociente.

$$= \frac{q^2}{4p^9}$$

Ahora resuelve el ejercicio 115

Resumen de las reglas de los exponentes

Para todos números reales a y b, y todos los enteros m y n:

- Regla del producto $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- Regla del cociente $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$
- Regla del exponente cero $a^0 = 1, \quad a \neq 0$
- Regla del exponente negativo $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}, \quad a \neq 0$
- Elevar una potencia a otra potencia $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$
- Elevar un producto a una potencia $(ab)^m = a^m b^m$
- Elevar un cociente a una potencia $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}, \quad b \neq 0$

1.5 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

aditivo producto indefinido negativo $\frac{a^m}{b^m}$ cero potencia cociente $a^m b^m$

1. La regla $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ se llama regla del _____ para exponentes.
2. Para $a \neq 0$, la regla $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ se llama regla del _____ para exponentes.
3. Para $a \neq 0$, la regla $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ se llama regla del exponente _____.
4. Para $a \neq 0$, la regla $a^0 = 1$ se llama regla del exponente _____.
5. La expresión 0^0 es _____.
6. La regla $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ se llama regla de elevar una _____ a una potencia.
7. La regla de elevar un producto a una potencia afirma que $(ab)^m =$ _____.
8. La regla de elevar un cociente a una potencia afirma que $\left(\frac{a}{b}\right)^m =$ _____.

Practica tus habilidades

Evalúa cada expresión.

9. $2^4 \cdot 2^2$
10. $3^2 \cdot 3^3$
11. $\frac{4^5}{4^3}$
12. $\frac{8^7}{8^6}$
13. $\frac{2^5}{2^8}$
14. $\frac{5^6}{5^8}$
15. 9^{-2}
16. 7^{-2}
17. $\frac{1}{5^{-3}}$
18. $\frac{1}{3^{-2}}$
19. 15^0
20. 24^0
21. $(2^3)^2$
22. $(3^2)^3$
23. $(2 \cdot 4)^2$
24. $(6 \cdot 5)^2$
25. $\left(\frac{4}{7}\right)^2$
26. $\left(\frac{3}{5}\right)^4$
27. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$
28. $\left(\frac{5}{6}\right)^{-2}$

Simplifica cada expresión y escribe la respuesta sin exponentes negativos. Asume que todas las variables son distintas de cero.

29. **a)** $5x^0$ **b)** $-5x^0$ **c)** $(-5x)^0$ **d)** $-(-5x)^0$
30. **a)** $7y^0$ **b)** $(7y)^0$ **c)** $-7y^0$ **d)** $(-7y)^0$
31. **a)** $3xyz^0$ **b)** $(3xyz)^0$ **c)** $3x(yz)^0$ **d)** $3(xyz)^0$
32. **a)** $x^0 + y^0$ **b)** $(x + y)^0$ **c)** $x + y^0$ **d)** $x^0 + y$

Evalúa cada expresión.

33. **a)** 3^{-2} **b)** $(-3)^{-2}$ **c)** -3^{-2} **d)** $-(-3)^{-2}$
34. **a)** 4^{-3} **b)** $(-4)^{-3}$ **c)** -4^{-3} **d)** $-(-4)^{-3}$
35. **a)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ **b)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$ **c)** $-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ **d)** $-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$
36. **a)** $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$ **b)** $\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2}$ **c)** $-\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$ **d)** $-\left(-\frac{3}{5}\right)^{-2}$

Simplifica cada expresión y escribe la respuesta sin exponentes negativos. Asume que todas las variables son distintas de cero.

37. $7y^{-3}$
38. $4k^{-5}$
39. $-\frac{9}{7x^{-2}}$
40. $-\frac{5y^{-4}}{3}$

41. $\dfrac{3a}{b^{-3}}$ **42.** $\dfrac{10x^4}{y^{-1}}$ **43.** $\dfrac{17m^{-2}n^{-3}}{2}$ **44.** $\dfrac{13x^{-3}}{z^4}$

45. $\dfrac{5x^{-2}y^{-3}}{z^{-4}}$ **46.** $\dfrac{3a^{-3}b^{-4}}{c^{-5}}$ **47.** $\dfrac{-5^{-2}x^2y^0}{x^{-3}}$ **48.** $\dfrac{q^{-7}}{-4^{-3}p^0q^4}$

Simplifica cada expresión y escribe la respuesta sin exponentes negativos. Supón que todas las variables son distintas de cero.

49. a) $x^7 \cdot x^3$ **b)** $(x^7)^3$ **c)** $\dfrac{x^7}{x^3}$ **d)** $\dfrac{x^3}{x^7}$

50. a) $j^8 \cdot j^5$ **b)** $(j^8)^5$ **c)** $\dfrac{j^8}{j^5}$ **d)** $\dfrac{j^5}{j^8}$

51. a) $x^4 \cdot x^6$ **b)** $x^{-4}x^6$ **c)** x^4x^{-6} **d)** $x^{-4}x^{-6}$

52. a) $k^3 \cdot k^9$ **b)** $k^{-3}k^9$ **c)** k^3k^{-9} **d)** $k^{-3}k^{-9}$

53. a) $\dfrac{x^2}{x^{-5}}$ **b)** $\dfrac{x^{-2}}{x^5}$ **c)** $\dfrac{x^{-2}}{x^{-5}}$ **d)** $\dfrac{x^{-5}}{x^{-2}}$

54. a) $\dfrac{m^4}{m^{-7}}$ **b)** $\dfrac{m^{-4}}{m^7}$ **c)** $\dfrac{m^{-4}}{m^{-7}}$ **d)** $\dfrac{m^{-7}}{m^{-4}}$

55. a) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^3$ **b)** $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-3}$ **c)** $(xy)^3$ **d)** $(xy)^{-3}$

56. a) $\left(\dfrac{c}{d}\right)^5$ **b)** $\left(\dfrac{c}{d}\right)^{-5}$ **c)** $(cd)^5$ **d)** $(cd)^{-5}$

57. $\dfrac{r^{-5}}{r^0}$ **58.** $\dfrac{p^0}{p^{-3}}$ **59.** $\dfrac{5w^{-2}}{w^{-7}}$ **60.** $\dfrac{3w^{-5}}{w^{-2}}$

61. $(-5u^{-8})(-9u^2)$ **62.** $(-8v^4)(-3v^{-5})$ **63.** $(7v^3w^{-7})(8v^{-2}w^{-3})$ **64.** $(2x^{-3}y^{-4})(6x^{-4}y^7)$

65. $(5r^2s^{-2})(-2r^5s^2)$ **66.** $(-11p^{-1}q^4)(5pq^8)$ **67.** $(2x^4y^7)(4x^3y^{-5})$ **68.** $(3g^{-3}h^4)(5g^8h^{-4})$

69. $\dfrac{33x^5y^{-4}}{11x^3y^2}$ **70.** $\dfrac{14a^3b^{-7}}{70ab^2}$ **71.** $\dfrac{9xy^{-4}z^3}{-3x^{-2}yz}$ **72.** $\dfrac{16x^{-2}y^3z^{-2}}{-2x^4y}$

Simplifica cada expresión y escribe la respuesta sin exponentes negativos. Asume que todas las variables son distintas de cero.

73. a) $4(a+b)^0$ **b)** $4a^0 + 4b^0$ **c)** $(4a+4b)^0$ **d)** $-4a^0 + 4b^0$

74. a) $-3^0 + (-3)^0$ **b)** $-3^0 - (-3)^0$ **c)** $-3^0 + 3^0$ **d)** $-3^0 - 3^0$

75. a) $2^{-1} + 3^{-1}$ **b)** $2^{-1} - 3^{-1}$ **c)** $5 \cdot 3^{-1} - 3 \cdot 2^{-1}$ **d)** $(5 \cdot 3)^{-1} - (3 \cdot 2)^{-1}$

76. a) $4^{-1} + 5^{-1}$ **b)** $4^{-1} - 5^{-1}$ **c)** $2 \cdot 3^{-1} + 5 \cdot 2^{-1}$ **d)** $(2 \cdot 3)^{-1} + (5 \cdot 2)^{-1}$

Simplifica cada expresión y escribe la respuesta sin exponentes negativos. Asume que todas las variables son distintas de cero.

77. $(3^{-2})^2$ **78.** $(2^2)^{-3}$ **79.** $(b^{-3})^{-2}$ **80.** $(z^{-5})^{-3}$

81. $(-c)^3$ **82.** $(-c)^4$ **83.** $(-x)^{-4}$ **84.** $(-x)^{-3}$

85. $(-5x^{-3})^2$ **86.** $(-2y^{-4})^4$ **87.** $4^{-2} + 8^{-1}$ **88.** $5^{-1} + 2^{-1}$

89. $3 \cdot 4^{-2} + 9 \cdot 8^{-1}$ **90.** $5 \cdot 2^{-3} + 7 \cdot 4^{-2}$ **91.** $\left(\dfrac{4b}{3}\right)^{-2}$ **92.** $\left(\dfrac{2c}{5}\right)^{-3}$

93. $(4x^2y^{-2})^2$ **94.** $(5v^{-3}w^4)^2$ **95.** $(5p^2q^{-4})^{-3}$ **96.** $(3r^{-4}s^5)^{-6}$

97. $(-3g^{-4}h^3)^{-3}$ **98.** $(-5dk^{-4})^{-5}$ **99.** $\left(\dfrac{5j}{4k^2}\right)^2$ **100.** $\left(\dfrac{3x^2y^4}{z}\right)^3$

101. $\left(\dfrac{28a^4b^7}{14a^9b^6}\right)^5$ **102.** $\left(\dfrac{5m^5n^6}{10m^4n^7}\right)^3$ **103.** $\left(\dfrac{5xy^4}{35yz}\right)^{-2}$ **104.** $\left(\dfrac{14x^2y}{7xz}\right)^{-3}$

105. $\left(\dfrac{9x^{-2}}{xy}\right)^{-2}$ **106.** $\left(\dfrac{4x^2y}{x^{-5}}\right)^{-3}$ **107.** $\left(\dfrac{5x^{-2}y}{x^{-5}}\right)^{3}$ **108.** $\left(\dfrac{7a^2b^{-5}}{b^{-3}}\right)^{3}$

109. $\left(\dfrac{a^0b^2c^{-3}}{a^{-5}b^6c^{-7}}\right)^{-1}$ **110.** $\left(\dfrac{p^{-6}q^{-3}r^5}{p^0q^{-8}r}\right)^{-1}$ **111.** $\left(\dfrac{6x^{-1}y^{-2}z^3}{2xy^2z^{-3}}\right)^{-2}$ **112.** $\left(\dfrac{9x^4y^{-6}z^4}{3xy^{-6}z^{-2}}\right)^{-2}$

113. $\dfrac{(2x^{-1}y^{-2})^{-3}}{(5x^{-1}y^3)^2}$ **114.** $\dfrac{(2xy^2z^{-3})^2}{(9x^{-1}yz^2)^{-1}}$ **115.** $\dfrac{(2x^4y^0z^{-5})^{-3}}{(4x^2y^5z^3)^{-2}}$ **116.** $\dfrac{(4a^{-3}b^5c^{-3})^{-4}}{(2a^0b^{-9}c^4)^{-2}}$

Resolución de problemas

En los ejercicios 117–128, simplifica cada expresión. Asume que todas las variables son distintas de cero.

117. $x^{2a}\cdot x^{5a+3}$ **118.** $y^{2m+3}\cdot y^{5m-7}$ **119.** $w^{2a-5}\cdot w^{3a-2}$ **120.** $d^{-4x+7}\cdot d^{5x-6}$

121. $\dfrac{x^{2w+3}}{x^{w-4}}$ **122.** $\dfrac{y^{5m-1}}{y^{7m-1}}$ **123.** $(x^{3p+5})(x^{2p-3})$ **124.** $(s^{2t-3})(s^{-t+5})$

125. $x^{-m}(x^{3m+2})$ **126.** $y^{3b+2}\cdot y^{2b+4}$ **127.** $\dfrac{30m^{a+b}n^{b-a}}{6m^{a-b}n^{a+b}}$ **128.** $\dfrac{24x^{c+3}y^{d+4}}{8x^{c-4}y^{d+6}}$

129. a) ¿Para qué valores de x se cumple que $x^4 > x^3$?
b) ¿Para qué valores de x se cumple que $x^4 < x^3$?
c) ¿Para qué valores de x se cumple que $x^4 = x^3$?
d) ¿Por qué no se puede decir que $x^4 > x^3$?

130. ¿3^{-8} es mayor que o menor que 2^{-8}? Explica.

131. a) Explica por qué $(-1)^n = 1$ para cualquier número par n.
b) Explica por qué $(-1)^n = -1$ para cualquier número impar n.

132. a) Explica por qué $(-12)^{-8}$ es positivo.
b) Explica por qué $(-12)^{-7}$ es negativo.

133. a) ¿Es $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$ igual que $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$?
b) ¿$(x)^{-2}$ será igual que $(-x)^{-2}$ para todos los números reales x, excepto para 0? Explica tu respuesta.

134. a) ¿$\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$ es igual que $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$?
b) ¿$(x)^{-3}$ es igual que $(-x)^{-3}$ para cualquier número real x distinto de cero? Explica.
c) ¿Cuál es la relación entre $(-x)^{-3}$ y $(x)^{-3}$ para cualquier número real x distinto de cero?

Determina qué exponentes deben colocarse en el área sombreada para hacer cada expresión verdadera. Cada área sombreada puede representar un exponente diferente. Explica cómo determinaste tu respuesta.

135. $\left(\dfrac{x^2y^{-2}}{x^{-3}y^{\square}}\right)^2 = x^{10}y^2$ **136.** $\left(\dfrac{x^{-2}y^3z}{x^4y^{\square}z^{-3}}\right)^3 = \dfrac{z^{12}}{x^{18}y^6}$ **137.** $\left(\dfrac{x^{\square}y^5z^{-2}}{x^4y^{\square}z}\right)^{-1} = \dfrac{x^5z^3}{y^2}$

Problemas de desafío

En la sección 7.2 se aprenderá que las reglas de los exponentes dados en esta sección también se aplican cuando los exponentes son números racionales. Con esta información y las reglas de exponentes, evalúa cada expresión.

138. $\left(\dfrac{x^{1/2}}{x^{-1}}\right)^{3/2}$ **139.** $\left(\dfrac{x^{5/8}}{x^{1/4}}\right)^{3}$ **140.** $\left(\dfrac{x^4}{x^{-1/2}}\right)^{-1}$ **141.** $\dfrac{x^{1/2}y^{-3/2}}{x^5y^{5/3}}$ **142.** $\left(\dfrac{x^{1/2}y^4}{x^{-3}y^{5/2}}\right)^2$

Actividad grupal

Discute y responde el ejercicio 143 con tu equipo de trabajo.

143. Duplicar una moneda de un centavo En el día 1 te dan un centavo. En cada día posterior, recibes el doble del monto que tenías el día previo.

a) Escribe los montos que tendrías en cada uno de los primeros 6 días.
b) Expresa cada uno de estos números como una expresión exponencial con una base de 2.

c) Al observar el patrón, determina una expresión exponencial para el número de centavos que recibirás en el día 10.

d) Escribe una expresión exponencial general para el número de centavos que recibirás en el día n.

e) Escribe una expresión exponencial para el número de centavos que recibirás en el día 30.

f) Calcula el valor de la expresión en el inciso **e)**. Usa una calculadora si hay alguna disponible.

g) Determina el monto encontrado en el inciso **f)** en dólares.

h) Escribe una expresión exponencial general para el número de dólares que recibirás en el día n.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.2] **144.** Si $A = \{3, 4, 6\}$ y $B = \{1, 2, 5, 9\}$, encuentra

a) $A \cup B$ y

a) $A \cap B$.

145. Dibuja el siguiente conjunto sobre la recta numérica: $\{x | -3 \leq x < 2\}$.

[1.4] **146.** Evalúa $8 + |12| \div |-3| - 4 \cdot 2^2$.

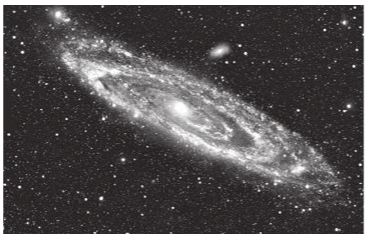
147. Evalúa $\sqrt[3]{-125}$.

1.6 Notación científica

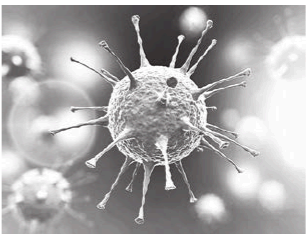
1. **Escritura de números en notación científica**
2. **Conversión de números en notación científica, a su forma decimal**
3. **Uso de la notación científica para resolver problemas**

1 Escritura de números en notación científica

Científicos e ingenieros con frecuencia tratan con números muy grandes y muy pequeños. Por ejemplo, la frecuencia de una señal de radio FM puede ser de 14 200 000 000 hertz (o ciclos por segundo), y el diámetro de un átomo de hidrógeno es de aproximadamente 0.0000000001 metros. Dado que es difícil trabajar con muchos ceros, los científicos con frecuencia expresan dichos números con exponentes. Por ejemplo, el número 14 200 000 000 puede escribirse como 1.42×10^{10}, y 0.0000000001 como 1×10^{-10}. Los números como 1.42×10^{10} y 1×10^{-10} están en un formato llamado **notación científica**. En notación científica, los números se expresan como $a \times 10^n$, donde $1 \leq a < 10$ y n es un entero. Cuando una potencia de 10 no tiene un coeficiente numérico específico, como en 10^5, se supone que el coeficiente numérico es 1. Por tanto, 10^5 significa 1×10^5 y 10^{-4} significa 1×10^{-4}.



El diámetro de esta galaxia es de aproximadamente 1×10^{21} metros.



El diámetro de este virus es de aproximadamente 1×10^{-7} metros.

Ejemplos de números en notación científica

$$3.2 \times 10^6 \qquad 4.176 \times 10^3 \qquad 2.64 \times 10^{-2}$$

A continuación, se muestra el número 32 400 convertido a notación científica.

$$32\,400 = 3.24 \times 10\,000$$
$$= 3.24 \times 10^4 \qquad (10000 = 10^4)$$

En 10 000 existen cuatro ceros, el mismo número que el exponente en 10^4. A continuación, se muestra el procedimiento para escribir un número en notación científica.

Para escribir un número en notación científica

1. Mueve el punto decimal en el número a la derecha del primer dígito distinto de cero. Esto produce un número mayor o igual que 1, y menor que 10.
2. Cuenta el número de lugares que moviste el punto decimal en el paso 1. Si el número original es 10, o más grande, la cuenta debe considerarse positiva. Si el número original es menor que 1, la cuenta debe considerarse negativa.
3. Multiplica el número obtenido en el paso 1 por 10, elevado a la cuenta (potencia) encontrada en el paso 2.

EJEMPLO 1 Escribe los números siguientes en notación científica.

a) 68 900 **b)** 0.000572 **c)** 0.0074

Solución

a) El punto decimal en 68 900 está a la derecha del último cero.

$$68\,900. = 6.89 \times 10^4$$

El punto decimal se movió cuatro lugares. Dado que el número original es mayor que 10, el exponente es positivo.

b) $0.000572 = 5.72 \times 10^{-4}$

El punto decimal se movió cuatro lugares. Dado que el número original es menor que 1, el exponente es negativo.

c) $0.0074 = 7.4 \times 10^{-3}$

Ahora resuelve el ejercicio 11

Comprende el Álgebra

La notación científica se usa para escribir números muy grandes o muy pequeños, por ejemplo:

$1\,800\,000\,000 = 1.8 \times 10^9$

$0.0000075 = 7.5 \times 10^{-6}$

2 Conversión de números en notación científica, a su forma decimal

Ocasionalmente necesitarás convertir un número escrito en notación científica a su forma decimal. El procedimiento para hacerlo es el siguiente.

Para convertir un número en notación científica a su forma decimal

1. Observa el exponente sobre la base 10.
   - **a)** Si el exponente es positivo, mueve el punto decimal en el número a la derecha, el mismo número de lugares que el exponente. Quizás sea necesario agregar ceros al número. Esto resultará en un número mayor o igual que 10.
   - **b)** Si el exponente es 0, el punto decimal en el número no se mueve desde su posición actual. Elimina el factor 10^0. Esto resultará en un número mayor que o igual 1, pero menor que 10.
   - **c)** Si el exponente es negativo, mueve el punto decimal en el número a la izquierda, el mismo número de lugares que el exponente. Quizás sea necesario agregar ceros. Esto resultará en un número menor que 1.

EJEMPLO 2 Escribe los siguientes números sin exponentes.

a) 2.1×10^4 **b)** 8.73×10^{-3} **c)** 1.45×10^8

Solución

a) Mueve el punto decimal cuatro lugares a la derecha.

$$2.1 \times 10^4 = 2.1 \times 10\,000 = 21\,000$$

b) Mueve el punto decimal tres lugares a la izquierda.

$$8.73 \times 10^{-3} = 0.00873$$

c) Mueve el punto decimal ocho lugares a la derecha.

$$1.45 \times 10^8 = 145\,000\,000$$

Ahora resuelve el ejercicio 19

3 Uso de la notación científica para resolver problemas

Cuando se trabaja con números escritos en notación científica, se pueden usar las reglas de los exponentes, como se ilustra en las siguientes aplicaciones.

EJEMPLO 3 **Deuda pública por persona** La deuda pública es el monto total que debe el gobierno federal a los prestamistas, en forma de bonos gubernamentales. El 13 de febrero de 2017, la deuda pública estadounidense era de aproximadamente $19.98 billones, y la población estadounidense era de aproximadamente 324.5 millones de personas.

a) Escribe estos dos número en notación científica.

b) Determina la deuda pública aproximada, por persona, en Estados Unidos. Este número se llama *deuda per cápita*.

c) El 13 de febrero de 2012, la deuda pública estadounidense era de aproximadamente $15.22 billones. ¿Cuánto más grande era la deuda pública en 2017, comparada con la de 2012?

d) ¿Cuántas veces mayor era la deuda pública en 2017, comparada con la de 2012?

Solución

a) Comienza por escribir los números y después cambia los números a notación científica.

$$19.98 \text{ billones} = 19\,980\,000\,000\,000 = 1.998 \times 10^{13}$$

$$324.5 \text{ millones} = 324\,500\,000 = 3.245 \times 10^{8}$$

b) Para determinar la deuda per cápita, divide la deuda pública entre la población.

$$\frac{1.998 \times 10^{13}}{3.245 \times 10^{8}} = \frac{1.998}{3.245} \times \frac{10^{13}}{10^{8}} \approx 0.6157 \times 10^{5} \approx 6.157 \times 10^{4} \approx 61\,570$$

Por tanto, la deuda per cápita, el 13 de febrero de 2017, era de aproximadamente $61 570.

c) Primero, escribe 15.22 billones en notación científica.

$$15.22 \text{ billones} = 15\,220\,000\,000\,000 = 1.522 \times 10^{13}$$



Bonos estadounidenses

A continuación, es necesario determinar la diferencia entre la deuda en 2017 y la deuda en 2012.

$$\begin{aligned} 1.998 \times 10^{13} - 1.522 \times 10^{13} &= (1.998 - 1.522) \times 10^{13} \\ &= 0.476 \times 10^{13} = 4.76 \times 10^{12} \\ &= 4\,760\,000\,000\,000 \end{aligned}$$

Por tanto, la deuda pública en 2017 era de aproximadamente $4 760 000 000 000 ($4.76 billones) más que la deuda pública en 2012.

d) Para determinar cuántas veces mayor era la deuda 2017, divide la deuda en 2017 entre la deuda en 2012:

$$\frac{1.998 \times 10^{13}}{1.522 \times 10^{13}} \approx 1.31$$

Por tanto, la deuda pública en 2017 era aproximadamente 1.31 veces mayor que la deuda pública en 2012.

Ahora resuelve el ejercicio 85

EJEMPLO 4 **Átomos en un diamante** Los diamantes son piedras preciosas que se miden en quilates. Un diamante, de un cuarto de quilate, tiene una masa de 0.05 gramos. Los diamantes consisten por completo del elemento químico carbono, y la unidad más pequeña de carbono es el átomo de carbono. Si un gramo de carbono contiene aproximadamente 5.014×10^{22} átomos de carbono, ¿cuántos átomos de carbono hay en un diamante de un cuarto de quilate?



Solución Primero, el número 0.05 escrito en notación científica es 5×10^{-2}. A continuación, determina el número de átomos de carbono en un diamante de un cuarto de quilate, multiplica la masa en gramos, 5×10^{-2}, por el número de átomos de carbono en un gramo de carbono, 5.014×10^{22}.

$$\begin{aligned}\text{número de átomos de carbono} &= (5 \times 10^{-2})(5.014 \times 10^{22}) \\ &= (5 \cdot 5.014) \times (10^{-2} \cdot 10^{22}) \\ &= 25.07 \times 10^{-2+22} \\ &= 25.07 \times 10^{20} \\ &= 2.507 \times 10^{21}\end{aligned}$$

Por tanto, hay alrededor de 2.507×10^{21} átomos de carbono en un diamante de un cuarto de quilate.

Ahora resuelve el ejercicio 89

USA TU CALCULADORA

En una calculadora científica, o graficadora, el producto de (8000000)(400000) puede mostrarse como 3.2^{12} o 3.2E12. Ambos representan 3.2×10^{12}, que es 3200000000000.

Para ingresar los números en notación científica en una calculadora científica, o graficadora, por lo general, se usan las teclas [EE] o [EXP]. Para ingresar 4.6×10^8, oprimirías ya sea 4.6 [EE] 8 o 4.6 [EXP] 8. Entonces la pantalla de tu calculadora mostrará 4.6^{08} o 4.6E8.

En la TI–84 Plus, EE aparece arriba de la tecla [,]. Así que, para ingresar (8000000)(400000) en notación científica, oprimirías:

8 [2nd] [,] 6 [×] 4 [2nd] [,] 5 [ENTER] 3.2E12

(2nd [,] para obtener EE; 2nd [,] para obtener EE; respuesta mostrada)

1.6 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

irracional menor no negativo entero mayor negativo

1. Supón que $a \times 10^b$ representa un número escrito en notación científica. Entonces a debe ser un número _____ o igual que uno y menor que 10.
2. Supón que $a \times 10^b$ representa un número escrito en notación científica. Entonces b debe ser un _____.
3. Supón que $a \times 10^b$ representa un número escrito en notación científica que es menor que uno. Entonces b debe ser un entero _____.
4. Supón que $a \times 10^b$ representa un número escrito en notación científica que es mayor o igual que uno. Entonces b debe ser un entero _____.

Practica tus habilidades

Expresa cada número sin exponentes.

5. 50
6. 260
7. 0.043
8. 0.75
9. 760000
10. 9260000,000
11. 0.00000186
12. 0.00000914
13. 5780000
14. 952000000
15. 0.000106
16. 0.0000723

Expresa cada número en notación científica.

17. 7.9×10^2
18. 2.01×10^6
19. 2.13×10^{-5}
20. 6.78×10^{-5}

21. 9.17×10^{-1} **23.** 9.3×10^{1} **25.** 3.0×10^{6} **27.** 1×10^{6}

22. 4.56×10^{-1} **24.** 5.4×10^{1} **26.** 7.6×10^{4} **28.** 1×10^{-8}

Expresa cada valor sin exponentes.

29. $(4 \times 10^{5})(6 \times 10^{2})$

30. $(8 \times 10^{4})(6 \times 10^{3})$

31. $(8.2 \times 10^{5})(1.4 \times 10^{-2})$

32. $(6.3 \times 10^{4})(3.7 \times 10^{-8})$

33. $(9.1 \times 10^{-4})(7.4 \times 10^{-4})$

34. $(7.6 \times 10^{-3})(1.2 \times 10^{-1})$

35. $\dfrac{1.68 \times 10^{4}}{5.6 \times 10^{7}}$

36. $\dfrac{9.3 \times 10^{13}}{6.2 \times 10^{8}}$

37. $\dfrac{9.45 \times 10^{-3}}{3.5 \times 10^{2}}$

38. $\dfrac{8.5 \times 10^{3}}{1.7 \times 10^{-2}}$

39. $\dfrac{8.4 \times 10^{-6}}{4 \times 10^{-4}}$

40. $\dfrac{7.2 \times 10^{-2}}{3.6 \times 10^{-6}}$

Expresa cada valor en notación científica.

41. (0.03)(0.0005)

42. (0.0015)(0.00038)

43. $\dfrac{35\,000\,000}{7\,000}$

44. $\dfrac{56\,000}{8\,000\,000\,000}$

45. $\dfrac{0.00069}{23\,000}$

46. $\dfrac{560\,000}{0.0008}$

47. (2 500)(7 000)

48. (47 000)(35 000 000)

49. $\dfrac{2016}{0.0021}$

50. $\dfrac{0.018}{160}$

51. $\dfrac{0.00153}{0.00051}$

52. $\dfrac{0.0000286}{0.00143}$

Expresa cada valor en notación científica. Redondea los números decimales a la milésima más cercana.

53. $(4.78 \times 10^{9})(1.96 \times 10^{5})$

54. $(4.9 \times 10^{5})(1.347 \times 10^{31})$

55. $(7.23 \times 10^{-3})(1.46 \times 10^{5})$

56. $(4.16 \times 10^{3})(9.14 \times 10^{-31})$

57. $(2.14 \times 10^{-3})(3.79 \times 10^{-15})$

58. $(4.36 \times 10^{-6})(1.07 \times 10^{-6})$

59. $\dfrac{5.55 \times 10^{3}}{1.11 \times 10^{1}}$

60. $\dfrac{9.675 \times 10^{25}}{3.225 \times 10^{15}}$

61. $\dfrac{1.5 \times 10^{35}}{4.5 \times 10^{-26}}$

62. $\dfrac{3.71 \times 10^{11}}{4.72 \times 10^{-9}}$

63. $\dfrac{4.36 \times 10^{-4}}{8.17 \times 10^{-7}}$

64. $\dfrac{2.47 \times 10^{-16}}{1.59 \times 10^{-3}}$

Notación científica *En los ejercicios 65-78, escribe, en notación científica, cada número en cursiva.*

65. A la NASA le cuesta alrededor de *$2.1 mil millones* enviar a Marte el Mars 2020 rover.



66. La distancia entre el Sol y la Tierra, es de aproximadamente *93 millones* de millas.

67. El área terrestre de la Tierra es de aproximadamente *510.1 millones* de kilómetros cuadrados.

68. De acuerdo con la oficina censal estadounidense, la población mundial en 2050, será de aproximadamente *9.7 mil millones* de personas.

69. De acuerdo con la revista "Forbes", en 2017 la persona más rica del mundo era Bill Gates, cuya fortuna neta era de *$75 mil millones* de dólares.

70. De acuerdo con la Fundación Gates, Bill y Melinda Gates han donado alrededor de *$30.2 mil millones* de dólares a la caridad.

71. Los dos planetas que están más cerca uno del otro, son la Tierra y Venus. Ellos se encuentran aproximadamente a *25.7 millones* de millas uno del otro.

72. Los dos planetas que están más separados uno del otro, son Mercurio y Neptuno. Ellos se encuentran aproximadamente a *2.76 mil millones* de millas uno del otro.



Neptuno

73. El diámetro de un cabello humano es de aproximadamente *0.0000254* metros.

74. El diámetro de un átomo de hidrógeno es de aproximadamente *0.000000000106* metros.

75. Una pulgada $\approx$ *0.0000158* millas.

76. Una onza $\approx$ *0.00003125* toneladas.

77. Un miligramo $\approx$ *0.000000001* tonelada métrica.

78. La supercomputadora Titan, en Oak Ridge National Laboratory, en Tennessee, puede realizar 1 cálculo en *0.000000000000000037* segundos.

Resolución de problemas

En los ejercicios 79-94, usa notación científica para responder la pregunta. A menos que se indique de otra manera, escribe tu respuesta en forma decimal, redondeada a la centésima más cercana.

79. Órbita de la Luna

a) La Luna completa su órbita de 1.42×10^6 millas alrededor de la Tierra en 27.5 días. Determina la distancia recorrida en un día.

b) Determina la distancia recorrida en una hora.

80. Órbita de la Tierra

a) La Tierra completa su órbita de 5.85×10^8 millas alrededor del Sol en 365.3 días. Determina la distancia recorrida en un día.

b) Determina la distancia recorrida en una hora.

81. Viaje hacia el Sol

a) La distancia hacia el Sol es de aproximadamente 9.3×10^7 millas. Si una nave espacial viaja a 3.6×10^4 millas por hora, ¿cuántas horas tardaría la nave espacial para llegar al Sol?

b) ¿Cuántos días tardaría la nave espacial para llegar al Sol?

82. Viaje a Próxima Centauri La estrella que está más cerca del Sol, es Próxima Centauri. La distancia desde la Tierra hasta Próxima Centauri, es de aproximadamente 2.5×10^{13} millas.

a) Si una nave espacial viaja a 3.6×10^4 millas por hora, ¿cuántas horas tardaría la nave espacial para llegar a Próxima Centauri?

b) ¿Cuántos días tardaría la nave espacial para llegar a Próxima Centauri?

c) ¿Cuántos años tardaría la nave espacial para llegar a Próxima Centauri?

83. Población de Estados Unidos En febrero de 2017, la población de Estados Unidos era aproximadamente 3.245×10^8, y la población del mundo era aproximadamente 7.484×10^9.
Fuente: U.S. Census Bureau

a) ¿Cuántas personas vivían afuera de Estados Unidos en 2017?

b) ¿Qué porcentaje de la población mundial vivía en Estados Unidos en 2017? Redondea tu respuesta a la centésima de punto porcentual más cercana.

84. Población de China En febrero de 2017, la población de China era aproximadamente 1.388×10^9 y la población del mundo era aproximadamente 7.484×10^9.
Fuente: U.S. Census Bureau

a) ¿Cuántas personas vivían afuera de China en 2017?

b) ¿Qué porcentaje de la población mundial vivía en China en 2017? Redondea tu respuesta a la centésima de punto porcentual más cercana.

85. Producto interno bruto estadounidense El producto interno bruto (PIB), es el monto total de bienes y servicios producidos en un país en un año. En 2016, el PIB de Estados Unidos era de aproximadamente $18.56 billones de dólares y la población era de aproximadamente 323.9 millones de personas.
Fuente: Departamento del Tesoro de Estados Unidos.

a) Escribe cada uno de estos números en notación científica.

b) Determina el PIB *per cápita* al dividir el PIB entre la población.

86. Producto interno bruto de China En 2016, el PIB (consulta el ejercicio 85) de China era de aproximadamente $11.39 billones de dólares y la población era de aproximadamente 1.376 mil millones de personas.
Fuente: Departamento del Tesoro de Estados Unidos.

a) Escribe cada uno de estos números en notación científica.

b) Determina el PIB *per cápita* al dividir el PIB entre la población.

87. Puente Golden Gate Al momento de su conclusión, en 1937, el puente Golden Gate en San Francisco, California, tenía un peso total de 1.789×10^9 libras. Con la intención de reducir la tensión sobre el puente, la plataforma de la carretera se revistió en 1985 con un material más ligero y más resistente. En la actualidad, el puente tiene un peso total de 1.714×10^9 libras.

a) ¿Cuál es la diferencia en el peso total de cuando se completó el puente y el peso total de la actualidad?

b) Determina la reducción porcentual en el peso del puente, al dividir la respuesta del inciso **a)**, entre el peso original del puente. Redondea tu respuesta a la centésima de punto porcentual más cercana.

88. Puente New River Gorge El puente New River Gorge mide 3030.5 pies de largo, y es el arco de acero individual con el claro más largo del mundo. Su peso total es 8.80×10^7 libras y su pieza individual más pesada pesa 1.84×10^5 libras.

a) ¿Cuántas veces mayor es el peso total del puente, comparado con el peso de la pieza individual más pesada?

b) ¿Cuál es la diferencia, en peso, entre el peso total del puente y el peso de la pieza individual más pesada?

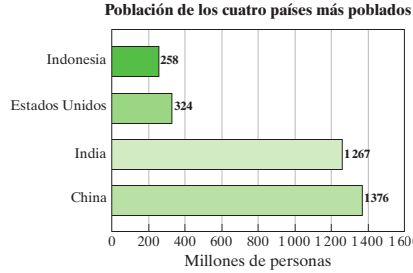


Puente New River Gorge

89. Moléculas en un grano de arena La mayoría de la arena de playa consiste del compuesto químico dióxido de silicio. Existen alrededor de 1×10^{22} moléculas de dióxido de silicio por gramo de arena de playa. Un grano de arena típico, tiene una masa de aproximadamente 2.3×10^{-4} gramos. ¿Cuántas moléculas de dióxido de silicio hay en un grano de arena? Escribe tu respuesta en notación científica.

90. Átomos en alambre de cobre La mayoría de las casas estadounidenses usan alambre de cobre de calibre 12 en los circuitos eléctricos. La unidad más pequeña del cobre, es el átomo de cobre. Un gramo de alambre de cobre contiene aproximadamente 9.5×10^{21} átomos. Si una pulgada de alambre de cobre de calibre 12 tiene una masa aproximada de 0.73 gramos, ¿cuántos átomos de cobre hay en una pulgada de alambre de cobre calibre 12? Escribe tu respuesta en notación científica.

91. Países más poblados En la siguiente gráfica de barras, se muestran los cuatro países más poblados en el mundo y sus poblaciones en 2016 (estimadas al millón más cercano).



Fuente: U.S. Census Bureau

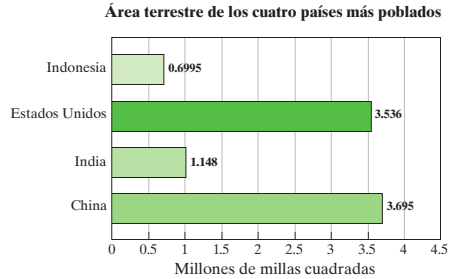
a) Escribe las poblaciones de estos países en notación científica.

b) Suma las poblaciones de China e India. Escribe tu respuesta en notación científica.

c) Suma las poblaciones de Estados Unidos e Indonesia. Escribe tu respuesta en notación científica.

d) ¿Cuántas veces mayor es la población combinada de China e India, comparada con la población combinada de Estados Unidos e Indonesia?

92. Densidades de población La densidad de población de un país, se encuentra al dividir la población del país entre el área terrestre del país. En la siguiente gráfica de barras, se proporciona el área terrestre, en millas cuadradas, de los cuatro países más poblados (consulta el ejercicio 91).



Fuente: U.S. Census Bureau

a) Escribe cada una de las áreas terrestres en notación científica.

b) Determina la densidad de población de Indonesia al dividir la población de Indonesia entre el área terrestre de Indonesia. Redondea tu respuesta al número entero no negativo más cercano.

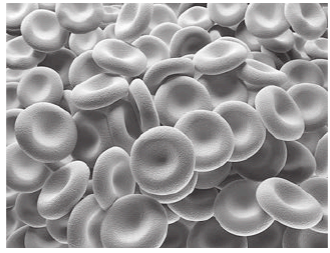
c) Determina la densidad de población de Estados Unidos.

d) Determina la densidad de población de India.

e) Determina la densidad de población de China.

93. Virus y bacterias El virus que causa influenza, tiene un diámetro aproximado de 8.5×10^{-8} metros. La bacteria que causa neumonía, tiene un diámetro aproximado de 8.75×10^{-7} metros. ¿Cuántas veces más grande es el diámetro de la bacteria, comparado con el diámetro del virus?
Fuente: www.biologycorner.com

94. Eritrocitos y leucocitos Un eritrocito tiene un diámetro aproximado de 7×10^{-6} metros. Un leucocito tiene un diámetro aproximado de 1.5×10^{-5} metros. ¿Cuántas veces más grande es el diámetro de un leucocito, comparado con el diámetro de un eritrocito?
Fuente: www.biologycorner.com



Eritrocitos

Ejercicios conceptuales y de redacción

95. Explica cómo usar tu calculadora científica, o graficadora, para hacer cálculos con números escritos en notación científica.

96. Explica cómo puedes dividir rápidamente un número dado en notación científica entre:

a) 10

b) 100

c) 1 millón

d) Divide 6.58×10^{-4} entre 1 millón. Deja tu respuesta en notación científica.

97. Explica cómo puedes multiplicar rápidamente un número dado en notación científica por:

a) 10

b) 100

c) 1 millón

d) Multiplica 7.59×10^{7} por 1 millón. Deja tu respuesta en notación científica.

98. Experimento científico Durante un experimento científico determinaste que la respuesta correcta es 5.25×10^{4}.

a) Si por error escribes la respuesta como 4.25×10^{4}, ¿por cuánto está equivocada tu respuesta?

b) Si por error escribes la respuesta como 5.25×10^{5}, ¿por cuánto está equivocada tu respuesta?

c) ¿Cuál de los dos errores es más grave? Explica.

Problemas de desafío

99. Año-luz Un *año-luz* es la distancia que la luz recorre en 1 año.

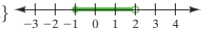
a) Determina el número de millas en un año-luz, si la luz viaja a 1.86×10^{5} millas *por segundo*.

b) Si la Tierra está a 93 000 000 de millas del Sol, ¿cuánto tarda la luz del Sol en llegar a la Tierra?

c) La Vía Láctea, nuestra galaxia, tiene un diámetro aproximado de 6.25×10^{16} millas. Si una nave espacial pudiera viajar a la mitad de la rapidez de la luz, ¿cuánto tardaría la nave en viajar, de un extremo de la galaxia al otro?

Capítulo 1 Resumen

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 1.2	
Una **variable** es una letra que se usa para representar varios números. Una **constante** es una letra que se usa para representar un valor en particular. Una **expresión algebraica** (o **expresión**) es cualquier combinación de números, variables, exponentes, símbolos matemáticos y operaciones.	La x y la y se usan comúnmente para variables. Si h es el número de horas en un día, entonces $h = 24$ es una constante. $3x^2(x - 2) + 2x$ Es una expresión algebraica

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 1.2 (Continuación)	
Un **conjunto** es una colección de objetos. Los objetos se llaman **elementos**. La **forma de lista** es un conjunto cuyos elementos se enlistan dentro de un par de llaves. Un primer conjunto es un **subconjunto** de un segundo conjunto, cuando todo elemento del primer conjunto también es elemento del segundo conjunto. El **conjunto nulo**, o **conjunto vacío**, simbolizado $\{\ \}$ o $\emptyset$, no tiene elementos.	Si $A = \{\text{azul, verde, rojo}\}$, entonces azul, verde y rojo son elementos de A. $\{1, 3, 5\}$ es un subconjunto de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ El conjunto de las personas vivas que tienen más de 200 años de edad, es un conjunto vacío.
Símbolos de desigualdad • $>$ se lee "es mayor que". • $\geq$ se lee "es mayor o igual que". • $<$ se lee "es menor que". • $\leq$ se lee "es menor o igual que". • $\neq$ se lee "no es igual que". Las desigualdades se pueden graficar sobre una recta numérica real. La **notación constructiva de conjuntos** tiene la forma: $\{\ x\ \mid\ x \text{ tiene la propiedad } p\ \}$ El conjunto de todos los elementos x tales que x tiene la propiedad dada	$6 > 2$ se lee 6 es mayor que 2 $5 \geq 5$ se lee 5 es mayor o igual que 5 $-4 < 3$ se lee -4 es menor que 3 $-10 \leq -1$ se lee -10 es menor o igual que -1 $-5 \neq 17$ se lee -5 no es igual que 17 $x > 3$  $\{x \mid -1 \leq x < 2\}$ 
Conjuntos importantes de números reales • Números reales • Números naturales o cardinales • Números enteros no negativos • Enteros • Números racionales • Números irracionales La **unión** del conjunto A y el conjunto B, escrita $A \cup B$, es el conjunto de elementos que pertenecen ya sea al conjunto A *o* al conjunto B. La **intersección** del conjunto A y el conjunto B, escrita $A \cap B$, es el conjunto de todos los elementos que son comunes *tanto* al conjunto A *como* al conjunto B.	$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ es un punto en una recta numérica}\}$ $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ $W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ $I = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ $Q = \left\{\dfrac{p}{q} \middle| p \text{ y } q \text{ son enteros, } q \neq 0\right\}$ $H = \{x \mid x \text{ es un número real que no es racional}\}$ Dado $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ y $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, entonces: $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ $A \cap B = \{3, 5, 7\}$.
Sección 1.3	
Inverso aditivo Para cualquier número real a, su inverso aditivo es $-a$.	-8 es el inverso aditivo de 8.
Propiedad de la doble negación Para cualquier número real a, $-(-a) = a$.	$-(-5) = 5$
Valor absoluto Si a representa cualquier número real, entonces: $\lvert a\rvert = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$	$\lvert 9\rvert = 9, \lvert -9\rvert = 9$
Suma de números reales Para sumar dos números con el *mismo signo* (ambos positivos o ambos negativos), suma sus valores absolutos y coloca el signo común antes de la suma. Para sumar dos números con *signos diferentes* (uno positivo y el otro negativo) resta el menor valor absoluto del mayor valor absoluto. La respuesta tiene el signo del número con el valor absoluto más grande.	Suma $-6 + (-8)$. $\lvert -6\rvert = 6$ y $\lvert -8\rvert = 8$ $\lvert -6\rvert + \lvert -8\rvert = 6 + 8 = 14$ Por tanto, $-6 + (-8) = -14$. Suma $8 + (-2)$. $8 + (-2) = \lvert 8\rvert - \lvert -2\rvert$ $= 8 - 2$ $= 6$ Por tanto, $8 + (-2) = 6$.

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 1.3 (Continuación)	
Resta de números reales $a - b = a + (-b)$	$-14 - 10 = -14 + (-10) = -24$
Multiplicación de números reales 1. Para multiplicar dos números con *signos iguales*, ya sea ambos positivos o ambos negativos, multiplica sus valores absolutos. El producto es *positivo*. 2. Para multiplicar dos números con *signos distintos*, uno positivo y el otro negativo, multiplica sus valores absolutos. El producto es *negativo*.	$(-1.6)(-8.9) = 14.24$ $21\left(-\frac{1}{7}\right) = -3$
Propiedad multiplicativa del cero Para cualquier número a, $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$	$0 \cdot 5 = 0$
División de dos números reales 1. Para dividir dos números con *signos iguales*, ya sea ambos positivos o ambos negativos, divide sus valores absolutos. El cociente es *positivo*. 2. Para dividir dos números con *signos distintos*, uno positivo y el otro negativo, divide sus valores absolutos. El cociente es *negativo*.	$\frac{-8}{-2} = 4$ $\frac{-21}{7} = -3$
División entre cero Para cualquier número real $a \neq 0$, entonces $\frac{a}{0}$ no está definido.	$\frac{7}{0}$ no está definido.
Propiedades de los números reales Para números reales a, b y c, **Propiedad conmutativa** $a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot a$	 $6 + 7 = 7 + 6$ $3 \cdot 16 = 16 \cdot 3$
Propiedad asociativa $(a + b) + c = a + (b + c)$ $(ab)c = a(bc)$	$(5 + 4) + 11 = 5 + (4 + 11)$ $(8 \cdot 2) \cdot 15 = 8 \cdot (2 \cdot 15)$
Propiedad de la identidad $a + 0 = 0 + a = a$ $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$	$31 + 0 = 0 + 31 = 31$ $6 \cdot 1 = 1 \cdot 6 = 6$
Propiedad del inverso $a + (-a) = (-a) + a = 0$ $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$	$18 + (-18) = -18 + 18 = 0$ $14 \cdot \frac{1}{14} = \frac{1}{14} \cdot 14 = 1$
Propiedad distributiva $a(b + c) = ab + ac$	$9(x + 10) = 9 \cdot x + 9 \cdot 10$
Sección 1.4	
Los **Factores** son los números, o expresiones, que se multiplican. Para cualquier número natural n, b^n es una expresión exponencial, tal que: $b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{n \text{ factores}}$	En $3 \cdot 5 = 15$, el 3 y el 5 son factores de 15. $(-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 1.4 (Continuación)	
Raíz cuadrada de un número $\sqrt{a} = b$ si $b^2 = a$ **Raíz cúbica** de un número $\sqrt[3]{a} = b$ si $b^3 = a$ **Raíz *enésima*** de un número $\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$	$\sqrt{36} = 6$ pues $6^2 = 36$ $\sqrt[3]{64} = 4$ pues $4^3 = 64$ $\sqrt[4]{625} = 5$ pues $5^4 = 625$
Orden de las operaciones Para evaluar expresiones matemáticas, usa el siguiente orden: **1.** Primero, evalúa las expresiones dentro de los símbolos de agrupamiento, incluidos los paréntesis, ( ), corchetes, [ ], llaves, { }, y valor absoluto, | |. Si la expresión contiene símbolos de agrupamiento anidados (un par de símbolos de agrupamiento dentro de otro par), primero evalúa la expresión en los símbolos de agrupamiento más internos. **2.** A continuación, evalúa todas las expresiones que contengan exponentes y radicales. **3.** Luego, evalúa todas las multiplicaciones o divisiones en el orden en el que ocurran, y trabaja de izquierda a derecha. **4.** Finalmente, evalúa todas las sumas o restas en el orden en el que ocurran, y trabaja de izquierda a derecha.	Evalúa $4 + 3 \cdot 9^2 - \sqrt{121}$. $4 + 3 \cdot 9^2 - \sqrt{121} = 4 + 3 \cdot 81 - 11$ $= 4 + 243 - 11$ $= 247 - 11$ $= 236$
Sección 1.5	
Regla del producto para exponentes Si m y n son números naturales, y a es cualquier número real, entonces: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$x^8 \cdot x^{15} = x^{8+15} = x^{23}$
Regla del cociente para exponentes Si a es cualquier número real distinto de cero, y m y n son enteros, entonces: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{z^{21}}{z^{14}} = z^{21-14} = z^7$
Regla del exponente cero Si a es cualquier número real distinto de cero, entonces: $a^0 = 1$	$7x^0 = 7 \cdot 1 = 7$
Regla del exponente negativo Para cualquier número real a distinto de cero y cualquier número m entero no negativo: $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$	$y^{-13} = \frac{1}{y^{13}}$
Elevar una potencia a otra potencia (regla de la potencia) Si a es un número real, y m y n son enteros, entonces: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(c^{-8})^{-5} = c^{(-8)(-5)} = c^{40}$
Elevar un producto a una potencia Si a y b son números reales, y m es un entero, entonces: $(ab)^m = a^m b^m$	$(8x^6)^2 = 8^2(x^6)^2 = 64x^{12}$

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 1.5 (Continuación)	
Elevar un cociente a una potencia Si a y b son números reales, y m es un entero, entonces: $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \quad b \neq 0$ y $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m, \quad a \neq 0, b \neq 0$	$\left(\frac{2}{r}\right)^3 = \frac{2^3}{r^3} = \frac{8}{r^3}$ $\left(\frac{6}{x^3}\right)^{-5} = \left(\frac{x^3}{6}\right)^5 = \frac{(x^3)^5}{6^5} = \frac{x^{15}}{7776}$
Sección 1.6	
Un número escrito en **notación científica** tiene la forma $a \times 10^n$, donde $1 \leq a < 10$, y n es un entero.	$5.2 \times 10^7, \quad 1.036 \times 10^{-8}$
Para escribir un número en notación científica **1.** Mueve el punto decimal en el número hacia la derecha del primer dígito distinto de cero. **2.** Cuenta el número de lugares que moviste el punto decimal en el paso 1. Si el número original es 10 o mayor, la cuenta es positiva. Si el número original es menor que 1, la cuenta es negativa. **3.** Multiplica el número obtenido en el paso 1 por 10 elevado a la cuenta (potencia) obtenida en el paso 2.	$12\,900 = 1.29 \times 10^4$ $0.035 = 3.5 \times 10^{-2}$
Para convertir un número en notación científica a forma decimal **1.** Observa el exponente en la base 10. **2. a)** Si el exponente es positivo, mueve el punto decimal en el número a la derecha, el mismo número de lugares que el exponente. **b)** Si el exponente es negativo, mueve el punto decimal en el número a la izquierda, el mismo número de lugares que el exponente.	$3.08 \times 10^3 = 3080$ $8.76 \times 10^{-4} = 0.000876$

Capítulo 1 Ejercicios de repaso

[1.2] *Escribe cada conjunto en forma de lista.*

1. $A = \{x \mid x$ es un número natural entre 3 y $10\}$

2. $B = \{x \mid x$ es un número entero no negativo múltiplo de $3\}$

Sea N = conjunto de números naturales, W = conjunto de números enteros no negativos, I = conjunto de enteros, Q = conjunto de números racionales, H = conjunto de números irracionales y $\mathbb{R}$ = conjunto de números reales. Determina si el primer conjunto es un subconjunto del segundo conjunto para cada par de conjuntos.

3. $Q, \mathbb{R}$ **4.** N, W **5.** Q, H **6.** $H, \mathbb{R}$

Considera el conjunto de números $\left\{-2, 4, 6, \frac{1}{2}, \sqrt{7}, \sqrt{3}, 0, \frac{15}{27}, -\frac{1}{5}, 1.47\right\}$. *Indica los elementos del conjunto que son*

7. números naturales. **8.** números enteros no negativos. **9.** enteros.

10. números racionales. **11.** números irracionales. **12.** números reales.

Indica si cada enunciado es verdadero o falso.

13. $\frac{0}{1}$ no es un número real.

14. Un número real no puede dividirse entre 0.

15. $0, \frac{3}{5}, -2$, y 4, son todos números racionales.

16. Todo número racional y todo número irracional es un número real.

Determina $A \cup B$ y $A \cap B$ para cada conjunto A y B.

17. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

18. $A = \{3, 5, 7, 9\}, B = \{2, 4, 6, 8\}$

19. $A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}, B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

20. $A = \{4, 6, 9, 10, 11\}, B = \{3, 5, 9, 10, 12\}$

Ilustra cada conjunto sobre la recta numérica.

21. $\{x | x > 5\}$

22. $\{x | x \leq -2\}$

23. $\{x | -1.3 < x \leq 2.4\}$

24. $\left\{x \middle| \frac{2}{3} \leq x < 4 \text{ y } x \in N\right\}$

[1.3] *Inserta, $<, >$ o $=$, en el área sombreada entre los dos números, para hacer cada proposición verdadera.*

25. $-3 \square 0$

26. $-4 \square -3.9$

27. $1.06 \square 1.6$

28. $|-8| \square 8$

29. $|-4| \square |-10|$

30. $13 \square |-9|$

31. $\left|-\frac{2}{3}\right| \square \frac{3}{5}$

32. $-|-2| \square -6$

Escribe los números en cada lista de menor a mayor.

33. $\pi, -\pi, -3, 3$

34. $0, \frac{3}{5}, 2.7, |-3|$

35. $|-10|, |-5|, 3, -2$

36. $|-3|, -7, |-7|, -3$

37. $-4, 6, -|-3|, 5$

38. $|1.6|, |-2.3|, -2, 0$

Nombra cada propiedad representada.

39. $-7(x + 5) = -7x - 35$

40. $rs = sr$

41. $(x + 4) + 2 = x + (4 + 2)$

42. $p + 0 = p$

43. $8(rs) = (8r)s$

44. $-(-6) = 6$

45. $11(0) = 0$

46. $b + (-b) = 0$

47. $x \cdot \frac{1}{x} = 1$

48. $k + l = 1 \cdot (k + l)$

[1.3, 1.4] *Evalúa.*

49. $5 + 3^2 - \sqrt{36} \div 2$

50. $-4 \div (-2) + 16 - \sqrt{81}$

51. $(7 - 9) - (-3 + 5) + 16$

52. $2|-7| - 4|-6| + 7$

53. $(6 - 9) \div (9 - 6) + 3$

54. $|6 - 3| \div 3 + 4 \cdot 8 - 12$

55. $\sqrt{9} + \sqrt[3]{64} + \sqrt[5]{32}$

56. $3^2 - 6 \cdot 9 + 4 \div 2^2 - 15$

57. $4 - (2 - 9)^0 + 3^2 \div 1 + 3$

58. $5^2 + (-2 + 2^2)^3 + 9$

59. $-3^2 + 14 \div 2 \cdot 3 - 8$

60. $\{[(12 \div 4)^2 - 1]^2 \div 16\}^3$

61. $\dfrac{9 + 7 \div (3^2 - 2) + 6 \cdot 8}{\sqrt{81} + \sqrt{1} - 10}$

62. $\dfrac{-(5 - 7)^2 - 3(-2) + |-6}{18 - 9 \div 3 \cdot 5}$

Evalúa.

63. Evalúa $2x^2 + 3x + 8$ cuando $x = 2$.

64. Evalúa $5a^2 - 7b^2$ cuando $a = -3$ y $b = -4$.

65. Campañas políticas El costo de las campañas políticas ha cambiado drásticamente desde 1952. El monto gastado, en millones de dólares, en todas las elecciones estadounidenses (incluidos cargos locales, estatales y nacionales; partidos políticos; comités de acción política; y consultas ciudadanas) se aproxima mediante:

$$\text{dólares gastados} = 50.86x^2 - 316.75x + 541.48$$

donde x representa el número de periodos de 4 años desde 1948. Sustituye 1 por x para obtener el monto gastado en 1952, 2 por x para obtener el monto gastado en 1956, 3 por x para obtener el monto gastado en 1960, etcétera.



a) Determina el monto gastado para las elecciones de 1976.

b) Determina el monto que se proyecta gastar en las elecciones de 2020.

66. Tráfico de ferrocarril El tráfico de ferrocarriles ha aumentado de manera constante desde 1965. La mayor parte de esto se debe al aumento en trenes usados para transportar bienes en contenedores. Es posible aproximar la cantidad de carga transportada en toneladas–millas (1 tonelada–milla es igual a 1 tonelada de carga transportada por 1 milla) mediante:

$$\text{carga transportada} = 14.04x^2 + 1.96x + 712.05$$

donde x representa el número de periodos de 5 años desde 1960. Sustituye 1 por x para obtener la cantidad transportada en 1965, 2 por x para obtener la cantidad transportada en 1970, 3 por x para 1975, etcétera.

a) Determina la cantidad de carga transportada por trenes en 1980.

b) Determina la cantidad de carga que se proyecta transportar por trenes en 2020.

[1.5] *Simplifica cada expresión y escribe la respuesta sin exponentes negativos.*

67. $2^3 \cdot 2^2$

68. $x^2 \cdot x^3$

69. $\dfrac{a^{12}}{a^4}$

70. $\dfrac{y^{12}}{y^5}$

71. $\dfrac{b^7}{b^{-2}}$

72. $c^3 \cdot c^{-6}$

73. $5^{-2} \cdot 5^{-1}$

74. $8x^0$

75. $(-9m^3)^2$

76. $\left(\dfrac{5}{7}\right)^{-1}$

77. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$

78. $\left(\dfrac{x}{y^2}\right)^{-1}$

79. $(5xy^3)(-3x^2y)$

80. $(2v^3w^{-4})(7v^{-6}w)$

81. $\dfrac{6x^{-3}y^5}{2x^2y^{-2}}$

82. $\dfrac{12x^{-3}y^{-4}}{4x^{-2}y^5}$

83. $\dfrac{g^3h^{-6}j^{-9}}{g^{-2}h^{-1}j^5}$

84. $\dfrac{21m^{-3}n^{-2}}{7m^{-4}n^2}$

85. $\left(\dfrac{4a^2b}{a}\right)^3$

86. $\left(\dfrac{x^5y}{-3y^2}\right)^2$

87. $\left(\dfrac{p^3q^{-1}}{p^{-4}q^5}\right)^2$

88. $\left(\dfrac{-2ab^{-3}}{c^2}\right)^3$

89. $\left(\dfrac{5xy^3}{z^2}\right)^{-2}$

90. $\left(\dfrac{9m^{-2}n}{3mn}\right)^{-3}$

91. $(-2m^2n^{-3})^{-2}$

92. $\left(\dfrac{15x^5y^{-3}z^{-2}}{-3x^4y^{-4}z^3}\right)^4$

93. $\left(\dfrac{2x^{-1}y^5z^4}{3x^4y^{-2}z^{-2}}\right)^{-2}$

94. $\left(\dfrac{10x^{-2}y^{-2}z}{-x^4y^{-4}z^3}\right)^{-1}$

[1.6] *Expresa cada número en notación científica.*

95. 0.0000742

96. 460 000

97. 183 000

98. 0.000002

Simplifica cada expresión y expresa la respuesta sin exponentes.

99. $(25 \times 10^{-3})(1.2 \times 10^6)$

100. $\dfrac{21 \times 10^3}{7 \times 10^5}$

101. $\dfrac{6\,000\,000}{0.02}$

102. $(0.004)(500\,000)$

103. Área territorial más grande Los cuatro países con el área territorial más grande, se proporcionan en la tabla siguiente. Usa la tabla para responder las siguientes preguntas. Coloca tus respuestas en notación científica.

País	Área territorial en millas cuadradas
Rusia	6.60×10^6
Canadá	3.86×10^6
China	3.75×10^6
Estados Unidos	3.72×10^6

a) ¿Cuánto más grande es el territorio de Rusia, comparado con el territorio de Canadá?

b) ¿Cuánto más grande es el territorio de China, comparado con el territorio de Estados Unidos?

c) ¿Cuántas veces más grande es el territorio de Rusia, comparado con el territorio de Canadá?

d) ¿Cuántas veces más grande es el territorio de China, comparado con el territorio de Estados Unidos?

104. Voyager El 17 de febrero de 1998, la nave espacial *Voyager 1*, se convirtió en el explorador más distante en el sistema solar, rompiendo el récord del *Pioneer 10*. El *Voyager 1* viajó más de 1.4×10^{10} kilómetros desde la Tierra (aproximadamente 150 veces la distancia de la Tierra al Sol).

a) Representa 1.4×10^{10} como un entero.

b) ¿Cuántos miles de millones de kilómetros viajó el *Voyager 1*?

c) Si supones que el *Voyager 1* recorrió aproximadamente el mismo número de kilómetros en cada uno de los 28 años, ¿cuántos kilómetros promedió en un año?

d) Si 1 kilómetro $\approx$ 0.6 millas, ¿qué distancia, en millas, recorrió el *Voyager 1*?

Capítulo 1 Examen de práctica

1. Escribe a $A = \{x \mid x$ es un número natural mayor que o igual que $6\}$ en forma de lista.

Indica si cada enunciado es verdadero o falso.

2. Todo número real es un número racional.

3. La unión del conjunto de números racionales y el conjunto de números irracionales, es el conjunto de los números reales.

Considera el conjunto de números $\left\{-\frac{3}{5}, 2, -4, 0, \frac{19}{12}, 2.57, \sqrt{8}, \sqrt{2}, -1.92\right\}$. *Menciona los elementos del conjunto que son*

4. números racionales.

5. números reales.

Determina $A \cup B$ y $A \cap B$ *para los conjuntos A y B.*

6. $A = \{8, 10, 11, 14\}$, $B = \{5, 7, 8, 9, 10\}$

7. $A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$, $B = \{3, 5, 7, 9, 11\}$

En los ejercicios 8 y 9, ilustra cada conjunto sobre la recta numérica.

8. $\{x \mid -2.3 \le x < 5.2\}$

9. $\left\{x \middle| -\frac{5}{2} < x < \frac{6}{5} \text{ y } x \in I\right\}$

10. Ordena de menor a mayor: $|3|, -|4|, -2, 9$.

Nombra cada propiedad ilustrada.

11. $(x + y) + 8 = x + (y + 8)$

12. $3x + 4y = 4y + 3x$

Evalúa cada expresión.

13. $\{6 - [7 - 3^2 \div (3^2 - 2 \cdot 3)]\}$

14. $2^4 + 4^2 \div 2^3 \cdot \sqrt{25} + 7$

15. $\dfrac{-3|4 - 8| \div 2 + 6}{-\sqrt{36} + 18 \div 3^2 + 4}$

16. $\dfrac{-6^2 + 3(4 - |6|) \div 6}{4 - (-3) + 12 \div 4 \cdot 5}$

17. Evalúa $-x^2 + 2xy + y^2$ cuando $x = 2$ y $y = 3$.

18. Bala de cañón Para celebrar el 4 de julio, se dispara un cañón hacia arriba desde un fuerte con vista al océano debajo. La altura, h, en pies, de la bala de cañón sobre el nivel del mar, en cualquier momento t, en segundos, puede determinarse mediante la fórmula $h = -16t^2 + 120t + 200$. Determina la altura de la bala de cañón sobre el nivel del mar **a)** 1 segundo después de que se dispara el cañón, **b)** 5 segundos después de que se dispara el cañón.

Simplifica cada expresión y escribe la respuesta sin exponentes negativos.

19. 3^{-2}

20. $\left(\dfrac{4m^{-3}}{n^2}\right)^2$

21. $\dfrac{24a^2b^{-3}c^0}{30a^3b^2c^{-2}}$

22. $\left(\dfrac{-3x^3y^{-2}}{x^{-1}y^5}\right)^{-3}$

23. Convierte 389 000 000 a notación científica.

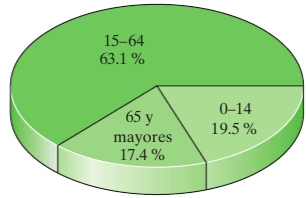
24. Simplifica $\dfrac{3.12 \times 10^6}{1.2 \times 10^{-2}}$ y escribe el número sin exponentes.

25. Población mundial

a) En 2050, se espera que la población mundial sea de aproximadamente 9.2 mil millones de personas. Escribe este número en notación científica.

b) La siguiente gráfica muestra la distribución esperada de la población mundial en 2050 para los tres grupos de edad: 0–14, 15–64, y 65 y mayores. Usa notación científica para determinar el número de personas, en cada uno de estos grupos de edad, en 2050.

Distribución esperada de población mundial por edad



2 Ecuaciones y desigualdades

2.1 Resolución de ecuaciones lineales

2.2 Resolución de problemas y uso de fórmulas

2.3 Aplicaciones del álgebra

Examen de mitad de capítulo: secciones 2.1-2.3

2.4 Problemas aplicados adicionales

2.5 Resolución de desigualdades lineales

2.6 Resolución de ecuaciones y de desigualdades que contienen valores absolutos



Una gran parte del sueño americano es poseer una casa propia. En el costo de obtener un préstamo para comprar una casa, se involucran muchos factores. En el ejercicio 51 de la página 99, investigarás los costos involucrados en el refinanciamiento de una hipoteca.

Objetivos del capítulo

Este capítulo se enfoca en la resolución de ecuaciones y de desigualdades lineales, así como el uso de ecuaciones, fórmulas y desigualdades lineales para resolver problemas de la vida real. También se presentará una poderosa técnica para resolver problemas que se usará a lo largo de este libro. Verás el poder del álgebra como una herramienta para resolver problemas en múltiples áreas, incluyendo los bienes raíces, química, negocios, banca, física y finanzas personales.

2.1 Resolución de ecuaciones lineales

1. **Identificación de la propiedad reflexiva, simétrica y transitiva**
2. **Reducción de términos semejantes**
3. **Resolución de ecuaciones lineales**
4. **Resolución de ecuaciones con fracciones**
5. **Identificación de ecuaciones condicionales, inconsistencias e identidades**
6. **Comprensión de conceptos para resolver ecuaciones**

1 Identificación de la propiedad reflexiva, simétrica y transitiva

Comenzaremos con un repaso sobre cómo resolver ecuaciones lineales. Primero, se presentan tres propiedades de la igualdad.

Propiedades de la igualdad

Para todo número real a, b y c.

1. $a = a$	Propiedad reflexiva
2. Si $a = b$, entonces $b = a$	Propiedad simétrica
3. Si $a = b$, y $b = c$, entonces $a = c$	Propiedad transitiva

Ejemplos de la propiedad reflexiva

$$7 = 7$$

$$x + 5 = x + 5$$

Ejemplos de la propiedad simétrica

Si $5 = x$, entonces $x = 5$.

Si $-2x + 3 = y$, entonces $y = -2x + 3$.

Ejemplos de la propiedad transitiva

Si $x = a$ y $a = 4y$, entonces $x = 4y$.

Si $a + b = c$ y $c = 4d$, entonces $a + b = 4d$.

Con frecuencia se usarán estas propiedades sin referirse a ellas por su nombre.

2 Reducción de términos semejantes

Cuando una expresión algebraica consiste de varias partes, las partes que se suman se llaman los **términos** de la expresión.

La expresión $3x^2 - 6x - 2$

que puede escribirse como: $\underbrace{3x^2}_{\text{término}} + \underbrace{(-6x)}_{\text{término}} + \underbrace{(-2)}_{\text{término}}$ tiene tres términos.

Expresión	Términos
$\frac{1}{2}x^2 - 3x - 7$	$\frac{1}{2}x^2,\ -3x,\ -7$
$-5x^3 + 3x^2y - 2$	$-5x^3,\ 3x^2y,\ -2$
$4(x + 3) + 2x + \frac{1}{5}(x - 2) + 1$	$4(x + 3),\ 2x,\ \frac{1}{5}(x - 2)$

La parte numérica de un término que precede a la variable, se llama su **coeficiente numérico** o simplemente **coeficiente**. En el término $6x^2$, el 6 es el coeficiente numérico.

Término	Coeficiente numérico
$x = 1 \cdot x$	1
$-a^2 = -1 \cdot a^2$	-1
$\frac{5k}{9} = \frac{5}{9} \cdot k$	$\frac{5}{9}$
$\frac{-6xyz}{7} = -\frac{6}{7} \cdot xyz$	$-\frac{6}{7}$
$8 = 8 \cdot x^0$	8

Cuando un término consiste solamente de un número, dicho número se llama **constante**. Por ejemplo, en la expresión $x^2 - 4$, el -4 es una constante.

El **grado de un término** con exponentes enteros no negativos, es la suma de los exponentes de las variables en el término. Por ejemplo, $3x^2$ es un término de segundo grado, y $-4x$ es un término de primer grado.

Término	Grado
x^2	2
$3x = 3x^1$	1
$6 = 6x^0$	0
$4xy^5 = 4x^1y^5$	$1 + 5 = 6$
$6x^3y^5$	$3 + 5 = 8$

Comprende el Álgebra

Los términos semejantes son aquellos términos cuyas variables y exponentes son los mismos. En otras palabras, *los términos semejantes tienen variables idénticas.*

Los **términos semejantes** son términos que tienen las mismas variables con los mismos exponentes. Por ejemplo, $3x$ y $5x$ son términos semejantes, $2x^2$ y $-3x^2$ son términos semejantes, y $3x^2y$ y $-2x^2y$ son términos semejantes. Los términos que no son semejantes, son **términos no semejantes**. Todas las constantes se consideran términos semejantes.

Simplificar una expresión significa reducir (o combinar) todos los términos semejantes en la expresión. Para reducir términos semejantes, puedes usar la propiedad distributiva.

Ejemplos de reducción de términos semejantes

$$8x - 2x = (8 - 2)x = 6x$$
$$3x^2 - 5x^2 = (3 - 5)x^2 = -2x^2$$
$$-7x^2y + 3x^2y = (-7 + 3)x^2y = -4x^2y$$

Cuando se simplifican expresiones, se reordenan los términos usando las propiedades conmutativa y asociativa.

EJEMPLO 1 Simplifica mediante la reducción de términos semejantes.

a) $-9x + 7 + 2x - 5$ **b)** $7x^2 - 11x - 13 - 5x^2 + 6x + 4$

c) $13x - 7y - 4 - 5x - 3y + 9$

Solución

a) $-9x + 7 + 2x - 5 = \underbrace{-9x + 2x}\ \underbrace{+ 7 - 5}$ Términos semejantes colocados juntos.

$= \quad -7x \qquad +2$ Reducción de términos semejantes.

Por tanto, la expresión se simplifica como $-7x + 2$.

b) $7x^2 - 11x - 13 - 5x^2 + 6x + 4 = \underbrace{7x^2 - 5x^2}\ \underbrace{- 11x + 6x}\ \underbrace{- 13 + 4}$ Términos semejantes colocados juntos.

$= \quad 2x^2 \qquad -5x \qquad -9$ Reducción de términos semejantes.

Por tanto, la expresión se simplifica como $2x^2 - 5x - 9$.

c) $13x - 7y - 4 - 5x - 3y + 9 = \underbrace{13x - 5x}\ \underbrace{- 7y - 3y}\ \underbrace{- 4 + 9}$ Términos semejantes colocados juntos.

$= \quad 8x \qquad -10y \qquad + 5$ Reducción de términos semejantes.

Por tanto, la expresión se simplifica como $8x - 10y + 5$.

Ahora resuelve el ejercicio 39

EJEMPLO 2 Simplifica $-2(a + 7) - [-3(a - 1) + 8]$.

Solución Para simplificar esta expresión, debes seguir el orden de las operaciones (ver la sección 1.4).

$$\begin{aligned} -2(a+7)-[-3(a-1)+8] &= -2(a+7) - 1[-3(a-1)+8] \\ &= -2a - 14 - 1[-3a + 3 + 8] && \text{Usa la propiedad distributiva.} \\ &= -2a - 14 - 1[-3a + 11] && \text{Reducción de términos semejantes.} \\ &= -2a - 14 + 3a - 11 && \text{Usa la propiedad distributiva.} \\ &= a - 25 && \text{Reducción de términos semejantes.} \end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 55

3 Resolución de ecuaciones lineales

Comprende el Álgebra
Toda ecuación debe tener un signo de igualdad.

Ecuación

Una **ecuación** es un enunciado matemático de igualdad. *Una ecuación debe tener un signo de igualdad* y una expresión matemática en cada lado del signo de igualdad.

Ejemplos de ecuaciones

$$x + 8 = -7$$
$$2x^2 - 4 = -3x + 13$$

Los números que hacen que una ecuación sea un enunciado verdadero, se llaman **soluciones** de la ecuación. El **conjunto solución** de una ecuación, es el conjunto de números reales que hacen verdadera a la ecuación.

Ecuación	Solución	Conjunto solución
$2x + 3 = 9$	3	$\{3\}$

Dos o más ecuaciones, con el mismo conjunto solución, se llaman **ecuaciones equivalentes**. Por lo general, las ecuaciones se resuelven comenzando con una ecuación dada y produciendo una serie de ecuaciones equivalentes más simples.

Ejemplo de ecuaciones equivalentes

Ecuaciones	Conjunto solución
$2x + 3 = 9$	$\{3\}$
$2x = 6$	$\{3\}$
$x = 3$	$\{3\}$

En esta sección se discutirá cómo resolver **ecuaciones lineales en una variable**. Una ecuación lineal es una ecuación que puede escribirse en la forma $ax + b = c, a \neq 0$. Para resolver ecuaciones lineales, se usan las propiedades de la suma y la multiplicación de la igualdad para *despejar la variable* en un lado de la ecuación.

Propiedad de la suma para la igualdad

Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$ para cualesquier a, b y c.

La propiedad de la suma para la igualdad, afirma que el mismo número puede sumarse o restarse de ambos lados de una ecuación sin cambiar la solución a la ecuación original.

Propiedad de la multiplicación para la igualdad

Si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$ para cualesquier a, b y c.

La propiedad de la multiplicación de la igualdad, afirma que ambos lados de una ecuación pueden multiplicarse o dividirse por el mismo número distinto de cero, sin cambiar la solución.

La meta al resolver ecuaciones es dejar la variable en un lado de la ecuación por sí sola, es decir, *despejar la variable*.

Comprende el Álgebra

Al multiplicar ambos lados de una ecuación que tiene fracciones por el MCD, podrás eliminar las fracciones de la ecuación.

Para resolver ecuaciones lineales

1. **Elimina las fracciones.** Si la ecuación contiene fracciones, elimina las fracciones al multiplicar ambos lados de la ecuación por el mínimo común denominador.
2. **Simplifica cada lado por separado.** Simplifica cada lado de la ecuación tanto como sea posible. Usa la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis y reducir los términos semejantes, según se requiera.
3. **Aísla el término variable en un lado.** Usa la propiedad de la suma para poner todos los términos con la variable en un lado de la ecuación y todos los términos constantes en el otro lado. Quizá sea necesario aplicar la propiedad de la suma varias veces para lograr esto.
4. **Despeja la variable.** Usa la propiedad de la multiplicación para obtener la variable (con un coeficiente de 1) en un lado.
5. **Verifica.** Verifica mediante la sustitución del valor obtenido en el paso 4 al ponerlo en la ecuación original.

EJEMPLO 3 Resuelve la ecuación $2x + 9 = 14$.

Solución

$$2x + 9 = 14$$
$$2x + 9 - 9 = 14 - 9 \quad \text{Resta 9 de ambos lados.}$$
$$2x = 5$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{5}{2} \quad \text{Divide ambos lados entre 2.}$$
$$x = \frac{5}{2}$$

Verifica

$$2x + 9 = 14$$
$$2\left(\frac{5}{2}\right) + 9 \stackrel{?}{=} 14$$
$$5 + 9 \stackrel{?}{=} 14$$
$$14 = 14 \quad \text{Verdadero}$$

Dado que el valor concuerda, la solución es $\frac{5}{2}$.

Ahora resuelve el ejercicio 61

EJEMPLO 4 Resuelve la ecuación $-2b + 8 = 3b - 7$.

Solución

$$\begin{aligned} -2b + 8 &= 3b - 7 \\ -2b + 2b + 8 &= 3b + 2b - 7 && \text{Suma } 2b \text{ a ambos lados.} \\ 8 &= 5b - 7 \\ 8 + 7 &= 5b - 7 + 7 && \text{Suma } 7 \text{ a ambos lados.} \\ 15 &= 5b \\ \frac{15}{5} &= \frac{5b}{5} && \text{Divide ambos lados entre } 5. \\ 3 &= b \end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 65

El ejemplo 5 contiene números decimales. Este problema se trabaja siguiendo el procedimiento dado anteriormente. Además, siempre que una ecuación contenga términos semejantes en el mismo lado de la ecuación, se reducen los términos semejantes antes de usar las propiedades de la suma o de la multiplicación.

EJEMPLO 5 Resuelve la ecuación $4(x - 3.1) = 2.1(x - 4) + 3.5x$.

Solución

$$\begin{aligned} 4(x - 3.1) &= 2.1(x - 4) + 3.5x \\ 4(x) - 4(3.1) &= 2.1(x) - 2.1(4) + 3.5x && \text{Usa la propiedad distributiva.} \\ 4x - 12.4 &= 2.1x - 8.4 + 3.5x \\ 4x - 12.4 &= 5.6x - 8.4 && \text{Reducción de términos semejantes.} \\ 4x - 12.4 + 8.4 &= 5.6x - 8.4 + 8.4 && \text{Suma } 8.4 \text{ a ambos lados.} \\ 4x - 4.0 &= 5.6x \\ 4x - 4x - 4.0 &= 5.6x - 4x && \text{Resta } 4x \text{ de ambos lados.} \\ -4.0 &= 1.6x \\ \frac{-4.0}{1.6} &= \frac{1.6x}{1.6} && \text{Divide ambos lados entre } 1.6. \\ -2.5 &= x \end{aligned}$$

La solución es -2.5.

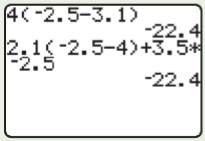
Ahora resuelve el ejercicio 115

Para ahorrar espacio, no siempre se mostrará la comprobación de las respuestas. Sin embargo, tú debes verificar todas tus respuestas. Cuando la ecuación tenga números decimales, puedes usar una calculadora para resolver y comprobar la ecuación, y así ahorrar un poco de tiempo.

USA TU CALCULADORA

Comprobación de soluciones mediante sustitución

Para comprobar soluciones usando una calculadora, sustituye la solución en ambos lados de la ecuación para ver si obtienes el mismo valor. La pantalla de la calculadora graficadora en la **Figura 2.1** muestra que ambos lados de la ecuación planteada en el ejemplo 5, son iguales a -22.4 cuando -2.5 se sustituye por x. Por tanto, la solución -2.5 concuerda.



← Valor del lado izquierdo de la ecuación

← Valor del lado derecho de la ecuación

$$\begin{aligned} 4(x - 3.1) &= 2.1(x - 4) + 3.5x \\ 4(-2.5 - 3.1) &= 2.1(-2.5 - 4) + 3.5(-2.5) \\ -22.4 &= -22.4 \end{aligned}$$

FIGURA 2.1

Ahora se trabajará un ejemplo que contiene símbolos de agrupamiento anidados.

EJEMPLO 6 Resuelve la ecuación $7c - 15 = -2[6(c - 3) - 4(2 - c)]$.

Solución

$$7c - 15 = -2[6(c - 3) - 4(2 - c)]$$
$$7c - 15 = -2[6c - 18 - 8 + 4c] \quad \text{Usa la propiedad distributiva.}$$
$$7c - 15 = -2[10c - 26] \quad \text{Reducción de términos semejantes.}$$
$$7c - 15 = -20c + 52 \quad \text{Usa la propiedad distributiva.}$$
$$7c + 20c - 15 = -20c + 20c + 52 \quad \text{Suma } 20c \text{ a ambos lados.}$$
$$27c - 15 = 52$$
$$27c - 15 + 15 = 52 + 15 \quad \text{Suma 15 a ambos lados.}$$
$$27c = 67$$
$$\frac{27c}{27} = \frac{67}{27} \quad \text{Divide ambos lados entre 27.}$$
$$c = \frac{67}{27}$$

Ahora resuelve el ejercicio 91

Al resolver ecuaciones, con frecuencia pueden omitirse algunos de los pasos intermedios. Ahora se ilustrará cómo puedes hacer esto.

	Solución		Solución abreviada
a)	$x + 4 = 6$		**a)** $x + 4 = 6$
	$x + 4 - 4 = 6 - 4$	← Haz este paso mentalmente.	$x = 2$
	$x = 2$		
b)	$3x = 6$		**b)** $3x = 6$
	$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$	← Do this step mentally.	$x = 2$
	$x = 2$		

4 Resolución de ecuaciones con fracciones

Cuando una ecuación contenga fracciones, comienza por multiplicar *ambos* lados de la ecuación por el mínimo común denominador (MCD). Recuerda, de la sección 1.3, que el MCD es el número más pequeño que ambos denominadores pueden dividir sin dejar un residuo. Por ejemplo, si los denominadores son 4 y 6, entonces 12 es el MCD, ya que es el número más pequeño que los denominadores 4 y 6 pueden dividir sin dejar un residuo.

EJEMPLO 7 Resuelve la ecuación $5 - \frac{2a}{3} = -9$.

Solución El mínimo común denominador es 3. Multiplica ambos lados de la ecuación por 3 y después usa la propiedad distributiva en el lado izquierdo de la ecuación. *Este proceso eliminará todas las fracciones de la ecuación.*

$$5 - \frac{2a}{3} = -9$$
$$3\left(5 - \frac{2a}{3}\right) = 3(-9) \quad \text{Multiplica ambos lados por 3.}$$
$$3(5) - \overset{1}{\cancel{3}}\left(\frac{2a}{\cancel{3}_1}\right) = -27 \quad \text{Usa la propiedad distributiva.}$$
$$15 - 2a = -27$$
$$15 - 15 - 2a = -27 - 15 \quad \text{Resta 15 de ambos lados.}$$
$$-2a = -42$$
$$\frac{-2a}{-2} = \frac{-42}{-2} \quad \text{Divide ambos lados entre } -2.$$
$$a = 21$$

Ahora resuelve el ejercicio 97

Comprende el Álgebra
Después de multiplicar ambos lados de una ecuación por el MCD, las fracciones se eliminarán.

EJEMPLO 8 Resuelve la ecuación $\frac{1}{2}(x + 4) = \frac{1}{3}x$.

Solución Comienza por multiplicar ambos lados de la ecuación por 6, el MCD de 2 y 3.

$$6\left[\frac{1}{2}(x + 4)\right] = 6\left(\frac{1}{3}x\right) \quad \text{Multiplica ambos lados por 6.}$$

$$\left(6 \cdot \frac{1}{2}\right)(x + 4) = \left(6 \cdot \frac{1}{3}\right)x \quad \text{Propiedad asociativa de la multiplicación.}$$

$$3(x + 4) = 2x \quad \text{Simplifica.}$$

$$3x + 12 = 2x \quad \text{Usa la propiedad distributiva.}$$

$$3x - 2x + 12 = 2x - 2x \quad \text{Resta } 2x \text{ de ambos lados.}$$

$$x + 12 = 0$$

$$x + 12 - 12 = 0 - 12 \quad \text{Resta 12 de ambos lados.}$$

$$x = -12$$

Ahora resuelve el ejercicio 109

En la sección 6.4 se estudiarán más las ecuaciones que contienen fracciones.

5 Identificación de ecuaciones condicionales, inconsistencias e identidades

Todas las ecuaciones estudiadas hasta el momento han sido verdaderas sólo para valores específicos de la variable. Dichas ecuaciones se denominan **ecuaciones condicionales**. Algunas ecuaciones nunca son verdaderas y no tienen solución; éstas se llaman **inconsistencias**. Otras ecuaciones, llamadas **identidades**, siempre son verdaderas y tienen un número infinito de soluciones. La **Tabla 2.1** resume estos tipos de ecuaciones lineales y su número correspondiente de soluciones.

Tabla 2.1

TIPO DE ECUACIÓN LINEAL	NÚMERO DE SOLUCIONES
Ecuación condicional	Una
Inconsistencia	Ninguna (conjunto solución: $\varnothing$)
Identidad	Número infinito (conjunto solución: $\mathbb{R}$)

El conjunto solución de una ecuación condicional, contiene la solución dada entre llaves. Por ejemplo, el conjunto solución del ejemplo 8 es $\{-12\}$. El conjunto solución de una inconsistencia, es el conjunto vacío, $\{\ \}$ o $\varnothing$. El conjunto solución de una identidad, es el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 9 Determina si la ecuación $4(2c - 3) + 7c = 5(3c + 1) - 17$ es una ecuación condicional, una inconsistencia o una identidad. Indica el conjunto solución para la ecuación.

Solución

$$4(2c - 3) + 7c = 5(3c + 1) - 17$$

$$8c - 12 + 7c = 15c + 5 - 17 \quad \text{Usa la propiedad distributiva.}$$

$$15c - 12 = 15c - 12 \quad \text{Reducción de términos semejantes.}$$

$$-12 = -12 \quad \text{Resta } 15c \text{ de ambos lados.}$$

Dado que se obtiene una ecuación que *siempre es verdadera*, la ecuación $4(2c - 3) + 7c = 5(3c + 1) - 17$ es una identidad. La solución es el conjunto $\mathbb{R}$.

Ahora resuelve el ejercicio 123

EJEMPLO 10 Determina si $7(3d - 1) + 2(d + 1) = 5(4d + 3) + 3(d - 6)$ es una ecuación condicional, una inconsistencia o una identidad. Indica el conjunto solución para la ecuación.

Solución $7(3d - 1) + 2(d + 1) = 5(4d + 3) + 3(d - 6)$

$21d - 7 + 2d + 2 = 20d + 15 + 3d - 18$ Usa la propiedad distributiva.

$23d - 5 = 23d - 3$ Reducción de términos semejantes.

$-5 = -3$ Resta $23d$ de ambos lados.

Dado que se obtiene una ecuación que *siempre es falsa*, la ecuación $7(3d - 1) + 2(d + 1) = 5(4d + 3) + 3(d - 6)$ es una inconsistencia. El conjunto solución es $\varnothing$.

Ahora resuelve el ejercicio 119

Comprende el Álgebra

Cuando resuelvas una ecuación, si obtienes una ecuación sin variables que siempre es:

- *verdadera*, como $-12 = -12$ o $0 = 0$, la ecuación es una identidad y la solución es el conjunto $\mathbb{R}$.
- *falsa*, como $-5 = -3$ o $0 = 2$, la ecuación es una inconsistencia y el conjunto solución es $\varnothing$.

6 Comprensión de conceptos para resolver ecuaciones

Los números o variables que aparecen en las ecuaciones, no afectan los procedimientos usados para resolver las ecuaciones. En el siguiente ejemplo, se resolverá la ecuación usando los conceptos y procedimientos que se han presentado.

EJEMPLO 11 En la siguiente ecuación, asume que $\odot$ representa la variable que se busca resolver, y que todos los otros símbolos representan números reales distintos de cero. Resuelve la ecuación para $\odot$.

$$\square \odot + \triangle = \#$$

Solución Para resolver para $\odot$ es necesario despejar a $\odot$. Se usan las propiedades de la suma y de la multiplicación para resolver para $\odot$.

$$\square \odot + \triangle = \#$$

$$\square \odot + \triangle - \triangle = \# - \triangle \quad \text{Resta } \triangle \text{ de ambos lados.}$$

$$\square \odot = \# - \triangle$$

$$\frac{\square \odot}{\square} = \frac{\# - \triangle}{\square} \quad \text{Divide ambos lados entre } \square.$$

$$\odot = \frac{\# - \triangle}{\square}$$

Por tanto, la solución es $\odot = \dfrac{\# - \triangle}{\square}$.

Ahora resuelve el ejercicio 133

Considera la ecuación $5x + 7 = 12$. Si se hace $5 = \square$, $x = \odot$, $7 = \triangle$ y $12 = \#$, la ecuación tiene la misma forma que la ecuación del ejemplo 11. Por tanto, la solución será de la misma forma.

Ecuación	Solución
$\square \odot + \triangle = \#$	$\odot = \dfrac{\# - \triangle}{\square}$
$5x + 7 = 12$	$x = \dfrac{12 - 7}{5} = \dfrac{5}{5} = 1$

Si resuelves la ecuación $5x + 7 = 12$, verás que su solución es 1.

2.1 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

condicional	$\varnothing$	semejantes	identidad	mínimo	$\mathbb{R}$
términos	inconsistencia	grado	no semejantes	despejar	

1. Las partes que se suman en una expresión algebraica, se llaman los _____ de la expresión.
2. Los términos que tienen partes variables idénticas, se llaman términos _____.
3. La meta, al resolver ecuaciones, es _____ la variable en un lado de la ecuación.
4. Se pueden eliminar las fracciones de una ecuación al multiplicar ambos lados de la ecuación por el _____ común denominador.
5. Una ecuación que siempre es verdadera, se conoce como _____.
6. Una ecuación que es verdadera sólo para valores específicos de la variable, se conoce como ecuación _____.
7. Una ecuación que nunca es verdadera, se conoce como una _____.
8. El _____ de un término, es la suma de los exponentes de las variables en el término.
9. El símbolo _____ se usa para indicar el conjunto solución de una inconsistencia.
10. El símbolo _____ se usa para indicar el conjunto solución de una identidad.

Practica tus habilidades

Indica, para cada expresión, su propiedad correspondiente

11. Si $-7 = x$, entonces $x = -7$.

12. Si $11 = 2x - 3y$, entonces $2x - 3y = 11$.

13. Si $x = y$ y $y = -4$, entonces $x = -4$.

14. Si $3x - 7 = y$, y $y = 5x + 3$, entonces $3x - 7 = 5x + 3$.

15. $a + c = a + c$

16. $14 = 14$

17. Si $x = 8$, entonces $x - 8 = 8 - 8$.

18. Si $\frac{2}{3}x = 4$, entonces $\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}x\right) = \frac{3}{2}(4)$.

19. Si $5x = 4$, entonces $\frac{1}{5}(5x) = \frac{1}{5}(4)$.

20. Si $a + 2 = 4$, entonces $a + 2 - 2 = 4 - 2$.

21. Si $\frac{t}{4} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$, entonces $12\left(\frac{t}{4} + \frac{1}{3}\right) = 12\left(\frac{5}{6}\right)$.

22. Si $7x - 4 = 10$, entonces $7x - 4 + 4 = 10 + 4$.

23. Si $x + 3 = 7$, entonces $x = 4$.

24. Si $5x = 35$ entonces $x = 7$.

Indica el grado de cada término.

25. x

26. $5y$

27. $5c^3$

28. $-6y^2$

29. $3ab$

30. $-2xy$

31. 6

32. -3

33. $\frac{1}{2}x^4y$

34. $18p^2q^3$

35. $5a^2b^4c$

36. $3x^5y^6z$

37. $11a^2c^5d^{10}$

38. $-2x^4y^7z^8$

Simplifica cada expresión. Si una expresión no puede simplificarse, indícalo.

39. $-2x^2 - 5x + 7x - 3$

40. $2a^2 - 4ab + 5ab - 10b^2$

41. $w^3 + w^2 - w + 1$

42. $k^3 - 3k^2 - 11k + 1$

43. $10.6c^2 - 2.3c + 5.9c - 1.9c^2$

44. $4.3 - 3.2x - 2(x - 2)$

45. $5a - 2b + 3c + 9d - 8$

46. $7x^3y^2 + 11x^2y^3$

47. $8pq - 9pq + p + q$

48. $b + b^2 - 4b + b^2 + 3b$

49. $12\left(\frac{1}{6} + \frac{d}{4}\right) + 5d$

50. $60\left(\frac{7}{15}x - \frac{3}{4}\right) - 2x$

51. $8\left(\frac{7}{8}x + 3\right) + 5x - 7$

52. $-4\left(\frac{3}{4}x - 5\right) + 7x - 1$

53. $4 - [6(3x + 2) - x] + 4$

54. $-9 + 3[4(2x - 3) - 5x] + 2x$

55. $9x - [3x - (5x - 4y)] - 2y$

56. $-2[3x - (2y - 1) - 5x] + y$

57. $5b - \{7[2(3b - 2) - (4b + 9)] - 2\}$

58. $2\{[3a - (2b - 5a)] - 3(2a - b)\}$

59. $-\{[2rs - 3(r + 2s)] - 2(2r^2 - s)\}$

60. $-[-2t + 3(2u - 4) + v] - 3\{-2[t - 5(u + 1) + v]\}$

Resuelve cada ecuación.

61. $5a - 1 = 14$

62. $-7x + 3 = 17$

63. $-8x + 7 + 3x = -3$

64. $7x - 6 - 5x = -8$

65. $5s - 3 = 2s + 6$

66. $8w + 7 = -3w - 15$

67. $4x - 5 = 2(x + 5)$

68. $3(y - 7) = 5y - 10$

69. $-3(t - 5) = 2(t - 5)$

70. $4(2x - 4) = -2(x + 3)$

71. $3x + 4(2 - x) = 4x + 5$

72. $7z - 3(2z - 5) = 8z + 11$

73. $2 - (x + 5) = 4x - 8$

74. $3k + 7 = 4 - (9 - k)$

75. $p - (p + 4) = 4(p - 1) + 2p$

76. $q - (-2q + 3) = -5(q - 3) - 18$

77. $-3(y - 1) + 2y = 4(y - 3)$

78. $2(3z + 2) - 4z = 5(z + 1) - 13$

79. $6 - (n + 3) = 3n + 5 - 2n$

80. $8 - 3(2a - 4) = 5 + 3a - 4a$

81. $4(2x - 2) - 3(x + 7) = -4$

82. $-2(3w + 6) - (4w - 3) = 21$

83. $-4(3 - 4x) - 2(x - 1) = 12x$

84. $3(2x - 4) + 3(x + 1) = 9$

85. $5(a + 3) - a = -(4a - 6) + 1$

86. $-4(2z - 6) = -3(z - 4) + z$

87. $-2[8 - (4 - w)] - 8 = 4(w + 5)$

88. $3[6 - (h + 2)] - 6 = 4(-h + 7)$

89. $4\{2 - [3(c + 1) - 2(c + 1)]\} = -2c$

90. $3\{[(x - 2) + 4x] - (x - 3)\} = 4 - (x - 12)$

91. $-\{4(d + 3) - 5[3d - 2(2d + 7)] - 8\} = -10d - 6$

92. $-3(6 - 4x) = 4 - \{5x - [6x - (4x - (3x + 2))]\}$

Resuelve cada ecuación. Deja tu respuesta como una fracción si no es un valor entero.

93. $\frac{d}{5} = -7$

94. $-\frac{q}{8} = 5$

95. $\frac{4x - 2}{3} = -6$

96. $\frac{7m + 9}{6} = 5$

97. $4 - \frac{3}{4}a = 7$

98. $-2 = -\frac{1}{3}x + 4$

99. $\frac{5}{14}x + \frac{1}{2} = \frac{11}{7}$

100. $\frac{7}{15}x - \frac{1}{5} = \frac{5}{3}$

101. $\frac{7}{15}x + \frac{3}{5} = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

102. $\frac{5}{14}x + \frac{3}{7} = \frac{1}{7}x - \frac{3}{2}$

103. $\frac{2}{3}z - 5 = \frac{z}{6} + 1$

104. $\frac{1}{2}x + 2 = \frac{1}{8}x - 1$

105. $\frac{7}{9}m + \frac{3}{10} = \frac{2}{15}m - \frac{5}{18}$

106. $\frac{3}{4}n - \frac{4}{21} = \frac{5}{28}n - \frac{7}{12}$

107. $x + 6 = -\frac{2}{3}(x + 1)$

108. $x - 2 = \frac{3}{4}(x + 4)$

109. $\frac{1}{2}(x - 2) = \frac{1}{3}(x + 2)$

110. $\frac{3}{4}(x - 5) = \frac{2}{3}(x - 7)$

Resuelve cada ecuación. Si es necesario, redondea las respuestas a la centésima más cercana.

111. $0.4n + 4.7 = 5.1n$

112. $0.8x - 4 = 2.1x + 3.2$

113. $1.69x - 3.1 = 0.05 - 5.9x$

114. $4.2x + 9.7 = -3.95x - 6.8$

115. $4.7x - 3.6(x - 1) = 4.9$

116. $6.1p - 4.5(3 - 2p) = 15.7$

117. $0.6(500 - 2.4x) = 3.6(2x - 4000)$

118. $0.6(14x - 8000) = -0.4(20x + 12000) + 20.6x$

Determina el conjunto solución para cada ejercicio. Después indica si la ecuación es condicional, una identidad o una inconsistencia.

119. $3(y + 3) - 4(2y - 7) = -5y + 2$

120. $7x + 5 - 5(x - 3) = 5(x + 4) - 3x$

121. $7 + 3(x - 2) + 8x = 6(x + 1) + 2x - 9$

122. $-5(c + 3) + 4(c - 2) = 2(c + 2)$

123. $6(x - 1) = -3(2 - x) + 3x$

124. $4(2 - 3x) = -[6x - (8 - 6x)]$

125. $4 - \left(\frac{2}{3}x + 2\right) = 2\left(-\frac{1}{3}x + 1\right)$

126. $7 - \left(\frac{1}{2}x + 4\right) = 3\left(-\frac{1}{6}x + 2\right)$

127. $0.8z - 0.3(z + 10) = 0.5(z + 1)$

128. $0.6(z + 5) - 0.5(z + 2) = 0.1(z - 23)$

Resolución de problemas

129. Densidad de población La densidad de población de Estados Unidos ha aumentado de manera constante desde el año 2000. La densidad de población de Estados Unidos puede estimarse usando la ecuación:

$$P = 0.82t + 78.5$$

donde P es la densidad de población, que está medida en personas por milla cuadrada, y t es el número de años desde el año 2000. Usa $t = 1$ para el año 2001, $t = 2$ para el año 2002, etcétera. Si la densidad de población sigue aumentado a su tasa actual,

a) determina la densidad de población de Estados Unidos en el 2018.

b) ¿para qué año, la densidad de población de Estados Unidos, será de 100 personas por milla cuadrada?

130. Bebés dormilones El Dr. Richard Ferber, experto en sueño pediátrico, desarrolló un método* para ayudar a los niños, de 6 meses de edad o mayores, a dormir toda la noche. Con frecuencia llamado "ferberizante", requiere que los padres esperen tiempos, cada vez mayores, antes de entrar a la habitación del niño durante la noche para reconfortar al niño que llora. El tiempo de espera sugerido depende de cuántas noches los padres usen el método y puede encontrarse usando la ecuación:

$$W = 5n + 5$$

donde W es el tiempo de espera en minutos y n es el número de la noche. Por ejemplo, en la primera noche, $n = 1$, en la segunda noche, $n = 2$, etcétera.

a) ¿Cuánto deben esperar los padres en la primera noche?

b) ¿Cuánto deben esperar los padres en la cuarta noche?

c) ¿En cuál noche los padres deben esperar 30 minutos?

d) ¿En cuál noche los padres deben esperar 40 minutos?



131. Negocio de salsa Alberto elabora salsa casera y la vende en su puesto al lado del camino. El costo semanal de Alberto para elaborar la salsa se puede determinar usando la ecuación $C = 2.75j + 40$, donde C representa el costo en dólares y j representa el número de frascos de salsa elaborados.

a) Determina el costo semanal de Alberto para elaborar 20 frascos de salsa.

b) Determina el costo semanal de Alberto para elaborar 50 frascos de salsa.

c) ¿Cuántos frascos de salsa necesitaría elaborar Alberto para que su costo sea de $205?



132. Tartas caseras Julia hornea tartas caseras y las vende en el mercado local. La ganancia semanal de Julia por la venta de las tartas se puede encontrar usando la fórmula $P = 3.75x - 33.75$. En esta ecuación P representa la ganancia en dólares y x representa el número de tartas vendidas.

a) Determina la ganancia semanal de Julia, si ella vende 50 tartas.

b) ¿Cuántas tartas tiene que vender Julia en una semana para recuperar su inversión ($P = 0$)?

c) ¿Cuántas tartas tendría que vender Julia en una semana para tener una ganancia de $300?

Resuelve cada ecuación para el símbolo dado. Supón que el símbolo que resuelves representa la variable y que todos los otros símbolos representan números reales distintos de cero. Consulta el ejemplo 11.

133. Resuelve $\ast\triangle - \square = \odot$ para $\triangle$.

134. Resuelve $\triangle(\odot + \square) = \otimes$ para $\triangle$.

135. Resuelve $\odot\square + \triangle = \otimes$ para $\odot$.

136. Resuelve $\triangle(\odot + \square) = \otimes$ para $\square$.

*Antes de intentar este método, los padres primero deben consultar con su pediatra.

Ejercicios conceptuales y de redacción

137. Considera la ecuación $2x = 5$. Proporciona tres ecuaciones equivalentes. Explica por qué las ecuaciones son equivalentes.

138. Considera la ecuación $x = 4$. Proporciona tres ecuaciones equivalentes. Explica por qué las ecuaciones son equivalentes.

139. Construye una ecuación que sea una inconsistencia. Explica cómo creaste la inconsistencia.

140. Construye una ecuación que sea una identidad. Explica cómo creaste la ecuación.

141. Crea una ecuación con dos términos a la izquierda del signo de igualdad y tres términos a la derecha del signo de igualdad que sea equivalente a la ecuación $\frac{1}{2}p + 3 = 6$.

142. Crea una ecuación con tres términos a la izquierda del signo de igualdad y dos términos a la derecha del signo de igualdad que sea equivalente a la ecuación $3m + 1 = m + 5$.

143. Considera la ecuación $2(a + 5) + n = 4a - 8$. ¿Qué número real debe ser n para que la solución de la ecuación sea -2? Explica cómo determinaste tu respuesta.

144. Considera la ecuación $-3(x + 2) + 5x + 12 = n$. ¿Qué número real debe ser n para que la solución de la ecuación sea 6? Explica cómo determinaste tu respuesta.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.3] **145. a)** Explica cómo se determina el valor absoluto de un número.

b) Escribe la definición de valor absoluto.

[1.4] *Evalúa.*

146. a) -3^2 **b)** $(-3)^2$

147. $\sqrt[3]{-125}$ **148.** $\left(-\frac{2}{7}\right)^2$

2.2 Resolución de problemas y uso de fórmulas

1 **Procedimiento para resolver problemas**

2 **Despejar una variable en una ecuación o fórmula**

1 Procedimiento para resolver problemas

Una de las principales razones para estudiar matemáticas es que se les puede usar para resolver problemas cotidianos. Para resolver matemáticamente la mayoría de los problemas aplicados en la vida real, es necesario expresar el problema en símbolos matemáticos, usando expresiones o ecuaciones, y al hacer esto, se crea un **modelo matemático** de la situación.

En esta sección se presenta un procedimiento para la solución de problemas y se discuten fórmulas. Una **fórmula** es una ecuación que es un modelo matemático de una situación de la vida real. A lo largo del libro resolverás problemas. Cuando lo hagas, determinarás una ecuación o fórmula que representa o modela la situación de la vida real.

Puedes abordar cualquier problema usando el procedimiento general de cinco pasos para resolver problemas desarrollado por George Pólya y presentado en su libro *How to Solve It* (Cómo resolverlo).

Guía para la resolución de problemas

1. Entender el problema

- Lee el problema **cuidadosamente** al menos dos veces. En la primera lectura, desarrolla un panorama general del problema. En la segunda lectura, determina (a) exactamente qué se te pide determinar y (b) qué información proporciona el problema.
- Si es posible, elabora un diagrama para ilustrar el problema. Etiqueta la información dada.
- Enlista la información en una tabla si fuera conveniente para resolver el problema.

(*Continúa*)

2. **Traduce el problema al lenguaje matemático.**
   - Por lo general, esto implicará expresar el problema de manera algebraica.
   - En ocasiones, esto implicará seleccionar una fórmula en particular, mientras que otras veces será cuestión de que propongas tu propia ecuación. Puede ser necesario consultar otras fuentes para el uso apropiado de las fórmulas.
3. **Realiza los cálculos matemáticos necesarios para resolver el problema.**
4. **Verifica la respuesta que encontraste en el paso 3.**
   - Pregúntate: ¿La respuesta tiene sentido? ¿La respuesta es razonable? Si la respuesta no es razonable, revisa, tanto el método que usaste para resolver el problema, así como tus cálculos.
   - Si es posible, verifica la solución en el problema original
5. **Responde la pregunta.** Asegúrate de responder la pregunta planteada. Enuncia la respuesta claramente en una oración.

Los siguientes ejemplos muestran cómo aplicar la guía de resolución de problemas. Cuando sea necesario, se proporcionarán los pasos en los ejemplos para ilustrar el proceso de cinco pasos. Como se señaló en el paso 2 del proceso de resolución de problemas, –*traduce el problema en lenguaje matemático*– en ocasiones se necesitará seleccionar y usar una *fórmula*. En esta sección se mostrará cómo hacer esto.

La primera fórmula que se discutirá, es la **fórmula de interés simple**:

$$\text{interés} = \text{principal} \cdot \text{tasa} \cdot \text{plazo} \text{ o } i = prt$$

donde
i = el interés simple
p = el principal (el monto original de dinero pedido a préstamo)
r = tasa de interés escrita en forma decimal
t = plazo (tiempo)

Observa que la tasa y el tiempo deben usar al misma medida de tiempo. Por lo general, se usarán años. A continuación, se trabajará un ejemplo que usa la fórmula de interés simple.

EJEMPLO 1 **Un préstamo personal** Georgina le hace un préstamo de $2500 a 3.5% de interés simple a su amigo, Eric, por un periodo de 4 años.

a) Al final de los 4 años, ¿cuál es el monto de interés simple que Eric le pagará a Georgina?

b) Cuando Eric liquide su préstamo, ¿cuánto dinero, en total, debe pagarle a Georgina?

Solución **a)** Entiende Cuando se realiza un préstamo con interés simple, el prestatario debe pagar, tanto el interés simple como el principal, cuando liquide el préstamo. Aquí el principal es $2500, la tasa de interés simple es 3.5%, o 0.035, y el plazo es 4 años.

Comprende el Álgebra

Cuando se convierte un número expresado como porcentaje a un número decimal, recuerda que por ciento significa *por 100 o dividido entre 100*, así: $3.5\% = \frac{3.5}{100} = 0.035$.

Traduce Se usará la fórmula de interés simple, $i = prt$. En este problema, $p = 2500$, $i = 0.035$ y $t = 4$.

Realiza

$$i = prt$$
$$i = 2500(0.035)(4)$$
$$i = 350$$

Verifica La respuesta parece razonable en cuanto a que Eric pagará $350 por el uso de $2500 durante 4 años.

Responde El interés simple que se debe es $350.

b) Eric debe liquidar el principal, $2500, más el interés simple determinado en el inciso **a)**, $350. En consecuencia, Eric debe pagarle a Georgina: $2500 + $350, o $2850.

Ahora resuelve el ejercicio 67

Cuando depositas dinero en una cuenta bancaria es probable que te paguen **interés compuesto**. Esto significa que obtienes interés sobre tu inversión durante un periodo de tiempo. Después, en el siguiente periodo, obtienes el interés pagado sobre tu inversión, más el interés pagado sobre el interés que te pagaron en el primer periodo. Este proceso continúa para cada periodo. La **fórmula de interés compuesto** es:

$$A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

donde A = el monto acumulado o saldo en la cuenta

p = el principal, o la inversión inicial

r = la tasa de interés escrita en forma decimal

n = el número de veces por año que se compone el interés

t = el plazo de la inversión, medida en años

El siguiente ejemplo involucrará el uso de la fórmula de interés compuesto.

EJEMPLO 2 **Certificado de depósito** Paola Sánchez recibió un bono vacacional de $1 350 e invirtió el dinero en un certificado de depósito (CD) a una tasa de interés anual de 3.5 % compuesto mensualmente durante 18 meses.

a) ¿Cuánto dinero valdrá el CD en 18 meses?

b) ¿Cuánto interés ganará durante los 18 meses?

Solución **a)** Entiende y traduce Se usará la fórmula de interés compuesto, $A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$. En este problema, se tiene $p = \$1\,350$, $r = 3.6\,\%$ o 0.036, $n = 12$ (pues hay 12 meses en un año) y $t = 1.5$ $\left(18 \text{ meses} = \frac{18}{12} = 1.5 \text{ años}\right)$. Sustituye estos valores en la fórmula y evalúa.

$$A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Realiza
$$= 1\,350\left(1 + \frac{0.036}{12}\right)^{12(1.5)}$$
$$= 1\,350(1 + 0.003)^{18}$$
$$= 1\,350(1.003)^{18}$$
$$\approx 1\,350(1.05539928) \quad \text{En una calculadora.}$$
$$\approx 1\,424.79 \quad \text{Redondea al centavo más cercano.}$$

Verifica La respuesta de $1 424.79 es razonable, pues es más de lo que Paola invirtió originalmente.

Responde El CD de Paola valdrá $1 424.79 al final de 18 meses.

b) Entiende El interés será la diferencia entre el monto original invertido y el valor del certificado de depósito al final de 18 meses.

Traduce $\text{interés} = \begin{pmatrix}\text{valor del certificado de}\\ \text{depósito después de 18 meses}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{monto originalmente}\\ \text{invertido}\end{pmatrix}$

Realiza $= 1\,424.79 - 1\,350 = 74.79$

Verifica El monto del interés es razonable y la aritmética se comprueba fácilmente.

Responde El interés ganado en el periodo de 18 meses será de $74.79.

Ahora resuelve el ejercicio 81

El siguiente ejemplo involucra una fórmula que contiene variables con subíndices. Los **subíndices** son números (u otras variables) colocadas abajo y a la derecha de las variables. En el ejemplo 3, se usa la variable v_0. En la variable v_0, el 0 es un subíndice. Los subíndices se leen usando la palabra "sub". Por ejemplo, v_0 se lee "v sub cero".

EJEMPLO 3 **Altura de una bola de tenis** Cuando un objeto se lanza directamente hacia arriba, la altura, h, del objeto sobre el suelo en el tiempo, t, se puede determinar usando la siguiente fórmula:

$$h = -16t^2 + v_0t + h_0$$

donde h es la altura del objeto en pies, t es el tiempo en segundos, v_0 es la velocidad inicial o de partida del objeto, y h_0 es la altura inicial o de partida del objeto. Una bola de tenis se lanza directamente hacia arriba con una velocidad inicial de 40 pies por segundo, desde una altura inicial de 3 pies.

a) Determina la altura de la bola de tenis después de 1 segundo.

b) Determina la altura de la bola de tenis después de 2.5 segundos.

Solución Entiende y traduce En este problema, la altura de la bola de tenis puede determinarse usando la fórmula dada. El primer paso es identificar los números a sustituir en la fórmula para v_0 y h_0. La velocidad inicial de la bola de tenis es de 40 pies por segundo, por tanto $v_0 = 40$. La altura inicial de la bola de tenis es de 3 pies, por tanto $h_0 = 3$. Reescribe la fórmula sustituyendo estos valores:

$$h = -16t^2 + v_0t + h_0$$
$$h = -16t^2 + 40t + 3$$

Para determinar la altura de la bola de tenis en los incisos **a)** y **b)**, se sustituirán los valores de t en esta ecuación.

Realizar

a) La altura de la bola de tenis, después de 1 segundo, puede determinarse al sustituir $t = 1$ en la ecuación.

$$h = -16t^2 + 40t + 3$$
$$h = -16(1)^2 + 40(1) + 3$$
$$= -16 \cdot 1 + 40 + 3 = -16 + 40 + 3 = 27$$

Por tanto, la altura de la bola de tenis, después de 1 segundo, es de 27 pies.

b) La altura de la bola de tenis, después de 2.5 segundos, puede determinarse al sustituir $t = 2.5$ en la ecuación.

$$h = -16t^2 + 40t + 3$$
$$h = -16(2.5)^2 + 40(2.5) + 3$$
$$= -16(6.25) + 100 + 3$$
$$= -100 + 100 + 3 = 3$$

Por tanto, la altura de la bola de tenis, después de 2.5 segundos, es de 3 pies.

Ahora resuelve el ejercicio 85

2 Despejar una variable en una ecuación o fórmula

Existen muchas ocasiones en las cuales te pueden proporcionar una ecuación o fórmula que tenga una variable despejada; sin embargo, a veces querrás despejar una variable diferente. Tomando en cuenta que las fórmulas son ecuaciones, se puede usar el mismo procedimiento que utilizaste para despejar una variable en una ecuación para despejar una variable en una fórmula.

Cuando te proporcionen una ecuación (o fórmula) que esté despejada para una variable y quieras despejar una variable diferente, trata cada variable en la ecuación, excepto la que quieres resolver, como si fuese una constante. Después, *separa la variable* que quieres resolver usando procedimientos similares a los usados anteriormente para resolver ecuaciones.

EJEMPLO 4 Resuelve la ecuación $5x - 8y = 32$ para y.

Solución Se despejará la variable y separando el término que tiene la y en el lado izquierdo de la ecuación.

$$\begin{aligned} 5x - 8y &= 32 \\ 5x - 5x - 8y &= -5x + 32 && \text{Resta } 5x \text{ de ambos lados.} \\ -8y &= -5x + 32 \\ \frac{-8y}{-8} &= \frac{-5x + 32}{-8} && \text{Divide ambos lados entre } -8. \\ y &= \frac{-5x + 32}{-8} \\ y &= \frac{-1(-5x + 32)}{-1(-8)} && \text{Multiplica el numerador y el denominador por } -1. \\ y &= \frac{5x - 32}{8} \quad \text{o} \quad y = \frac{5}{8}x - 4 \end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 27

EJEMPLO 5 Resuelve la ecuación $y + 1 = \frac{2}{5}(x - 4)$ para y.

Solución Comienza por multiplicar ambos lados de la ecuación por el mínimo común denominador, 5.

$$\begin{aligned} y + 1 &= \frac{2}{5}(x - 4) \\ 5(y + 1) &= 5\left[\frac{2}{5}(x - 4)\right] && \text{Multiplica ambos lados por el MCD, 5.} \\ 5(y + 1) &= 2(x - 4) \\ 5y + 5 &= 2x - 8 && \text{Usa la propiedad distributiva.} \\ 5y + 5 - 5 &= 2x - 8 - 5 && \text{Resta 5 de ambos lados.} \\ 5y &= 2x - 13 \\ \frac{5y}{5} &= \frac{2x - 13}{5} && \text{Divide ambos lados entre 5.} \\ y &= \frac{2x - 13}{5} \quad \text{o} \quad y = \frac{2}{5}x - \frac{13}{5} \end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 35

A continuación, se resolverá para una variable en una fórmula. Recuerda: la meta es despejar (o separar) la variable que quieres resolver.

EJEMPLO 6 **Perímetro de un rectángulo** La fórmula para el perímetro de un rectángulo es $P = 2l + 2w$, donde l es la longitud y w es el ancho del rectángulo (observa la **Figura 2.2**). De esta fórmula, despeja el ancho, w.

Solución Dado que se busca despejar w, debes separar la w en un lado de la ecuación.

$$\begin{aligned} P &= 2l + 2w \\ P - 2l &= 2l - 2l + 2w && \text{Resta } 2l \text{ de ambos lados.} \\ P - 2l &= 2w \\ \frac{P - 2l}{2} &= \frac{2w}{2} && \text{Divide ambos lados entre 2.} \\ \frac{P - 2l}{2} &= w \end{aligned}$$

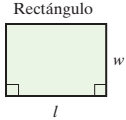


FIGURA 2.2

Por tanto, $w = \dfrac{P - 2l}{2}$ o $w = \dfrac{P}{2} - \dfrac{2l}{2} = \dfrac{P}{2} - l$.

Ahora resuelve el ejercicio 49

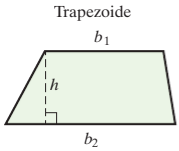


FIGURA 2.3

EJEMPLO 7 **Área de un trapezoide** Una fórmula que se usa para determinar el área de un trapezoide es $A = \dfrac{1}{2}h(b_1 + b_2)$, donde h es la altura, y b_1 y b_2 son las longitudes de las bases del trapezoide (observa la **Figura 2.3**). Despeja, de esta fórmula, a b_2.

Solución Comienza por multiplicar ambos lados de la ecuación por el MCD, 2, para eliminar fracciones.

$$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$$

$$2 \cdot A = 2\left[\frac{1}{2}h(b_1 + b_2)\right] \quad \text{Multiplica ambos lados por 2.}$$

$$2A = h(b_1 + b_2)$$

$$\frac{2A}{h} = \frac{h(b_1 + b_2)}{h} \quad \text{Divide ambos lados entre } h.$$

$$\frac{2A}{h} = b_1 + b_2$$

$$\frac{2A}{h} - b_1 = b_1 - b_1 + b_2 \quad \text{Resta } b_1 \text{ de ambos lados.}$$

$$\frac{2A}{h} - b_1 = b_2$$

Ahora resuelve el ejercicio 57

EJEMPLO 8 **Ley de Charles** Una fórmula que se usa en química, que relaciona el volumen y la temperatura de un gas, es $\dfrac{V_1}{T_1} = \dfrac{V_2}{T_2}$, donde V_1 es el volumen inicial, T_1 es la temperatura inicial, V_2 es el volumen final y T_2 es la temperatura final. A esta fórmula se le conoce como ley de Charles. Despeja, de esta fórmula, a T_2.

Solución Comienza por multiplicar ambos lados de la ecuación por el MCD de las fracciones, T_1T_2.

$$T_1T_2 \cdot \left(\frac{V_1}{T_1}\right) = T_1T_2 \cdot \left(\frac{V_2}{T_2}\right) \quad \text{Multiplica ambos lados por } T_1T_2$$

$$T_2V_1 = T_1V_2$$

$$\frac{T_2V_1}{V_1} = \frac{T_1V_2}{V_1} \quad \text{Divide ambos lados entre } V_1.$$

$$T_2 = \frac{T_1V_2}{V_1}$$

Ahora resuelve el ejercicio 55

2.2 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

fórmula modelo entender traducir verificar subíndice superíndice

1. Expresar un problema usando símbolos matemáticos, es crear un _____ matemático.
2. Un número o variable colocado abajo y a la derecha de una variable, es un _____.
3. Expresar un problema algebraicamente, es _____ el problema al lenguaje matemático.
4. El primer paso en el procedimiento para resolver problemas, es _____ el problema.
5. Para _____ una respuesta, primero se pregunta "¿La respuesta tiene sentido?".
6. Una _____ es una ecuación que es un modelo matemático de una situación de la vida real.

Practica tus habilidades

Evalúa las siguientes fórmulas para los valores dados. Usa la tecla $\boxed{\pi}$ *en tu calculadora para evaluar* π *cuando sea necesario. Redondea las respuestas a la centésima más cercana.*

7. $F = ma$ cuando $m = 79$, $a = 32$ (una fórmula física usada para medir la fuerza)
8. $A = bh$ cuando $b = 13$, $h = 21$ (una fórmula para determinar el área de un paralelogramo)
9. $A = P + Prt$ cuando $P = 160$, $r = 0.05$, $t = 2$ (una fórmula bancaria para determinar el monto total en una cuenta, después de sumar interés)
10. $S = 2lw + 2wh + 2lh$ cuando $l = 7$, $w = 4$, $h = 3$ (una fórmula para determinar el área superficial de un sólido rectangular)
11. $A = \pi r^2$ cuando $r = 8$ (una fórmula para determinar el área de un círculo)
12. $V = \pi r^2 h$ cuando $r = 3$, $h = 5$ (una fórmula para determinar el volumen de un cilindro)
13. $A = \frac{1}{2}bh$ cuando $b = 7$, $h = 6$ (una fórmula para determinar el área de un triángulo)
14. $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$ cuando $h = 15$, $b_1 = 20$, $b_2 = 28$ (una fórmula para determinar el área de un trapezoide)
15. $Z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ cuando $x = 130$, $\bar{x} = 100$, $s = 15$ (una fórmula de estadística para determinar un valor estándar)
16. $E = a_1 p_1 + a_2 p_2$ cuando $a_1 = 10$, $p_1 = 0.2$, $a_2 = 100$, $p_2 = 0.3$ (una fórmula estadística para determinar el valor esperado de un evento)
17. $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ cuando $y_2 = 4$, $y_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_1 = -6$ (una fórmula para determinar la pendiente de una línea recta; esta fórmula se estudiará en el capítulo 3)
18. $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ cuando $x_2 = 5$, $x_1 = -3$, $y_2 = -6$, $y_1 = 3$ (una fórmula para determinar la distancia entre dos puntos sobre una línea recta; esta fórmula se estudiará en el capítulo 10)
19. $R_T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ cuando $R_1 = 100$, $R_2 = 200$ (una fórmula de electrónica para determinar la resistencia total en un circuito en paralelo que contiene dos resistores)
20. $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ cuando $n = 50$, $a_1 = -4$, $a_n = 339$ (una fórmula para determinar la suma de términos en una secuencia; esta fórmula se estudiará en el capítulo 11)
21. $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ cuando $a = 2$, $b = -5$, $c = -12$ (de la fórmula cuadrática; la fórmula cuadrática se estudiará en el capítulo 8)
22. $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ cuando $a = 2$, $b = 9$, $c = -5$ (de la fórmula cuadrática)
23. $A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ cuando $p = 100$, $r = 0.06$, $n = 1$, $t = 3$ (la fórmula de interés compuesto; consulta el ejemplo 2)
24. $A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ cuando $p = 7000$, $r = 0.02$, $n = 4$, $t = 5$ (la fórmula de interés compuesto)

Despeja la y en cada una de las siguientes ecuaciones (consulta los ejemplos 4 y 5).

25. $3x + y = 5$
26. $6x - 2y = 16$
27. $3x + 2y = 6$
28. $-6x + 5y = 25$
29. $7x = 3y - 2$
30. $9x = 7y + 23$
31. $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$
32. $\frac{x}{4} - \frac{y}{6} = 2$
33. $y + 1 = -\frac{4}{3}(x - 9)$
34. $y - 4 = \frac{2}{3}(x + 6)$
35. $y - 3 = \frac{2}{3}(x + 2)$
36. $y + 5 = -\frac{3}{2}(x - 1)$

Despeja la variable indicada en cada ecuación (consulta los ejemplos 6-8).

37. $E = IR$, para I

38. $C = 2\pi r$, para r

39. $C = \pi d$, para d

40. $A = lw$, para l

41. $P = 2l + 2w$, para l

42. $ax + b = y$, para a

43. $V = lwh$, para h

44. $V = \pi r^2 h$, para h

45. $A = P + Prt$, para r

46. $Ax + By = C$, para y

47. $V = \frac{1}{3}lwh$, para l

48. $A = \frac{1}{2}bh$, para b

49. $y = mx + b$, para m

50. $IR + Ir = E$, para R

51. $y - y_1 = m(x - x_1)$, para m

52. $a_n = a_1 + (n - 1)d$, para d

53. $z = \dfrac{x - \bar{x}}{s}$, para s

54. $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$, para σ

55. $P_1 = \dfrac{T_1 P_2}{T_2}$, para T_2

56. $y = \dfrac{kx}{z}$, para z

57. $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$, para h

58. $S = \frac{n}{2}(f + l)$ para n

59. $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, para h

60. $S = bh + 3bl$, para l

61. $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, para F

62. $F = \frac{9}{5}C + 32$, para C

63. $F = \dfrac{km_1 m_2}{d^2}$, para m_1

64. $F = \dfrac{km_1 m_2}{d^2}$ para m_2

Resolución de problemas

En los ejercicios 65-88, cuando sea adecuado, redondea tu respuesta a la centésima más cercana.

65. Conversión de millas a kilómetros Una milla es aproximadamente 1.6 kilómetros.

a) Escribe una fórmula, usando m para millas y k para kilómetros, que puedas usar para convertir de kilómetros a millas.

b) Escribe una fórmula que puedas usar para convertir de millas a kilómetros.

66. Conversión de pulgadas a centímetros Una pulgada es aproximadamente 2.54 centímetros.

a) Escribe una fórmula, usando i para pulgadas y c para centímetros, que puedas usar para convertir de centímetros a pulgadas.

b) Escribe una fórmula que pueda usar para convertir de pulgadas a centímetros.

En los ejercicios 67-72, usa la fórmula de interés simple $i = prt$. Consulta el ejemplo 1.

67. Préstamo para un negocio Para ayudar a su amigo a financiar la apertura de una nueva cafetería, Jacobo le presta a su amigo Agustín $6000. El préstamo es por 4 años, con una tasa de interés simple de 3%.

a) Determina el monto de interés simple que Agustín pagará por el préstamo.

b) Cuando Agustín liquide el préstamo, al final de los 4 años, ¿cuánto dinero, en total, debe pagarle a Jacobo?

68. Préstamo personal Para ayudar a pagar los aparatos de ortodoncia de su hijo, Pedro le pide prestados $4500 a su hermana Sheila. El préstamo es por 2 años, con una tasa de interés simple de 1.75%.



a) Determina el monto de interés simple que Pedro pagará por el préstamo.

b) Cuando Pedro liquide el préstamo, al final de 2 años, ¿cuánto dinero, en total, debe pagarle a Sheila?

69. Determinar la duración de un préstamo María le prestó a su hija Daniela $20 000, a una tasa de interés simple de 3.75 % anual. Al final del periodo del préstamo, Daniela le pagó a María los $20 000 originales, más $4 875 de interés. Determina la duración del préstamo.

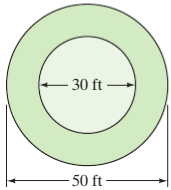
70. Determinar la tasa Víctor le pidió $500 a su cooperativa de crédito durante 2 años. El interés simple que pagó fue de $52.90. ¿Qué tasa de interés simple se cobró a Víctor?

71. Inversión Jana ganó $5 000 con un boleto de lotería instantánea. Jana invirtió el dinero a 3 años en un certificado de depósito (CD). Cuando Jana cobró el CD, recibió $5 262.50. ¿Qué tasa de interés simple recibió Jana por su CD?

72. Un certificado de depósito Erica recibió $2 000 por una conferencia en un seminario de planeación financiera. Erica invirtió el dinero en un certificado de depósito (CD) durante 2 años. Cuando cobró el CD, recibió $2 166. ¿Qué tasa de interés simple recibió Erica sobre su CD?

En los ejercicios 73-78, si no estás seguro de qué fórmula usar, consulta el Apéndice A. Usa la tecla $\boxed{\pi}$ *de tu calculadora para evaluar a* π *cuando sea necesario. Redondea a la centésima más cercana.*

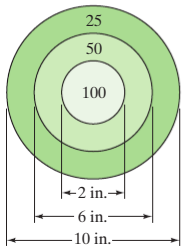
73. Área de un helipuerto Un helipuerto tiene dos círculos concéntricos, como se muestra a continuación.



a) Determina el área del círculo interior.

b) Determina el área del espacio entre los dos círculos.

74. Área de un tablero de dardos A continuación se muestra un tablero de dardos y sus dimensiones.



a) Determina el área de la región marcada como 100.

b) Determina el área de la región marcada como 50.

c) Determina el área de la región marcada como 25.

75. Volumen de concreto para una entrada de automóviles Antonio coloca concreto para una entrada de automóviles. La entrada debe medir 15 pies de largo por 10 pies de ancho por 6 pulgadas de profundidad.

a) Determina el volumen de concreto necesario, en pies cúbicos.

b) Si 1 yarda cúbica = 27 pies cúbicos, ¿cuántas yardas cúbicas de concreto necesita?

c) Si el concreto cuesta $35 por yarda cúbica, ¿cuál es el costo del concreto para esta obra? El concreto debe comprarse en yardas cúbicas completas.

76. Cancha de baloncesto La ciudad de Palmetto planea agregar una cancha de baloncesto a su centro comunitario. La cancha requerirá una loza de asfalto de 108 pies de largo por 56 pies de ancho por 4 pulgadas de profundidad.



a) Determina el volumen de asfalto necesario, en pies cúbicos.

b) Si 1 yarda cúbica = 27 pies cúbicos, ¿cuántas yardas de asfalto se necesitan?

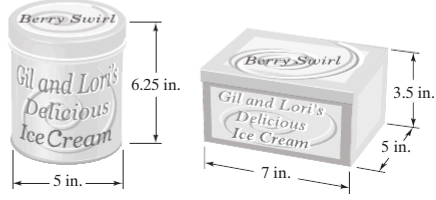
c) Si el asfalto cuesta $40 por yarda cúbica, ¿cuál es el costo del asfalto para esta obra? El asfalto debe comprarse en yardas cúbicas completas.

77. Recipientes para helado La compañía, Helados Deliciosos de Gil y Lori, vende helados en dos recipientes, un tubo cilíndrico y una caja rectangular, como se muestra en la figura.

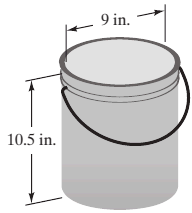
a) Determina el volumen del tubo cilíndrico.

b) Determina el volumen de la caja rectangular.

c) ¿Cuál recipiente contiene más helado y cuál es la diferencia en sus volúmenes?



78. Capacidad de un balde Sandra tiene un balde en el cual quiere mezclar algo de detergente. Las dimensiones del balde se muestran en la figura.



a) Determina la capacidad del balde en pulgadas cúbicas.

b) Si 231 pulgadas cúbicas = 1 galón, ¿cuál es la capacidad del balde en galones?

c) Si las instrucciones en la botella de detergente indican agregar 1 onza por galón de agua, ¿cuánto detergente debe agregar Sandra a un balde lleno de agua?

Para los ejercicios 79-84, consulta el ejemplo 2.

79. Cuenta de ahorros Alma García invirtió $10 000 en una cuenta de ahorros que paga 6% de interés compuesto trimestralmente. ¿Cuánto dinero tendrá en su cuenta al final de 2 años?

80. Composición mensual Antonio invirtió $8500 en una cuenta de ahorros que paga 3.3% de interés compuesto mensualmente. ¿Cuánto dinero tendrá en su cuenta al final de 4 años?

81. Certificado de depósito Elena invirtió $4390 en un certificado de depósito (CD) que paga 4.1% de interés compuesto semestralmente.

a) ¿Cuánto valdrá el CD después de 36 meses?

b) ¿Cuánto interés ganó Elena por su CD?

82. Inversión de las ganancias de un premio Linda recibió $12 000 por ganar un concurso de canto. Ella invierte sus ganancias en un certificado de depósito (CD) que paga 1.5% de interés compuesto mensualmente.

a) ¿Cuánto valdrá el CD después de 30 meses?

b) ¿Cuánto interés ganará Linda por su CD?

83. Inversión para el retiro Juan recibió una ganancia de $50 000 cuando vendió su casa. Para ayudarse a financiar su retiro, Juan invirtió su ganancia en un certificado de depósito (CD) que paga 2.1% de interés compuesto mensualmente.

a) ¿Cuánto valdrá el CD en 10 años?

b) ¿Cuánto interés ganará Juan por su CD?

84. Ahorros universitarios Ana invierte $25 000 que recibió como herencia en un certificado de depósito (CD), para ayudar a pagar la universidad para sus hijos. El CD paga 1.5% de interés compuesto mensual.

a) ¿Cuánto valdrá el CD en 7 años?

b) ¿Cuánto interés ganará Ana por su CD?

Para los ejercicios 85-86, consulta el ejemplo 3.

85. Altura de pelota de béisbol Una pelota de béisbol es golpeada directamente hacia arriba, con una velocidad inicial de 55 pies por segundo, desde una altura inicial de 4 pies.

a) Determina la altura de la pelota de béisbol después de 1 segundo.

b) Determina la altura de la pelota de béisbol después de 2 segundos.

c) Determina la altura de la pelota de béisbol después de 3.5 segundos.

86. Cohete de agua Como proyecto de la clase de física, Pablo lanza un cohete de agua directamente hacia arriba, con una velocidad inicial de 147 pies por segundo. El cohete está asentado en el suelo, por tanto, su altura inicial es de 0 pies.

a) Determina la altura del cohete de agua después de 1 segundo.

b) Determina la altura del cohete de agua después de 4 segundos.

c) Determina la altura del cohete de agua después de 9 segundos.

Los ejercicios 87-90 contienen varias situaciones. Resuelve cada ejercicio.

87. Frecuencia cardiaca óptima La frecuencia cardíaca máxima recomendada durante el ejercicio, en latidos por minuto (lpm), es de 220 menos la edad de la persona que ejercita.

Fuente: American Heart Association



a) Escribe una ecuación que relacione la frecuencia cardíaca máxima, r, con la edad, a.

b) Si Gregorio tiene 58 años de edad, determina su frecuencia cardíaca máxima recomendada.

c) Si la frecuencia cardíaca máxima recomendada para Patricio es de 157 latidos por minuto, determina su edad.

88. Saldo de una cartera de inversiones Algunos planificadores financieros recomiendan que el porcentaje de acciones en la cartera de un inversionista sea de 120, menos la edad del inversionista.

a) Escribe una ecuación que relacione el porcentaje recomendado de acciones, p, con la edad, a.

b) Si Denise tiene 36 años de edad, determina el porcentaje recomendado de acciones que tendría en su cartera.

c) Si el porcentaje recomendado de acciones en la cartera de Raquel es 79%, determina su edad.

89. Pérdida de peso El 10 de enero, Gerardo pesó 207 libras. Gerardo comenzó un programa de dieta y ejercicio y como resultado perdió 0.75 libras por semana.

a) Escribe una ecuación que relacione el peso de Gerardo, W, con el número de semanas, n, que Gerardo ha estado en su programa.

b) ¿Cuál es el peso de Gerardo después de 8 semanas de programa?

c) ¿Después de cuántas semanas Gerardo pesará 180 libras?

90. Índice de Masa Corporal Para determinar tu índice de masa corporal (IMC) usando mediciones métricas, divide tu peso, en kilogramos, entre el cuadrado de tu estatura, en metros. Para calcular el IMC usando libras y pulgadas, multiplica tu peso en libras por 705, luego divide entre el cuadrado de tu estatura, en pulgadas.

a) Crea una fórmula para determinar el IMC de una persona usando kilogramos y metros.

b) Crea una fórmula para determinar el IMC de una persona, cuando el peso está en libras y la estatura en pulgadas.

c) Determina tu IMC.

Problemas de desafío

91. Resuelve la fórmula $r = \dfrac{s/t}{t/u}$ para **a)** s, **b)** u.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.4] **92.** Evalúa $-\sqrt{3^2 + 4^2} + |3 - 4| - 6^2$.

93. Evalúa $\dfrac{7 + 9 \div (2^3 + 4 \div 4)}{|3 - 7| + \sqrt{5^2 - 3^2}}$.

94. Evalúa $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ cuando $a = -2$, $b = 3$.

[2.1] **95.** Resuelve la ecuación $\dfrac{1}{4}t + \dfrac{1}{2} = 1 - \dfrac{1}{8}t$.

2.3 Aplicaciones del Álgebra

1 Traducción de un enunciado verbal en una expresión algebraica o ecuación

2 Procedimiento de resolución de problemas

1 Traducción de un enunciado verbal en una expresión algebraica o ecuación

Traducir un problema aplicado en una ecuación es quizá la parte más difícil de resolver problemas verbales. Esta sección comienza por brindar algunos ejemplos de enunciados verbales que se traducen en expresiones algebraicas.

Enunciado verbal	Expresión algebraica
Un número aumentado por 8	$x + 8$
El doble de un número	$2x$
7 menos que un número	$x - 7$
Un noveno de un número	$\dfrac{1}{9}x$ o $\dfrac{x}{9}$
2 más que 3 veces un número	$3x + 2$
4 menos que 6 veces un número	$6x - 4$
12 veces la suma de un número y 5	$12(x + 5)$

En estas expresiones algebraicas se usó la variable x, pero podría usarse cualquier otra variable para representar la cantidad desconocida.

EJEMPLO 1 Expresa cada enunciado como una expresión algebraica.

a) El radio de un círculo, r, reducido por 9 centímetros

b) 7 millas menos que el doble de la distancia, d

c) 3 veces el volumen, v, aumentado por 5 galones

Solución

a) $r - 9$ **b)** $2d - 7$ **c)** $3v + 5$

Ahora resuelve el ejercicio 9

SUGERENCIA ÚTIL

Consejo de estudio

¡El éxito para resolver problemas verbales requiere de trabajo arduo! Asegúrate de:

- Leer cuidadosamente el libro y los ejemplos.
- Asistir a clase todos los días.
- Trabajar todos los ejercicios que te asignen.

Mientras lees los ejemplos en el resto del capítulo, piensa en cómo pueden aplicarse en otros problemas similares. Tal es el caso del ejemplo 1 **a)** se afirma que el radio, r, reducido por 9 centímetros, puede representarse mediante $r - 9$. Puedes generalizar esto a otros problemas similares. Por ejemplo, un peso, w, reducido por 15 libras, puede representarse como $w - 15$.

EJEMPLO 2 Escribe cada enunciado como una expresión algebraica.

a) El costo de descargar x canciones a \$1.29 cada una

b) La distancia d recorrida en bicicleta en t horas viajando a 17 millas por hora

c) El costo de llenar tu automóvil con g galones de gasolina a un costo de \$2.15 por galón

d) Una comisión de 15% sobre ventas de s dólares



Solución

a) El costo de descargar 1 canción sería de 1.29(1) dólares. El costo de descargar 2 canciones sería de 1.29(2) dólares. El costo de descargar 3 canciones sería de 1.29(3) dólares, etcétera. Si continúas este proceso de razonamiento, puedes ver que descargar x canciones sería $1.29(x)$ dólares o $1.29x$. Puedes usar este mismo proceso de razonamiento para completar los incisos **b), c)** y **d)**.

b) $17t$

c) $2.15g$

d) Debes convertir el número 15% en un número decimal. Recuerda que $15\% = \frac{15}{100} = 0.15$. Por tanto, la respuesta puede escribirse: $0.15s$.

Ahora resuelve el ejercicio 7

SUGERENCIA ÚTIL

Cuando te pidan determinar un porcentaje, siempre se determina el porcentaje de alguna cantidad. Por tanto, cuando se mencione un porcentaje, *siempre* se multiplica por un número o una variable. Aquí se usa la variable c, pero podrías usar cualquier letra para representar la variable.

Enunciado verbal	Expresión algebraica
6% de un número	$0.06c$
El costo de un objeto aumentado por un impuesto de 7%	$c + 0.07c$
El costo de un objeto reducido por 35%	$c - 0.35c$

En ocasiones, en un problema dos números se relacionan mutuamente. Con frecuencia, uno de los números se representa como una variable y el otro como una expresión que contiene dicha variable. Por lo general, la descripción menos complicada se representa mediante la variable y la segunda (expresión más compleja) se escribe en términos de la variable. Aquí se usa x para la variable.

Enunciado verbal	Un número	Segundo número
La edad de Daniela ahora y la edad de Daniela en 3 años	x	$x + 3$
Un número es 9 veces el otro	x	$9x$
Un segundo número es 4 menos que un número	x	$x - 4$
Un número y el número aumentado por 16 %	x	$x + 0.16x$
Un número y el número reducido por 10 %	x	$x - 0.10x$
La suma de dos números es 10	x	$10 - x$
Una tabla de 6 pies cortada en dos trozos	x	$6 - x$
\$10 000 compartidos entre dos personas	x	$10\,000 - x$

Los últimos tres ejemplos pueden no ser obvios. Considera "la suma de dos números es 10". Cuando se suman x y $10 - x$, se obtiene $x + (10 - x) = 10$. Cuando una tabla de 6 pies se corta en dos trozos, las dos longitudes serán x y $6 - x$. Por ejemplo, si un trozo mide 2 pies, el otro debe ser $6 - 2$ o 4 pies.

SUGERENCIA ÚTIL

Supón que lees la siguiente oración en un problema aplicado: "una soga de 12 pies se corta en dos piezas". Probablemente sabes que x debe representar la longitud de la primera pieza. De lo que quizás no estés seguro, es si deberías tomar que $x - 12$ o $12 - x$ representa la longitud de la segunda pieza. Para ayudarte a decidir, puede ser útil usar números específicos para establecer un patrón. En este ejemplo, podrías usar un patrón similar al siguiente para auxiliarte.

Si la primera pieza es de . . .	Entonces la segunda pieza es de . . .
2 pies	10 pies = 12 pies − 2 pies
5 pies	7 pies = 12 pies − 5 pies

A partir de este patrón puedes ver que, si la primera pieza mide x pies, entonces la segunda pieza mide $12 - x$ pies.

EJEMPLO 3 Para cada oración, selecciona una variable para representar una cantidad y expresa la segunda cantidad en términos de la primera.

a) La rapidez del segundo tren es 1.8 veces la rapidez del primero.

b) \$90 es compartido por David y su hermano.

c) Tomás tarda 3 horas más que Roberta para completar la tarea.

d) Hilda tiene \$5 más que el doble de la cantidad de dinero que tiene Héctor.

e) El largo de un rectángulo es 7 unidades menos que 3 veces su ancho.

Solución

a) Rapidez del primer tren, s; rapidez del segundo tren, $1.8s$

b) Cantidad que tiene David, x; cantidad que tiene su hermano, $90 - x$

c) Roberta, t; Tomás, $t + 3$

d) Héctor, x; Hilda, $2x + 5$

e) Ancho, w; largo, $3w - 7$

Ahora resuelve el ejercicio 11

Con frecuencia, la palabra *es* se traduce como un signo de igualdad.

Enunciado verbal	Ecuación algebraica
4 menos que 6 veces un número *es* 17	$6x - 4 = 17$
Un número reducido por 4 *es* 5 más que el doble del número	$x - 4 = 2x + 5$
El producto de dos enteros consecutivos *es* 72	$x(x + 1) = 72$
Un número aumentado por 15% *es* 90	$x + 0.15x = 90$
Un número reducido por 12% *es* 52	$x - 0.12x = 52$
La suma de un número y el número aumentado por 4% *es* 324	$x + (x + 0.04x) = 324$
El costo de rentar un automóvil por x días a \$24 por día *es* \$120	$24x = 120$

Comprende el Álgebra

Cuando traduces problemas verbales en símbolos algebraicos, con frecuencia la palabra *es* se traduce como *es igual a* y se representa con un signo de igualdad, $=$.

2 Procedimiento de resolución de problemas

Existen muchos tipos de problemas verbales, y el procedimiento general de resolución de problemas, visto en la sección 2.2, puede usarse para resolver todos los tipos. Ahora se presenta nuevamente, el procedimiento de cinco pasos para resolver problemas, para que puedas consultarlo con facilidad. Se incluyó alguna información adicional bajo el paso 2, porque en esta sección se enfatizará la traducción de problemas verbales en ecuaciones.

Procedimiento de resolución de problemas para resolver problemas aplicados

1. **Entiende el problema** Identifica la cantidad, o cantidades, que se pide determinar.
2. **Traduce el problema al lenguaje matemático** (expresa el problema como ecuación).
   - **a)** Elige una variable para representar una cantidad y *escribe exactamente lo que representa.* Representa cualquiera otra cantidad a determinar en términos de esta variable.
   - **b)** Usa la información del inciso **a)** para escribir una ecuación que represente el problema verbal.
3. **Realiza los cálculos matemáticos** (resuelve la ecuación).
4. **Verifica la respuesta** (usa el fraseo original del problema).
5. **Responde la pregunta planteada.**

En ocasiones, se combinarán pasos o no se mostrarán algunos pasos en el procedimiento para resolver problemas, debido a limitaciones de espacio. Incluso si en el texto no se muestra una verificación de un problema, tú siempre debes verificar la respuesta para asegurarte de que la respuesta es razonable y tiene sentido.

EJEMPLO 4 **Servicios de vehículo compartido** Jazmín está considerando dos servicios diferentes de vehículo compartido, *Thumber* y *Destination*. Thumber cobra una tarifa base de \$5 y una tarifa de millaje de 95 centavos por milla recorrida. Destination cobra una tarifa base de \$9.50 y una tarifa de millaje de 80 centavos por milla recorrida. ¿Cuántas millas tendría que viajar Jazmín para que el costo total de los dos servicios sea el mismo?

Solución Entiende Thumber cobra una tarifa base más baja, \$5 comparado con \$9.50. Sin embargo, la tarifa de millaje de Thumber es más alta, 95 centavos por milla comparado con 80 centavos por milla. Se pide encontrar el número de millas recorridas para que los costos de los dos servicios sean iguales. Además, dado que se debe ser consistente con el uso de unidades, 95 centavos se escribirá como \$0.95 y 80 centavos como \$0.80.

Traduce

Sea m = número de millas recorridas.

Entonces $0.95m$ = tarifa de millaje para Thumber.

$0.80m$ = tarifa de millaje para Destination.

$$\text{Costo total para Thumber} = \text{Costo total para Destination}$$

$$\begin{pmatrix}\text{tarifa base}\\ \text{para Thumber}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{tarifa de millaje}\\ \text{para Thumber}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{tarifa base}\\ \text{para Destination}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{tarifa de millaje}\\ \text{para Destination}\end{pmatrix}$$

Realiza

$$\begin{aligned} 5 + 0.95m &= 9.50 + 0.80m \\ 0.95m &= 4.50 + 0.80m \\ 0.15m &= 4.50 \\ \frac{0.15m}{0.15} &= \frac{4.50}{0.15} \\ m &= 30 \end{aligned}$$

Verifica y responde El costo total para cada servicio sería el mismo, cuando Jazmín recorra 30 millas. Si Jazmín recorre 30 millas con Thumber, el costo total sería \$5 + \$0.95(30) o \$33.50. Con Destination, el costo total sería \$9.50 + \$0.80(30) o \$33.50. Por tanto, la respuesta concuerda.

Ahora resuelve el ejercicio 33

EJEMPLO 5 **Impuesto sobre la venta** El precio, incluyendo el impuesto sobre la venta, que Carmela pagó por un Segway i2 SE, fue de \$6945.25. Si la tasa del impuesto sobre la venta fue de 6.85%, determina el precio del Segway antes de agregar el impuesto sobre la venta.

Solución Entiende Se necesita determinar el precio del Segway antes de agregar el impuesto sobre la venta. Se sabe que la tasa del impuesto sobre la venta fue de 6.85% y que el precio, incluido el impuesto fue de \$6945.25.



Traduce Sea x = el precio del Segway antes de agregar el impuesto sobre la venta.

Entonces $0.0685x$ = el monto del impuesto sobre la venta.

(Precio antes de impuestos)	+	(impuesto sobre la venta)	=	(precio incluyendo impuesto)
x	+	$0.0685x$	=	6 945.25

Realiza

$$\begin{aligned} x + 0.0685x &= 6\,945.25 \\ 1.0685x &= 6\,945.25 \\ \frac{1.0685x}{1.0685} &= \frac{6\,945.25}{1.0685} \\ x &= 6\,500 \end{aligned}$$

Verifica y Responde El precio, antes del impuesto, es menor que el precio después del impuesto, que es lo esperado. Por tanto, el precio del Segway, antes de agregar el impuesto sobre la venta era de \$6500.

Ahora resuelve el ejercicio 37

EJEMPLO 6 **Área territorial** El área territorial total de Gibraltar, Nauru, Bermuda y la isla Norfolk, es de 116 km^2. El área territorial de Gibraltar es $\frac{1}{3}$ el área territorial de Nauru. El área territorial de la isla Norfolk es $\frac{5}{3}$ el área territorial de Nauru. El área territorial de Bermuda es 10 km^2 menos que 3 veces el área territorial de Nauru. Determina el área territorial de cada uno de estos cuatro países.

Solución Entiende Se pide determinar el área territorial (en km^2) de Gibraltar, Nauru, Bermuda y la isla Norfolk. Observa que el área territorial de Gibraltar, la isla Norfolk y Bermuda, se describen en términos del área territorial de Nauru. Por tanto, la variable desconocida será el área territorial de Nauru. Además, observa que el área territorial total de los cuatro países es de 116 km^2.



Gibraltar

Traduce

$$\text{Sea } a = \text{el área territorial de Nauru}$$

$$\frac{1}{3}a = \text{el área territorial de Gibraltar}$$

$$\frac{5}{3}a = \text{el área territorial de la isla Norfolk}$$

$$3a - 10 = \text{el área territorial de Bermuda.}$$

$$\begin{pmatrix}\text{área}\\ \text{territorial}\\ \text{de Nauru}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{área}\\ \text{territorial}\\ \text{de Gibraltar}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{área}\\ \text{territorial}\\ \text{de la isla Norfolk}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{área}\\ \text{territorial}\\ \text{de Bermuda}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{área}\\ \text{territorial}\\ \text{total}\end{pmatrix}$$

$$a + \frac{1}{3}a + \frac{5}{3}a + (3a - 10) = 116$$

Realiza

$$a + \frac{1}{3}a + \frac{5}{3}a + (3a - 10) = 116$$
$$a + 2a + 3a - 10 = 116$$
$$6a - 10 = 116$$
$$6a = 126$$
$$a = 21$$

Verifica y Responde El área territorial de Nauru es de 21 km^2. El área territorial de Gibraltar es de $\frac{5}{3}(21) = 35$ km^2. El área territorial de la isla Norfolk es de $\frac{1}{3}(21) = 7$ km^2. El área territorial de Bermuda es de $(3 \cdot 21) - 10 = 63 - 10 = 53$ km^2. El área territorial total es de $(21 + 7 + 35 + 53) = 116$ km^2, así que la respuesta concuerda.

Fuente: www.gazetteer.com

Ahora resuelve el ejercicio 69

EJEMPLO 7 **Ocean City** Erica llevó a su familia a visitar Ocean City, Maryland. Cuando hicieron su reservación por una noche, les ofrecieron una tarifa de $95 por noche, antes de impuestos. Cuando salieron, su factura total fue por $110.85, que incluye el impuesto de la habitación y un cargo de $3.50 por una golosina del bar de la habitación. Determina el impuesto por la habitación.

Solución Entiende Su recibo total consiste de la tarifa de la habitación, el impuesto de la habitación y la golosina de $3.50. El impuesto de la habitación se determina al multiplicar el costo de la habitación por el impuesto de la habitación. Se pide determinar el impuesto de la habitación.



Ocean City, Maryland

Traduce

$$\text{Sea } t = \text{el impuesto de la habitación.}$$

$$\text{Entonces } 0.01t = \text{impuesto de la habitación como decimal.}$$

$$\text{costo de la habitación} + \text{impuesto de la habitación} + \text{golosina} = \text{total}$$

$$95 + 95(0.01t) + 3.50 = 110.85$$

Realiza

$$95 + 0.95t + 3.50 = 110.85$$
$$0.95t + 98.50 = 110.85$$
$$0.95t = 12.35$$
$$t = 13$$

Verifica y Responde Si sustituyes 13 por t en la ecuación, verás que la respuesta concuerda. El impuesto de la habitación es de 13%.

Ahora resuelve el ejercicio 47

EJEMPLO 8 **Gimnasios** Carlos está considerando inscribirse en uno de dos gimnasios diferentes. Skip Fitness ofrece una tarifa de inscripción única de $50 y después una mensualidad de $39. San Fran Fitness ofrece una tarifa de inscripción única de $10 y después una mensualidad de $43. ¿Cuántos meses se requerirían para que los pagos totales de los dos gimnasios sean iguales?

Solución Entiende Skip Fitness ofrece una tarifa de inscripción más alta, pero una mensualidad más baja. San Fran Fitness ofrece una tarifa de inscripción más baja, pero una mensualidad más alta. Se pide determinar el número de meses cuando los pagos totales de los dos gimnasios sean iguales.



Traduce

$$\text{Sea } x = \text{número de meses.}$$

$$\text{Entonces } 39x = \text{mensualidades para Skip Fitness.}$$

$$43x = \text{mensualidades para San Fran Fitness.}$$

$$\text{Los pagos totales para Skip Fitness} = \text{Los pagos totales para San Fran Fitness}$$

$$\text{inscripción} + \text{mensualidades} = \text{inscripción} + \text{mensualidades}$$

$$50 + 39x = 10 + 43x$$

Realiza

$$\begin{aligned} 50 + 39x &= 10 + 43x \\ 40 + 39x &= 43x \\ 40 &= 4x \\ 10 &= x \end{aligned}$$

Responde Los pagos totales serían iguales a los 10 meses.

Ahora resuelve el ejercicio 35

A continuación se verán dos ejemplos que involucran ángulos. En el ejemplo 9, se usan ángulos complementarios. Los **ángulos complementarios** son dos ángulos cuya suma mide 90° (observa la **Figura 2.4**).

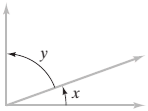


FIGURA 2.4

En la **Figura 2.4**, el ángulo x (simbolizado $\measuredangle x$) y el ángulo y (simbolizado $\measuredangle y$) son ángulos complementarios, pues su suma mide 90°.

EJEMPLO 9 **Ángulos complementarios** Si los ángulos A y B son ángulos complementarios, y la medida del ángulo B es 42° mayor que la medida del ángulo A, determina las medidas de los ángulos A y B.

Solución Entiende La suma de las medidas de los dos ángulos debe ser 90°, porque son ángulos complementarios. Se usará este hecho para establecer una ecuación. Dado que la medida del ángulo B se describe en términos de la medida del ángulo A, se tomará a x como la medida del ángulo A.

Traduce

$$\text{Sea } x = \text{la medida del ángulo } A.$$

$$\text{Entonces } x + 42 = \text{la medida del ángulo } B.$$

$$\text{medida del ángulo } A + \text{medida del ángulo } B = 90°$$

$$x + x + 42 = 90$$

Realiza

$$\begin{aligned} 2x + 42 &= 90 \\ 2x &= 48 \\ x &= 24 \end{aligned}$$

Verifica y Responde Dado que $x = 24$, la medida del ángulo A es 24°. La medida del ángulo $B = x + 42 = 24 + 42 = 66$. Por tanto, el ángulo B tiene una medida de 66°. Observa que la medida del ángulo B es 42° mayor que la medida del ángulo A, y la suma de las medidas de los ángulos es $24° + 66° = 90°$.

Ahora resuelve el ejercicio 23

Comprende el Álgebra

- La suma de las medidas de los *ángulos complementarios* es 90°.
- La suma de las medidas de los *ángulos suplementarios* es 180°.

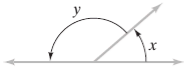


FIGURA 2.5

En el ejemplo 10, se usan ángulos suplementarios. Los **ángulos suplementarios** son dos ángulos cuya suma mide 180° (observa la **Figura 2.5**).

En la **Figura 2.5**, el ángulo x y el ángulo y son ángulos suplementarios, pues su suma mide 180°.

EJEMPLO 10 **Ángulos suplementarios** Si los ángulos C y D son ángulos suplementarios, y la medida del ángulo C es 6° mayor que el doble de la medida del ángulo D, determina las medidas de los ángulos C y D.

Solución Entiende La suma de las medidas de los dos ángulos debe ser 180°, porque son ángulos suplementarios. Dado que la medida del ángulo C se describe en términos de la medida del ángulo D, x representará la medida del ángulo D.

Traduce

$$\text{Sea } x = \text{medida del ángulo } D.$$

$$\text{Entonces } 2x + 6 = \text{medida del ángulo } C.$$

$$\text{medida del ángulo } C + \text{medida del ángulo } D = 180°$$

$$2x + 6 \quad + \quad x \quad = 180$$

Realiza

$$3x + 6 = 180$$

$$3x = 174$$

$$x = 58$$

Verifica y Responde Dado que $x = 58$, la medida del ángulo D es 58°. La medida del ángulo $C = 2x + 6 = 2(58) + 6 = 122$. Por tanto, la medida del ángulo $C = 122°$. Observa que la medida del ángulo C es 6° más que el doble de la medida del ángulo D, y la suma de las medidas de los ángulos es $122° + 58° = 180°$.

Ahora resuelve el ejercicio 21

SUGERENCIA ÚTIL

Consejo de estudio

A continuación, se presentan algunas sugerencias por si tienes alguna dificultad con los problemas aplicados.

1. Profesor – Concierta una cita para ver a tu profesor. Asegúrate de leer el material del libro e intentar resolver todos los problemas de tarea. *Llega con preguntas específicas para tu profesor.*
2. Asesorías – Si el centro de aprendizaje de tu escuela ofrece asesorías gratuitas, quizá quieras sacar ventaja de las mismas.
3. Grupos de estudio – Forma un equipo de estudio con compañeros de clase. Intercambia números telefónicos y direcciones de correo electrónico. Pueden ayudarse mutuamente.
4. Manual de soluciones para el estudiante – Si tienes dificultad para resolver cierto ejercicio, podrías usar el manual de soluciones para el estudiante, que puede ayudarte a entender un problema. No uses los manuales de soluciones en lugar de resolver los ejercicios. En general, los manuales de soluciones deben usarse solamente para comprobar tu trabajo.

¡Es importante que no te rindas! Recuerda: mientras más practiques, mejor te volverás para resolver problemas aplicados.

2.6 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

menos mayor es $x+3$ $x-3$ $x-7$ $7-x$

1. La frase "un número aumentado por 3" puede representarse mediante la expresión algebraica _____.
2. La frase "un número reducido por 3" puede representarse mediante la expresión algebraica _____.
3. Una soga de siete pies se corta en dos pedazos. Si se hace x igual a la longitud del primer pedazo, entonces _____ es igual a la longitud del segundo pedazo.
4. La palabra "_____" en un problema verbal, con frecuencia significa "es igual a".
5. La frase "6 _____ que un número", puede representarse mediante la expresión algebraica $x-6$.
6. La frase "5 _____ que un número", puede representarse mediante la expresión algebraica $x+5$.

Practica tus habilidades

En los ejercicios 7-10, expresa cada frase como una expresión algebraica.

7. El costo de comprar x videojuegos a $24.95 cada uno



8. 11 veces un número n, reducido por 7.5
9. 17 menos que 4 veces un número m
10. 7 veces un número p, aumentado por 8

En los ejercicios 11-20, selecciona una variable para representar una cantidad, y expresar la segunda cantidad en términos de la primera.

11. Un trozo de madera de 12 pies se corta en 2 pedazos.
12. Una tarea de 17 horas se reparte entre Rodrigo y Tomás.
13. La longitud de un rectángulo es 29 metros más larga que el ancho.
14. La medida de un ángulo en un trapezoide es 15° mayor que la medida del ángulo más pequeño.
15. Maribel tardó $\frac{1}{4}$ del tiempo para completar el examen que el utilizado por su mejor estudiante en completar el mismo examen.
16. Elías puede podar el césped en $\frac{3}{4}$ del tiempo que tarda Jacqueline.
17. Mayra puede generar una orden de compra tres veces más rápido que Andrea.
18. Jorge puede pintar una casa el doble de rápido que Javier.
19. El costo de la electricidad aumentó 22%.
20. El precio de una patineta se redujo 6%.



36. Sunshine Skyway Los automovilistas que cruzan el puente Sunshine Skyway, sobre la bahía de Tampa, deben pagar un peaje. Pueden pagar, ya sea $1.25 en efectivo o $1.06 usando el sistema Sun Pass. El sistema Sun Pass también requiere que los viajeros compren un transpondedor por $19.99. ¿Cuántos viajes sobre el puente necesitaría hacer una persona para que el monto total gastado, usando efectivo, para pagar los peajes sea igual al monto total gastado, usando el sistema Sun Pass para pagar los peajes? Redondea tu respuesta al número entero no negativo más cercano.



Puente Sunshine Skyway

37. Pantalones de mezclilla El precio, incluyendo el impuesto sobre la venta, que pagó Andrés por un par de pantalones de mezclilla, fue de $139.20. Si el impuesto sobre la venta fue de 8.75%, determina el precio de los pantalones antes de agregar el impuesto sobre la venta.

38. Suéter El precio, incluyendo el impuesto sobre ventas, que pagó Graciela por un suéter, fue de $52.92. Si el impuesto sobre la venta fue de 10.25%, determina el precio del suéter antes de agregar el impuesto sobre la venta.

39. Girl scouts Para recaudar dinero para la organización, las Girl Scouts tienen una venta anual de galletas. Este año, las ventas totales de dos distritos, el distrito sureste y el distrito noroeste, fue de $4.6 millones. Si las ventas del distrito sureste fue de $0.31 millones más que las ventas del distrito noroeste, determina las ventas de cada distrito.

40. Vacas lecheras Carlos opera una granja lechera y tiene vacas, tanto Holstein como Brown Swiss. Carlos tiene un total de 137 vacas y tiene 29 vacas Holstein más que vacas Brown Swiss. Determina el número de vacas Holstein y el número de vacas Brown Swiss que tiene Carlos en su granja.

41. Comparación de fibra Una porción de zarzamoras enlatadas contiene 4.4 gramos de fibra. Esto es 10% más fibra que en una manzana de tamaño mediano. ¿Cuántos gramos de fibra hay en una manzana de tamaño mediano?

Fuente: Continuum Health Partners



42. Comparación de licopeno Una toronja rosada contiene 3 miligramos (mg) de licopeno. Esto es 50% más licopeno que en una cucharada de catsup. ¿Cuántos miligramos de licopeno hay en una cucharada de catsup?

Fuente: Advance Physician Formulas

43. Asistencia a un concierto La asistencia al concierto anual, Freedom Festival, este año fue 13% superior a la asistencia del año anterior. Si la asistencia este año fue de 11 865 personas, determina la asistencia al concierto el año anterior.

44. Aumento de salario mínimo De 2008 a 2009, el salario mínimo federal por hora aumentó aproximadamente 10.69 %, hasta $7.25*. ¿Cuál era el salario mínimo por hora en 2008?

Fuente: U.S. Department of Labor

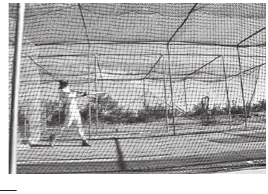
45. Polen En Estados Unidos hay 57 fuentes principales de polen. Estas fuentes de polen se categorizan como céspedes, hierbas y árboles. Si el número de hierbas es 5 menos que el doble del número de céspedes, y el número de árboles es 2 más que el doble del número de céspedes, determina el número de céspedes, hierbas y árboles que son fuentes principales de polen.

46. Muesli La receta de Marlene para elaborar muesli requiere de pasas, cacahuates y almendras. La receta produce 10 tazas de muesli. El número de tazas de cacahuates es tres veces el número de tazas de pasas. El número de tazas de almendras es 2.5 tazas más que el número de tazas de pasas. Determina el número de tazas de cada ingrediente que incluye la receta.

47. Tasa del impuesto de hospedaje Mientras estaban de vacaciones en Milwaukee, a los Álvarez les cotizaron el precio de una habitación de hotel en $85 por noche más impuesto. Estuvieron una noche y vieron una película que cuesta $9.25. Su factura total fue de $106.66. ¿Cuál fue la tasa del impuesto?

48. Compra de campamento Mientras acampaba, Gabriel compró una linterna y una bolsa de tiras de carne en la tienda general del campamento. La etiqueta en la linterna indica un precio de $8.25 y la etiqueta en las tiras de carne indica un precio de $7.95. Dado que las tiras de carne son alimento, Gabriel sólo debe pagar impuesto sobre la venta por la linterna. Si la factura total de Gabriel fue de $16.86, ¿cuál fue la tasa del impuesto sobre la venta?

49. Jaula de bateo La membresía al gimnasio de béisbol, La Zona de Strike, es de $300 por año, donde los miembros pueden rentar una jaula de bateo por $5 la hora. Los que no son miembros, pueden rentar una jaula de bateo por $17.50 la hora. ¿Cuántas horas de tiempo de jaula de bateo tendría que rentar Marco al año, de modo que el costo de rentar la jaula de bateo sea el mismo con membresía que sin membresía?



*A octubre de 2017, el salario mínimo federal por hora todavía era de $7.25.

50. Plan de pago El club de tenis, Midtown, ofrece dos planes de pago para sus miembros. El plan 1 es una tarifa mensual de $25, más $10 por hora de tiempo de renta de cancha. El plan 2 no tiene tarifa mensual, pero el tiempo de cancha cuesta $18.50 la hora. ¿Cuántas horas tendría que jugar al mes la Sra. Ortega para que el plan 1 cueste lo mismo que el plan 2?

51. Refinanciamiento de una hipoteca Ramón quiere refinanciar la hipoteca de su casa con una tasa de interés más baja, para que sus pagos mensuales sean más bajos. En la actualidad, Quan paga $875 al mes. Si refinancia, su pago mensual bajará a $755 al mes, pero tendrá que pagar una tarifa única de $2 520.

a) ¿En cuántos meses, después del refinanciamiento, Ramón habrá gastado el mismo monto en su nueva hipoteca, más tarifas, que lo que habría gastado en su hipoteca original?

b) Si Ramón planea gastar los próximos 5 años (60 meses) en su nueva casa, ¿cuánto dinero ahorraría al refinanciar su hipoteca?

52. Refinanciamiento de un préstamo empresarial Elizabeth quiere refinanciar el préstamo de su pequeño negocio a una tasa más baja, para que sus pagos mensuales sean más bajos. En la actualidad, Elizabeth paga $1 545 al mes. Si ella refinancia su préstamo, los pagos mensuales se reducirán a $1 275 al mes, pero ella tendrá que pagar una tarifa de refinanciamiento única de $5 130.

a) ¿En cuántos meses, después del refinanciamiento, Elizabeth habrá gastado el mismo monto en su nuevo préstamo, más la tarifa de refinanciamiento, que lo que habría gastado en su préstamo original?

b) ¿Cuánto ahorrará Elizabeth, durante los próximos 4 años (48 meses), al refinanciar su préstamo?

53. Pollos Rodrigo tiene una parvada de 37 pollos, que consiste de pollos de tres tipos diferentes: leghorn, dorking y bantam. El número de leghorn es 10 más que el número de bantam. El número de dorking es 5 menos que el doble del número de bantam. Determina el número de pollos de cada tipo en la parvada.

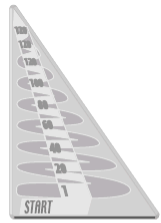


54. Calificaciones de un examen En un examen reciente, en una clase de Álgebra intermedia, 34 estudiantes recibieron calificaciones de A, B, C o D. Hay el doble de C que de D. Hay 2 B más que D. El número de A fue de dos más que el doble del número de D. Determina el número de A, B, C y D de este examen.

55. Perímetro El *perímetro* de un triángulo es la suma de las longitudes de los lados del triángulo. El perímetro de un triángulo es de 39 metros. La longitud del primer lado es 2 metros menos que 4 veces la longitud del lado más corto. La longitud del segundo lado es 1 metro más que 3 veces la longitud del lado más corto. Determina las longitudes de los lados del triángulo.

56. Lados de un triángulo La suma de las longitudes de los lados de un triángulo es de 30 pulgadas. La longitud del primer lado, es 3 pulgadas más que el doble del lado más corto. La longitud del segundo lado, es 2 pulgadas más que el doble del lado más corto. Determina las longitudes de los tres lados del triángulo.

57. Perímetro de un triángulo Julián desarrolla un juego que contiene un tablero de juego triangular. El perímetro del tablero triangular es de 36 pulgadas. Determina la longitud de los tres lados, si un lado es 3 pulgadas mayor que el lado más pequeño, y el tercer lado es 3 pulgadas menos que el doble de la longitud del lado más pequeño.

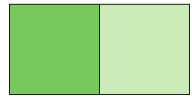


58. Jardín triangular El perímetro de un jardín triangular es de 60 pies. Determina la longitud de los tres lados, si un lado es 4 pies mayor que el doble de la longitud del lado más pequeño, y el tercer lado es 4 pies menos que 3 veces la longitud del lado más pequeño.

59. Ángulos de un triángulo Un trozo rectangular de papel se corta, desde esquinas opuestas, para formar un triángulo. Un ángulo del triángulo mide 12º más que el ángulo más pequeño. El tercer ángulo mide 27º menos que tres veces el ángulo más pequeño. Si la suma de los ángulos interiores de un triángulo mide 180º, determina las medidas de los tres ángulos.

60. Pasamanos de una escalera El pasamanos de una escalera tiene un diseño que contiene triángulos. En uno de los triángulos, un ángulo mide 20º menos que el doble del ángulo más pequeño. El tercer ángulo mide 25º más que el doble del ángulo más pequeño. Determina las medidas de los tres ángulos.

61. Dimensiones de una cerca Gregorio quiere colocar una cerca en dos áreas iguales, como se ilustra en la figura. Si ambas áreas son cuadrados y la longitud total de la cerca usada es de 91 metros, determina las dimensiones de cada cuadrado.



Comprende el Álgebra

Cuando resuelves problemas aplicados, es muy importante ser consistente con las unidades usadas en el problema. Por ejemplo, en el ejemplo 2, dado que las razones se proporcionan en millas por *hora*, es importante convertir el tiempo de 30 *minutos* a $\frac{1}{2}$ *hora*.

$$-2t = -3$$
$$t = \frac{3}{2}$$

Responde Pedro tardará $1\frac{1}{2}$ horas o 90 minutos en llegar a casa.

b) La distancia puede determinarse usando la razón y el tiempo, ya sea de Juan o de Pedro. Se multiplicará la razón de Pedro por el tiempo de Pedro para encontrar la distancia.

$$d = rt = 4\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{12}{2} = 6 \text{ miles}$$

Por tanto, Juan y Pedro viven a 6 millas de su escuela.

Ahora resuelve el ejercicio 9

SUGERENCIA ÚTIL

En el ejemplo 2, podría haberse hecho t como el tiempo de Juan y después, $t + \frac{1}{2}$, representaría el tiempo de Pedro. Aunque esto conduciría a una tabla diferente y a una ecuación diferente, la respuesta final todavía sería la misma. Vuelve a resolver el problema ahora para verificar este método.



EJEMPLO 3 **Producción de gaseosas** Una máquina embotelladora de gaseosas, llena y tapa botellas. La máquina puede operar a dos razones diferentes. Con la razón más rápida, la máquina llena y tapa 600 botellas adicionales por hora, de lo que lo hace con una razón más baja. La máquina se enciende durante 4.8 horas con una razón más baja, después, cambia a la razón más rápida durante otras 3.2 horas. Durante estas 8 horas, se llenan y tapan un total de 25 920 botellas. Determina la razón más lenta y la razón más rápida.

Solución Entiende Este problema usa algunas botellas, un monto, en lugar de una distancia. Sin embargo, el problema se trabaja en forma similar. Se usará la fórmula monto = razón · tiempo. Se indica que hay dos razones diferentes y se pide determinar dichas razones. Se usará el hecho de que el monto llenado a la razón más baja, más el monto llenado a la razón más rápida, es igual al monto total llenado.

Sea r = razón más lenta.

Entonces $r + 600$ = razón más rápida.

	Razón	Tiempo	Monto
Razón más lenta	r	4.8	$4.8r$
Razón más rápida	$r + 600$	3.2	$3.2(r + 600)$

Traduce

$$\begin{array}{lll} \text{monto de llenado a la razón más lenta} & + & \text{monto de llenado a la razón más rápida} = 25\,920 \\ 4.8r & + & 3.2(r + 600) = 25\,920 \end{array}$$

Realiza

$$\begin{aligned} 4.8r + 3.2r + 1920 &= 25\,920 \\ 8r + 1920 &= 25\,920 \\ 8r &= 24\,000 \\ r &= 3\,000 \end{aligned}$$

Responde La razón más lenta es de 3 000 botellas por hora. La razón más rápida es de $r + 600$ o $3\,000 + 600 = 3\,600$ botellas por hora.

Ahora resuelve el ejercicio 15

2 Resolución de problemas de mezclas

Cualquier problema donde dos o más cantidades se reducen para producir una cantidad diferente, o donde una sola cantidad se separa en dos o más cantidades diferentes, puede considerarse como un problema de *mezcla*. Muchos problemas de mezclas involucran porcentajes para medir las intensidades de las cantidades a mezclar. Cuando se usen porcentajes en los cálculos, los porcentajes se convertirán a números decimales. En el siguiente ejemplo se proporcionan 5%, 3% y 10%, como las intensidades de diferentes disoluciones de aceite de árbol de té. En los cálculos se usarán 0.05, 0.03 y 0.10, respectivamente, para representar estos porcentajes.

EJEMPLO 4 **Aceite de árbol de té** Cristal, una herbolaria, necesita una disolución de aceite de árbol de té al 5%, para usar como tratamiento tópico para un sarpullido causado por hiedra venenosa. Cristal solamente tiene disoluciones de aceite de árbol de té que tienen concentraciones de 3% y 10%, respectivamente. ¿Cuántos mililitros (mL) de la disolución de aceite de árbol de té al 10% debe mezclar Cristal con 5 mL de la disolución de aceite de árbol de té al 3%, para crear la disolución deseada de aceite de árbol de té al 5%?

Solución Entiende y Traduce Se pide determinar cuántos mL de disolución de aceite de árbol de té al 10% se necesitan incluir en la mezcla.

Sea x = número de mL de disolución de aceite de árbol de té al 10%.

La cantidad de aceite de árbol de té, en una disolución, se determina al multiplicar el porcentaje de la concentración por el volumen de la disolución. Se dibujará un bosquejo del problema (observa la **Figura 2.8**) y también se construirá una tabla.



FIGURA 2.8

Comprende el Álgebra

Cuando se convierten porcentajes a números decimales, con frecuencia es útil recordar que porcentaje significa *multiplicado por cien* o *dividido entre 100*.

Por ejemplo, 7% significa $\frac{7}{100}$

o 0.07 y 13% significa $\frac{13}{100}$

o 0.13.

Disolución	Concentración de la disolución	Volumen de la disolución (número de mL)	Cantidad de aceite de árbol de té
1	0.03	5	0.03(5)
2	0.10	x	0.10(x)
Mezcla	0.05	$5 + x$	$0.05(5 + x)$

$$\begin{pmatrix}\text{cantidad de aceite}\\ \text{de árbol de té en}\\ \text{la disolución al 3\%}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{cantidad de aceite}\\ \text{de árbol de té en}\\ \text{la disolución al 10\%}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{cantidad de aceite}\\ \text{de árbol de té}\\ \text{en la mezcla}\end{pmatrix}$$

$$0.03(5) \quad + \quad 0.10(x) \quad = \quad 0.05(5 + x)$$

Realiza

$$\begin{aligned} 0.03(5) + 0.10(x) &= 0.05(5 + x) \\ 0.15 + 0.10x &= 0.25 + 0.05x \\ 0.15 + 0.05x &= 0.25 \\ 0.05x &= 0.10 \\ x &= \frac{0.10}{0.05} = 2 \end{aligned}$$

Responde Cristal debe mezclar 2 mL de la disolución de aceite de árbol de té al 10% con los 5 mL de la disolución de aceite de árbol de té al 3% para formar una disolución de aceite de árbol de té al 5%. Habrá $5 + x$ o $5 + 2 = 7$ mL de la disolución al 5%.

Ahora resuelve el ejercicio 17

EJEMPLO 5 **Mezcla de medicina** El profesor de Química, Omar, tiene disoluciones de citrato de litio al 6% y al 15%. Se quiere hacer 0.5 litros de una disolución de citrato de litio al 8%. ¿Cuánto, de cada disolución, debe mezclar?

Solución Entiende y Traduce Se pide determinar la cantidad de cada disolución a mezclar.

Sea x = número de litros de la disolución al 6%.

Entonces $0.5 - x$ = número de litros de la disolución al 15%.

La cantidad de citrato de litio, en una disolución, se determina al multiplicar el porcentaje de la concentración del citrato de litio en la disolución, por el volumen de la disolución. Se dibujará un bosquejo del problema (observa la **Figura 2.9**) y después se construirá una tabla.

Comprende el Álgebra

La concentración de una disolución mezclada, siempre debe estar entre las concentraciones de las dos disoluciones utilizadas en su elaboración. Por ejemplo, si mezclas una disolución de ácido al 5% con una disolución de ácido al 10%, la mezcla debe tener una concentración entre 5% y 10%.



FIGURA 2.9

Disolución	Concentración de la disolución	Número de litros	Cantidad de citrato de litio
1	0.06	x	$0.06x$
2	0.15	$0.5 - x$	$0.15(0.5 - x)$
Mezcla	0.08	0.5	$0.08(0.5)$

$$\begin{pmatrix}\text{cantidad de citrato}\\ \text{de litio en la}\\ \text{disolución al 6 \%}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{cantidad de citrato}\\ \text{de litio en la}\\ \text{disolución al 15 \%}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{cantidad de}\\ \text{citrato de litio}\\ \text{en la mezcla}\end{pmatrix}$$

$$0.06x \quad + \quad 0.15(0.5 - x) \quad = \quad 0.08(0.5)$$

Realiza

$$\begin{aligned} 0.06x + 0.15(0.5 - x) &= 0.08(0.5) \\ 0.06x + 0.075 - 0.15x &= 0.04 \\ 0.075 - 0.09x &= 0.04 \\ -0.09x &= -0.035 \\ x = \frac{-0.035}{-0.09} &\approx 0.39 \quad \left(\begin{matrix}\text{a la}\\ \text{centésima}\\ \text{más cercana.}\end{matrix}\right) \end{aligned}$$

El profesor Omar debe mezclar 0.39 litros de la disolución al 6% y $0.5 - x$ o $0.5 - 0.39 = 0.11$ litros de la disolución al 15%, para hacer 0.5 litros de una disolución al 8%.

Ahora resuelve el ejercicio 21

Los ejemplos 6 y 7 son problemas de mezclas que involucran dinero.

EJEMPLO 6 **Dos inversiones** Beatriz vendió su bote en $15000. Beatriz prestó parte de este dinero a su amiga Katia. El préstamo fue por 1 año con una tasa de interés simple de 4.5%. Beatriz puso el saldo en una cuenta de mercado de dinero, en su cooperativa de crédito, que le produjo 3.75% de interés simple. Después de 1 año, Beatriz ganó un total de $637.50 por las dos inversiones. Determina el monto que Beatriz prestó a Katia.

Comprende el Álgebra

Cualquier problema donde dos o más cantidades se reducen para producir una cantidad diferente, o donde una sola cantidad se separa en dos o más cantidades diferentes, puede considerarse como un *problema de mezcla*.

Solución Entiende y Traduce Para resolver este problema, se usará la fórmula de interés simple, interés = principal · tasa · tiempo. Se sabe que parte de la inversión se hizo a 4.5% y el resto se hizo a 3.75% de interés simple. Se pide determinar el monto que Beatriz prestó a Katia.

$$\text{Sea } p = \text{monto prestado a Katia a 4.5}$$

$$\text{Entonces } 15000 - p = \text{monto invertido a 3.75\%.}$$

Observa que, la suma de los dos montos, es igual al monto total invertido, $15000. El monto prestado a Katia, se determinará con la ayuda de una tabla.

Inversión	Principal	Rate	Tiempo	Interés
Préstamo a Katia	p	0.045	1	$0.045p$
Mercado de dinero	$15000 - p$	0.0375	1	$0.0375(15000 - p)$

Dado que el interés total recolectado es de $637.50, se escribe:

interés por préstamo a 4.5% + interés por cuenta a 3.75% = interés total

$$0.045p + 0.0375(15000 - p) = 637.50$$

Realiza

$$\begin{aligned} 0.045p + 0.0375(15000 - p) &= 637.50 \\ 0.045p + 562.50 - 0.0375p &= 637.50 \\ 0.0075p + 562.50 &= 637.50 \\ 0.0075p &= 75 \\ p &= 10000 \end{aligned}$$

Responde Por tanto, el préstamo a Katia fue por $10000 y, $15000 − p o $15000 − $10000 = $5000, se invirtió en la cuenta de mercado de dinero.

Ahora resuelve el ejercicio 29

EJEMPLO 7 **Aceitunas** Gustavo opera una tienda de comestibles de especialidad. Vende aceitunas verdes por $9 el galón y aceitunas negras por $15 el galón. Gustavo quiere crear y vender una mezcla que contenga aceitunas, tanto verdes como negras. Si pone 3 galones de aceitunas negras en la mezcla y quiere vender la mezcla por $10 el galón, ¿cuántos galones de aceitunas verdes debe poner en la mezcla?

Solución Entiende y Traduce Se pide determinar el número de galones de aceitunas verdes a colocar en la mezcla. Se definirá una variable, y se construirá una tabla.

$$\text{Sea } x = \text{número de galones de aceitunas verdes.}$$

	Costo por galón	Número de galones	Costo
Aceitunas verdes	9	x	$9x$
Aceitunas negras	15	3	45
Mezcla	10	$x + 3$	$10(x + 3)$

costo de aceitunas verdes + costo de aceitunas negras = costo de la mezcla

$$9x + 45 = 10(x + 3)$$

18. **Disolución de vinagre** Alex quiere usar un vinagre que sea 13% ácido acético, como herbicida natural. Él tiene algo de vinagre de mesa que es 5% ácido acético y dos tazas de vinagre de pepinillos que es 15% ácido acético. ¿Cuántas tazas de vinagre de mesa debe mezclar Alex con las dos tazas de vinagre de pepinillos, para obtener vinagre que sea 13% ácido acético?

19. **Disolución de peróxido de hidrógeno** David trabaja como ingeniero químico para la US Peroxide Corporation. David tiene 2500 galones de una disolución de peróxido de hidrógeno de grado comercial, que es 60% peróxido de hidrógeno puro. ¿Cuánta agua destilada (que es 0% peróxido de hidrógeno) necesitará agregar David a esta disolución para crear una nueva disolución que sea 25% peróxido de hidrógeno puro?

20. **Disoluciones de ácido sulfúrico** Ramiro, un profesor de química, necesita una disolución de ácido sulfúrico al 5% para un próximo laboratorio de química. Cuando revisa el almacén, se da cuenta de que sólo tiene 8 onzas de una disolución de ácido sulfúrico al 25%. No hay suficiente tiempo para ordenar más, así que decide elaborar una disolución de ácido sulfúrico al 5% al agregar, con mucho cuidado, agua a la disolución de ácido sulfúrico al 25%. Determina cuánta agua debe agregar Ramiro a la disolución al 25%, para reducirla a una disolución al 5%.

21. **Salsas de rábanos** Sandra tiene una receta que requiere salsa de rábanos que es 45% rábano puro. En el almacén encuentra una salsa de rábanos que es 30% rábano puro y otra que es 80% rábano puro. ¿Cuántas cucharaditas de cada una de estas salsas de rábanos debe mezclar Sandra para obtener 4 cucharaditas de salsa de rábanos que sea 45% rábano puro?

22. **Aceite de romero** María de los Ángeles Suárez, terapista de masaje, necesita 3 onzas de una disolución de aceite de romero al 2%. Ella solamente tiene a su disposición disoluciones de aceite de romero al 1% y al 5%. ¿Cuántas onzas de cada una debe mezclar María de los Ángeles para obtener la disolución deseada?

23. **Mezcla de café** Joana es propietaria de una cafetería. Ella vende café Kona a $6.20 la libra y café amaretto que vende a $5.80 la libra. Descubre que, al mezclar estas dos variedades, crea un café que vende bien. Si ella usa 18 libras de café amaretto en la mezcla, y quiere vender la mezcla en $6.10 la libra, ¿cuántas libras de café Kona debe mezclar con el café amaretto?



24. **Tienda de nueces** Catalina quiere mezclar nueces pecaneras y nueces de castilla para crear una mezcla que se vende bien. Las nueces pecaneras se venden a $9.80 la libra y las nueces de castilla se venden a $4.40 la libra. ¿Cuántas libras de nueces de castilla debe mezclar Catalina con 6 libras de nueces pecaneras, para obtener una mezcla que se venda a $8 la libra?

25. **Octanaje** El octanaje de la gasolina indica el porcentaje de octano puro en la gasolina. Por ejemplo, la mayoría de las gasolinas regulares tienen un octanaje de 87, lo que significa que esta gasolina tiene 87% de octano (y 13% de algún otro combustible no octano, como el pentano). Bruno es propietario de una gasolinera y tiene 850 galones de gasolina de 87 octanos. ¿Cuántos galones de gasolina de 93 octanos debe mezclar con esta gasolina de 87 octanos, para obtener gasolina de 89 octanos?



26. **Octanaje** Consulta el ejercicio 25. El Gas Mart de Oly tiene 575 galones de gasolina de 88 octanos. ¿Cuántos galones de gasolina de 91 octanos debe mezclar con la gasolina de 88 octanos, para obtener gasolina de 89 octanos?

27. **Mezcla de dulces** Un supermercado vende dos tipos de dulces, rebanadas de naranja y hojas de fresa. Las rebanadas de naranja cuestan $1.29 la libra y las hojas de fresa cuestan $1.79 la libra. ¿Cuántas libras de cada una deben mezclarse, para obtener una mezcla de 12 libras que se venda a $17.48?

28. **Mezcla de nueces** Joel es propietario de una tienda de nueces. Él vende almendras a $6 la libra y nueces de castilla a $5.20 la libra. Recibe un pedido especial de un cliente que quiere comprar 30 libras de una mezcla de almendras y nueces de castilla por $165. Determina cuántas libras de almendras y nueces de castilla debe mezclar.

29. **Dos inversiones** Guillermo invirtió $30000 durante un año en dos cuentas separadas que pagan 3% y 4.1% de interés anual simple. Si Guillermo ganó un total de $1 091.73 por las dos inversiones, ¿cuánto invirtió en cada cuenta?

30. **Dos inversiones** Tadeo invirtió $3000 durante dos años, una parte a interés simple de 3.5% y el resto a interés simple de 2.5%. Después de dos años, ganó un interés total de $190. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

31. **Inversiones de pequeños negocios** Melissa hace préstamos, que totalizan $10000, a dos pequeños negocios locales: una cafetería y una tienda de cómics. El dueño de la cafetería acuerda pagar a Melissa una tasa de



a) ¿Cuánto tardará Paulina en alcanzar a Susana?

b) ¿Qué tan apartado del muelle tendrá lugar la reunión?

41. Disolución de alcohol Héctor tiene una disolución de alcohol metílico al 80%. Él quiere elaborar un galón de disolución limpiadora para parabrisas, al mezclar su disolución de alcohol metílico con agua. Si 128 onzas, o un galón, de fluido limpiador para parabrisas, debe contener 6% de alcohol metílico, ¿cuánta disolución de alcohol metílico al 80% y cuánta agua debe mezclar?

42. Solución anticongelante ¿Cuántos cuartos de anticongelante puro debe agregar Dolores a 10 cuartos de una disolución de anticongelante al 20%, para elaborar una disolución de anticongelante al 50%?

43. Viaje al trabajo Vicente vive a 35 millas de su trabajo. Debido a una construcción, debe conducir los primeros 15 minutos a una rapidez de 10 mph más lento de lo que hace en el resto del viaje. Si todo el viaje tarda 45 minutos, determina la rapidez de Vicente en cada parte del viaje al trabajo.

44. Podar el césped Ricardo poda parte de su césped en segunda velocidad y parte en tercera velocidad. Tarda 2 horas en podar todo el césped, y el odómetro de su tractor muestra que cubrió 13.8 millas mientras cortaba el césped. Si promedia 4.2 millas por hora en segunda velocidad y 7.8 millas por hora en tercera velocidad, ¿durante cuánto tiempo cortó en cada velocidad?

45. Boletos para un concierto Los boletos, a precio completo, para un concierto de Stokeswood cuestan $56.50. Los estudiantes pueden comprar un boleto con descuento a $49.50. Si se vendieron un total de 3250 boletos y si el monto total de las ventas por boletos fue de $162 611,

a) ¿cuántos boletos de precio completo se vendieron?

b) ¿cuántos boletos para estudiante se vendieron?



46. Boletos en línea para películas Los patrocinadores de la productora de películas, Burns Court, pueden comprar en línea los boletos para películas a $7.50 por boleto. Los boletos también se pueden comprar en taquilla a $9.00 por boleto. Una noche de sábado, se vendieron un total de 270 boletos, y el monto del dinero recolectado, tanto en línea como en taquilla, fue de $2359.50. ¿Cuántos boletos se vendieron en línea y cuántos boletos se vendieron en taquilla?

47. Removedor de manchas Carmela opera un negocio de lavado en seco y necesita una disolución de ácido fosfórico al 6%, para remover una mancha del traje de un cliente. Carmela tiene a mano una disolución de ácido fosfórico al 14% y una disolución de ácido fosfórico al 2%. ¿Cuántos mililitros de cada una de estas disoluciones debe mezclar Carmela, para obtener 45 mililitros de una disolución de ácido fosfórico al 6%?

48. Ingeniería química Karla es ingeniera química y necesita una disolución de ácido bromhídrico para utilizar como agente de acabado en una fábrica de cinc. Karla tiene a su disposición una disolución de ácido bromhídrico al 48% y una disolución de ácido bromhídrico al 10%. ¿Cuántos litros, de cada una de estas disoluciones, debe mezclar Karla para obtener 950 litros de una disolución bromhídrica al 30%?

Problemas de desafío

49. Eurotúnel El Eurotúnel (o Túnel del Canal, es el túnel submarino que va desde Folkestone, Inglaterra a Calais, Francia) mide 31 millas de largo. Una persona puede abordar el tren bala TGV de Francia en París y viajar sin escalas a lo largo del Eurotúnel y llegar a Londres 3 horas después. El TGV promedia 130 millas por hora de París a Calais. Después, reduce su rapidez a un promedio de 90 millas por hora a través del Eurotúnel de 31 millas. Cuando sale del Eurotúnel en Folkestone, viaja solamente a un promedio de aproximadamente 45 millas por hora durante el viaje de 68 millas desde Folkestone hasta Londres, debido a vías obsoletas. Con esta información, determina la distancia de París a Calais, Francia.



50. Carreras de autos Dos automóviles, etiquetados A y B, están en una carrera de 500 vueltas. Cada vuelta es de 1 milla. El automóvil líder, A, promedia 125 millas por hora cuando llega al punto medio. El automóvil B está exactamente a 6.2 vueltas atrás.



a) Determina la rapidez promedio del automóvil B.

b) Cuando el automóvil A llega al punto medio, ¿qué tan apartado, en segundos, se encuentra el auto B del auto A?

51. Solución anticongelante El radiador de un automóvil tiene una capacidad de 16 cuartos. Actualmente está lleno con una disolución de anticongelante al 20%. ¿Cuántos cuartos deben drenarse y sustituirse con anticongelante puro para que el radiador contenga una disolución de anticongelante al 50%?

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.6] **52.** Expresa el cociente en notación científica. $\dfrac{2.16 \times 10^5}{3.6 \times 10^8}$

Resuelve.

[2.1] **53.** $0.6x + 0.22 = 0.4\,(x - 2.3\,)$

54. $\dfrac{2}{3}x + 8 = x + \dfrac{25}{4}$

[2.2] **55.** Resuelve la ecuación $\dfrac{3}{5}(x - 2) = \dfrac{2}{7}(2x + 3y)$ para y.

[2.3] **56. Renta de un camión** La agencia de renta de camiones Hertz/Penske cobra \$35 diarios, más 75¢ por milla. La agencia de renta de camiones Budget cobra \$20 diarios, más 80¢ por milla, por el mismo camión. ¿Qué distancia tendrías que conducir en 1 día para que el costo de rentar en Hertz/Penske sea igual al costo de rentar en Budget?

2.5 Resolución de desigualdades lineales

1. **Resolución de desigualdades**
2. **Gráficas de soluciones de desigualdades sobre una recta numérica, notación de intervalo y conjuntos solución**
3. **Resolución de desigualdades compuestas que involucren *y***
4. **Resolución de desigualdades compuestas que involucren *ó***

1 Resolución de desigualdades

En la sección 1.2, se presentó el tema de desigualdades y de notación de construcción de conjuntos. Quizá quieras revisar dicha sección ahora. A continuación se presentan los símbolos de desigualdad.*

Símbolos de desigualdad	
$>$	es mayor que
$\geq$	es mayor o igual que
$<$	es menor que
$\leq$	es menor o igual que

Una expresión matemática que contiene uno o más de estos símbolos, se llama **desigualdad**.

Ejemplos de desigualdades en una variable

$$2x + 3 \leq 5 \qquad 4x > 3x - 5 \qquad 1.5 \leq -2.3x + 4.5 \qquad \frac{1}{2}x + 3 \geq 0$$

Para resolver una desigualdad, debes despejar la variable de un lado del símbolo de desigualdad. Para separar la variable, usa las mismas técnicas básicas usadas en la resolución de ecuaciones.

* $\neq$, *no es igual que*, también es una desigualdad. $\neq$ significa $<$ ó $>$. Por tanto, $2 \neq 3$ significa $2 < 3$ ó $2 > 3$.

Propiedades usadas para resolver desigualdades lineales

1. Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$.
2. Si $a > b$, entonces $a - c > b - c$.
3. Si $a > b$, y $c > 0$, entonces $ac > bc$.
4. Si $a > b$, y $c > 0$, entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.
5. Si $a > b$, y $c < 0$, entonces $ac < bc$.
6. Si $a > b$, y $c < 0$, entonces $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

SUGERENCIA ÚTIL

Las propiedades usadas para resolver desigualdades lineales, pueden resumirse en tres enunciados:

1. El mismo número se puede sumar o restar de ambos lados de una desigualdad.
2. Ambos lados de una desigualdad pueden multiplicarse o dividirse por cualquier número positivo.
3. *Cuando ambos lados de una desigualdad se multiplican por o dividen entre un número negativo, se invierte la dirección del símbolo de desigualdad.*

	Ejemplo de multiplicación por un número negativo	Ejemplo de división entre un número negativo	
Multiplica ambos lados de la desigualdad por -1 e invierte la dirección del símbolo de desigualdad.	$4 > -2$ $-1(4) < -1(-2)$ $-4 < 2$	$10 \geq -4$ $\frac{10}{-2} \leq \frac{-4}{-2}$ $-5 \leq 2$	Divide ambos lados de la desigualdad entre -2 e invierte la dirección del símbolo de desigualdad.

SUGERENCIA ÚTIL

No olvides invertir la dirección del símbolo de desigualdad cuando multipliques o dividas ambos lados de la desigualdad por un número negativo.

Desigualdad	Dirección del símbolo de desigualdad
$-3x < 6$	$\frac{-3x}{-3} > \frac{6}{-3}$
$-\frac{x}{2} > 5$	$(-2)\left(-\frac{x}{2}\right) < (-2)(5)$

EJEMPLO 1 Resuelve las desigualdades.

a) $5x - 7 \geq -17$ **b)** $-6x + 4 < -14$

Solución

a)

$$\begin{aligned} 5x - 7 &\geq -17 \\ 5x - 7 + 7 &\geq -17 + 7 \quad \text{Suma 7 a ambos lados.} \\ 5x &\geq -10 \\ \frac{5x}{5} &\geq \frac{-10}{5} \quad \text{Divide ambos lados entre 5.} \\ x &\geq -2 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{x | x \geq -2\}$. Cualquier número real mayor o igual a -2, satisfará la desigualdad.

Comprende el Álgebra

Recuerda que, siempre que multipliques o dividas ambos lados de una desigualdad por un número *negativo*, debes invertir la dirección del símbolo de desigualdad.

b)

$$\begin{aligned} -6x + 4 &< -14 \\ -6x + 4 - 4 &< -14 - 4 \quad \text{Resta 4 de ambos lados.} \\ -6x &< -18 \\ \frac{-6x}{-6} &> \frac{-18}{-6} \quad \text{Divide ambos lados entre } -6 \text{ e invierte la dirección del signo de desigualdad.} \\ x &> 3 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{x|x > 3\}$. Cualquier número real mayor que 3, satisfará la desigualdad.

Ahora resuelve el ejercicio 19

2 Gráficas de soluciones de desigualdades sobre una recta numérica, notación de intervalo y conjuntos solución

La solución a una desigualdad puede mostrarse sobre una recta numérica o escribirse como un conjunto solución. La solución también se puede escribir en notación de intervalo, como se muestra a continuación.

Los siguientes símbolos se usarán cuando se representen soluciones a desigualdades.

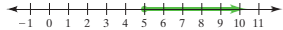
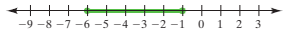
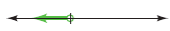
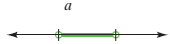
Símbolo de desigualdad	Puntos extremos de la recta numérica	Símbolos de notación intervalo	¿La solución incluye puntos extremos?
$<$ o $>$	○	(o)	No
$\leq$ o $\geq$	●	[o]	Sí

Comprende el Álgebra

Cuando uses notación de intervalo:

- Si un punto extremo *no se incluye*, se usan paréntesis, (o).
- Si un punto extremo *sí se incluye*, se usan corchetes, [o].
- Siempre que se use el símbolo de infinito, ∞, o de infinito negativo, $-\infty$, se usan paréntesis pues no hay punto extremo.

El símbolo ∞ se lee "infinito"; indica que el conjunto solución continúa indefinidamente.

Solución de desigualdades	Conjunto solución indicado sobre la recta numérica	Conjunto solución representado en notación de intervalo
$x \geq 5$		$[5, \infty)$
$x < 3$		$(-\infty, 3)$
$2 < x \leq 6$		$(2, 6]$
$-6 \leq x \leq -1$		$[-6, -1]$
$x > a$		(a, ∞)
$x \geq a$		$[a, \infty)$
$x < a$		$(-\infty, a)$
$x \leq a$		$(-\infty, a]$
$a < x < b$		(a, b)
$a \leq x \leq b$		$[a, b]$
$a < x \leq b$		$(a, b]$
$a \leq x < b$		$[a, b)$

EJEMPLO 2 Resuelve la siguiente desigualdad y proporciona la solución, tanto en una recta numérica como en notación de intervalo.

$$\frac{1}{4}z - \frac{1}{2} < \frac{2z}{3} + 2$$

Solución Las fracciones de una desigualdad se pueden eliminar al multiplicar ambos lados de la desigualdad por el mínimo común denominador, MCD, de las fracciones.

$$\frac{1}{4}z - \frac{1}{2} < \frac{2z}{3} + 2$$

$$12\left(\frac{1}{4}z - \frac{1}{2}\right) < 12\left(\frac{2z}{3} + 2\right) \quad \text{Multiplica ambos lados por el MCD, 12.}$$

$$3z - 6 < 8z + 24 \quad \text{Usa la propiedad distributiva.}$$

$$3z - 8z - 6 < 8z - 8z + 24 \quad \text{Resta } 8z \text{ de ambos lados.}$$

$$-5z - 6 < 24$$

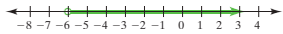
$$-5z - 6 + 6 < 24 + 6 \quad \text{Suma 6 a ambos lados.}$$

$$-5z < 30$$

$$\frac{-5z}{-5} > \frac{30}{-5} \quad \text{Divide ambos lados entre } -5 \text{ e invierte la dirección del símbolo de desigualdad.}$$

$$z > -6$$

Recta numérica



Notación de intervalo

$(-6, \infty)$

El conjunto solución es $\{z \mid z > -6\}$.

Ahora resuelve el ejercicio 31

En el ejemplo 2 se ilustró el conjunto solución sobre una recta numérica, en notación de intervalo y como un conjunto solución.

EJEMPLO 3 Resuelve la desigualdad $2(3p - 5) + 9 \leq 8(p + 1) - 2(p - 3)$.

Solución

$$2(3p - 5) + 9 \leq 8(p + 1) - 2(p - 3)$$

$$6p - 10 + 9 \leq 8p + 8 - 2p + 6$$

$$6p - 1 \leq 6p + 14$$

$$6p - 6p - 1 \leq 6p - 6p + 14$$

$$-1 \leq 14$$

Dado que -1 siempre es menor que o igual que 14, la desigualdad es verdadera para todo número real. Cuando una desigualdad es verdadera para todos los números reales, el conjunto solución es *el conjunto de todos los números reales*, $\mathbb{R}$. El conjunto solución para este ejemplo también se puede indicar sobre una recta numérica o proporcionar en notación de intervalo.



o $(-\infty, \infty)$

Ahora resuelve el ejercicio 23

Comprende el Álgebra

Si, al resolver una desigualdad, obtienes una desigualdad sin variables que siempre es

- verdadera, como $-1 \leq 14$, entonces el conjunto solución es el conjunto de *todos los números reales*, $\mathbb{R}$.
- falsa, como $5 < -3$, entonces el conjunto solución es el conjunto vacío, $\varnothing$.

Si el ejemplo 3 hubiese resultado en la expresión $-1 \geq 14$, la desigualdad nunca habría sido verdadera, pues -1 nunca es mayor o igual que 14. Cuando una desigualdad nunca es verdadera, no tiene solución. El conjunto solución de una desigualdad que no tiene solución es el *conjunto vacío* o *nulo*, $\{\ \}$ o $\varnothing$. El conjunto vacío se representará sobre la recta numérica de la siguiente manera: .

SUGERENCIA ÚTIL

Por lo general, cuando se escribe una solución a una desigualdad, la variable se escribe a la izquierda. Por ejemplo, cuando se resuelve una desigualdad, si obtienes $5 \geq y$, la solución se escribiría como $y \leq 5$. Por ejemplo,

$-6 < x$ significa $x > -6$ (el símbolo de desigualdad apunta a -6 en ambos casos)
$4 > x$ significa $x < 4$ (el símbolo de desigualdad apunta a x en ambos casos)
$a < x$ significa $x > a$ (el símbolo de desigualdad apunta a a en ambos casos)
$a > x$ significa $x < a$ (el símbolo de desigualdad apunta a x en ambos casos)

EJEMPLO 4 **Transporte de heno** Edmundo usa su camión y remolque para transportar pacas de heno, desde su granero hasta su pastizal en el camino. Él debe conducir sobre un puente que tiene un límite de peso de 6 toneladas, o 12 000 libras. Edmundo pesa 222 libras, su camión pesa 5 400 libras, su remolque pesa 1 500 libras, y cada paca de heno pesa 45 libras.

a) Escribe una desigualdad que pueda usarse para determinar el número máximo de pacas de heno que Edmundo puede transportar en un viaje, y permanecer por abajo del límite de peso de 6 toneladas del puente.

b) Determina el número máximo de pacas de heno que Edmundo puede transportar en un viaje.

Solución

a) Entiende y Traduce Sea n = número de pacas de heno.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{peso de Edmundo} & + & \text{peso del camión} & + & \text{peso del remolque} & + & \text{peso de } n \text{ pacas de heno} \\ 222 & + & 5\,400 & + & 1\,500 & + & 45n \end{array} \quad \leq 12\,000$$

b) Realiza

$$\begin{aligned} 222 + 5\,400 + 1\,500 + 45n &\leq 12\,000 \\ 7\,122 + 45n &\leq 12\,000 \\ 45n &\leq 4\,878 \\ n &\leq 108.4 \end{aligned}$$

Responde Por tanto, Edmundo puede transportar hasta 108 pacas de heno en un viaje.

Ahora resuelve el ejercicio 77

EJEMPLO 5 **Tarifas del boliche** En el boliche de la Universidad Clemson, el costo por rentar zapatos para boliche es de $2.50, y cuesta $4.00 jugar un juego.

a) Escribe una desigualdad que pueda usarse para determinar el número máximo de juegos que Rigo puede jugar si sólo tiene $20.

b) Determina el número máximo de juegos que Rigo puede jugar.

Solución **a)** Entiende y Traduce

Sea g = número de juegos jugados.

Entonces $4.00g$ = costo de jugar g juegos.

$$\begin{array}{ccccc} \text{costo de renta de zapatos} & + & \text{costo de jugar } g \text{ juegos} & \leq & \text{dinero que tiene Rigo} \\ 2.50 & + & 4.00g & \leq & 20 \end{array}$$



b) Realiza

$$\begin{aligned} 2.50 + 4.00g &\leq 20 \\ 4.00g &\leq 17.50 \\ \frac{4.00g}{4.00} &\leq \frac{17.50}{4.00} \\ g &\leq 4.375 \end{aligned}$$

Responde y Verifica Dado que él no puede jugar sólo una porción de un juego, el número máximo de juegos que puede pagar es 4. Si Rigo jugara 5 juegos de bolos, debería $\$2.50 + 5(\$4.00) = \$22.50$, que es más dinero de los $20 que tiene.

Ahora resuelve el ejercicio 79

EJEMPLO 6 **Ganancias** Para que un negocio tenga una ganancia, su ingreso, R, debe ser mayor que su costo, C. Es decir: se obtendrá una ganancia cuando $R > C$ (la compañía queda tablas cuando $R = C$). Una compañía que produce cartas de juego, tiene una ecuación de costo semanal de $C = 1\,525 + 1.7x$ y una ecuación de ingreso semanal de $R = 4.2x$, donde x es el número de mazos de cartas de juego producidas y vendidas en una semana. ¿Cuántos mazos de cartas deben producirse y venderse en una semana para que la compañía tenga una ganancia?

Solución Entiende y Traduce La compañía tendrá una ganancia cuando $R > C$, o:

$$4.2x > 1525 + 1.7x$$

Realiza

$$2.5x > 1525$$

$$x > \frac{1525}{2.5}$$

$$x > 610$$

Responde La compañía tendrá una ganancia cuando en una semana se produzcan y vendan más de 610 mazos.

Ahora resuelve el ejercicio 81

EJEMPLO 7 **Tablas fiscales** A continuación, se presenta la tasa de impuesto sobre la renta federal estadounidense de 2017 para personas físicas. Los niveles de ingreso gravable descritos en la tabla se conocen, en la legislación fiscal estadounidense, como *categoría tributaria*. Por ejemplo, el nivel de ingreso gravable descrito en la primera fila de la tabla se conoce como *categoría tributaria de 10%*. El nivel de ingreso gravable descrito en la segunda fila de la tabla se conoce como *categoría tributaria de 15%*, etcétera.

Tabla fiscal 2017 para personas físicas (EUA)

Si el ingreso gravable es:	El impuesto es:
No superior a $9325	10% del ingreso gravable
Mayor a $9325 mas no superior a $37950	$932.50 más 15% del excedente sobre $9325
Mayor a $37950 mas no superior a $91900	$5226.25 más 25% del excedente sobre $37950
Mayor a $91900 mas no superior a $191650	$18713.75 más 28% del excedente sobre $91900
Mayor a $191650 mas no superior a $416700	$46643.75 más 33% del excedente sobre $191650
Mayor a $416700 mas no superior a $418400	$120910.25 más 35% del excedente sobre $416700
Mayor a $418400	$121505.25 más 39.6% del excedente sobre $418400



a) Escribe, en notación de intervalo, los montos de ingreso gravable que constituyen cada una de las siete categorías tributarias mencionadas.
b) Mónica es soltera y es asesora estudiantil. Determina el impuesto sobre la renta para Mónica, si su ingreso gravable en 2017 fue de $6380.
c) Jaime es soltero y es gerente de construcción de edificios. Determina el impuesto sobre la renta para Jaime, si su ingreso gravable en 2017 fue de $87400.
d) Alexa es soltera y es farmacéutica. Determina el impuesto sobre la renta para Alexa, si su ingreso gravable en 2017 fue de $125600.

Solución

a) Las palabras *pero no superior* significan "menor que o igual que". Los ingresos gravables que constituyen cada una de las siete categorías tributarias son

- $(0, 9325]$ para la categoría tributaria de 10%
- $(9325, 37950]$ para la categoría tributaria de 15%
- $(37950, 91900]$ para la categoría tributaria de 25%
- $(91900, 191650]$ para la categoría tributaria de 28%
- $(191650, 416700]$ para la categoría tributaria de 33%
- $(416700, 418400]$ para la categoría tributaria de 35%
- $(418400, \infty)$ para la categoría tributaria de 39.6%

b) Un ingreso gravable de $6380 coloca a Mónica en la categoría tributaria de 10%. Su impuesto sobre la renta es de 10% de su ingreso gravable.

$$\text{Impuesto de Mónica} = 0.10(6380) = 638$$

Por tanto, el impuesto sobre la renta de Mónica para 2017 es $638.

c) Un ingreso gravable de $87400 coloca a Jaime en la categoría tributaria de 25%. Su impuesto sobre la renta es de $5226.25 más 25% del excedente sobre $37950.

$$\begin{aligned}\text{Impuesto de Jaime} &= 5226.25 + 0.25(87400 - 37950)\\ &= 5226.25 + 0.25(49450)\\ &= 5226.25 + 12362.50 = 17588.75\end{aligned}$$

Por tanto, el impuesto sobre la renta de Jaime para 2017 es de $17588.75.

d) Un ingreso gravable de $125600 coloca a Alexa en la categoría tributaria de 28%. Su impuesto sobre la renta es de $18713.75 más 28% del excedente sobre $91900.

$$\begin{aligned}\text{Impuesto de Alexa} &= 18713.75 + 0.28(125600 - 91900)\\ &= 18713.75 + 0.28(33700)\\ &= 18713.75 + 9436 = 28149.75\end{aligned}$$

Por tanto, el impuesto sobre la renta de Alexa para 2017 es de $28149.75.

Ahora resuelve el ejercicio 75

3 Resolución de desigualdades compuestas que involucran "*y*"

Una **desigualdad compuesta** se forma al unir dos desigualdades con la letra "y" u "o". En ocasiones, la letra "y" está implícita sin escribirse.

Ejemplos de desigualdades compuestas

$$\begin{aligned}3 < x \quad &\text{y} \quad x < 5\\ x + 4 > 2 \quad &\text{o} \quad 2x - 3 < 6\\ 4x - 6 \geq -3 \quad &\text{y} \quad x - 6 < 17\end{aligned}$$

La solución de una desigualdad compuesta, usando la letra "y", es todos los números que hacen verdadera *ambas* partes de la desigualdad. Considera

$$3 < x \quad \text{y} \quad x < 5$$

Los números que satisfacen ambas desigualdades, pueden verse más fácilmente si se elabora la gráfica de la solución a cada desigualdad sobre una recta numérica (observa la **Figura 2.10**). Ahora puedes ver que los números que satisfacen ambas desigualdades son los números entre 3 y 5. El conjunto solución es $\{x|\, 3 < x < 5\}$.

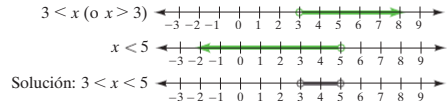


FIGURA 2.10

La intersección de dos conjuntos, es el conjunto de elementos comunes a ambos conjuntos. *Para determinar el conjunto solución de una desigualdad que contiene la letra* **y**, *toma la* **intersección** *de los conjuntos solución de las dos desigualdades.*

EJEMPLO 8 Resuelve $2x - 7 \leq -1$ y $3x + 5 > 8$.

Solución Comienza por resolver cada desigualdad por separado.

$$\begin{aligned}2x - 7 \leq -1 \quad &\text{y} \quad 3x + 5 > 8\\ 2x \leq 6 \quad &\qquad 3x > 3\\ x \leq 3 \quad &\qquad x > 1\end{aligned}$$

Ahora toma la intersección de los conjuntos $\{x|x \leq 3\}$ y $\{x|x > 1\}$. Cuando determinas $\{x|x \leq 3\} \cap \{x|x > 1\}$, estás determinando los valores de x comunes a ambos conjuntos. La **Figura 2.11** ilustra que el conjunto solución es $\{x|\, 1 < x \leq 3\}$. En notación de intervalo, la solución es (1, 3].

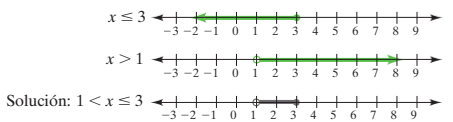


FIGURA 2.11

Ahora resuelve el ejercicio 61

En ocasiones, una desigualdad compuesta que usa la letra "y", puede escribirse en forma abreviada.

$$3 < x \text{ y } x < 5 \quad \text{se escribe} \quad 3 < x < 5,$$

$$-1 < x + 3 \text{ y } x + 3 \leq 5 \quad \text{se escribe} \quad -1 < x + 3 \leq 5$$

EJEMPLO 9 Resuelve $-1 < x + 3 \leq 5$.

Solution $-1 < x + 3 \leq 5$ significa $-1 < x + 3$ y $x + 3 \leq 5$. Resuelve cada desigualdad por separado.

$$\begin{array}{ll} -1 < x + 3 & \text{y} \quad x + 3 \leq 5 \\ -4 < x & x \leq 2 \end{array}$$

Recuerda que $-4 < x$ significa $x > -4$. La **Figura 2.12** ilustra que el conjunto solución es $-1 < x + 3 \leq 5$. En notación de intervalo, la solución es $(-4, 2]$.

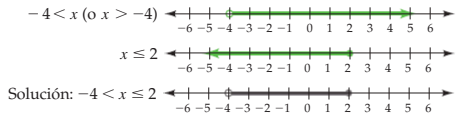


FIGURA 2.12

Ahora resuelve el ejercicio 37

Comprende el Álgebra

Cuando resuelvas una desigualdad con más de dos *partes*, cualquier cosa que hagas a una parte, debes hacerla a *todas* las partes.

La desigualdad del ejemplo 9, $-1 < x + 3 \leq 5$, puede resolverse de otra forma. Podías haber restado 3 de las tres partes para despejar la variable en el medio y resolver la desigualdad.

$$\begin{array}{c} -1 < x + 3 \leq 5 \\ -1 - 3 < x + 3 - 3 \leq 5 - 3 \\ -4 < x \leq 2 \end{array}$$

Observa que esta es la misma solución obtenida en el ejemplo 9.

EJEMPLO 10 Resuelve la desigualdad $-3 \leq 2t - 7 < 8$.

Solución Se quiere despejar la variable t. Comienza por sumar 7 a las tres partes de la desigualdad.

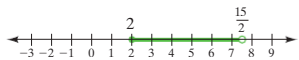
$$\begin{array}{c} -3 \leq 2t - 7 < 8 \\ -3 + 7 \leq 2t - 7 + 7 < 8 + 7 \\ 4 \leq 2t < 15 \end{array}$$

Ahora divide las tres partes de la desigualdad entre 2.

$$\frac{4}{2} \leq \frac{2t}{2} < \frac{15}{2}$$

$$2 \leq t < \frac{15}{2}$$

La solución también se puede ilustrar sobre una recta numérica, escrita en notación de intervalo, o escrita como un conjunto solución. A continuación se muestra cada una de las formas.



La respuesta en notación de intervalo es $\left[2, \frac{15}{2}\right)$. El conjunto solución es $\left\{t \,\middle|\, 2 \leq t < \frac{15}{2}\right\}$.

Ahora resuelve el ejercicio 41

EJEMPLO 11 Resuelve la desigualdad $-2 < \dfrac{4 - 3x}{5} < 8$.

Solución Multiplica las tres partes por 5, para eliminar el denominador.

$$-2 < \frac{4 - 3x}{5} < 8$$

$$-2(5) < 5\left(\frac{4 - 3x}{5}\right) < 8(5)$$

$$-10 < 4 - 3x < 40$$

$$-10 - 4 < 4 - 4 - 3x < 40 - 4$$

$$-14 < -3x < 36$$

Ahora divide las tres partes de la desigualdad entre -3. Recuerda que, cuando multiplicas por, o divides una desigualdad entre, un número negativo, la dirección de los símbolos de desigualdad se invierten.

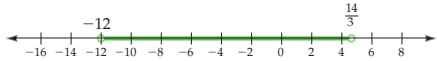
$$\frac{-14}{-3} > \frac{-3x}{-3} > \frac{36}{-3}$$

$$\frac{14}{3} > x > -12$$

Aunque $\dfrac{14}{3} > x > -12$ es correcto, por lo general, las desigualdades compuestas se escriben con el valor menor a la izquierda. Por tanto, la solución se reescribirá como

$$-12 < x < \frac{14}{3}$$

La solución también se puede ilustrar sobre una recta numérica, escrita en notación de intervalo, o escrita como un conjunto solución.



La solución en notación de intervalo es $\left(-12, \dfrac{14}{3}\right)$. El conjunto solución es $\left\{x \middle| -12 < x < \dfrac{14}{3}\right\}$.

Ahora resuelve el ejercicio 49

CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

Debes tener mucho cuidado cuando reescribas la solución a una desigualdad compuesta. En el ejemplo 11, puedes cambiar la solución de:

$$\frac{14}{3} > x > -12 \quad \text{a} \quad -12 < x < \frac{14}{3}$$

Esto es correcto, pues ambas dicen que x es mayor que -12 y menor que $\dfrac{14}{3}$. Observa que el símbolo de desigualdad, en ambos casos, apunta hacia el número más pequeño.

En el ejemplo 11, de haber escrito la respuesta como $\dfrac{14}{3} < x < -12$, se habría dado la solución incorrecta. Recuerda que la desigualdad $\dfrac{14}{3} < x < -12$ significa que $\dfrac{14}{3} < x$ y $x < -12$.

No hay número que sea tanto mayor que $\dfrac{14}{3}$, como menor que -12. Además, al examinar la desigualdad $\dfrac{14}{3} < x < -12$, parece como si se dijera que -12 es un número mayor que $\dfrac{14}{3}$, lo cual, obviamente, es incorrecto.

También sería incorrecto escribir la respuesta como

$$\cancel{-12 < x > \frac{14}{3}} \quad \text{o} \quad \cancel{\frac{14}{3} < x > -12}$$



EJEMPLO 12 **Cálculo de calificaciones** En un curso de Biología, una calificación promedio mayor o igual que 80 y menor que 90, resultará en una calificación final de B. Víctor recibió calificaciones de 85, 90, 68 y 70 en sus primeros cuatro exámenes. Para que Víctor reciba una calificación final de B en el curso, ¿entre cuáles dos calificaciones debe caer su quinto (y último) examen?

Solución Sea $x =$ calificación del último examen de Víctor.

$$\begin{aligned} 80 &\le \text{promedio de cinco exámenes} < 90 \\ 80 &\le \frac{85 + 90 + 68 + 70 + x}{5} < 90 \\ 80 &\le \frac{313 + x}{5} < 90 \\ 400 &\le 313 + x < 450 \\ 400 - 313 &\le 313 - 313 + x < 450 - 313 \\ 87 &\le x < 137 \end{aligned}$$

Víctor necesitaría una calificación mínima de 87 en su último examen, para obtener una calificación final de B. Si la calificación más alta que podría recibir en el examen es 100, ¿es posible que pueda obtener una calificación final de A (90 de promedio o superior)? Explica.

Ahora resuelve el ejercicio 85

4 Resolución de desigualdades compuestas que involucren "o"

La solución a una desigualdad compuesta, usando la letra "o", es todos los números que convierten en enunciado verdadero *cualquiera* de las desigualdades. Considera la desigualdad compuesta

$$x > 3 \quad \text{o} \quad x < 5$$

¿Cuáles son los números que satisfacen la desigualdad compuesta? A continuación, se grafica sobre la recta numérica la solución a cada desigualdad (observa la **Figura 2.13**). Observa que todo número real satisface al menos una de la dos desigualdades. Por tanto, el conjunto solución a la desigualdad compuesta, es el conjunto de todos los números reales, $\mathbb{R}$.

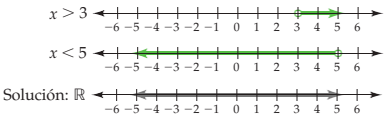


FIGURA 2.13

La *unión* de dos conjuntos, es el conjunto de elementos que pertenecen a *cualquiera* de los conjuntos. *Para determinar el conjunto solución de una desigualdad que contiene la letra* **o**, *toma la* **unión** *de los conjuntos solución de las dos desigualdades.*

EJEMPLO 13 Resuelve $r - 2 \le -6$ o $-4r + 3 < -5$.

Solución Resuelve cada desigualdad por separado.

$$\begin{array}{lll} r - 2 \le -6 & \text{o} & -4r + 3 < -5 \\ r \le -4 & & -4r < -8 \end{array}$$

Ahora grafica cada solución sobre rectas numéricas, y después determina la unión (observa la **Figura 2.14**). La unión es $r \le -4$ o $r > 2$.

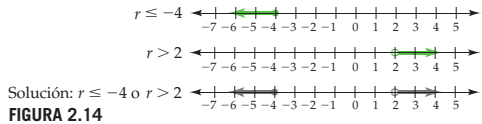


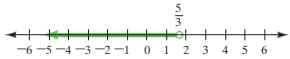
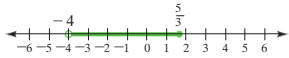
FIGURA 2.14

El conjunto solución es $\{r | r \le -4\} \cup \{r | r > 2\}$, que puede escribirse como $\{r | r \le -4 \text{ o } r > 2\}$. En notación de intervalo, la solución es $(-\infty, -4] \cup (2, \infty)$.

Ahora resuelve el ejercicio 59

SUGERENCIA ÚTIL

Existen varias formas de escribir la solución a un problema de desigualdad. Asegúrate de indicar la solución a un problema de desigualdad en la forma solicitada por tu profesor. A continuación se presentan ejemplos de varias formas.

Desigualdad	Recta numérica	Notación de intervalo	Conjunto solución
$x < \frac{5}{3}$		$\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$	$\left\{x \middle\| x < \frac{5}{3}\right\}$
$-4 < t \leq \frac{5}{3}$		$\left(-4, \frac{5}{3}\right]$	$\left\{t \middle\| -4 < t \leq \frac{5}{3}\right\}$

2.5 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolos(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

dirección abierto cerrado intersección unión compuesta simple

1. Una desigualdad _____ se forma al unir dos desigualdades con las palabras *y* u *o*.
2. Un círculo _____ sobre la recta numérica, indica que el punto extremo no es parte de la solución.
3. Un círculo _____ sobre la recta numérica, indica que el punto extremo es parte de la solución.
4. Para determinar el conjunto solución de una desigualdad que contenga la palabra *y*, toma la _____ de los conjuntos solución de las dos desigualdades.
5. Para determinar el conjunto solución de una desigualdad que contenga la palabra *o*, toma la _____ de los conjuntos solución de las dos desigualdades.
6. Siempre que multipliques o dividas ambos lados de una desigualdad por un número negativo, debes invertir la _____ del símbolo de desigualdad.

Practica tus habilidades

Expresa cada desigualdad ***a)*** *usando una recta numérica,* ***b)*** *en notación de intervalo y* ***c)*** *como un conjunto solución (usa notación de construcción de conjuntos).*

7. $x > -3$

8. $x < 2$

9. $x \leq 1$

10. $x \geq -\frac{6}{5}$

11. $-7 < x \leq -4$

12. $-4 < x < 3$

13. $k \leq 1$ o $k > 5$

14. $c < -4$ o $c \geq 0$

15. $a > 0$ y $a \leq 3$

16. $b \geq -4$ y $b < 1$

Resuelve cada desigualdad y grafica la solución sobre la recta numérica.

17. $3x + 2 \leq 8$

18. $2x + 3 > 4$

19. $-2z + 3 < 4$

20. $-3w + 7 \geq 13$

21. $-3(2x + 1) > -4x + 3$

22. $-5(7h + 1) \leq -4(8h + 2)$

23. $2y - 6y + 8 \leq 2(-2y + 9)$

24. $-6(d + 2) < -9d + 3(d - 1)$

25. $5b - 6 \geq 3(b + 3) + 2b$

26. $8(2x + 3) \leq 4(4x - 7)$

27. $\frac{7}{15}x - \frac{1}{3} \geq \frac{3}{5}$

28. $\frac{5}{14}x + \frac{1}{2} < \frac{1}{7}x + \frac{1}{14}$

Resuelve cada desigualdad y proporciona la solución en notación de intervalo.

29. $5 - 2z + 8 \geq 5z - 8$

30. $5 - 7x < 12 + 3x + 13$

31. $\frac{1}{3}k - \frac{7}{9} < \frac{5}{9}k + 1$

32. $\frac{4}{21}d + \frac{3}{7} \leq \frac{3}{7}d - 1$

33. $-\frac{3}{4}(2x - 1) \leq \frac{15}{8}(x + 4)$

34. $\frac{6(x - 2)}{5} > \frac{10(2 - x)}{3}$

35. $-3x + 1 < 3[(x + 2) - 2x] - 1$

36. $-2[x + 3(x - 4)] \geq 5(x + 3) - 13(x + 1)$

Resuelve cada desigualdad y proporciona la solución en notación de intervalo.

37. $-2 \leq t + 3 < 4$

38. $-7 < p - 6 \leq -5$

39. $-15 \leq -3z \leq 12$

40. $-45 < -5x \leq 15$

41. $5 \leq 2x - 3 < 9$

42. $2 \leq 3x - 1 < 5$

43. $14 \leq 2 - 3g < 15$

44. $-16 < 5 - 3n \leq 13$

Resuelve cada desigualdad y proporciona el conjunto solución.

45. $-6 \leq -3(2x - 4) < 12$

46. $2 < -2(2x - 1) \leq 10$

47. $5 \leq \frac{3x + 1}{2} < 11$

48. $0 \leq \frac{3(t - 5)}{2} \leq 6$

49. $\frac{3}{5} < \frac{-x - 5}{3} < 2$

50. $-6 < \frac{4 - 3x}{2} < \frac{2}{3}$

Resuelve cada desigualdad e indica el conjunto solución.

51. $c \leq 1$ y $c > -3$

52. $a > -5$ y $a \leq 2$

53. $p \geq -2$ o $p < -5$

54. $w \leq -1$ o $w > 6$

55. $q \geq -7$ o $q < 1$

56. $d > 0$ o $d \leq 8$

57. $x < 2$ y $x > 4$

58. $r < -2$ y $r > 4$

Resuelve cada desigualdad y proporciona la solución en notación de intervalo.

59. $2s + 3 < 7$ o $-3s + 4 \leq -17$

60. $4 - r < -2$ o $3r - 1 < -1$

61. $4x + 5 \geq 5$ y $3x - 7 \leq -1$

62. $7x - 9 > -23$ y $5x + 8 < 23$

63. $-3y + 8 > -4$ y $-2y - 5 \leq 3$

64. $-4z - 7 \leq 5$ y $2z - 7 < 7$

65. $-2v + 5 \leq -7$ o $-3v - 8 \geq 16$

66. $-5u + 6 \geq 21$ o $-7u - 5 < 9$

67. $5t - 3 < 12$ o $-3t + 4 \geq 16$

68. $-x + 3 < 0$ o $2x - 5 \geq 3$

69. $4s + 3 > 9$ o $2s - 7 \leq 12$

70. $2q - 11 \leq -7$ o $2 - 3q < 11$

71. $-2r + 8 < 5$ y $-5r - 6 \geq 17$

72. $3r + 5 \leq -17$ y $-4r + 1 < 13$

Resolución de problemas

73. Paquetería UPS Para evitar un cargo extra, la longitud más la circunferencia de un paquete a embarcar por United Parcel Services (UPS), no puede ser mayor que 165 pulgadas.



a) Escribe una desigualdad que expresa esta información, usando l para la longitud y g para la circunferencia.

b) UPS define circunferencia, como el doble del ancho más el doble de la altura. Escribe una desigualdad usando longitud, l, ancho, w, y altura, h, para indicar las dimensiones máximas permitidas de un paquete que se pueda embarcar sin pagar el cargo extra.

c) Si la longitud de un paquete es de 40 pulgadas y el ancho de un paquete es de 20.5 pulgadas, determina la altura máxima permitida del paquete.

74. Equipaje de mano Muchas aerolíneas limitaron el tamaño del equipaje, que los pasajeros pueden llevar en cabina, durante vuelos domésticos. La longitud, l, más el ancho, w, más la profundidad, d, del equipaje de mano, no deben exceder 45 pulgadas.

a) Escribe una desigualdad que describa esta restricción, usando l, w y d, como se describe líneas arriba.

b) Si el equipaje de Raúl mide 23 pulgadas de largo y 12 pulgadas de ancho, ¿cuál es la profundidad máxima que puede tener, y todavía sea posible llevarlo en la cabina?

75. Impuestos sobre la renta Consulta el ejemplo 7. Armando es soltero y es técnico dental. Determina el impuesto sobre la renta federal estadounidense para Armando, si su ingreso gravable en 2017 fue de

a) \$36 200. **b)** \$38 600.

76. Impuestos sobre la renta Consulta el ejemplo 7. Damián es soltero y opera su propia firma de consultoría financiera. Determina el impuesto sobre la renta federal estadounidense para Damián, si su ingreso gravable en 2017 fue de

a) \$197 500. **b)** \$423 600.

En los ejercicios 77–90, establece una desigualdad que pueda usarse para resolver el problema. Resuelve el problema y determina el valor deseado.

77. Límite de peso Un conserje debe mover un gran embarque de libros, desde el primer piso hasta el quinto piso. Un letrero en el elevador indica "peso máximo 800 libras". Si cada caja de libros pesa 70 libras, determina el número máximo de cajas que el conserje debe colocar en el elevador, si él no se sube a éste.

78. Límite del elevador Si el conserje del ejercicio 77, que pesa 195 libras, debe viajar con las cajas de libros, determina el número máximo de cajas que pueden colocarse en el elevador.

79. Renta de una bicicleta El costo de rentar una bicicleta es de \$5 por la primera hora y después \$1.75 por cada hora adicional o fracción de hora. Si José quiere gastar menos de \$15, ¿cuál es el número máximo de horas que puede rentar la bicicleta?



80. Estacionamiento Un estacionamiento público en el centro de Austin, Texas, cobra \$1.25 por la primera hora y \$0.75 por cada hora adicional o fracción de hora. ¿Cuál es el tiempo máximo que puedes estacionarte en la instalación, si quieres evitar pagar más de \$3.75?

81. Ganancias por libro Abril considera escribir y publicar su propio libro. Ella estima su ecuación de ingreso como $R = 6.42x$, y su ecuación de costo como $C = 10025 + 1.09x$, donde x es el número de libros que vende. Determina el número mínimo de libros que debe vender para tener una ganancia. Consulta el ejemplo 6.

82. Ganancia de una tintorería Pedro abre un local de lavado en seco. Él estima su ecuación de costo como $C = 8000 + 0.08x$ y su ecuación de ingreso como $R = 1.85x$, donde x es el número de prendas lavadas en seco en un año. Determina el número mínimo de prendas que debe lavar en seco en un año, para que Pedro tenga una ganancia.

83. Correo masivo codificado En Estados Unidos, las organizaciones pueden enviar piezas de correo que pesen hasta una onza usando *correo masivo codificado* (barcoded bulk mail). La organización, primero debe pagar un permiso por masivo de \$215 al año y después pagar \$0.37 por pieza enviada. Sin el permiso, cada pieza costaría \$0.49. Determina el número mínimo de piezas de correo que tendrían que enviarse, para que sea financieramente valioso para una organización el uso del correo masivo codificado.

84. Correo de primera clase preclasificado En Estados Unidos, las organizaciones pueden enviar piezas de correo que pesen hasta una onza usando *correo de primera clase preclasificado*. La organización, primero debe pagar un permiso por masivo de \$215 al año y después pagar \$0.453 por pieza enviada. Sin el permiso, cada pieza costaría \$0.49. Determina el número mínimo de piezas de correo que tendrían que enviarse, para que sea financieramente valioso para la organización el uso de correo de primera clase preclasificado.

85. Una calificación aprobatoria Para aprobar un curso, Carolina necesita una calificación promedio de 60 o más. Si las calificaciones de Carolina son 66, 72, 90, 49 y 59, determina la calificación mínima que puede obtener en su sexto y último examen, y aprobar el curso.

86. Calificación mínima Para recibir una A en un curso, Stephen debe obtener una calificación promedio de 90 o superior, en cinco exámenes. Si las primeras cuatro calificaciones de examen de Stephen son 92, 87, 96 y 77, ¿cuál es la calificación mínima que Stephen puede recibir en el quinto examen, para obtener una A en el curso?

87. Promedio de calificaciones Las calificaciones de Leonora en sus primeros cuatro exámenes son 85, 92, 72 y 75. Un promedio mayor o igual que 80 y menor que 90, resultará en un calificación final de B. ¿Qué rango de calificaciones en el quinto y último examen de Leonora resultará en una calificación final de B? Supón una calificación máxima de 100.

88. Obtención de una B Un promedio mayor o igual que 85 y menor que 93, resultará en una calificación de B. Las calificaciones de Tamara hasta el momento son 87, 96, 94 y 89. ¿Qué rango de calificaciones en el quinto y último examen de Tamara resultará en una calificación final de B?

89. Acidez del agua Tomás verifica la acidez del agua en su piscina. La acidez del agua se considera normal, cuando la lectura promedio de pH de tres mediciones diarias es mayor que 7.2 y menor que 7.8. Si las primeras dos

lecturas de pH son 7.48 y 7.15, determina el rango de valores de pH para la tercera lectura que resultará en el nivel de acidez normal.



Ver ejercicios 89–90.

90. Químicos para piscinas Consulta el ejercicio 89. Tomás ahora verifica la acidez del agua en la piscina de sus padres. Si las primeras dos lecturas de pH son 7.06 y 7.31, determina el rango de valores pH para la tercera lectura que resultará en un nivel de acidez normal.

Velocidad *En física, un objeto que viaja hacia arriba tiene una velocidad positiva ($v > 0$) y un objeto que viaja hacia abajo tiene una velocidad negativa ($v < 0$). En los ejercicios 91-94, se proporciona la velocidad, v, para un objeto t segundos después de que se proyecta hacia arriba. Con notación de intervalo, determina los intervalos de tiempo cuando el objeto viaja a) hacia arriba o b) hacia abajo.*

91. $v = -32t + 96, \quad 0 \le t \le 10$

92. $v = -32t + 172.8, \quad 0 \le t \le 12$

93. $v = -9.8t + 49, \quad 0 \le t \le 13$

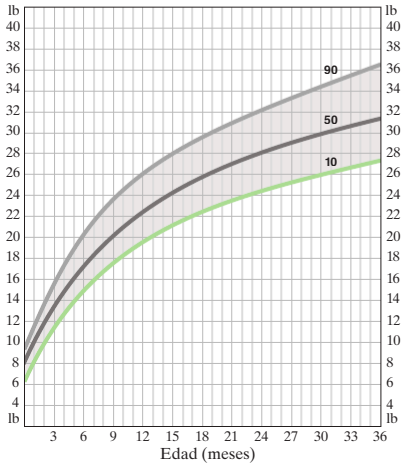
94. $v = -9.8t + 31.36, \quad 0 \le t \le 6$

Tablas de crecimiento *Los ejercicios 95 y 96 muestran tablas de crecimiento para niños, desde el nacimiento hasta los 36 meses de edad. En general, el enésimo percentil representa aquel valor que está por arriba de n% y por abajo de (100 − n)% de los objetos a medir. Por ejemplo, un niño de 24 meses de edad en el percentil 60 de peso, pesa más que 60% y menos que 40% de los niños de 24 meses de edad.*

95. La siguiente tabla muestra los percentiles de peso para la edad de niños, desde el nacimiento hasta los 36 meses de edad. La curva central es el percentil 50. La región sombreada está entre los percentiles 10 (curva inferior) y 90 (curva superior). Esto es: 80% de los pesos están entre los valores representados por la curva inferior y la curva superior. Usa esta gráfica para determinar, en notación de intervalo, dónde ocurre 80% de los pesos para niños con edades de

a) 9 meses.
b) 12 meses.
c) 36 meses.

Percentiles de peso para la edad:
Niños, nacimiento a 36 meses.

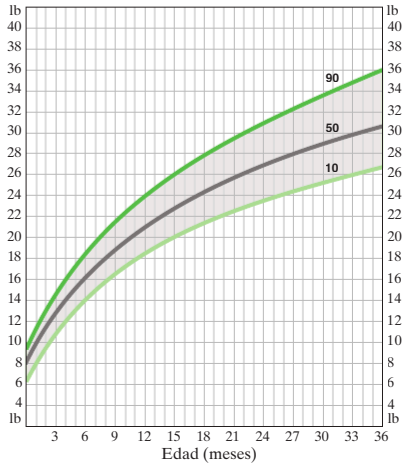


Fuente: National Center for Health Statistics

96. La siguiente tabla muestra los percentiles de peso para la edad para niñas, desde el nacimiento hasta los 36 meses de edad. La región sombreada está entre los percentiles 10 (curva inferior) y 90 (curva superior) y 80% de los pesos están en esta región. Usa esta gráfica para determina, en notación de intervalo, dónde ocurre 80% de los pesos para niñas con edades de

a) 9 meses.
b) 21 meses.
c) 36 meses.

Percentiles de peso para la edad:
Niñas, nacimiento a 36 meses



Fuente: National Center for Health Statistics

Ejercicios conceptuales y de redacción

97. Si $a > b$, ¿a^2 siempre será mayor que b^2? Explica y ofrece un ejemplo para respaldar tu respuesta.

98. Explica por qué la desigualdad $a < bx + c < d$ no puede resolverse para x, a menos que se proporcione información adicional.

Problemas de desafío

99. Cálculo de calificaciones Las primeras cinco calificaciones de Stephen en Historia, fueron 82, 90, 74, 76 y 68. El examen final del curso contará un tercio del promedio final. Un promedio final mayor o igual que 80 y menor que 90, resultará en una calificación final de B. ¿Qué rango de calificaciones de examen final resultará en que Estefanía reciba una calificación final de B en el curso? Supón que es posible una calificación máxima de 100.

En los ejercicios 100-102, resuelve la desigualdad y proporciona la solución en notación de intervalo.

100. $x < 3x - 10 < 2x$ **101.** $x < 2x + 3 < 2x + 5$ **102.** $x + 5 < x + 3 < 2x + 2$

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.2] **103.** Para $A = \{1, 2, 6, 8, 9\}$ y $B = \{1, 3, 4, 5, 8\}$, determina:
a) $A \cup B$.
b) $A \cap B$.

104. Para $A = \left\{-3, 4, \frac{5}{2}, \sqrt{7}, 0, -\frac{13}{29}\right\}$, menciona los elementos que son:
a) números cardinales **b)** números enteros no negativos
c) números racionales **d)** números reales

[1.3] *Nombra cada propiedad ilustrada.*

105. $(3x + 8) + 4y = 3x + (8 + 4y)$

106. $5x + y = y + 5x$

[2.2] **107.** Resuelve la fórmula $R = L + (V - D)r$ para V.

2.6 Resolución de ecuaciones y de desigualdades que contienen valores absolutos

1. **Comprensión del valor absoluto sobre la recta numérica**
2. **Resolución de ecuaciones de la forma $|x| = a, a > 0$**
3. **Resolución de desigualdades de la forma $|x| < a, a > 0$.**
4. **Resolución de desigualdades de la forma $|x| > a, a > 0$.**
5. **Resolución de desigualdades de la forma $|x| < a$ o $|x| > a, a < 0$**
6. **Resolución de desigualdades de la forma , $|x| < 0$, $|x| \leq 0$, $x > 0$, o $x \geq 0$**
7. **Resolución de ecuaciones de la forma $|x| = |y|$**

1 Comprensión del valor absoluto sobre la recta numérica

Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número x, simbolizado $|x|$, es la distancia a la que x está de 0, sobre la recta numérica.

$|3| = 3$ porque el número 3 está a 3 unidades de 0, sobre la recta numérica.

$|-3| = 3$ porque el número -3 está a 3 unidades de 0, sobre la recta numérica.

Ahora considera la ecuación $|x| = 3$. Se buscan valores de x que *estén exactamente* a 3 unidades de 0 sobre la recta numérica. Por tanto, las soluciones a $|x| = 3$ son $x = 3$ y $x = -3$ (observa la **Figura 2.15a** en la página 128).

A continuación, considera la desigualdad $|x| < 3$. Se buscan valores de x que *estén a menos de* 3 unidades de 0, sobre la recta numérica. Por tanto, las soluciones a $|x| < 3$, son los números que están entre -3 y 3, sobre la recta numérica (observa la **Figura 2.15b** en la página 128).

Finalmente, considera la desigualdad $|x| > 3$. Se buscan valores de x que *estén a más de* 3 unidades de 0, sobre la recta numérica. Por tanto, las soluciones a $|x| > 3$ son los números que son menores que -3 o mayores que 3, sobre la recta numérica (observa la **Figura 2.15c** en la página 128).

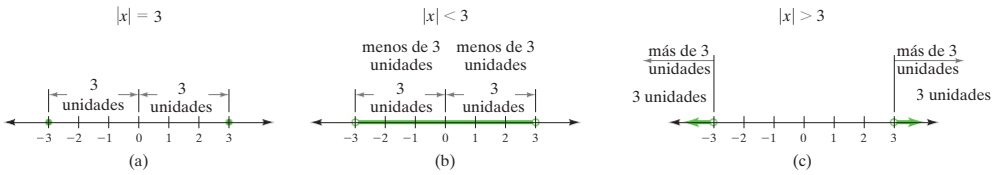


FIGURA 2.15

Se usarán estos ejemplos y sus ilustraciones, sobre la recta numérica, para desarrollar métodos para resolver ecuaciones y desigualdades que involucran valor absoluto.

2 Resolución de ecuaciones de la forma $|x| = a$, $a > 0$

Cuando se resuelve una ecuación de la forma $|x| = a, a > 0$, se determinan los valores que están exactamente a a unidades de 0, sobre la recta numérica.

Para resolver ecuaciones de la forma $|x| = a$

Si $|x| = a$ y $a > 0$, entonces $x = a$ o $x = -a$.

EJEMPLO 1 Resuelve cada ecuación.

a) $|x| = 6$ **b)** $|y| = 0$ **c)** $|z| = -6$

Solución

a) Se necesita determinar los valores de x que están exactamente a 6 unidades de 0, sobre la recta numérica. Por tanto, $x = 6$ o $x = -6$. El conjunto solución es $\{-6, 6\}$.

b) El único número real, cuyo valor absoluto es igual a 0, es 0. El conjunto solución es $\{0\}$.

c) El valor absoluto de un número, nunca es negativo. Por tanto, no hay soluciones para esta ecuación. El conjunto solución es $\varnothing$.

Comprende el Álgebra
El valor absoluto de un número nunca es negativo.

Ahora resuelve el ejercicio 13

EJEMPLO 2 Resuelve la ecuación $|2w - 1| = 5$.

Solución Se buscan valores de w, tales que $2w - 1$ esté exactamente a 5 unidades de 0, sobre la recta numérica. Por tanto, la cantidad $2w - 1$ debe ser igual que 5 o -5.

$$\begin{aligned} 2w - 1 &= 5 \\ 2w &= 6 \\ w &= 3 \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} 2w - 1 &= -5 \\ 2w &= -4 \\ w &= -2 \end{aligned}$$

Verifica

$$\begin{aligned} |2w - 1| &= 5 \\ |2(3) - 1| &\stackrel{?}{=} 5 \\ |6 - 1| &\stackrel{?}{=} 5 \\ |5| &\stackrel{?}{=} 5 \\ 5 &= 5 \quad \text{Verdadero} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} |2w - 1| &= 5 \\ |2(-2) - 1| &\stackrel{?}{=} 5 \\ |-4 - 1| &\stackrel{?}{=} 5 \\ |-5| &\stackrel{?}{=} 5 \\ 5 &= 5 \quad \text{Verdadero} \end{aligned}$$

Las soluciones 3 y -2 resultan cada una en que $2w - 1$ esté a 5 unidades de 0 sobre la recta numérica. El conjunto solución es $\{-2, 3\}$.

Ahora resuelve el ejercicio 19

Considera la ecuación $|2w - 1| - 3 = 2$. El primer paso para resolver esta ecuación, es despejar el término de valor absoluto. Esto se hace al sumar 3 a ambos lados de la ecuación. Lo que resulta en la ecuación $|2w - 1| = 5$, que se resolvió en el ejemplo 2.

3 Resolución de desigualdades de la forma $|x| < a$, $a > 0$

Recuerda la discusión anterior acerca de $|x| < 3$. Las soluciones a $|x| < 3$, son los números que están entre -3 y 3, sobre la recta numérica (observa la **Figura 2.15b** en la página 128). De igual manera, las soluciones a $|x| < a$ son los números que están entre $-a$ y a, sobre la recta numérica.

Para resolver desigualdades de la forma $|x| < a$, puedes usar el siguiente procedimiento.

Para resolver desigualdades de la forma $|x| < a$

Si $|x| < a$ y $a > 0$, entonces $-a < x < a$.

EJEMPLO 3 Resuelve la desigualdad $|2x - 3| < 5$.

Solución La solución a esta desigualdad será el conjunto de valores, tales que la distancia entre $2x - 3$ y 0, sobre una recta numérica, será menos que 5 unidades (observa la **Figura 2.16**). Con la **Figura 2.16**, se puede ver que $-5 < 2x - 3 < 5$.

Al resolver, se obtiene

$$\begin{aligned} -5 &< 2x - 3 < 5 \\ -2 &< 2x < 8 \\ -1 &< x < 4 \end{aligned}$$

El conjunto solución es $\{x | -1 < x < 4\}$.

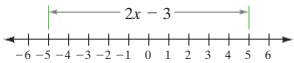


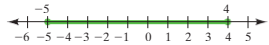
FIGURA 2.16

Ahora resuelve el ejercicio 33

EJEMPLO 4 Resuelve la desigualdad $|2x + 1| \leq 9$ y grafica la solución sobre una recta numérica.

Solución Dado que esta desigualdad es de la forma $|x| \leq a$, se escribe

$$\begin{aligned} -9 &\leq 2x + 1 \leq 9 \\ -10 &\leq 2x \leq 8 \\ -5 &\leq x \leq 4 \end{aligned}$$



El conjunto solución es $\{x | -5 \leq x \leq 4\}$.

Ahora resuelve el ejercicio 75

EJEMPLO 5 Resuelve la desigualdad $|7.8 - 4x| - 5.3 < 14.1$ y elabora la gráfica de la solución sobre una recta numérica.

Solución Primero despeja el valor absoluto, al sumar 5.3 a ambos lados de la desigualdad. Después resuelve como en los ejemplos previos.

$$\begin{aligned} |7.8 - 4x| - 5.3 &< 14.1 \\ |7.8 - 4x| &< 19.4 \\ -19.4 < 7.8 - 4x &< 19.4 \\ -27.2 < -4x &< 11.6 \\ \frac{-27.2}{-4} > \frac{-4x}{-4} &> \frac{11.6}{-4} \\ 6.8 > x &> -2.9 \quad \text{o} \quad -2.9 < x < 6.8 \end{aligned}$$



El conjunto solución es $\{x | -2.9 < x < 6.8\}$.

Ahora resuelve el ejercicio 39

4 Resolución de desigualdades de la forma $|x| > a$, $a > 0$

Recuerda la discusión anterior acerca de $|x| > 3$. La solución a $|x| > 3$, son los números que son menores que -3 o mayores que 3, sobre la recta numérica (observa la **Figura 2.15c** en la página 128). De igual manera, las soluciones a $|x| > a$, son los números que son menores que $-a$ o mayores que a, sobre la recta numérica.

Para resolver desigualdades de la forma $|x| > a$, puedes usar el siguiente procedimiento.

Para resolver desigualdades de la forma $|x| > a$

Si $|x| > a$ y $a > 0$, entonces $x < -a$ o $x > a$.

EJEMPLO 6 Resuelve la desigualdad $|2x - 3| > 5$ y elabora la gráfica de la solución sobre una recta numérica.

Solución La solución a $|2x - 3| > 5$ es el conjunto de valores tales que la distancia entre $2x - 3$ y 0, sobre una recta numérica, será mayor que 5. La cantidad $2x - 3$ debe ser o menor que -5 o mayor que 5 (observa la **Figura 2.17**).

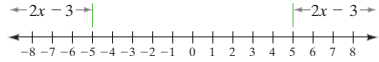
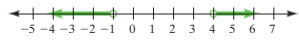


FIGURA 2.17

Dado que $2x - 3$ debe ser ya sea menor que -5 o mayor que 5, se establece y resuelve la siguiente desigualdad compuesta:

$$\begin{array}{rcl} 2x - 3 < -5 & \text{o} & 2x - 3 > 5 \\ 2x < -2 & & 2x > 8 \\ x < -1 & & x > 4 \end{array}$$



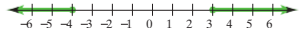
El conjunto solución para $|2x - 3| > 5$ es $\{x \mid x < -1 \text{ o } x > 4\}$.

Ahora resuelve el ejercicio 51

EJEMPLO 7 Resuelve la desigualdad $|2x + 1| \geq 7$ y elabora la gráfica de la solución sobre la recta numérica.

Solución La cantidad $2x + 1$ debe ser menor o igual que -7, o mayor o igual que 7.

$$\begin{array}{rcl} 2x + 1 \leq -7 & \text{o} & 2x + 1 \geq 7 \\ 2x \leq -8 & & 2x \geq 6 \\ x \leq -4 & & x \geq 3 \end{array}$$



Ahora resuelve el ejercicio 53

EJEMPLO 8 Resuelve la desigualdad $\left|\frac{3x - 4}{2}\right| \geq 9$ y elabora la gráfica de la solución sobre una recta numérica.

Solución Dado que esta desigualdad es de la forma $|x| \geq a$, se escribe:

$$\frac{3x - 4}{2} \leq -9 \quad \text{o} \quad \frac{3x - 4}{2} \geq 9$$

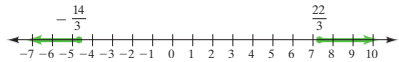
Ahora multiplica ambos lados de cada desigualdad por el mínimo común denominador, 2. Después resuelve cada desigualdad.

$$2\left(\frac{3x-4}{2}\right) \le -9 \cdot 2 \quad \text{o} \quad 2\left(\frac{3x-4}{2}\right) \ge 9 \cdot 2$$

$$3x - 4 \le -18 \qquad 3x - 4 \ge 18$$

$$3x \le -14 \qquad 3x \ge 22$$

$$x \le -\frac{14}{3} \qquad x \ge \frac{22}{3}$$



Ahora resuelve el ejercicio 57

SUGERENCIA ÚTIL

A continuación se presenta algo de información acerca de las ecuaciones y desigualdades que contienen valor absoluto. Para números reales a, b y c, donde $a \neq 0$ y $c > 0$:

Forma de la ecuación o desigualdad	La solución será:	Solución sobre la recta numérica:
$\lvert ax + b\rvert = c$	Dos números distintos, p y q	
$\lvert ax + b\rvert < c$	El conjunto de números entre dos números, $p < x < q$	
$\lvert ax + b\rvert > c$	El conjunto de números menores que un número o mayores que un segundo número, $x < p$ o $x > q$	

Comprende el Álgebra

Cualquier desigualdad de la forma $|x| < a$, donde a es un número negativo, tendrá conjunto solución $\varnothing$.

5 Resolución de desigualdades de la forma $|x| < a$ o $|x| > a$, $a < 0$

Considera la desigualdad $|x| < -3$. Dado que $|x|$ siempre tendrá un valor mayor o igual que 0 para cualquier número real x, esta desigualdad nunca puede ser verdadera, y la solución es el conjunto vacío, $\varnothing$.

EJEMPLO 9 Resuelve la desigualdad $|5x - 11| + 7 < 3$.

Solución Primero, despeja el valor absoluto al restar 7 de ambos lados de la desigualdad.

$$|5x - 11| + 7 < 3$$

$$|5x - 11| < -4$$

Dado que $|5x - 11|$ siempre es mayor que o igual que 0, para cualquier número real x, no hay soluciones a esta desigualdad. El conjunto solución es $\varnothing$.

Ahora resuelve el ejercicio 41

Ahora considera la desigualdad $|x| > -3$. Dado que $|x|$ siempre tendrá un valor mayor o igual que 0 para cualquier número real x, esta desigualdad siempre será verdadera y la solución es el conjunto de todos los números reales, $\mathbb{R}$.

EJEMPLO 10 Resuelve la desigualdad $|5x + 3| + 4 \ge -9$.

Solución Comienza por restar 4 de ambos lados de la desigualdad.

$$|5x + 3| + 4 \ge -9$$

$$|5x + 3| \ge -13$$

Dado que $|5x + 3|$ siempre será mayor o igual que 0 para cualquier número real x, esta desigualdad es verdadera para todo número real. Por tanto, la solución es el conjunto de todos los números reales, $\mathbb{R}$.

Ahora resuelve el ejercicio 59

Comprende el Álgebra

Cualquier desigualdad de la forma $|x| > a$, donde a es un número negativo, tendrá conjunto solución $\mathbb{R}$.

6 Resolución de desigualdades de la forma $|x| < 0$, $|x| \leq 0$, $|x| > 0$ o $|x| \geq 0$

Cada uno de los siguientes ejemplos, se basa sobre el hecho de que el valor absoluto de un número nunca puede ser negativo.

Desigualdad	Conjunto solución	Explicación
$\lvert x-5\rvert < 0$	$\varnothing$	El valor absoluto de un número nunca puede ser < 0.
$\lvert x-5\rvert \leq 0$	$\{5\}$	El valor absoluto de un número nunca puede ser < 0, pero puede ser igual que 0. Cuando $x = 5$, se obtiene: $\lvert x-5\rvert \leq 0$, $\lvert 5-5\rvert \leq 0$, $0 \leq 0$ Verdadero
$\lvert x-5\rvert > 0$	$\{x \mid x \neq 5\}$	Al sustituir cualquier número real para x salvo, 5 hace que $\lvert x-5\rvert$ sea positivo. Cuando $x = 5$, se obtiene: $\lvert x-5\rvert > 0$, $\lvert 5-5\rvert > 0$, $0 > 0$ Falso
$\lvert x-5\rvert \geq 0$	$\mathbb{R}$	El valor absoluto de cualquier número, siempre es ≥ 0.

EJEMPLO 11 Resuelve cada desigualdad.

a) $|x+2| > 0$ **b)** $|3x-8| \leq 0$ **c)** $|2x-3| \geq 0$ **d)** $|5x+4| < 0$

Solución

a) La desigualdad será verdadera para todo valor de x, excepto -2. El conjunto solución es $\{x \mid x < -2 \text{ o } x > -2\}$.

b) Determina el número que hace al valor absoluto igual que 0, al igualar con 0 la expresión dentro del signo de valor absoluto y resolver para x.

$$3x - 8 = 0$$
$$3x = 8$$
$$x = \frac{8}{3}$$

La desigualdad será verdadera sólo cuando $x = \frac{8}{3}$. El conjunto solución es $\left\{\frac{8}{3}\right\}$.

c) Dado que el valor absoluto de cualquier número siempre es mayor o igual que 0, el conjunto solución es todos los números reales, o $\mathbb{R}$.

d) Dado que el valor absoluto de cualquier número nunca puede ser menor que cero, no hay solución y el conjunto solución es $\varnothing$.

Ahora resuelve el ejercicio 61

7 Resolución de ecuaciones de la forma $|x| = |y|$

Ahora se discutirán ecuaciones de valor absoluto, donde un valor absoluto aparece en ambos lados de la ecuación.

Cuando se resuelva una ecuación de valor absoluto con una expresión de valor absoluto en cada lado del signo igual, las dos expresiones deben tener el mismo valor absoluto. Por tanto, *las expresiones deben ser ya sea mutuamente iguales o mutuamente opuestas.*

Para resolver ecuaciones de la forma $|x| = |y|$

Si $|x| = |y|$, entonces $x = y$ o $x = -y$.

Comprende el Álgebra

Si $|x| = |y|$, entonces $x = y$ o $x = -y$.

EJEMPLO 12 Resuelve la ecuación $|z + 3| = |2z - 7|$.

Solución Si se hace $z + 3$ igual que x, y $2z - 7$ igual que y, esta ecuación es de la forma $|x| = |y|$. Usando el procedimiento dado anteriormente, se obtienen las dos ecuaciones

$$z + 3 = 2z - 7 \quad \text{o} \quad z + 3 = -(2z - 7)$$

Ahora resuelve cada ecuación.

$$\begin{array}{rl} z + 3 = 2z - 7 & \text{o} \quad z + 3 = -(2z - 7) \\ 3 = z - 7 & \quad z + 3 = -2z + 7 \\ 10 = z & \quad 3z + 3 = 7 \\ & \quad 3z = 4 \\ & \quad z = \dfrac{4}{3} \end{array}$$

Verificar $z = 10$

$$|z + 3| = |2z - 7|$$
$$|10 + 3| \stackrel{?}{=} |2(10) - 7|$$
$$|13| \stackrel{?}{=} |20 - 7|$$
$$|13| \stackrel{?}{=} |13|$$
$$13 = 13 \quad \text{Verdadero}$$

$z = \dfrac{4}{3}$

$$|z + 3| = |2z - 7|$$
$$\left|\frac{4}{3} + 3\right| \stackrel{?}{=} \left|2\left(\frac{4}{3}\right) - 7\right|$$
$$\left|\frac{13}{3}\right| \stackrel{?}{=} \left|\frac{8}{3} - \frac{21}{3}\right|$$
$$\left|\frac{13}{3}\right| \stackrel{?}{=} \left|-\frac{13}{3}\right|$$
$$\frac{13}{3} = \frac{13}{3} \quad \text{Verdadero}$$

El conjunto solución es $\left\{\frac{4}{3}, 10\right\}$.

Ahora resuelve el ejercicio 63

EJEMPLO 13 Resuelve la ecuación $|5x - 3| = |17 - 5x|$.

Solución

$$\begin{array}{rl} 5x - 3 = 17 - 5x & \text{o} \quad 5x - 3 = -(17 - 5x) \\ 10x - 3 = 17 & \quad 5x - 3 = -17 + 5x \\ 10x = 20 & \quad -3 = -17 \quad \text{Falso} \\ x = 2 & \end{array}$$

Dado que la ecuación $5x - 3 = -(17 - 5x)$ resulta en una inconsistencia, la ecuación de valor absoluto tiene solamente una solución. El conjunto solución es $\{2\}$.

Ahora resuelve el ejercicio 65

Resumen de procedimientos para resolver ecuaciones y desigualdades que contienen valor absoluto

Para $a > 0$:

Si $|x| = a$, entonces $x = a$ o $x = -a$.
Si $|x| < a$, entonces $-a < x < a$.
Si $|x| > a$, entonces $x < -a$ o $x > a$.
Si $|x| = |y|$, entonces $x = y$ o $x = -y$.

2.6 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

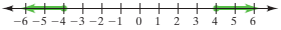
$|x| = 4$ $|x| < 4$ $|x| \le 4$ $|x| > 4$ $|x| \ge 4$ $|x| = 5$

$|x| < 5$ $|x| \le 5$ $|x| > 5$ $|x| \ge 5$ $|x| < -6$ $|x| > -6$

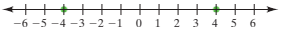
1. La gráfica de la solución a _____ sobre la recta numérica es



2. La gráfica de la solución a _____ sobre la recta numérica es



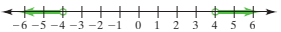
3. La gráfica de la solución a _____ sobre la recta numérica es



4. La gráfica de la solución a _____ sobre la recta numérica es



5. La gráfica de la solución a _____ sobre la recta numérica es



6. El conjunto solución de _____ es $\{x \mid -5 \le x \le 5\}$.

7. El conjunto solución de _____ es $\{x \mid x \le -5 \text{ o } x \ge 5\}$.

8. El conjunto solución de _____ es $\{-5, 5\}$.

9. El conjunto solución de _____ es $\{x \mid -5 < x < 5\}$.

10. El conjunto solución de _____ es $\{x \mid x < -5 \text{ o } x > 5\}$.

11. El conjunto solución de _____ es $\mathbb{R}$.

12. El conjunto solución de _____ es $\varnothing$.

Practica tus habilidades

Determina el conjunto solución para cada ecuación

13. $|x| = 9$

14. $|y| = 11$

15. $|w| = 0$

16. $|z| = 0$

17. $|p| = -13$

18. $|q| = -19$

19. $|x + 5| = 8$

20. $|l + 4| = 6$

21. $|2x - 3| = 9$

22. $|3x - 2| = 8$

23. $|3x - 8| + 5 = 9$

24. $|5x - 1| + 3 = 12$

25. $\left|\frac{x - 3}{4}\right| = 5$

26. $\left|\frac{c - 2}{5}\right| = 1$

27. $\left|\frac{x - 3}{4}\right| + 8 = 8$

28. $\left|\frac{3x - 4}{2}\right| - 3 = -3$

29. $|x - 5| + 4 = 3$

30. $|2x + 3| - 5 = -8$

Determina el conjunto solución para cada desigualdad.

31. $|a| < 5$

32. $|b| \le 7$

33. $|q + 5| \le 8$

34. $|r - 2| < 7$

35. $|a + 7| - 5 \le -3$

36. $|x - 3| - 7 < -2$

37. $|2x + 3| - 5 \le 10$

38. $|2y - 7| + 3 < 12$

39. $|3x - 7| + 8 < 14$

40. $|5x + 3| - 11 \le -3$

41. $|2x - 6| + 5 \le 1$

42. $|7x - 9| - 3 < -11$

43. $\left|\frac{m}{3} - \frac{7}{9}\right| \le \frac{7}{27}$

44. $\left|\frac{k}{4} - \frac{3}{8}\right| < \frac{7}{16}$

45. $\left|\frac{x - 3}{2}\right| - 4 \le -2$

46. $\left|\frac{y + 3}{5}\right| + 2 < 7$

Determina el conjunto solución para cada desigualdad.

47. $|a| \ge 5$

48. $|b| > 7$

49. $|x + 4| > 5$

50. $|x - 5| > 3$

51. $|2b - 7| > 3$

52. $|2b + 5| \ge 7$

53. $|3d - 8| > 5$

54. $|2x - 1| \ge 12$

55. $|0.1x - 0.4| + 0.4 > 0.6$

56. $|0.2x + 0.5| - 0.3 \geq 0.8$

57. $\left|\frac{x}{2} + 4\right| \geq 5$

58. $\left|4 - \frac{3x}{5}\right| \geq 9$

59. $|7w + 3| - 12 \geq -12$

60. $|13d - 6| + 7 > 7$

61. $|4 - 2x| > 0$

62. $|9 - 3m| > 0$

Determina el conjunto solución para cada ecuación.

63. $|3p - 5| = |2p + 10|$

64. $|6n + 3| = |4n - 13|$

65. $|7 - 3k| = |3k + 19|$

66. $|5 - 2m| = |2m + 13|$

67. $|5t - 10| = |10 - 5t|$

68. $|4d - 9| = |9 - 4d|$

69. $\left|\frac{2r}{3} + \frac{5}{6}\right| = \left|\frac{r}{2} - 3\right|$

70. $\left|\frac{3r}{4} + \frac{1}{8}\right| = \left|\frac{r}{2} - \frac{3}{8}\right|$

Determina el conjunto solución para cada ecuación o desigualdad.

71. $|j| = 15$

72. $|y| \leq 8$

73. $|q + 6| > 2$

74. $|9d + 7| \leq -9$

75. $|2w - 7| \leq 9$

76. $|2z - 7| + 5 > 8$

77. $|5a - 1| = 9$

78. $|2x - 4| + 5 = 13$

79. $|5 + 2x| > 0$

80. $|7 - 3b| = |5b + 15|$

81. $|4 + 3x| \leq 9$

82. $|2.4x + 4| + 4.9 > 3.9$

83. $|3n + 8| - 4 = -10$

84. $|4 - 2x| - 3 = 7$

85. $\left|\frac{w + 4}{3}\right| + 5 < 9$

86. $\left|\frac{5t - 10}{6}\right| > \frac{5}{3}$

87. $\left|\frac{3x - 2}{4}\right| - \frac{1}{3} \geq -\frac{1}{3}$

88. $\left|\frac{2x - 4}{5}\right| = 14$

89. $|2x - 8| = \left|\frac{1}{2}x + 3\right|$

90. $\left|\frac{1}{3}y + 3\right| = \left|\frac{2}{3}y - 1\right|$

91. $|2 - 3x| = \left|4 - \frac{5}{3}x\right|$

92. $\left|\frac{-2u + 3}{7}\right| \leq 5$

Resolución de problemas

93. Grosor de un vidrio Ciertos tipos de vidrio fabricados por PPG Industries, idealmente tendrán un grosor de 0.089 pulgadas. Sin embargo, debido a limitaciones en el proceso de fabricación, se permite que el grosor varíe del grosor ideal por hasta 0.004 pulgadas. Si t representa el grosor real del vidrio, entonces el rango permisible de grosor se puede representar usando la desigualdad $|t - 0.089| \leq 0.004$.

Fuente: www.ppg.com

a) Resuelve esta desigualdad en términos de t (usa notación de intervalo).

b) ¿Cuál es el grosor más pequeño que se le permite tener al vidrio?

c) ¿Cuál es el grosor más grande que se le permite tener al vidrio?

94. Garantía de la madera contrachapada Cierta madera contrachapada, fabricada por Lafor International, está garantizada a tener $\frac{5}{8}$ de pulgada de grueso, con una tolerancia de más o menos $\frac{1}{56}$ de una pulgada. Si t representa el grosor real de la madera contrachapada, entonces el rango permisible de grosor se puede representar usando la desigualdad $\left|t - \frac{5}{8}\right| \leq \frac{1}{56}$.

Fuente: www.sticktrade.com

a) Resuelve esta desigualdad en términos de t (usa notación de intervalo).

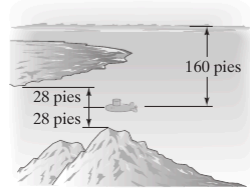
b) ¿Cuál es el grosor más pequeño que se le permite tener a la madera contrachapada?

c) ¿Cuál es el grosor más grande que se le permite tener a la madera contrachapada?

95. Profundidad submarina Un submarino está 160 pies bajo el nivel del mar. Tiene formaciones rocosas arriba y abajo de él, y no debe cambiar su profundidad en más de 28 pies. Su distancia abajo del nivel del mar, d, se puede describir mediante la desigualdad $|d - 160| \leq 28$.

a) Resuelve esta desigualdad para d. Escribe tu respuesta en notación de intervalo.

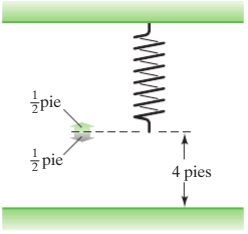
b) ¿Entre qué distancias verticales, medidas desde el nivel del mar, puede moverse el submarino?



96. Un resorte saltarín Un resorte que cuelga de un techo, rebota arriba y abajo, de modo que su distancia, d, sobre el suelo, satisface la desigualdad $|d - 4| \leq \frac{1}{2}$ pie (observa la figura).

a) Resuelve esta desigualdad en términos de d. Escribe tu respuesta en notación de intervalo.

b) ¿Entre qué distancias, medidas desde el suelo, oscilará el resorte?



97. ¿Cuántas soluciones hay para las siguientes ecuaciones o desigualdades, si $a \neq 0$ y $k > 0$?

a) $|ax + b| = k$ **b)** $|ax + b| < k$

c) $|ax + b| > k$

98. Supón $|x| < |y|$ y $x < 0$ y $y < 0$.

a) ¿Cuál de las siguientes debe ser verdadera: $x < y, x > y$ ó $x = y$?

b) Proporciona un ejemplo para respaldar tu respuesta al inciso **a)**.

99. ¿Cuántas soluciones tendrá $|ax + b| = k, a \neq 0$ si

a) $k < 0$, **b)** $k = 0$, **c)** $k > 0$?

100. Supón que m y n $(m < n)$ son dos soluciones distintas a la ecuación $|ax + b| = c$. Indica las soluciones a cada desigualdad, usando tanto símbolos de desigualdad como la recta numérica. (Consulta la Sugerencia útil de la página 131.)

a) $|ax + b| < c$

b) $|ax + b| > c$

Ejercicios conceptuales y de redacción

101. ¿Para qué valor de x la desigualdad $|ax + b| \leq 0$ será verdadera? Explica.

102. ¿Para qué valor de x la desigualdad $|ax + b| > 0$ no será verdadera? Explica.

103. a) Explica cómo determina la solución a la ecuación $|ax + b| = c$. (Asume que $c > 0$ y $a \neq 0$).

b) Resuelve esta ecuación para x.

104. a) Explica cómo determinar la solución a la desigualdad $|ax + b| < c$. (Asume que $a > 0$ y $c > 0$).

b) Resuelve esta desigualdad para x.

105. a) Explica cómo determinar la solución a la desigualdad $|ax + b| > c$. (Asume que $a > 0$ y $c > 0$).

b) Resuelve esta desigualdad para x.

106. a) ¿Cuál es el primer paso para resolver la desigualdad $-4|3x - 5| \leq -12$?

b) Resuelve esta desigualdad y proporciona la solución en notación de intervalo.

Determina qué valores de x harán verdadera cada ecuación. Explica tu respuesta.

107. $|x - 4| = |4 - x|$ **108.** $|x - 4| = -|x - 4|$ **109.** $|x| = x$ **110.** $|x + 2| = x + 2$

Resuelve. Explica cómo determinaste tu respuesta.

111. $|x + 1| = 2x - 1$ **112.** $|3x + 1| = x - 3$ **113.** $|x - 4| = -(x - 4)$

Problemas de desafío

Resuelve al considerar los posibles signos de x.

114. $|x| + x = 8$ **115.** $x + |-x| = 8$ **116.** $|x| - x = 8$ **117.** $x - |x| = 8$

Actividad grupal

Discute y responde, en equipo, el ejercicio 118.

118. Considera la ecuación $|x + y| = |y + x|$.

a) Cada miembro del equipo debe seleccionar un valor x y un valor y, y debe determinar si la ecuación se sostiene. Repite para otros dos pares de valores x y y.

b) En equipo, determinen para qué valores de x y y la ecuación es verdadera. Expliquen su respuesta.

c) Ahora considera $|x - y| = -|y - x|$. ¿Bajo qué condiciones esta ecuación será verdadera?

Ejercicios de repaso acumulativo

Evalúa.

[1.4] **119.** $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \div \frac{2}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^2$

120. $4(x + 3y) - 5xy$ cuando $x = 1, y = 3$

[2.4] **121. Natación** Tadeo nada a través de un lago, a un promedio de 2 millas por hora. Después da la vuelta y nada de regreso a través del lago, con un promedio de 1.6 millas por hora. Si su tiempo de natación total es de 1.5 horas, ¿cuál es el ancho del lago?

[2.5] **122.** Determina el conjunto solución de la desigualdad $-7(x - 3) + 5(x + 1) \geq 20$.

Capítulo 2 Resumen

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 2.1	
Propiedades de la igualdad Para todo número real a, b y c: **1.** $a = a$. Propiedad reflexiva **2.** Si $a = b$, entonces $b = a$. Propiedad simétrica **3.** Si $a = b$ and $b = c$, entonces $a = c$. Propiedad transitiva	$9 = 9$ Si $x = 10$, entonces $10 = x$. Si $y = a + b$ y $a + b = 4t$, entonces $y = 4t$.
Los **términos** son las partes que se suman en una expresión algebraica. El **coeficiente** es la parte numérica de un término que antecede a la variable. El **grado de un término**, con exponentes enteros no negativos, es la suma de los exponentes de las variables.	En la expresión $9x^2 - 2x + \frac{1}{5}$, los términos son $9x^2$, $-2x$, y $\frac{1}{5}$. **Término** $15x^4y$ **Coeficiente** 15 **Término** $17xy^5$ **Grado** $1 + 5 = 6$
Los **términos semejantes**, son los términos que tienen las mismas variables con los mismos exponentes. Los **términos no semejantes**, son los términos que no son semejantes. **Simplificar una expresión** significa reducir todos los términos semejantes.	**Términos semejantes** $2x, 7x$; $9x^2, -5x^2$ **Términos no semejante** $3x, 4y$; $10x^2, 2x^{10}$ $3x^2 + 12x - 5 + 7x^2 - 12x + 1 = 10x^2 - 4$
Una **ecuación** es un enunciado matemático de igualdad. La **solución** de una ecuación es el(los) número(s) que convierte(n) a la ecuación en un enunciado verdadero.	$x + 15 = 36$ La solución a $\frac{1}{2}x + 1 = 7$ es 12.
Una **ecuación lineal en una variable** es una ecuación que tiene la forma: $ax + b = c, a \neq 0$	$8x - 3 = 17$
Propiedad de la suma en la igualdad Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$ para cualesquier a, b y c.	Si $5x - 7 = 19$, entonces $5x - 7 + 7 = 19 + 7$.
Propiedad de la multiplicación en la igualdad Si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$ para cualesquier a, b y c.	Si $\frac{1}{3}x = 2$, entonces $3 \cdot \frac{1}{3}x = 3 \cdot 2$.

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 2.1 (Continuación)	
Para resolver ecuaciones lineales **1.** Elimina fracciones. **2.** Simplifica cada lado por separado. **3.** Despeja el término variable en un lado. **4.** Resuelve para la variable. **5.** Verifica. Consulta la página 70 para más detalles.	Resuelve la ecuación $\frac{1}{2}x + 7 = \frac{4}{3}x - 3$. $\frac{1}{2}x + 7 = \frac{4}{3}x - 3$ $6\left(\frac{1}{2}x + 7\right) = 6\left(\frac{4}{3}x - 3\right)$ $3x + 42 = 8x - 18$ $42 = 5x - 18$ $60 = 5x$ $12 = x$ Una verificación muestra que 12 es la solución.
Sección 2.2	
Una **ecuación condicional** es una ecuación que es verdadera sólo para valores específicos de la variable. Una **inconsistencia** es una ecuación que no tiene solución (el conjunto solución es $\varnothing$). Una **identidad** es una ecuación que tiene un número infinito de soluciones (el conjunto solución es $\mathbb{R}$).	$2x + 4 = 5$ La solución es $x = \frac{1}{2}$. $2x + 6 = 2x + 8$ El conjunto solución es $\varnothing$. $3x + 6 = 3(x + 2)$ El conjunto solución es $\mathbb{R}$.
Un **modelo matemático** es una aplicación de la vida real expresada matemáticamente. Una **fórmula** es una ecuación que es un modelo matemático para una situación de la vida real.	La rapidez de un automóvil, s, aumentada por 20 mph, es 60 mph. Modelo: $s + 20 = 60$. $A = l \cdot w$
Guía para la solución de problemas **1.** Entiende el problema. **2.** Traduce el problema en lenguaje matemático. **3.** Realiza los cálculos matemáticos necesarios para resolver el problema. **4.** Verifica la respuesta encontrada en el paso 3. **5.** Responde la pregunta. Consulta las páginas 78-79 para más detalles.	Marco le hizo a Jimena un préstamo personal de \$2000, con interés simple de 3% a 6 años. Al cabo de 6 años, ¿qué interés le pagará Jimena a Marco? Entiende: Este es un problema de interés simple. Traduce: $i = prt$ Realiza: $= 2000(0.03)(6)$ $= 360$ Verifica: La respuesta parece razonable. Responde: El interés simple debido es de \$360.
La fórmula de interés simple es $i = prt$.	Determina el monto del interés simple sobre un préstamo de \$1000 a 2 años, con interés simple de 6%. $i = (1000)(0.06)(2) = 120$ El interés simple es de \$120.
La **fórmula de interés compuesto** es $A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$.	Determina el monto en una cuenta de ahorros, para un depósito de \$6500 que paga 4.8% de interés compuesto semestralmente durante 10 años. $A = 6500\left(1 + \frac{0.048}{2}\right)^{2 \cdot 10}$ ≈ 10445.10 El monto en la cuenta de ahorros después de 10 años es de \$10445.10.

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 2.2 (Continuación)	
Resolver una ecuación (o fórmula) para una variable, significa despejar dicha variable.	Resuelve la ecuación $3x + 7y = 2$ para y. $7y = -3x + 2$ $y = -\frac{3}{7}x + \frac{2}{7}$
Sección 2.3	
Las frases pueden traducirse en expresiones algebraicas.	**Enunciado verbal**: 4 más que 7 veces un número **Expresión algebraica**: $7x + 4$
Los **ángulos complementarios** son dos ángulos cuya suma mide 90°. Los **ángulos suplementarios** son dos ángulos cuya suma mide 180°.	Si el ángulo $A = 62°$ y el ángulo $B = 28°$, entonces los ángulos A y B son ángulos complementarios. Si el ángulo $A = 103°$ y el ángulo $B = 77°$, entonces los ángulos A y B son ángulos suplementarios.
Sección 2.4	
Una **fórmula general para problemas de movimiento** es monto = rapidez · tiempo. La **fórmula de distancia** es distancia = razón · tiempo.	Determina el monto de gas bombeado, cuando se bombea gas durante 3 minutos a 6 galones por minuto. $A = 6 \cdot 3 = 18$ galones Determina la distancia recorrida cuando un automóvil viaja a 60 millas por hora durante 5 horas. $D = 60 \cdot 5 = 300$ millas
Un **problema de mezcla** es cualquier problema donde, dos o más cantidades, se reducen para producir una cantidad diferente, o donde una sola cantidad se separa en dos o más cantidades diferentes.	Si 4 litros de una solución al 10% se mezcla con 8 litros de una solución al 16%, determina la intensidad de la mezcla. $4(0.10) + 8(0.16) = 12(x)$ $x = 0.14$ o $x = 14\%$
Sección 2.5	
Propiedades usadas para resolver desigualdades lineales **1.** Si $a > b$ entonces $a + c > b + c$. **2.** Si $a > b$ entonces $a - c > b - c$. **3.** Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$. **4.** Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$. **5.** Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$. **6.** Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.	**1.** Si $6 > 5$, entonces $6 + 3 > 5 + 3$. **2.** Si $6 > 5$, entonces $6 - 3 > 5 - 3$. **3.** Si $7 > 3$, entonces $7 \cdot 4 > 3 \cdot 4$. **4.** Si $7 > 3$, entonces $\frac{7}{4} > \frac{3}{4}$. **5.** Si $9 > 2$, entonces $9(-3) < 2(-3)$. **6.** Si $9 > 2$, entonces $\frac{9}{-3} < \frac{2}{-3}$.
Una **desigualdad compuesta**, se forma al unir dos desigualdades con la palabra *y* u *o*. Para determinar el conjunto solución de una desigualdad que contiene la palabra *y*, toma la **intersección** de los conjuntos solución de las dos desigualdades. Para determinar el conjunto solución de una desigualdad que contiene la palabra *o*, toma la **unión** de los conjuntos solución de las dos desigualdades.	$x \le 7$ y $x > 5$ $x < -1$ o $x \ge 4$ Resuelve $x \le 7$ y $x > 5$. La intersección de $\{x \mid x \le 7\}$ y $\{x \mid x > 5\}$ es $\{x \mid 5 < x \le 7\}$ o $(5, 7]$ Resuelve $x < -1$ o $x \ge 4$. La unión de $\{x \mid x < -1\}$ o $\{x \mid x \ge 4\}$ es $\{x \mid x < -1$ o $x \ge 4\}$ o $(-\infty, -1) \cup [4, \infty)$.

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 2.6	
Para resolver ecuaciones de la forma $\|x\| = a$ Si $\|x\| = a$ y $a > 0$, entonces $x = a$ o $x = -a$.	Resuelve $\|x\| = 6$. $\|x\| = 6$ produce $x = 6$ o $x = -6$.
Para resolver ecuaciones de la forma $\|x\| < a$ Si $\|x\| < a$ y $a > 0$, entonces $-a < x < a$.	Resuelve $\|3x + 1\| < 13$. $-13 < 3x + 1 < 13$ $-\frac{14}{3} < x < 4$ $\left\{x \middle\| -\frac{14}{3} < x < 4\right\}$ o $\left(-\frac{14}{3}, 4\right)$
Para resolver desigualdades de la forma $\|x\| > a$ Si $\|x\| > a$ y $a > 0$, entonces $x < -a$ or $x > a$. Si $\|x\| > a$ y $a < 0$, el conjunto solución es $\mathbb{R}$. Si $\|x\| < a$ y $a < 0$, el conjunto solución es $\varnothing$.	Resuelve $\|2x - 3\| \geq 5$. $2x - 3 \leq -5$ o $2x - 3 \geq 5$ $2x \leq -2$ $\quad 2x \geq 8$ $x \leq -1$ $\quad x \geq 4$ $\{x \mid x \leq -1$ o $x \geq 4\}$ o $(-\infty, -1] \cup [4, \infty)$ $\|x\| > -7$, el conjunto solución es $\mathbb{R}$. $\|x\| < -7$, el conjunto solución es $\varnothing$.
Para resolver ecuaciones de la forma $\|x\| = \|y\|$ Si $\|x\| = \|y\|$, entonces $x = y$ o $x = -y$.	Resuelve $\|x\| = \|3\|$. $x = 3$ o $x = -3$.

Capítulo 2 Ejercicios de repaso

[2.1] *Indica el grado de cada término.*

1. $9a^2b^6$ **2.** $2y$ **3.** $-21xyz^5$

Simplifica cada expresión. Si una expresión no puede simplificarse, indícalo.

4. $7(z + 3) - 2(z + 4)$ **5.** $x^2 + 2xy + 6x^2 - 13$

6. $b^2 + b - 9$ **7.** $2[-(x - y) + 3x] - 5y + 10$

Resuelve cada ecuación. Si una ecuación no tiene solución, indícalo.

8. $4(a + 3) - 6 = 2(a + 1)$ **9.** $3(x + 1) - 3 = 4(x - 5)$ **10.** $3 + \frac{x}{2} = \frac{5}{6}$

11. $\frac{1}{2}(3t + 4) = \frac{1}{3}(4t + 1)$ **12.** $2\left(\frac{x}{2} - 4\right) = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)$ **13.** $3x - 7 = 9x + 8 - 6x$

14. $2(x - 6) = 5 - \{2x - [4(x - 2) - 9]\}$

[2.2] *Evalúa cada fórmula para los valores dados.*

15. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ cuando $x = 3$ y $y = -4$ **16.** $x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ cuando $a = 8, b = 10, c = -3$

17. $h = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + h_0$ cuando $a = -32, v_0 = 0, h_0 = 85, t = 1$ **18.** $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ cuando $\bar{x} = 50, \mu = 54, \sigma = 5, n = 25$

Resuelve cada ecuación para la variable indicada.

19. $D = r \cdot t$, para t **20.** $P = 2l + 2w$, para w **21.** $A = \pi r^2 h$, para h

22. $A = \frac{1}{2}bh$, para h **23.** $y = mx + b$, para m **24.** $2x - 3y = 5$, para y

25. $R_T = R_1 + R_2 + R_3$, para R_2

26. $S = \dfrac{3a + b}{2}$, para a

27. $K = 2(d + l)$, para l

[2.3] *En los ejercicios 28-32, escribe una ecuación que pueda usarse para resolver cada problema. Resuelve el problema y verifica tu respuesta.*

28. Dispositivo GPS Ana compró una tabla de surf a $630, que tenía 10% de descuento sobre el precio original. Determina el precio original.



29. Aumento de la población La población de una pequeña ciudad aumenta en 350 personas por año. Si la población actual es de 4750, ¿cuánto tardará la población en llegar a 7200?

30. Salario por comisión Celeste tiene un salario semanal de $300 más 6% de comisión por ventas. ¿Cuánto debe hacer Celeste en ventas para ganar $708 a la semana?

31. Comparativo de renta de automóviles En el aeropuerto de la Ciudad de Kansas, el costo por rentar un Ford Focus en Hertz es de $24.99 diarios con millaje ilimitado. El costo de rentar el mismo automóvil en Avis es de $19.99 diarios más $0.10 por milla que se conduce el auto. Si Catalina Paredes necesita rentar un automóvil durante 3 días, determina el número de millas que debe conducir para que el costo de la renta del automóvil sea el mismo en ambas compañías.

32. Venta En una venta por liquidación, el mobiliario se vende con 40% de descuento sobre el precio regular. Además, los artículos con etiqueta verde tienen un descuento adicional de $20. Si Alicia compró un artículo con etiqueta verde y pagó $136, determina el precio regular del artículo.

[2.4] *En los ejercicios 33–37, resuelve los problemas de movimiento y mezcla.*

33. Inversión en bonos Después de que Julián recibió un bono de 45000 en su trabajo, invirtió parte del dinero en una cuenta de mercado de dinero que produce 3.5% de interés simple y el resto en un certificado de depósito que produce 4.0% de interés simple. Si el monto total del interés que ganó Julián por el año fue de $187.15, determina el monto invertido en cada inversión.

34. Soluciones de fertilizante Agustín tiene soluciones de fertilizante líquido que son 20% y 60% nitrógeno. ¿Cuántos galones de cada una de estas soluciones debe mezclar Agustín para obtener 250 galones de una solución que sea 30% nitrógeno?

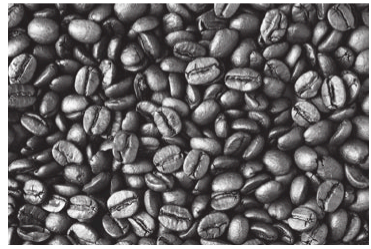
35. Dos trenes Dos trenes parten de Portland, Oregón, al mismo tiempo y viajan en direcciones opuestas. Un tren viaja a 60 millas por hora y el otro a 80 millas por hora. ¿En cuántas horas estarán apartados 910 millas el uno del otro?

36. Transbordadores espaciales El transbordador espacial 2 despega 0.5 horas después que despega el transbordador 1. Si el transbordador 2 viaja 300 millas por hora más rápido que el transbordador 1 y rebasa al transbordador 1 exactamente 5 horas después que despega el transbordador 2, determina

a) la rapidez del transbordador 1 y

b) la distancia desde la plataforma de lanzamiento cuando el transbordador 2 rebasa al transbordador 1.

37. Mezcla de café Timoteo, el propietario de una cafetería gourmet, tiene dos cafés, uno que vende a $6.00 la libra y el otro a $6.80 la libra. ¿Cuántas libras de cada tipo de café debe mezclar para hacer 40 libras de café y lo pueda vender a $6.50 la libra?



[2.3, 2.4] *Resuelve.*

38. Ventas de electrónicos El precio de un teléfono inalámbrico se redujo 20%. Si el precio en oferta es de $28.80, determina el precio original.

39. Trotar Nicole trota durante cierta distancia, y después da la vuelta y camina de regreso hacia su punto de partida. Mientras trota promedia 7.2 millas por hora, y mientras camina promedia 2.4 millas por hora. Si el tiempo total que pasa trotando y caminando fue de 4 horas, determina

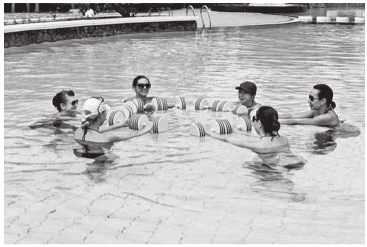
a) durante cuánto tiempo trotó, y

b) la distancia total que recorrió.

40. Medidas de ángulos Determina las medidas de tres ángulos de un triángulo, si un ángulo mide 25° más que el ángulo más pequeño y el otro ángulo mide 5° menos que el doble del ángulo más pequeño.

41. Piscina Dos mangueras llenan una piscina. La manguera con mayor diámetro, suministra 1.5 veces más agua que la manguera con el diámetro más pequeño. La manguera más grande está encendida durante 2 horas antes de encender la manguera más pequeña. Si 5 horas después de que la manguera más grande se enciende, hay 3 150 galones de

agua en la piscina, determina la velocidad de flujo de cada manguera.



42. Ángulos complementarios Un ángulo complementario tiene una medida que es 30° menos que el doble de la medida del otro ángulo. Determina las medidas de los dos ángulos.

43. Tinte azul Un sastre tiene dos soluciones de tinte azul, ambas fabricadas a partir del mismo concentrado. Una solución es 6% tinte azul y la otra es 20% tinte azul. ¿Cuántas onzas de la solución al 20% debe mezclar con 10 onzas de la solución al 6%, para resultar en una mezcla de solución de tinte azul al 12%?

44. Dos inversiones David invierte $12 000 en dos cuentas de ahorro. Una cuenta paga 10% de interés simple y la otra cuenta paga 6% de interés simple. Si en un año se gana el mismo interés en cada cuenta, ¿cuánto se invirtió a cada tasa?

45. Centros de acondicionamiento físico El centro de acondicionamiento físico, West Ridge, tiene dos planes de membresía. El primer plan es de $40 por mes más $1.00 por visita. El segundo plan es de $25 por mes más $4.00 por visita. ¿Cuántas visitas por mes tendría que hacer Jerónimo para que le resulte ventajoso seleccionar el primer plan?



46. Trenes en Alaska Dos trenes parten de Anchorage al mismo tiempo a lo largo de vías paralelas que se dirigen en sentidos opuestos. El tren más rápido viaja 10 millas por hora más rápido que el tren más lento. Determina la rapidez de cada tren, si los trenes están apartados uno del otro por 270 millas después de 3 horas.

[2.5] *Resuelve la desigualdad. Grafica la solución sobre una recta numérica.*

47. $3z + 9 \leq 15$

48. $8 - 2w > -4$

49. $2x + 1 > 6$

50. $26 \leq 4x + 5$

51. $\dfrac{4x + 3}{3} > -5$

52. $2(x - 1) > 3x + 8$

53. $-4(x - 2) \geq 6x + 8 - 10x$

54. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{4} > x - \dfrac{x}{2} + 1$

Escribe una desigualdad que pueda usarse para resolver cada problema. Resuelve la desigualdad y responde la pregunta.

55. Límite de peso Una canoa puede transportar, con seguridad, un peso total de 560 libras. Si Bernardo y Karla juntos pesan un total de 300 libras, ¿cuál es el número máximo de cajas de 40 libras que pueden transportar en su canoa?

56. Paseo en bicicleta Patricia y Jana quieren rentar una bicicleta tándem mientras visitan un parque estatal. El cargo es de $14 por la primera hora y de $7 por cada hora después de la primera hora. ¿Cuántas horas pueden pasear en la bicicleta si tienen $63 para gastar?



57. Centro de acondicionamiento físico Un centro de acondicionamiento físico garantiza que los clientes perderán un mínimo de 5 libras la primera semana y $1\frac{1}{2}$ libras cada semana adicional. Determina la cantidad máxima de tiempo necesaria para perder 27 libras.

58. Calificaciones de un examen Las calificaciones de los primeros cuatro exámenes de Leo son 94, 73, 72 y 80. Si un promedio final mayor o igual que 80 y menor que 90, es necesario para recibir una calificación final de 80 en el curso, ¿qué rango de calificaciones en el quinto y último examen resultará en que Leo reciba una B en el curso? Supón una calificación máxima de 100.

Resuelve cada desigualdad. Escribe la solución en notación de intervalo.

59. $-2 < z - 5 < 3$

60. $8 < p + 11 \leq 16$

61. $3 < 2x - 4 < 12$

62. $-12 < 6 - 3x < -2$

63. $-1 < \frac{5}{9}x + \frac{2}{3} \leq \frac{11}{9}$

64. $-8 < \frac{4 - 2x}{3} < 0$

Determina el conjunto solución de cada desigualdad compuesta.

65. $2x + 1 \leq 7$ y $7x - 3 > 11$

66. $2x - 1 > 5$ o $3x - 2 \leq 10$

67. $4x - 5 < 11$ y $-3x - 4 \geq 8$

68. $\frac{7 - 2g}{3} \leq -5$ o $\frac{3 - g}{9} > 1$

[2.5, 2.6] *Determina el conjunto solución de cada ecuación o desigualdad.*

69. $|h| = 4$

70. $|x| < 8$

71. $|x| \geq 9$

72. $|l + 5| = 13$

73. $|x - 2| \geq 5$

74. $|4 - 2x| = 5$

75. $|-2q + 9| < 7$

76. $\left|\frac{2x - 3}{5}\right| = 1$

77. $\left|\frac{x - 4}{3}\right| < 6$

78. $|4d - 1| = |6d + 9|$

79. $|2x - 3| + 4 \geq -17$

Resuelve cada desigualdad. Proporciona la solución en notación de intervalo.

80. $|2x - 3| \geq 5$

81. $3 < 2x - 5 \leq 11$

82. $-6 \leq \frac{3 - 2x}{4} < 5$

83. $2p - 5 < 7$ y $9 - 3p \leq 15$

84. $x - 3 \leq 4$ o $2x - 5 > 7$

85. $-10 < 3(x - 4) \leq 18$

Capítulo 2 Examen de práctica

1. Indica el grado del término $-3a^2bc^4$.

Simplifica.

2. $2p - 3q + 2pq - 6p(q - 3) - 4p$

3. $7q - \{2[3 - 4(q + 7)] + 5q\} - 8$

En los ejercicios 4-8, resuelve la ecuación.

4. $7(d + 2) = 3(2d - 4)$

5. $\frac{r}{12} + \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$

6. $-2(x + 3) = 4\{3[x - (3x + 7)] + 2\}$

7. $7x - 6(2x - 4) = 3 - (5x - 6)$

8. $-\frac{1}{2}(4x - 6) = \frac{1}{3}(3 - 6x) + 2$

9. Determina el valor de S_n para los valores dados.

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}, a_1 = 3, r = \frac{1}{3}, n = 3$$

10. Resuelve $c = \frac{a - 5b}{2}$ para b.

11. Resuelve $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$ para b_2.

En los ejercicios 12-16, escribe una ecuación que pueda usarse para resolver cada problema. Resuelve la ecuación y responde la pregunta planteada.

12. Descuento en palos de golf Determina el costo de un juego de palos de golf, antes de impuestos, si el costo de los palos más 7% de impuesto es de $668.75.



13. Costos de un club deportivo El costo por unirse a un club deportivo es de $240 anuales, más $2 por visita (para limpieza de toallas y gastos de artículos de tocador). Si Guillermo quiere gastar un total de $400 anuales en el club deportivo, ¿cuántas visitas puede hacer?

14. Viaje en bicicleta Jesús y Roberto parten en el mismo punto y viajan en bicicleta en sentidos opuestos. La rapidez de Jesús es de 15 millas por hora y la rapidez de Roberto es de 20 millas por hora. ¿En cuántas horas los dos hombres estarán apartados, uno del otro, por 147 millas?

15. Solución salina ¿Cuántos litros de una solución salina al 12% deben agregarse a 10 litros de una solución salina al 25%, para obtener una solución salina al 20%?

16. Dos inversiones Julissa tiene $12 000 para invertir. Ella coloca parte de su dinero en una cuenta de ahorros que paga 8% de interés simple y el saldo en una cuenta de ahorros que paga 7% de interés simple. Si el interés total de las dos cuentas, al final de 1 año, es de $910, determina el monto colocado en cada cuenta.

Resuelve cada desigualdad y grafica la solución sobre una recta numérica.

17. $3(2q + 4) < 5(q - 1) + 7$

18. $\dfrac{6 - 2x}{5} \geq -12$

Resuelve cada desigualdad y escribe la solución en notación de intervalo.

19. $x - 3 \leq 4$ y $2x + 1 > 10$

20. $7 \leq \dfrac{2u - 5}{3} < 9$

Determina el conjunto solución para las siguientes ecuaciones.

21. $|2b + 5| = 9$

22. $|2x - 3| = \left|\dfrac{1}{2}x - 10\right|$

Determina el conjunto solución para las siguientes desigualdades.

23. $|4z + 12| \leq 0$

24. $|2x - 3| + 6 > 11$

25. $\left|\dfrac{2x - 3}{8}\right| \leq \dfrac{1}{4}$

Examen de repaso acumulativo

Realiza la siguiente evaluación y verifica tus respuestas con las dadas en la parte final del libro. Revisa cualquier pregunta que hayas respondido de manera incorrecta. Después de la respuesta, se indica la sección donde se cubrió el material.

1. Si $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ y $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$, determina
a) $A \cup B$ **b.** $A \cap B$

2. Nombra cada propiedad indicada.
a) $9x + y = y + 9x$
b) $(2x)y = 2(xy)$
c) $4(x + 3) = 4x + 12$

En los ejercicios 3-5, evalúa.

3. $-4^3 + (-6)^2 \div (2^3 - 2)^2$

4. $a^2b^3 + ab^2 - 3b$ cuando $a = -1$ y $b = -2$

5. $\dfrac{8 - \sqrt[3]{27} \cdot 3 \div 9}{|-5| - [5 - (12 \div 4)]^2}$

En los ejercicios 6 y 7, simplifica.

6. $(5x^4y^3)^{-2}$ **7.** $\left(\dfrac{4m^2n^{-4}}{m^{-3}n^2}\right)^2$

8. Comparación de tamaños de estados Rhode Island tiene una área territorial de aproximadamente 1.045×10^3 millas cuadradas. Alaska tiene una área territorial de aproximadamente 5.704×10^5 millas cuadradas. ¿Cuántas veces más grande es el área territorial de Alaska que la de Rhode Island?

En los ejercicios 9–11, resuelve la ecuación.

9. $-3(y + 7) = 2(-2y - 8)$

10. $1.2(x - 3) = 2.4x - 4.98$

11. $\dfrac{2m}{3} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{4}{9}m$

12. Explica la diferencia entre una ecuación lineal condicional, una identidad y una inconsistencia. Proporciona un ejemplo de cada una.

13. Evalúa la fórmula $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ para $a = 3$, $b = -8$ y $c = -3$.

14. Resuelve la fórmula $y - y_1 = m(x - x_1)$ para x.

15. Resuelve la desigualdad $-4 < \dfrac{5x - 2}{3} < 2$ y proporciona la respuesta
a) sobre una recta numérica
b) como un conjunto solución, y
c) en notación de intervalo.

En los ejercicios 16 y 17, determina el conjunto solución.

16. $|3h - 1| = 8$

17. $|2x - 4| - 6 \geq 18$

18. Venta de béisbol Una semana después de la Serie Mundial, Target marca el precio de todo el equipo de béisbol con 40% de descuento. Si Iván compra un bate Louisville Slugger a $21 en oferta, ¿cuál era el precio original del bate?

19. Dos automóviles Dos automóviles parten de Newark, Nueva Jersey, al mismo tiempo y viajan en direcciones opuestas. El automóvil que viaja al norte se mueve 20 millas por hora más rápido que el automóvil que viaja hacia el sur. Si los dos automóviles están apartados entre sí por 300 millas después de 3 horas, determina la rapidez de cada automóvil.

20. Mezcla de nueces Mónica, propietaria de la Casa de Nuez de Mónica, tiene nueces de la India que cuestan $6.50 la libra y cacahuates que cuestan $2.50 la libra. Si ella quiere elaborar 40 libras de una mezcla de nueces de la India y cacahuates, que se venda a $4.00 la libra, ¿cuántas libras de nueces de la India y cuántas libras de cacahuates debe mezclar Mónica?

3.1 Gráficas

1. **Trazar puntos en el sistema coordenado cartesiano**
2. **Dibujo de gráficas mediante el trazado de puntos**
3. **Gráficas de ecuaciones no lineales**
4. **Interpretación de gráficas**



René Descartes

1 Trazar puntos en el sistema coordenado cartesiano

Muchas relaciones algebraicas son más fáciles de entender si se ven mediante una representación visual. Una gráfica es una imagen que muestra las relaciones entre dos o más variables en una ecuación.

El **sistema coordenado cartesiano** (o **rectangular**), llamado así en honor del matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650), consiste de dos ejes (o rectas numéricas) en un plano, dibujados perpendicularmente entre sí (**Figura 3.1**). Observa cómo los dos ejes producen cuatro **cuadrantes**, etiquetados con numerales romanos I, II, III y IV.

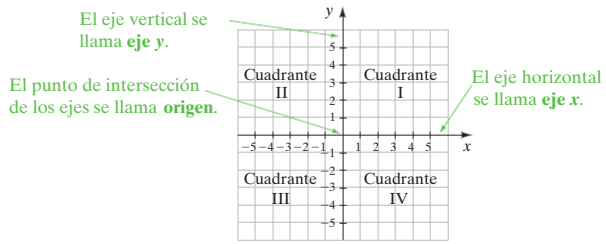
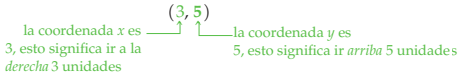


FIGURA 3.1

Para ubicar un punto en el sistema coordenado cartesiano, se usará un **par ordenado** de la forma (x, y). El primer número, x, se llama **coordenada *x***, y el segundo número, y, se llama **coordenada *y***.

Para trazar el punto $(3, 5)$, comienza en el origen.



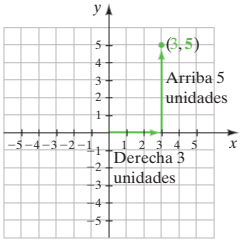


FIGURA 3.2

Los pares ordenados A en $(-2, 3)$, B en $(0, 2)$, C en $(4, -1)$ y D en $(-4, 0)$, se trazan en la **Figura 3.3**.

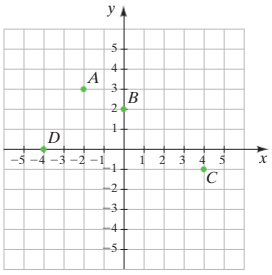


FIGURA 3.3

EJEMPLO 1 Traza los siguientes puntos sobre el mismo conjunto de ejes.

a) $A(4, 3)$ **b)** $B(3, 4)$ **c)** $C(0, 3)$
d) $D(-2, 0)$ **e)** $E(-2, -3)$ **f)** $F(2, -4)$

Solución

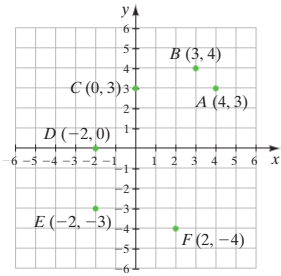


FIGURA 3.4

Ahora resuelve el ejercicio 7

Comprende el Álgebra

A partir de la **Figura 3.4** observa lo siguiente:

- (4, 3) es un punto diferente que (3, 4).
- Cuando la coordenada x es 0 (punto C), el punto está sobre el eje y.
- Cuando la coordenada y es 0 (punto D), el punto está sobre el eje x.

2 Dibujo de gráficas mediante el trazado de puntos

En el capítulo 2, se resolvieron ecuaciones que contenían una variable. Ahora se discutirán ecuaciones que contienen dos variables. Si una ecuación contiene dos variables, sus soluciones son pares ordenados de números.

EJEMPLO 2 Determina si los siguientes pares ordenados son soluciones a la ecuación $y = 2x - 3$.

a) $(1, -1)$ **b)** $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ **c)** $(4, 6)$ **d)** $(-1, -5)$

Solución El primer número se sustituye en el par ordenado para x y el segundo número para y. Si el resultado es un enunciado verdadero, el par ordenado es una solución a la ecuación.

a) $y = 2x - 3$
$-1 \stackrel{?}{=} 2(1) - 3$
$-1 \stackrel{?}{=} 2 - 3$
$-1 = -1$ Verdadero

b) $y = 2x - 3$
$-2 \stackrel{?}{=} 2\left(\frac{1}{2}\right) - 3$
$-2 \stackrel{?}{=} 1 - 3$
$-2 = -2$ Verdadero

c) $y = 2x - 3$
$6 \stackrel{?}{=} 2(4) - 3$
$6 \stackrel{?}{=} 8 - 3$
$6 = 5$ Falso

d) $y = 2x - 3$
$-5 \stackrel{?}{=} 2(-1) - 3$
$-5 \stackrel{?}{=} -2 - 3$
$-5 \stackrel{?}{=} -5$ Verdadero

Por tanto, los pares ordenados $(1, -1)$, $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$, y $(-1, -5)$ son soluciones a la ecuación $y = 2x - 3$. El par ordenado $(4, 6)$ no es una solución.

Ahora resuelve el ejercicio 17

Existe un número infinito de soluciones a la ecuación del ejemplo 2. Un método para determinar soluciones a $y = 2x - 3$, es sustituir valores para x y determina los valores

correspondientes de y. Por ejemplo, para determinar la solución cuando $x = 0$, sustituye 0 por x y resuelve para y.

$$y = 2x - 3$$
$$y = 2(0) - 3$$
$$y = 0 - 3$$
$$y = -3$$

Por tanto, otra solución a la ecuación es $(0, -3)$.

Gráfica de una ecuación

La **gráfica de una ecuación** es una ilustración del conjunto de puntos cuyos pares ordenados son soluciones a la ecuación.

La siguiente tabla muestra los cuatro pares ordenados que se determinaron como soluciones para $y = 2x - 3$.

x	y	(x, y)
-1	-5	$(-1, -5)$
0	-3	$(0, -3)$
$\frac{1}{2}$	-2	$\left(\frac{1}{2}, -2\right)$
1	-1	$(1, -1)$

Cuando se trazan estos puntos, se ve que todos se encuentran en una línea recta; por tanto, se dice que los puntos son **colineales** (observa la **Figura 3.5a**). La gráfica de la ecuación $y = 2x - 3$ es una recta que pasa a través de estos puntos (observa la **Figura 3.5b**). La recta continúa indefinidamente en ambas direcciones, como indican las flechas.

Comprende el Álgebra

La ecuación $y = 2x - 3$ tiene un número infinito de soluciones. Cada solución está representada por un punto en la recta de la **Figura 3.5b**. Asimismo, cada punto en la recta representa una solución a la ecuación $y = 2x - 3$.

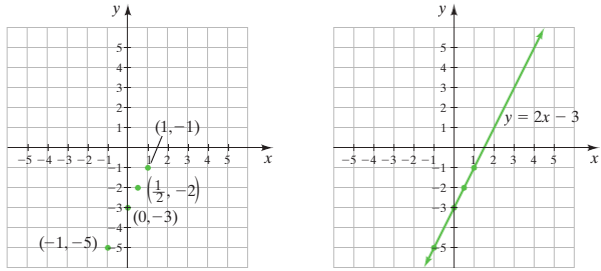


FIGURA 3.5

Puesto que la gráfica es una recta, se dice que la gráfica es **lineal** y la ecuación se llama **ecuación lineal**. La ecuación también se llama **ecuación de primer grado**, pues el mayor exponente en cualquier variable es 1.

SUGERENCIA ÚTIL

Consejo de estudio

En este capítulo, y en varios capítulos futuros, trazarás puntos y dibujarás gráficas usando el sistema coordenado cartesiano. Las siguientes sugerencias pueden mejorar la calidad de las gráficas que generes.

1. Para tu tarea, usar papel cuadriculado te ayudará a mantener una escala consistente a lo largo de tu gráfica.
2. Tus ejes y líneas se verán mucho mejor, y serán mucho más precisas, si las dibujas con una regla.

(*Continúa*)

(*Continuación*)

3. Si no usas papel cuadriculado, usa una regla para hacer una escala consistente para tus ejes. Es imposible obtener una gráfica precisa cuando los ejes están marcados con una escala dispareja.
4. Usa un lápiz en lugar de una pluma. Un error, con frecuencia, se puede corregir rápidamente con un lápiz y borrador, y no tendrás que comenzar nuevamente desde el principio.
5. Trabaja todos los problemas de tarea que te asignen.

EJEMPLO 3 Elabora la gráfica de $y = x$.

Solución Primero determina algunos pares ordenados que sean soluciones, mediante la selección de valores de x y determina los correspondientes valores de y. Para x, aquí se seleccionarán el 0, algunos valores positivos y algunos valores negativos. En general, se elegirán número cercanos a 0, de modo que los pares ordenados se ajusten sobre los ejes. La gráfica se muestra en la **Figura 3.6**.

x	y	(x, y)
-2	-2	$(-2, -2)$
-1	-1	$(-1, -1)$
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	2	(2, 2)

1. Selecciona valores para x.
2. Calcula y.
3. Pares ordenados.
4. Traza los puntos y dibuja la gráfica.

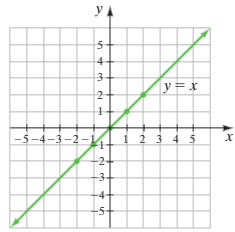


FIGURA 3.6

Ahora resuelve el ejercicio 27

EJEMPLO 4 Elabora la gráfica de $y = -\frac{2}{3}x + 2$.

Solución Cuando selecciones valores para x, selecciona algunos valores positivos, algunos valores negativos y 0. En este caso, se seleccionarán múltiplos de 3 para x, de modo que los valores de y serán valores enteros. La gráfica se muestra en la **Figura 3.7**.

Comprende el Álgebra

Cuando grafiques ecuaciones lineales, en las cuales el coeficiente de x sea una fracción, elige valores de x que sean múltiplos del denominador. Esto resultará en valores enteros para y.

x	y
-6	6
-3	4
0	2
3	0
6	-2

1. Selecciona valores para x.
2. Calcula y.
3. Traza los puntos y dibuja la gráfica.

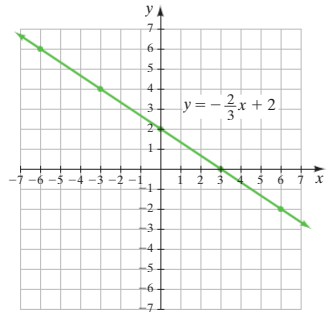


FIGURA 3.7

Ahora resuelve el ejercicio 35

Si se pide graficar una ecuación no resuelta para y, el primer paso será resolver la ecuación para y. Por ejemplo, si se pide graficar la ecuación $2x + 3y = 6$, el primer paso es resolver la ecuación para y del modo siguiente:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 6 \\ 3y &= -2x + 6 && \text{Resta } 2x \text{ de ambos lados.} \\ \frac{3y}{3} &= \frac{-2x + 6}{3} && \text{Divide ambos lados entre 3.} \\ y &= \frac{-2x}{3} + \frac{6}{3} \\ y &= -\frac{2}{3}x + 2 \end{aligned}$$

La ecuación resultante, $y = -\frac{2}{3}x + 2$, es la misma ecuación graficada en el ejemplo 4. Por tanto, la gráfica de la ecuación $2x + 3y = 6$ también se ilustra en la **Figura 3.7** de la página 149.

3 Gráficas de ecuaciones no lineales

Las ecuaciones cuyas gráficas no son líneas rectas, se llaman **ecuaciones no lineales**. Para graficar ecuaciones no lineales mediante el trazado de puntos, se seguirá el mismo procedimiento usado para graficar ecuaciones lineales. Se seleccionarán valores para x, se determinarán los correspondientes valores para y, se trazarán los puntos y se dibujará la gráfica. Dado que las gráficas no son líneas rectas, quizás necesites trazar más puntos para dibujar las gráficas. En esta sección se sugerirán valores de x para usarse en el trazado de gráficas de ecuaciones no lineales. Más adelante, en el libro, se discutirán con más detalle las ecuaciones no lineales.

EJEMPLO 5 Elabora la gráfica de $y = x^2 - 4$. Usa los siguientes valores para x: $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ y 3.

Solución Se usarán los valores dados para x y se determinarán los valores correspondientes de y. Después, se trazarán los puntos y se les conectará con una curva suave. La gráfica se muestra en la **Figura 3.8**.

Comprende el Álgebra

Cuando sustituyas valores para x, debes seguir el orden de las operaciones que se discutió en la sección 1.4.

x	y
-3	5
-2	0
-1	-3
0	-4
1	-3
2	0
3	5

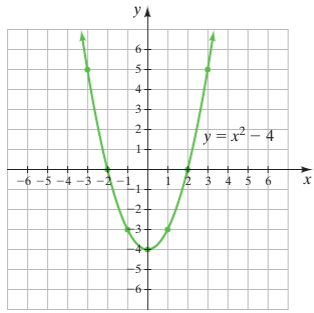


FIGURA 3.8

Ahora resuelve el ejercicio 41

EJEMPLO 6 Elabora la gráfica de $y = |x|$. Usa los siguientes valores para x: $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$ y 4.

Solución Para graficar esta ecuación de valor absoluto, se usarán los valores dados para x y se determinarán los valores correspondientes de y. Después se trazarán los puntos y se dibujará la gráfica.

Comprende el Álgebra

El valor absoluto de un número x, escrito $|x|$, es la distancia a la que x está de 0 en la recta numérica.

Observa que esta gráfica tiene forma de V, como se muestra en la **Figura 3.9**.

x	y
-4	4
-3	3
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4

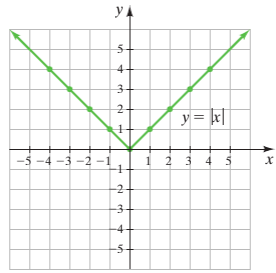


FIGURA 3.9

Ahora resuelve el ejercicio 45

EJEMPLO 7 Elabora la gráfica de $y = \frac{1}{x}$. Usa los siguientes valores para x: $-3, -2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2$ y 3.

Solución Observa que los valores dados para x no incluyen 0. Si $x = 0$, entonces $y = \frac{1}{0}$, lo que es indefinido. Por tanto, no habrá parte de la gráfica en $x = 0$. Observa también que, cuando $x = \frac{1}{2}$, se obtiene $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \div \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{2}{1} = 2$. Esta gráfica tiene dos ramas, una hacia la izquierda del eje y y una hacia la derecha del eje y, como se muestra en la **Figura 3.10**.

x	y
-3	$-\frac{1}{3}$
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	-2
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$

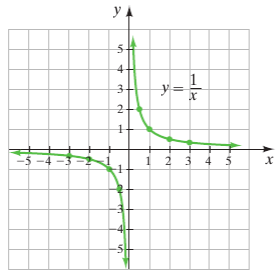


FIGURA 3.10

Ahora resuelve el ejercicio 47

En la gráfica para el ejemplo 7, observa que, para valores de x a la extrema derecha de 0, o a la extrema izquierda de 0, la gráfica se aproxima al eje x, mas no lo toca. Por ejemplo, cuando $x = 1\,000$, $y = 0.001$, y cuando $x = -1\,000$, $y = -0.001$.

CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

Cuando grafiques ecuaciones no lineales, asegúrate de trazar suficientes puntos para obtener una verdadera imagen de la gráfica. Por ejemplo, cuando grafican $y = \frac{1}{x}$, muchos estudiantes consideran solamente valores enteros de x. A continuación se presenta una tabla de valores para la ecuación y dos gráficas que contienen los puntos indicados en la tabla.

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

CORRECTO

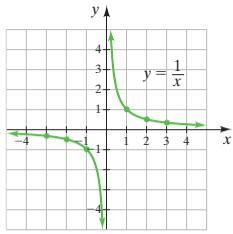


FIGURA 3.11

INCORRECTO

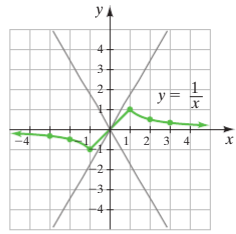


FIGURA 3.12

Si seleccionas y trazas valores fraccionarios de x cercanos a 0, como se hizo en el ejemplo 7, obtienes la gráfica de la **Figura 3.11**. La gráfica de la **Figura 3.12** no puede ser correcta, porque la ecuación no está definida cuando $x = 0$ y, por tanto, la gráfica no puede cruzar el eje y. Siempre que traces una gráfica que contenga una variable en el denominador, selecciona valores para la variable que estén muy cerca del valor que hace al denominador 0 y observa lo que ocurre. Por ejemplo, cuando grafiques $y = \frac{1}{x - 3}$ debes usar valores de x cercanos a 3, como 2.9 y 3.1, o 2.99 y 3.01, y ver qué valores obtienes para y.

Además, cuando grafiques ecuaciones no lineales, es buena idea considerar valores tanto positivos como negativos. Por ejemplo, si solamente usas valores positivos de x cuando graficas $y = |x|$, la gráfica parecería ser una línea recta que pasa a través del origen, en lugar de la gráfica con forma de V que se muestra en la **Figura 3.9** de la página 151.

USA TU CALCULADORA GRAFICADORA

A lo largo de este libro, se presentarán algunos de los usos básicos de la calculadora graficadora. En el manual de tu calculadora, encontrarás disponible información más detallada. Una **ventana** es la pantalla en la cual se despliega una gráfica. En este libro, todas las ventanas y secuencias de teclas serán de la calculadora graficadora TI-84 Plus. La **Figura 3.13** muestra la ventana estándar, y la **Figura 3.14** muestra la configuración de la ventana estándar de la **TI-84** Plus. A lo largo de este libro, a menos que indiquemos lo contrario, las gráficas se mostrarán usando la ventana estándar.

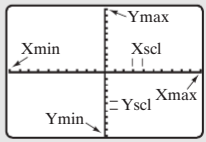


FIGURA 3.13

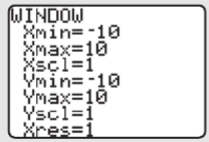


FIGURA 3.14

Para graficar la ecuación $y = -2x + 3$, presiona:

[Y =] [(−)] [2] [X,T,θ,n] [+] [3] [GRAPH]

Entonces la gráfica de la ecuación aparece en la ventana como se muestra en la **Figura 3.15**.

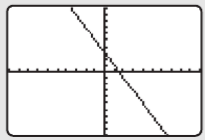


FIGURA 3.15

4 Interpretación de gráficas

Muchos tipos diferentes de gráficas se ven diariamente en periódicos, revistas, en internet, etcétera. A lo largo de este libro, se presentan diversas gráficas. Dado que poder dibujar e interpretar gráficas es muy importante, esto se estudiará aún más en la sección 3.2. En el ejemplo 8 debes entender e interpretar gráficas para responder la pregunta.

EJEMPLO 8 Cuando Jorge fue a ver a su madre en Cincinnati, abordó un avión. El avión estuvo parado en la pista durante 20 minutos y después despegó. El avión voló aproximadamente a 600 millas por hora, durante más o menos 2 horas. Después redujo su rapidez a cerca de 300 millas por hora e hizo círculos alrededor del aeropuerto de Cincinnati durante aproximadamente 15 minutos, antes de prepararse para aterrizar. Después de aterrizar, el avión se desplazó hacia la puerta y se detuvo. ¿Cuál gráfica, la de la **Figura 3.16**, **3.17**, **3.18** o **3.19**, ilustra mejor esta situación?



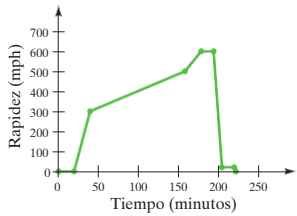


FIGURA 3.16

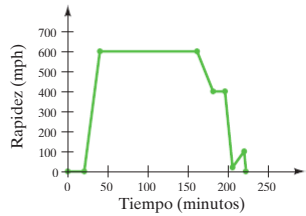


FIGURA 3.17

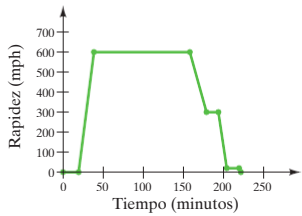


FIGURA 3.18

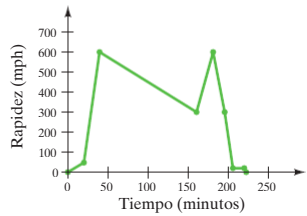


FIGURA 3.19

Solución La gráfica que muestra la situación descrita, es la de la **Figura 3.18**, reproducida con anotaciones en la **Figura 3.20**. La gráfica muestra rapidez contra tiempo, con tiempo en el eje horizontal.

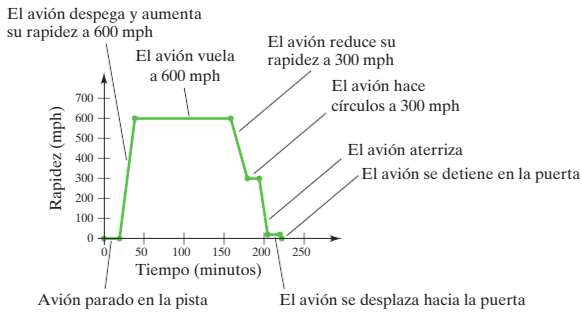


FIGURA 3.20

Ahora resuelve el ejercicio 69

3.1 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

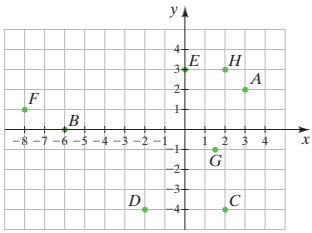
coordenada x colineales gráfica coordenada y solución ordenados

1. Si una ecuación contiene dos variables, sus soluciones son pares _____ de números.
2. La _____ de una ecuación, es una ilustración del conjunto de puntos cuyos pares ordenados son soluciones a la ecuación.
3. Tres o más puntos que se encuentran sobre la misma línea recta, se dice que son _____.
4. La primera coordenada en un par ordenado es la _____, y la segunda coordenada es la coordenada y.

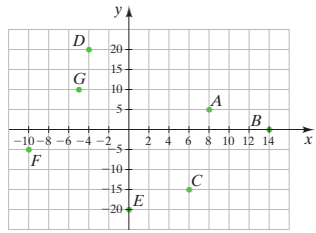
Practica tus habilidades

Menciona los pares ordenados que correspondan a los puntos indicados.

5.



6.



7. Grafica los siguientes puntos en los mismos ejes.

   $A(4, 2)$ $B(-6, 2)$ $C(0, -1)$ $D(-2, 0)$

8. Grafica los siguientes puntos en los mismos ejes.

   $A(-4, -2)$ $B(3, 2)$ $C(2, -3)$ $D(-3, 3)$

Determina el cuadrante en el cual se ubica cada punto.

9. $(5, 7)$ **10.** $(-3, 4)$ **11.** $(4, -3)$ **12.** $(36, 43)$

13. $(-12, 18)$ **14.** $(-31, -8)$ **15.** $(-11, -19)$ **16.** $(8, -52)$

Determina si el par ordenado dado es una solución a la ecuación dada.

17. $(2, -1); y = 2x - 5$ **18.** $(5, -1); y = -3x + 14$ **19.** $(0, 4); 3x - 4y = 12$ **20.** $(1, 3); 2x + 3y = 6$

21. $(-4, 0); y = |x| + 4$ **22.** $(-3, 6); y = |x + 3|$ **23.** $(2, 3); y = -2x^2 + 3x + 5$

24. $(1, -5); y = x^2 + x - 7$ **25.** $\left(0, \frac{1}{3}\right); y = \frac{1}{x + 3}$ **26.** $(8, 5); y = \frac{5}{x - 7}$

Elabora la gráfica de cada ecuación.

27. $y = x - 2$ **28.** $y = x + 2$ **29.** $y = 2x + 4$ **30.** $y = 2x - 1$

31. $y = -3x - 5$ **32.** $y = -2x + 2$ **33.** $y = \frac{1}{2}x$ **34.** $y = -\frac{1}{3}x$

35. $y = \frac{1}{2}x - 1$ **36.** $y = -\frac{1}{2}x - 3$ **37.** $y = -\frac{1}{3}x + 2$ **38.** $y = \frac{2}{3}x + 2$

Para los ejercicios 39-42, elabora la gráfica de cada ecuación. Usa los siguientes valores para x: $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ y 3.

39. $y = x^2$ **40.** $y = x^2 - 1$ **41.** $y = -x^2$ **42.** $y = -x^2 + 4$

Para los ejercicios 43-46, elabora la gráfica de cada ecuación. Usa los siguientes valores para x: $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ y 4.

43. $y = |x| + 1$ **44.** $y = |x| - 4$ **45.** $y = -|x|$ **46.** $y = 4 - |x|$

Para los ejercicios 47-50, elabora la gráfica de cada ecuación. Usa los siguientes valores para x: $-3, -2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2$ *y* 3.

47. $y = \frac{1}{x} + 1$ **48.** $y = \frac{1}{x} - 1$ **49.** $y = -\frac{1}{x}$ **50.** $y = -\frac{1}{x} + 1$

Para los ejercicios 51-54, elabora la gráfica de cada ecuación. Usa los siguientes valores para x: $-2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$ *y* 2.

51. $y = x^3$ **52.** $y = -x^3$ **53.** $y = x^3 + 1$ **54.** $y = -x^3 + 1$

Para los ejercicios 55-58, elabora la gráfica de cada ecuación. Usa los siguientes valores para x: $0, 1, 4$ *y* 9.

55. $y = \sqrt{x}$ **56.** $y = -\sqrt{x}$ **57.** $y = -\sqrt{x} + 1$ **58.** $y = \sqrt{x} - 1$

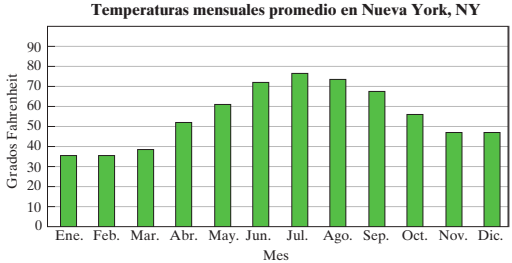
59. a) Traza los puntos $A(2, 7)$, $B(2, 3)$ y $C(6, 3)$, y después dibuja $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, y $\overline{BC}$. (AB representa el segmento de recta, desde A hasta B.)

b) Determina el área de la figura.

60. a) Traza los puntos $A(-4, 5)$, $B(2, 5)$, $C(2, -3)$, y $D(-4, -3)$, y después dibuja $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$.

b) Determina el área de la figura.

61. Temperatura de Nueva York La siguiente gráfica muestra la temperatura promedio (media), en grados Fahrenheit, para cada mes en Nueva York, Nueva York.



Fuente: www.wunderground.com

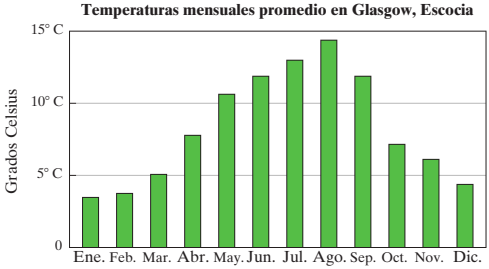
a) Estima la temperatura promedio en agosto.

b) Estima la temperatura promedio en diciembre.

c) ¿En cuáles meses la temperatura promedio fue menor que 50°F?

d) ¿La gráfica parece ser lineal?

62. Temperatura de Escocia La siguiente gráfica muestra la temperatura promedio (media), en grados Celsius, para cada mes en Glasgow, Escocia.



Fuente: www.wunderground.com

a) Estima la temperatura promedio en febrero.

b) Estima la temperatura promedio en julio.

c) ¿En cuáles meses la temperatura promedio fue mayor que 10°C?

d) ¿Esta gráfica parece ser lineal?

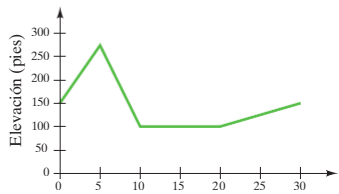
Relaciona los ejercicios 63-66 con la correspondiente gráfica de elevación sobre el nivel del mar contra tiempo, etiquetadas a-d, abajo y en la página siguiente.

63. Nancy comenzó a caminar para subir una colina inclinada durante 5 minutos. Durante los siguientes 5 minutos, bajó por una colina inclinada, hasta una elevación menor que la de su punto de partida. Luego, durante los siguientes 10 minutos, caminó a nivel del suelo. Y, finalmente, durante los siguientes 10 minutos, subió por una ligera colina, momento en el cual alcanzó su elevación de partida.

64. Jaime comenzó a caminar para subir una colina durante 5 minutos. Durante los siguientes 10 minutos, caminó para bajar una colina, hasta una elevación igual a su elevación de partida. Luego, durante los posteriores 10 minutos, caminó a nivel del suelo. Durante los siguientes 5 minutos, caminó colina abajo.

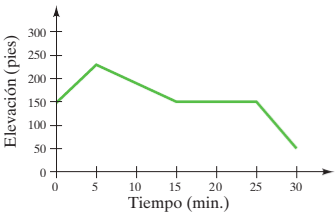
65. Mercedes caminó durante 5 minutos a nivel del suelo. Después, durante 5 minutos, escaló una ligera colina. Después, caminó a nivel del suelo durante 5 minutos. Luego, durante los siguientes 5 minutos, escaló por una colina inclinada. Durante los siguientes 10 minutos, descendió de manera uniforme hasta que llegó a la altura desde la cual comenzó.

66. Armando caminó a nivel del suelo durante 5 minutos. Luego bajó una colina inclinada durante 10 minutos. Durante los siguientes 5 minutos, caminó a nivel del suelo. Luego, durante los siguientes 5 minutos, caminó de regreso a su altura de partida. Durante los siguientes 5 minutos, caminó a nivel del suelo.

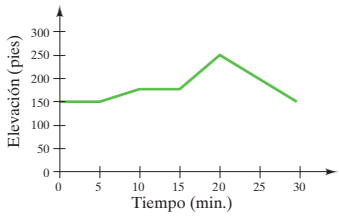


(a)

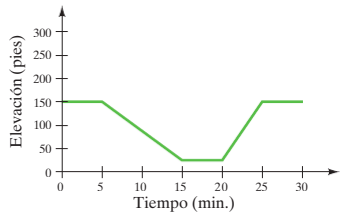
(*Continúan figuras b–d*)



(b)



(c)



(d)

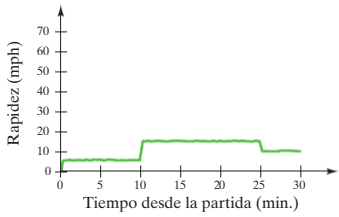
Relaciona los ejercicios 67-70 con la correspondiente gráfica de rapidez contra tiempo, etiquetada a-d, que se presentan abajo.

67. Para ir a trabajar, Jimena conduce por un camino vecinal durante 10 minutos, después conduce por una autopista durante 12 minutos, luego conduce en un tráfico intenso con muchas paradas durante 8 minutos.

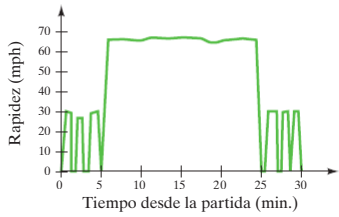
68. Para ir a trabajar, David conduce en un tráfico con muchas paradas durante 5 minutos, luego conduce por la vía rápida durante 20 minutos, después conduce en tráfico con muchas paradas durante 5 minutos.

69. Para ir a trabajar, Alberto camina durante 3 minutos, espera el tren durante 5 minutos, viaja en el tren durante 15 minutos, luego camina 7 minutos.

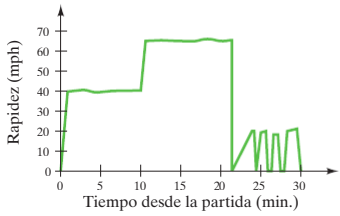
70. Para ir a trabajar, Karime viaja en su bicicleta cuesta arriba durante 10 minutos, después viaja cuesta abajo durante 15 minutos, luego viaja a nivel de calle durante 5 minutos.



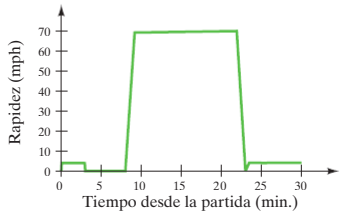
(a)



(c)



(b)



(d)

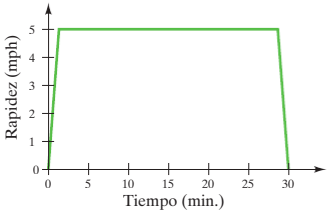
Relaciona los ejercicios 71-74 con la correspondiente gráfica de rapidez contra tiempo, etiquetadas a-d abajo y en la página siguiente.

71. Joana caminó durante 5 minutos para calentar, trotó durante 20 minutos y después caminó 5 minutos para enfriarse.

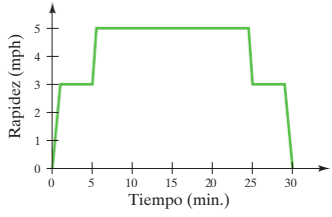
72. Ana viajó en su bicicleta, tranquilamente, con una rapidez constante durante 30 minutos.

73. Joaquín dio una caminata de 30 minutos por su vecindario. Se detuvo muy brevemente en 7 ocasiones para recoger basura.

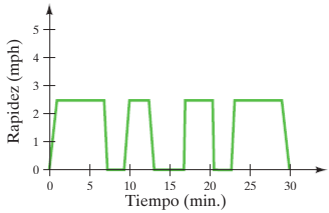
74. Daniel caminó por su vecindario y se detuvo 3 veces para platicar con sus vecinos. Estuvo fuera de su casa un total de 30 minutos.



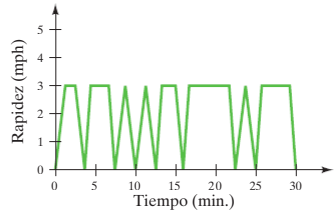
(a)



(b)



(c)



(d)

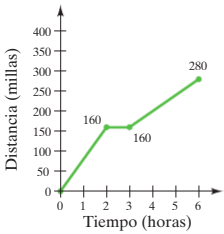
Relaciona los ejercicios 75-78 con la gráfica correspondiente de distancia recorrida contra tiempo, etiquetados a-d abajo. Recuerda, del capítulo 2, que distancia = razón × tiempo. En las gráficas se indican distancias seleccionadas.

75. El tren A viajó con una rapidez de 40 mph durante 1 hora, luego 80 mph durante 2 horas y después 60 mph durante 3 horas.

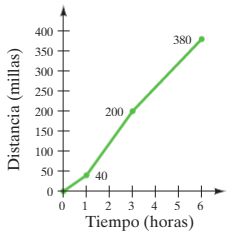
76. El tren C viajó con una rapidez de 80 mph durante 2 horas, luego permaneció en una estación durante 1 hora y después viajó a 40 mph durante 3 horas.

77. El tren B viajó con una rapidez de 20 mph durante 2 horas, luego 60 mph durante 3 horas y después 80 mph durante 1 hora.

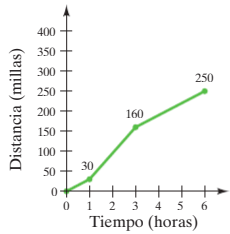
78. El tren D viajó a 30 mph durante 1 hora, luego 65 mph durante 2 horas y después 30 mph durante 3 horas.



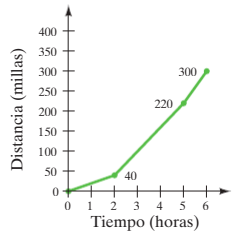
(a)



(b)



(c)



(d)

Usa una calculadora graficadora para graficar cada función. Asegúrate de seleccionar valores para la ventana que mostrarán la curvatura de la gráfica. Después, si tu calculadora puede mostrar tablas, presenta una tabla de valores, en la cual los valores x se extienden por unidades, del 0 al 6.

79. $y = 2x - 3$

80. $y = \frac{1}{3}x + 2$

81. $y = x^2 - 2x - 8$

82. $y = -x^2 + 16$

83. $y = x^3 - 2x + 4$

84. $y = 2x^3 - 6x^2 - 1$

85. $y = \frac{1}{x + 1}$

86. $y = \frac{1}{x^2}$

87. $y = |x - 2|$

88. $y = |x + 2|$

Problemas de desafío

En la sección 3.4 se estudiarán muchos de los conceptos introducidos en los ejercicios 89-98.

89. ¿El punto representado por el par ordenado $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{12}\right)$, está sobre la gráfica de la ecuación $y = \frac{x^2}{x + 1}$? Explica.

90. ¿El punto representado por el par ordenado $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}\right)$, está sobre la gráfica de la ecuación $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$? Explica.

91. Elabora la gráfica de $y = x + 1$, $y = x + 3$ y $y = x - 1$, sobre los mismos ejes.

a) ¿Qué observas acerca de las gráficas de las ecuaciones y los valores donde las gráficas intersecan el eje y?

b) ¿Todas las gráficas parecen tener la misma inclinación (o pendiente)?

92. Elabora la gráfica de $y = \frac{1}{2}x$, $y = \frac{1}{2}x + 3$ y $y = \frac{1}{2}x - 4$, en los mismos ejes.

a) ¿Qué observas acerca de las gráficas de las ecuaciones y los valores donde las gráficas intersecan el eje y?

b) ¿Todas estas gráficas parecen tener la misma inclinación (o pendiente)?

93. Elabora la gráfica de $y = 2x$. Determina la *tasa de cambio* de y, con respecto a x. Es decir: ¿en cuántas unidades cambia y comparada con cada cambio de unidad en x?

94. Elabora la gráfica de $y = 4x$. Determina la tasa de cambio de y, con respecto a x.

95. Elabora la gráfica de $y = 3x + 2$. Determina la tasa de cambio de y, con respecto a x.

96. Elabora la gráfica de $y = \frac{1}{2}x$. Determina la tasa de cambio de y, con respecto a x.

97. El par ordenado $(3, -7)$, representa un punto sobre la gráfica de una ecuación lineal. Si y aumenta 4 unidades por cada aumento de unidad en x sobre la gráfica, determina otras dos soluciones a la ecuación.

98. El par ordenado $(1, -4)$ representa un punto sobre la gráfica de una ecuación lineal. Si y aumenta 3 unidades por cada aumento de unidad en x sobre la gráfica, determina otras dos soluciones a la ecuación.

Actividad grupal

Discute y trabaja, en equipo, los ejercicios 99-100.

99. **a)** Miembro 1 del equipo: traza los puntos $(-2, 4)$ y $(6, 8)$. Determina el *punto medio* del segmento de la línea que conecta estos puntos.

Miembro 2 del equipo: sigue las instrucciones anteriores para los puntos $(-3, -2)$ y $(5, 6)$.

Miembro 3 del equipo: sigue las instrucciones anteriores para los puntos $(4, 1)$ y $(-2, 4)$.

b) Como equipo, determinen una fórmula para el punto medio del segmento de la línea que conecta los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). (*Nota:* en el capítulo 10, se estudiará aún más la fórmula del punto medio.)

100. Tres puntos sobre un paralelogramo son $A(3,5)$, $B(8, 5)$ y $C(-1, -3)$.

a) De manera individual, determina un cuarto punto, D, que complete el paralelogramo.

b) De manera individual, calcula el área de tu paralelogramo.

c) Comparen sus respuestas. ¿Todos obtuvieron las mismas respuestas? Si no, ¿por qué no?

d) ¿Hay más de un punto que pueda usarse para completar el paralelogramo? Si es así, proporcionen los puntos y determinen las áreas correspondientes de cada paralelogramo.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **101.** Evalúa $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ para $a = 2, b = 7$ y $c = -15$.

[2.3] **102. Renta de un camión** El negocio de renta de camiones de Bruno, cobra una tarifa diaria de \$60 más 10¢ la milla. El negocio de renta de automóviles de Sandra, cobra una tarifa diaria de \$50 más 24¢ la milla, por el mismo camión. ¿Qué distancia tendrías que conducir en 1 día para que el costo de rentar con Bruno sea igual que el costo de rentar con Sandra?

[2.5] **103.** Resuelve la desigualdad $-1 \leq \frac{4 - 3x}{2} < 5$. Escribe la solución en notación constructiva de conjuntos.

[2.6] **104.** Determina el conjunto solución de la desigualdad $|3x + 2| > 7$.

3.2 Funciones

1. **Comprensión de las relaciones**
2. **Reconocimiento de funciones**
3. **Uso de la prueba de la recta vertical**
4. **Comprensión de la notación de funciones**
5. **Aplicaciones de las funciones en la vida diaria**

1 Comprensión de las relaciones

Con frecuencia se encuentra que una cantidad está relacionada con una segunda cantidad. Por ejemplo, el monto que gastas en naranjas se relaciona con el número de naranjas que compras.

Supón que las naranjas cuestan 30 centavos la pieza. Entonces una naranja cuesta 30 centavos, dos naranjas cuestan 60 centavos, tres naranjas cuestan 90 centavos, etcétera. Los pares ordenados que representan esta situación son (1,30), (2, 60), (3, 90), etcétera. Una ecuación que representa esta situación es:

$$C = 30n$$

El costo, C, de las naranjas *depende* del número de naranjas compradas. Por tanto, C es la variable *dependiente*.

El número de naranjas, n, es la variable independiente.

Ahora considera la ecuación $y = 2x + 3$. Algunos pares ordenados que satisfacen esta ecuación son $(-2, -1)$, $(-1, 1)$, $(0, 3)$, $(1, 5)$, $(2, 7)$, etcétera.

$$y = 2x + 3$$

El valor de y *depende* del valor de x. Por tanto, y es la variable *dependiente*.

x es la variable independiente.

Variables dependientes e independientes

Para una ecuación con variables x y y, si el valor de y depende del valor de x, entonces y es la **variable dependiente** y x es la **variable independiente**.

Dado que cantidades relacionadas se pueden representar como pares ordenados, el concepto de *relación* se puede definir del modo siguiente.

Relación, dominio, rango

Una **relación** es cualquier conjunto de pares ordenados de la forma (x, y). El conjunto de coordenadas x se llama **dominio** de la relación. El conjunto de coordenadas y se llama **rango** de la relación.

Puesto que la ecuación $y = 2x + 3$ puede representarse como un conjunto de pares ordenados, es una relación.

2 Reconocimiento de funciones

Ahora se estudiarán las funciones, uno de los conceptos más importantes en matemáticas.

Función

Una **función** es una relación, en la cual cada elemento en el dominio corresponde a *exactamente un* elemento en el rango.

Considera las naranjas que cuestan 30 centavos la pieza que recién se discutió. El número de naranjas y el costo de las naranjas se puede ilustrar usando la **Figura 3.21**.

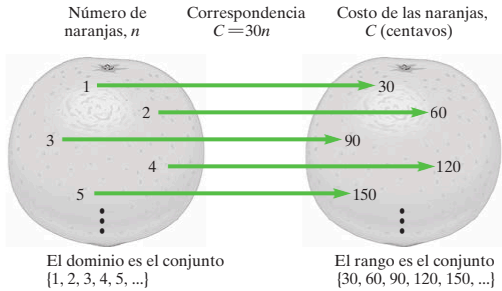
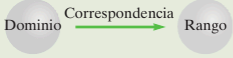


FIGURA 3.21

Comprende el Álgebra

En una relación, o función, el conjunto de valores para la variable independiente se llama *dominio*. El conjunto de valores para la variable dependiente se llama *rango*.



Observa que cada número en el conjunto de números de naranjas, n, corresponde a (o se empareja con) exactamente un número en el conjunto de costo de las naranjas, C. Por tanto, esta correspondencia es una función.

EJEMPLO 1 Determina si cada correspondencia es una función.

a) $1 \to 2$, $2 \to 5$, $3 \to 8$

b) Camaro → Chevrolet, Corvette → Chevrolet, Mustang → Ford, Thunderbird → Ford

c) Microsoft → Gates, Microsoft → Allen, Apple → Jobs, Apple → Wozniak



Ford Mustang

Solución

a) Para que una correspondencia sea una función, cada elemento en el dominio debe corresponder con exactamente un elemento en el rango. Aquí el dominio es {1, 2, 3} y el rango es {2, 5, 8}. Dado que cada elemento en el dominio corresponde a exactamente un elemento en el rango, esta regla de correspondencia es una función.

b) El dominio es {Camaro, Corvette, Mustang, Thunderbird} y el rango es {Chevrolet, Ford}. Aun cuando el dominio tiene cuatro elementos y el rango tiene dos elementos, cada elemento en el dominio corresponde con exactamente un elemento en el rango. Por tanto, esta regla de correspondencia es una función.

c) El dominio es {Microsoft, Apple} y el rango es {Gates, Allen, Jobs, Wozniak}. Observa que Microsoft corresponde a dos elementos en el rango, Gates y Allen. Más aún: Apple también corresponde a dos elementos en el rango, Jobs y Wozniak. En consecuencia, cada elemento en el dominio *no* corresponde con exactamente un elemento en el rango. Por tanto, la correspondencia es una relación *mas no* es una función.

Ahora resuelve el ejercicio 17

EJEMPLO 2 Proporciona el dominio y el rango, después determina si la relación es una función.

a) $\{(1, 4), (2, 3), (3, 5), (-1, 3), (0, 6)\}$ **b)** $\{(-1, 3), (4, 2), (3, 1), (2, 6), (3, 5)\}$

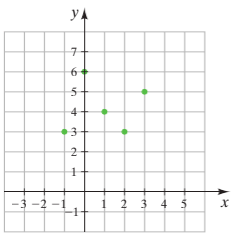
Solución

a) El dominio es $\{1, 2, 3, -1, 0\}$ y el rango es $\{4, 3, 5, 6\}$. Observa que, cuando se indica el rango, solamente se incluye el número 3 una vez, aun cuando aparezca tanto en (2, 3) como en (−1, 3). Cada número en el dominio corresponde con exactamente un número en el rango. Por ejemplo, el 1 en el dominio corresponde con solamente el 4 en el rango, etcétera. Dado que ningún valor x corresponde a más de un valor y, esta relación *es una función*.

b) El dominio es $\{-1, 4, 3, 2\}$ y el rango es $\{3, 2, 1, 6, 5\}$. Dado que los pares ordenados (3, 1) y (3, 5) tienen *la misma primera coordenada* y una segunda coordenada diferente, cada valor en el dominio no corresponde con exactamente un valor en el rango. En consecuencia, esta relación *no es una función*.

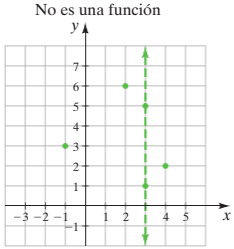
Ahora resuelve el ejercicio 23

Función



(a) Primer conjunto de pares ordenados

No es una función



(b) Segundo conjunto de pares ordenados

FIGURA 3.22

El ejemplo 2 conduce a una definición alterna de función.

Función

Una **función** es el conjunto de pares ordenados en que ninguna *primera* coordenada se repite.

Recuerda la ecuación $y = 2x + 3$, introducida en la página 159. Algunos pares ordenados que satisfacen esta ecuación son $(-2, -1)$, $(-1, 1)$, $(0, 3)$, $(1, 5)$ y $(2, 7)$. Observa que cada valor de x recibe un valor único de y. Por tanto, la ecuación $y = 2x + 3$ no sólo es una relación, también es una función.

3 Uso de la prueba de la recta vertical

Gráfica de una función o relación

La **gráfica de una función o relación** es la gráfica de su conjunto de pares ordenados.

Los dos conjuntos de pares ordenados, en el ejemplo 2 **a)** y **b)**, se grafican en las **Figuras 3.22a** y **3.22b**, respectivamente. Observa que, en la función de la **Figura 3.22a**, no es posible dibujar una recta vertical que interseque dos puntos. En la **Figura 3.22b** *se puede* dibujar una recta vertical a través de los puntos (3, 1) y (3, 5). Esto muestra que cada valor x no corresponde a exactamente un valor y, y la gráfica no representa una función.

Este método, para determinar si una gráfica representa una función, se llama **prueba de la recta vertical**.

Prueba de la recta vertical

Si una recta vertical puede dibujarse de modo que interseque una gráfica en más de un punto, entonces la gráfica no representa una función. Si una recta vertical no puede dibujarse de modo que interseque una gráfica en más de un punto, entonces la gráfica representa una función.

La prueba de la recta vertical muestra que la **Figura 3.23b** representa una función y las **Figuras 3.23a** y **3.23c** no representan funciones.

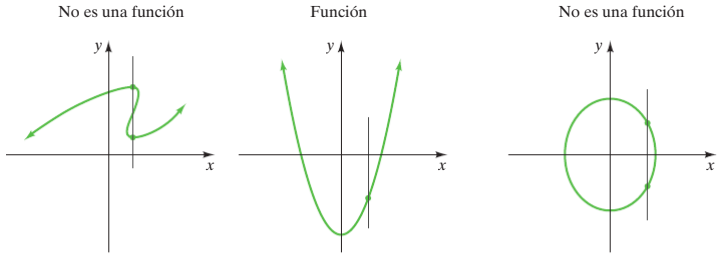


FIGURA 3.23

EJEMPLO 3 Usa la prueba de la recta vertical, para determinar si las siguientes gráficas representan funciones. Determina también el dominio y el rango de cada función o relación.

a)

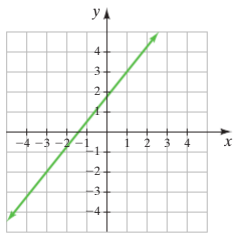


FIGURA 3.24

b)

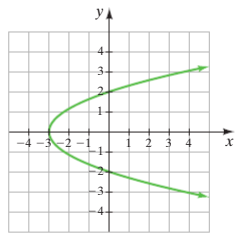


FIGURA 3.25

Solución

a) En la **Figura 3.24** no se puede dibujar una recta vertical que interseque la gráfica en más de un punto. Por ende, esta es la gráfica de una función. Dado que la recta se extiende indefinidamente en ambas direcciones, todo valor de x estará incluido en el dominio. El dominio es el conjunto de los números reales.

Dominio: $\mathbb{R}$ o usando notación de intervalo: $(-\infty, \infty)$

Puesto que todos los valores de y se incluyen en la gráfica, el rango también es el conjunto de los números reales.

Rango: $\mathbb{R}$ o usando notación de intervalo: $(-\infty, \infty)$

b) Dado que en la **Figura 3.25** se puede dibujar una recta vertical que interseque la gráfica en más de un punto, esta *no* es la gráfica de una función. El dominio de esta relación es el conjunto de valores mayores que o iguales que -3.

Dominio: $\{x \mid x \geq -3\}$ o usando notación de intervalo: $[-3, \infty)$

El rango es el conjunto de valores y, que puede ser cualquier número real.

Rango: $\mathbb{R}$ o usando notación de intervalo: $(-\infty, \infty)$

Ahora resuelve el ejercicio 33

EJEMPLO 4 Considera la función graficada en la **Figura 3.26**.

a) Determina el dominio de la función.

b) Determina el rango de la función.

c) Determina el valor y en el rango que corresponde a $x = 4$ en el dominio.

d) Determina el(los) valor(es) x en el dominio que corresponde a $y = -2$ en el rango.

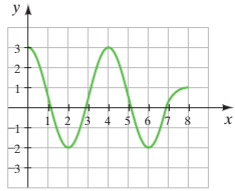


FIGURA 3.26

Solución

a) El dominio es el conjunto de valores x, de 0 a 8. Por tanto, el dominio es:

$$\{x \mid 0 \le x \le 8\} \quad \text{o} \quad [0, 8].$$

b) El rango es el conjunto de valores y, de -2 a 3. Por tanto, el rango es

$$\{y \mid -2 \le y \le 3\} \quad \text{o} \quad [-2, 3].$$

c) A partir de la **Figura 3.26**, se ve que el punto (4, 3) está sobre la gráfica de la función. Por tanto, el valor y que corresponde a $x = 4$, es $y = 3$.

d) A partir de la **Figura 3.26**, se ve que los puntos $(2, -2)$ y $(6, -2)$ están ambos sobre la gráfica de la función. Por tanto, los valores x que corresponden a $y = -2$, son $x = 2$ y $x = 6$.

Ahora resuelve el ejercicio 35

EJEMPLO 5 La **Figura 3.27** muestra una gráfica de rapidez contra tiempo de un hombre que sale a caminar y correr. Escribe una historia, acerca de la salida del hombre, que corresponda con esta función.

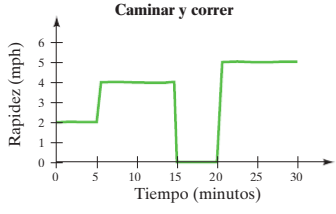


FIGURA 3.27

Solución Entiende El eje horizontal es tiempo y el eje vertical es rapidez. Cuando la gráfica es horizontal, significa que la persona viaja con la rapidez constante que se indica sobre el eje vertical. Las porciones escarpadas de la gráfica que aumentan con el tiempo, indican un aumento en rapidez; mientras que las porciones escarpadas de la gráfica que disminuyen con el tiempo, indican una reducción en rapidez.

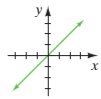
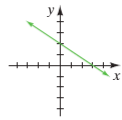
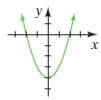
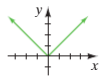
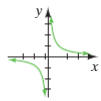
Responde He aquí una posible interpretación de la gráfica. El hombre camina durante más o menos 5 minutos, con una rapidez aproximada de 2 millas por hora. Después, el hombre acelera hasta cerca de 4 millas por hora, y camina rápido o corre aproximadamente a esta rapidez durante más o menos 10 minutos. Posteriormente, el hombre frena y se detiene, y luego descansa alrededor de 5 minutos. Finalmente, el hombre acelera hasta aproximadamente 5 millas por hora y corre, con esta rapidez, durante más o menos 10 minutos.

Ahora resuelve el ejercicio 67

4 Comprensión de la notación de funciones

En la sección 3.1, se graficaron las ecuaciones que se muestran en la **Tabla 3.1** de la siguiente página. Observa que cada una de estas gráficas pasa la prueba de la recta vertical. Por tanto, las *gráficas* representan funciones y se dice que las *ecuaciones* definen funciones. Se usará una notación específica para nombrar funciones que estén definidas por ecuaciones.

Tabla 3.1 Ejemplo

SECCIÓN 3.1 EJEMPLO	ECUACIÓN GRAFICADA	GRÁFICA	¿LA GRÁFICA REPRESENTA UNA FUNCIÓN?	DOMINIO	RANGO
3	$y = x$		sí	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
4	$y = -\frac{2}{3}x + 2$		sí	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
5	$y = x^2 - 4$		sí	$(-\infty, \infty)$	$[-4, \infty)$
6	$y = \lvert x \rvert$		sí	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
7	$y = \frac{1}{x}$		sí	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

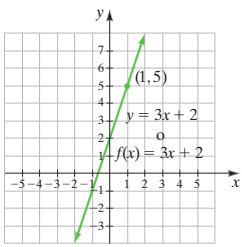


FIGURA 3.28

Comprende el Álgebra

La notación $f(x)$ significa que la ecuación define una función en la cual x es la variable independiente. Observa que $f(x)$ *no* significa f por x.

Notación de funciones

Si una ecuación que involucra x como variable independiente y y como variable dependiente define una función, se dice que ***y* es una función de *x*** y se escribe $y = f(x)$ (léase "f de x".)

Considera la ecuación $y = 3x + 2$ como se ve en la **Figura 3.28**. Puesto que esta gráfica pasa la prueba de la recta vertical, esta ecuación define una función y la ecuación se puede escribir usando notación de función como $f(x) = 3x + 2$.

$f(x) = 3x + 2$

- f es el nombre de la función
- x es la variable independiente
- sustituye el valor de x para obtener los valores correspondientes de y o $f(x)$

Por ejemplo, si $f(x) = 3x + 2$ entonces $f(1)$, léase "f de uno" se encuentra del modo siguiente:

$$f(x) = 3x + 2$$
$$f(1) = 3(1) + 2 = 5$$

En consecuencia, cuando x es 1, y es 5. El par ordenado $(1, 5)$ aparece en la gráfica de $y = 3x + 2$ en la **Figura 3.28**.

SUGERENCIA ÚTIL

Las ecuaciones lineales que no se resuelven para y, pueden escribirse usando notación de función al resolver la ecuación para y, y luego, sustituir y con $f(x)$. Por ejemplo, la ecuación $-9x + 3y = 6$ se convierte en $y = 3x + 2$ y se puede escribir $f(x) = 3x + 2$.

EJEMPLO 6 Si $f(x) = -4x^2 + 3x - 2$, determina

a) $f(2)$ **b)** $f(-1)$ **c)** $f(a)$

Solución

a) $f(x) = -4x^2 + 3x - 2$

$f(2) = -4(2)^2 + 3(2) - 2 = -4(4) + 6 - 2 = -16 + 6 - 2 = -12$

b) $f(-1) = -4(-1)^2 + 3(-1) - 2 = -4(1) - 3 - 2 = -4 - 3 - 2 = -9$

c) Para evaluar la función en a, sustituye cada x en la función con una a.

$$f(x) = -4x^2 + 3x - 2$$
$$f(a) = -4a^2 + 3a - 2$$

Ahora resuelve el ejercicio 45

Observa que, para representar el nombre de la función, se pueden usar letras distintas a f. También se pueden usar letras distintas a x para representar la variable independiente. Tales funciones se proporcionan en el ejemplo 7.

EJEMPLO 7 Determina cada valor de función indicado.

a) $g(5)$ para $g(t) = 3|t - 11|$ **b)** $h(-4)$ para $h(n) = \dfrac{5}{n - 6}$

c) $p(12)$ para $p(s) = \sqrt{2s + 1}$

Solución Sustituye el valor indicado en la función dada y evalúa.

a) $g(5) = 3|5 - 11| = 3|-6| = 3(6) = 18$

b) $h(-4) = \dfrac{5}{-4 - 6} = \dfrac{5}{-10} = -\dfrac{1}{2}$

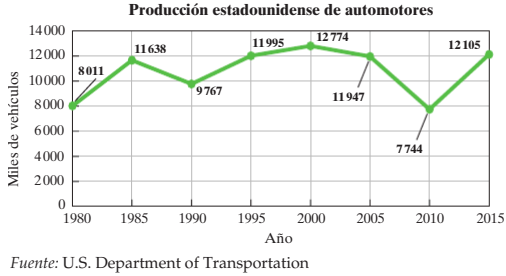
c) $p(12) = \sqrt{2(12) + 1} = \sqrt{24 + 1} = \sqrt{25} = 5$

Ahora resuelve el ejercicio 49

5 Aplicaciones de las funciones en la vida diaria

Ahora se examinarán funciones adicionales de las funciones.

EJEMPLO 8 **Producción estadounidense de vehículos** La gráfica de la **Figura 3.29**, muestra la producción estadounidense de vehículos para cada 5 años a partir de 1980.



Fuente: U.S. Department of Transportation

FIGURA 3.29



a) Explica por qué la gráfica de la **Figura 3.29** representa una función.

b) Si llamas a esta función $P(x)$, determina $P(2000)$.

c) Determina la disminución porcentual en el número de automotores producidos en Estados Unidos de 2005 a 2010.

d) Determina el aumento porcentual en el número de automotores producidos en Estados Unidos de 2010 a 2015.

Solución

a) La gráfica representa una función, pues cada año corresponde a un número específico de vehículos producidos en Estados Unidos. Observa que la gráfica pasa la prueba de la recta vertical.

b) $P(2000)$ se refiere al número de automotores producidos en Estados Unidos en el año 2000. La gráfica muestra que, en el año 2000, había 12774 miles, o 12774000, de automotores producidos en Estados Unidos. En consecuencia, $P(2000) = 12774000$.

c) Para resolver este problema, se seguirá el procedimiento de resolución de problemas.

Entiende y Traduce Se necesita determinar la disminución porcentual en el número de automotores producidos en Estados Unidos de 2005 a 2010. Se usará la fórmula

$$\text{cambio porcentual (aumento o disminución)} = \frac{\left(\begin{array}{c}\text{valor en el}\\ \text{último periodo}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{valor en el}\\ \text{periodo previo}\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c}\text{valor en el}\\ \text{periodo previo}\end{array}\right)}$$

El último periodo es 2010, y el periodo previo es 2005. Al sustituir los valores de la función en la fórmula se obtiene

Realiza $$\text{cambio porcentual} = \frac{7744 - 11947}{11947} = \frac{-4203}{11947} \approx -0.352 \approx -35.2\,\%$$

Verifica y Responde El signo negativo indica una disminución porcentual. Los cálculos parecen correctos. Hay una disminución aproximada de 35.2% en el número de automotores producidos en Estados Unidos de 2005 a 2010.

d) Se usará el mismo procedimiento que en el inciso **c)**. El periodo más reciente es 2015, y el periodo previo es 2010.

$$\text{cambio porcentual (aumento o disminución)} = \frac{\left(\begin{array}{c}\text{valor en el}\\ \text{último periodo}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{valor en el}\\ \text{periodo previo}\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c}\text{valor en el}\\ \text{periodo previo}\end{array}\right)}$$

$$\text{cambio porcentual} = \frac{12105 - 7744}{7744} = \frac{4361}{7744} \approx 0.563 \approx 56.3\,\%$$

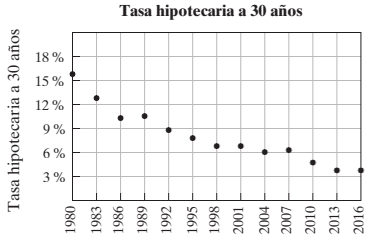
De 2010 a 2015, hubo un aumento aproximado de 56.3% en el número de automotores producidos en Estados Unidos.

Ahora resuelve el ejercicio 73

EJEMPLO 9 **Tasas hipotecarias a 30 años** La gráfica de la **Figura 3.30**, muestra la tasa hipotecaria a 30 años de 1980 a 2016. La gráfica de la **Figura 3.31**, muestra una gráfica lineal que ilustra las tasas hipotecarias.

a) Con la gráfica de la **Figura 3.30**, explica por qué este conjunto de puntos representa una función.

b) Con la gráfica de la **Figura 3.31**, estima la tasa hipotecaria a 30 años en 2006.



Fuente: www.bankrate.com

FIGURA 3.30



Fuente: www.bankrate.com

FIGURA 3.31

Solución

a) Dado que cada año corresponde con exactamente una tasa hipotecaria a 30 años, el conjunto de puntos representa una función. Observa que esta gráfica pasa la prueba de la recta vertical.

b) Si se conectan los puntos con segmentos de recta, como en la **Figura 3.31**, a partir de la gráfica puedes estimar que la tasa hipotecaria a 30 años en 2006 fue de aproximadamente 6 %. Si a esta función le llamas f, entonces $f(2006) \approx 6\,\%$.

Ahora resuelve el ejercicio 75

Con frecuencia, las fórmulas se escriben usando notación de función, como se muestra a continuación.

EJEMPLO 10 La temperatura Celsius, C, es una función de la temperatura Fahrenheit, F.

$$C(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$$

Determina la temperatura Celsius que corresponde a 50°F.

Solución Se necesita determinar $C(50)$. Esto se hace mediante sustitución.

$$C(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$$

$$C(50) = \frac{5}{9}(50 - 32)$$

$$= \frac{5}{9}(18) = 10$$

Por tanto, 50°F = 10°C.

Ahora resuelve el ejercicio 57

3.2 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

relación	función	dominio	gráfica
$f(x)$	vertical	dependiente	independiente
rango	ordenados	coordenada x	coordenadas y

1. El conjunto de coordenadas x de una relación, se llama el _____ de la relación.

2. El conjunto de _____ de una relación, se llama el rango de la relación.

3. Una relación es cualquier conjunto de pares _____.

4. Una función es una _____ en la cual cada elemento del dominio corresponde con exactamente un elemento del rango.

5. Si una recta _____ interseca una gráfica en más de un punto, entonces la gráfica no representa una función.

6. En una función, toda _____ corresponde a exactamente una coordenada y.

7. En una función, todo elemento en el dominio debe corresponder a exactamente un elemento en el _____.

8. La notación _____ se lee "f de x".

9. La notación $y = f(x)$, significa que y es una _____ de x.

10. En la notación $y = f(x)$, y es la variable _____.

11. En la notación $y = f(x)$, x es la variable _____.

12. La _____ de una función, o relación, es la gráfica de su conjunto de pares ordenados.

Practica tus habilidades

En los ejercicios 13-20, **a)** *determina si la relación ilustrada es una función.* **b)** *Proporciona el dominio y el rango de cada función o relación.*

13. Edad mínima para conducir

Dakota del Sur	14.5
Texas	16
Nueva Jersey	17

14. Edad mínima para conducir

Colorado	
Florida	16
Illinois	

15. El doble de un número

3	6
5	10
11	22

16. Un número al cuadrado

4	16
5	25
7	49

17. Sobrenombres

Robert	Bobby
	Rob
Margaret	Peggy
	Maggie

18. Posesión de mascotas

Max	gato
Marla	perro
Ross	conejo

19. Sobrenombres de colegios

Northwestern	
Villanova	Wildcats
Kansas State	

20. Valor absoluto

−8	8
8	
0	0

En los ejercicios 21-28, **a)** *determina cuáles de las siguientes relaciones también son funciones.* **b)** *Proporciona el dominio y el rango de cada relación o función.*

21. $\{(1, 4), (2, 2), (3, 5), (4, 3), (5, 1)\}$

22. $\{(-1, 1), (0, -3), (3, 4), (4, 5), (-2, -2)\}$

23. $\{(3, -1), (5, 0), (1, 2), (4, 4), (2, 2), (7, 9)\}$

24. $\{(6, 3), (-3, 4), (0, 3), (5, 2), (3, 5), (2, 8)\}$

25. $\{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (2, 2), (1, 1)\}$

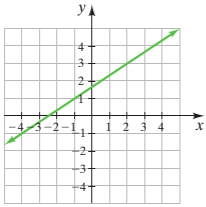
26. $\{(1, 0), (4, 2), (9, 3), (1, -1), (4, -2), (9, -3)\}$

27. {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)}

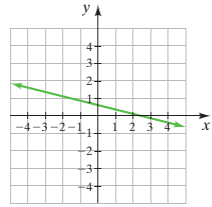
28. {(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1)}

En los ejercicios 29-40, **a)** *determina si la gráfica ilustrada representa una función.* **b)** *Proporciona el dominio y el rango de cada función o relación.* **c)** *Determina los valores y en el rango que corresponde a* $x = 2$. **d)** *Determina los valores x en el dominio que correspondan a* $y = 1$.

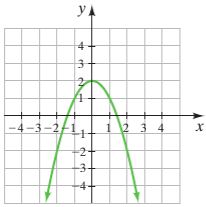
29.



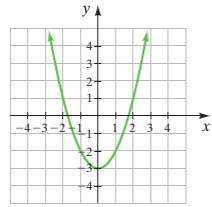
30.



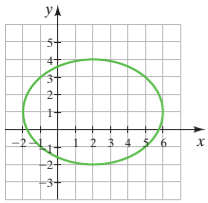
31.



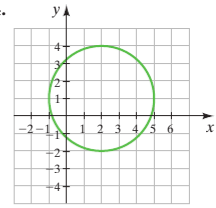
32.



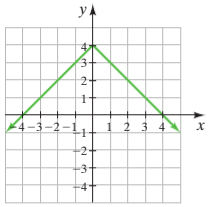
33.



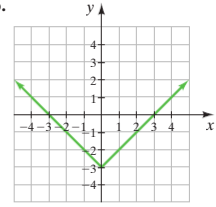
34.



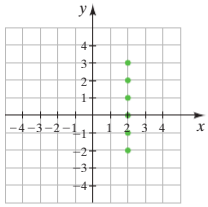
35.



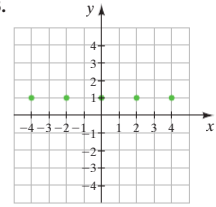
36.



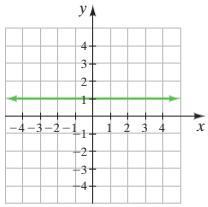
37.



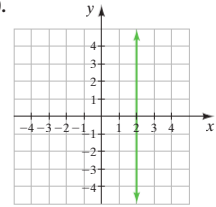
38.



39.



40.



Evalúa cada función en los valores indicados.

41. $f(x) = -5x + 3$; determina

a) $f(0)$ **b)** $f(-1)$

42. $f(x) = \frac{1}{3}x + 4$; determina

a) $f(0)$. **b)** $f(-12)$.

43. $h(x) = x^2 - x - 6$; determina

a) $h(0)$. **b)** $h(-1)$.

44. $g(x) = -2x^2 + 7x - 11$; determina

a) $g(2)$. **b)** $g(-3)$

45. $r(t) = -t^3 - 2t^2 + t + 4$; determina

a) $r(1)$. **b)** $r(-2)$.

46. $g(t) = 4 - 3t + 16t^2 - 2t^3$; determina

a) $g(0)$. **b)** $g(3)$.

47. $h(z) = |5 - 2z|$; determina

a) $h(6)$. **b)** $h\left(\frac{5}{2}\right)$.

48. $d(x) = -3|x - 7| + 2$; determina

a) $d(2)$ **b)** $d(-5)$

49. $s(t) = \sqrt{t + 3}$; determina

a) $s(-3)$. **b)** $s(6)$.

50. $f(t) = \sqrt{5 - 2t}$; determina

a) $f(-2)$. **b)** $f(2)$.

51. $g(x) = \dfrac{x^3 - 2}{x - 2}$; determina

a) $g(0)$. **b)** $g(2)$.

52. $g(z) = \dfrac{z^2 - 3z}{z + 1}$; determina

a) $g(3)$ **b)** $g(-1)$

Resolución de problemas

En los ejercicios 53-66, usa la tecla $\boxed{\pi}$ *de tu calculadora para evaluar* π *cuando sea necesario. Redondea las respuestas a la centésima más cercana.*

53. Área de un rectángulo La fórmula para el área de un rectángulo es $A = lw$. Si la longitud de un rectángulo es 7 pies, entonces el área es una función de su ancho, $A(w) = 7w$. Determina el área cuando el ancho es de

a) 4 pies.

b) 6.5 pies.

54. Interés simple La fórmula para el interés simple ganado durante un periodo de 1 año es $i = pr$, donde p es el principal invertido y r es la tasa de interés simple. Si se invierten \$1 000, el interés simple ganado en 1 año es una función de la tasa de interés simple, $i(r) = 1\,000r$. Determina el interés simple ganado en 1 año, si la tasa de interés es

a) 2.5 %.

b) 4.25 %.

55. Área de un círculo La fórmula para el área de un círculo es $A = \pi r^2$. El área es una función del radio.

a) Escribe esta fórmula usando notación de función.

b) Determina el área cuando el radio es de 3 yardas.

56. Volumen de una esfera La fórmula para el volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. El volumen es una función del radio, r.



a) Escribe esta fórmula en notación de función.

b) Determina el volumen si el radio es de 6 centímetros.

57. Temperatura La fórmula para cambiar la temperatura Fahrenheit en temperatura Celsius, es $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. La temperatura Celsius es una función de la temperatura Fahrenheit.

a) Escribe esta función usando notación de función.

b) Determina la temperatura Celsius que corresponda a −31 °F.

58. Temperatura La fórmula para cambiar temperatura Celsius en temperatura Fahrenheit, es $F = \frac{9}{5}C + 32$. La temperatura Fahrenheit es una función de la temperatura Celsius.

a) Escribe esta fórmula en notación de función.

b) Determina la temperatura Fahrenheit que corresponda a 35 °C.

59. Temperatura de sauna La temperatura, T, en grados Celsius, en un sauna n minutos, después de encenderse está dada por la función $T(n) = -0.03n^2 + 1.5n + 14$. Determina la temperatura del sauna después de

a) 3 minutos.

b) 12 minutos.

60. Aire acondicionado. Cuando un sistema de aire acondicionado se enciende al máximo en una habitación a 80 °F, la temperatura, T, en la habitación, después de A minutos, puede aproximarse mediante la función $T(A) = -0.02A^2 - 0.34A + 80, 0 \leq A \leq 15$.

a) Estima la temperatura de la habitación 4 minutos después de encender el aire acondicionado.

b) Estima la temperatura de la habitación 12 minutos después de encender el aire acondicionado.

61. Distancia de detención La distancia *de detención* de un vehículo se define por la distancia recorrida por el vehículo después de que el conductor decide detener el vehículo. La distancia de detención, s, en pies, para un automóvil que viaja a v millas por hora (mph) está dada por la función $s(v) = 0.05v^2 + 1.6v - 18.3$. Determina la distancia de detención para un automóvil que viaja a

a) 30 mph

b) 55 mph

c) 70 mph



62. Distancia de frenado La distancia de *frenado* de un vehículo se define por la distancia que recorre el vehículo después de que el conductor aplica los frenos del vehículo. La distancia de frenado, b, en pies, para un automóvil que viaja a v millas por hora (mph), está dada por la función $b(v) = 0.05v^2 - 0.12v + 1.98$. Determina la distancia de frenado de un automóvil que viaja a

a) 30 mph

b) 55 mph

c) 70 mph

63. Naranjas El número total de naranjas, T, en una pirámide cuadrada, cuya base es n por n naranjas, está dada por la función:

$$T(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

Determina el número de naranjas si la base es

a) 6 por 6 naranjas.

b) 8 por 8 naranjas.



64. Concierto de rock Si el costo de un boleto para un concierto de rock aumenta por x dólares, el aumento estimado en ingreso, R, en miles de dólares, está dado por la función $R(x) = 24 + 5x - x^2, x < 8$. Determina el aumento en ingreso, si el costo del boleto aumenta por:

a) \$1.

b) \$4.

65. Servicio de cambio de aceite Irene opera un servicio de cambio de aceite ambulante. Irene descubrió que su ingreso anual, en dólares, puede estimarse mediante la función:

$$P(x) = -8x^2 + 1200x - 5200$$

donde $P(x)$ es la ganancia anual de Irene y x es el monto que cobra por cambiar el aceite a un vehículo. Estima la ganancia anual de Irene si ella cobra

a) \$50

b) \$75

c) \$100

66. Conductores de vehículo compartido El número de conductores, en miles, de servicios de vehículo compartido, como Uber y Lyft, puede estimarse mediante la función:

$$D(t) = 29t^2 - 42t + 8$$

donde $D(t)$ es el número de conductores, en miles, y t representa el número de años desde 2012. Por tanto, $t = 1$ se refiere a 2013, $t = 2$ se refiere a 2014, etcétera.

Fuente: U.S. Department of Transportation

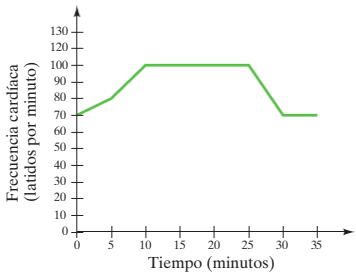
a) Estima el número de conductores de servicios de vehículo compartido en 2017.

b) Si supones que la tendencia continúa, estima el número de conductores de servicios de vehículo compartido en 2020.

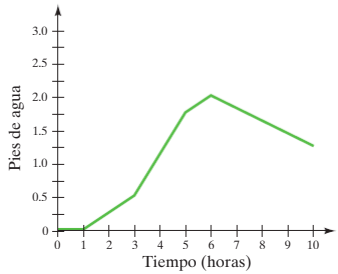
Ejercicios conceptuales y de redacción

Revisa el ejemplo 5 antes de trabajar los ejercicios 67-72.

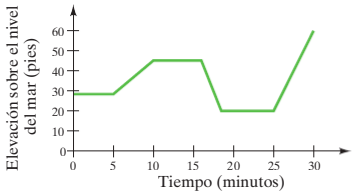
67. Frecuencia cardíaca La siguiente gráfica muestra la frecuencia cardíaca de una persona mientras hace ejercicio. Escribe una historia que pudiera representar esta gráfica.



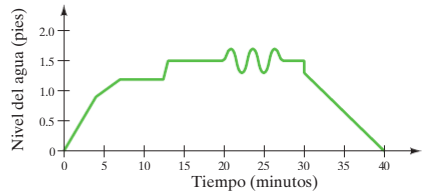
68. Nivel de agua La siguiente gráfica muestra el nivel de agua en cierto punto durante una inundación. Escribe una historia que pudiera representar esta gráfica.



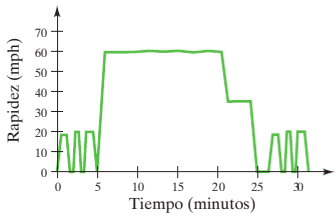
69. Altura sobre el nivel del mar La siguiente gráfica muestra la altura sobre el nivel del mar contra el tiempo, cuando un hombre sale de su casa y va a dar un paseo. Escribe una historia que pudiera representar esta gráfica.



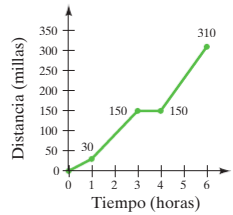
70. Nivel del agua en una bañera La siguiente gráfica muestra el nivel de agua en una bañera contra el tiempo. Escribe una historia que pudiera representar esta gráfica.



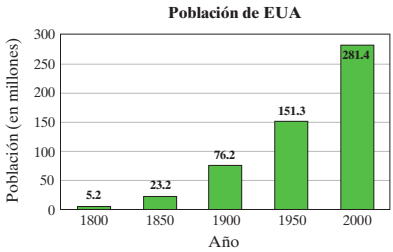
71. Rapidez de un automóvil La siguiente gráfica muestra la rapidez de un automóvil contra el tiempo. Escribe una historia que pudiera representar esta gráfica.



72. Distancia recorrida La siguiente gráfica muestra la distancia recorrida por una persona en un automóvil contra el tiempo. Escribe una historia que pudiera representar esta gráfica.



73. Población de Estados Unidos La siguiente gráfica muestra la población de Estados Unidos para los años 1800 a 2000.



Fuente: US Census Bureau

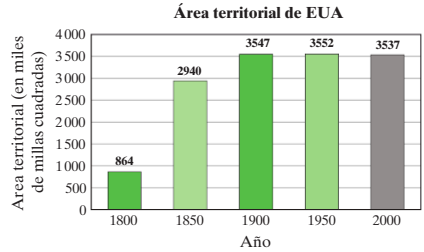
a) En esta gráfica, ¿cuál es la variable independiente?

b) En esta gráfica, ¿cuál es la variable dependiente?

c) Si P representa esta función, determina $P(1900)$.

d) Determina el aumento porcentual en población de Estados Unidos, de 1850 a 1900.

74. Área territorial de Estados Unidos La siguiente gráfica muestra el área territorial de Estados Unidos entre los años 1800 y 2000.



Fuente: CIA Fact Book

a) En esta gráfica, ¿cuál es la variable independiente?

b) En esta gráfica, ¿cuál es la variable dependiente?

c) Si L representa esta función, determina $L(1900)$.

d) Determina el aumento porcentual en el área territorial de Estados Unidos, de 1850 a 1900.

75. Comerciales en el Súper Tazón El precio promedio del costo de un comercial, de 30 segundos, durante el Súper Tazón, ha aumentado a través de los años. La siguiente tabla proporciona el costo aproximado de un comercial de 30 segundos para años seleccionados de 1993 a 2017.

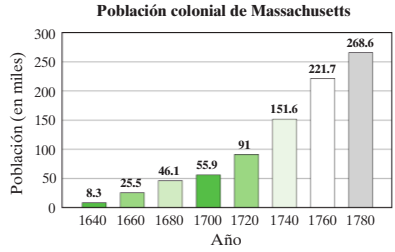
Año	Costo (Miles)
1993	970
1997	1 200
2001	2 000
2005	2 400
2009	3 000
2013	3 800
2017	5 000

a) Dibuja una gráfica de líneas que muestre esta información.

b) ¿La gráfica parece ser aproximadamente lineal de los años 1997 a 2013? Explica.

c) A partir de la gráfica, estima el costo de un comercial de 30 segundos en el año 2004.

76. Población colonial de Massachusetts La siguiente gráfica muestra la población colonial de Massachusetts para los años 1640 a 1780.



Fuente: US Census Bureau

a) Dibuja una gráfica de líneas que muestre esta información.

b) Usa la gráfica de líneas para estimar la población colonial de Massachusetts en el año 1770.

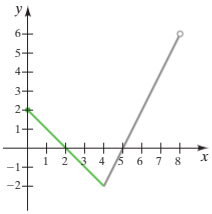
c) ¿La gráfica de barras representa una función?

d) ¿La gráfica de líneas que dibujaste en el inciso **a)**, representa una función?

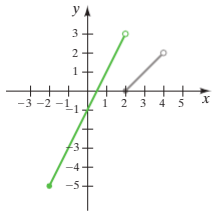
Actividad grupal

En muchas situaciones de la vida real, puede necesitarse más de una función para representar un problema. Con frecuencia, esto ocurre donde dos o más tasas diferentes están involucradas. Por ejemplo, cuando discutes impuestos sobre la renta federales, existen diferentes tasas impositivas. Cuando dos o más funciones se usan para representar un problema, la función se llama ***función definida por tramos****. A continuación se presentan dos ejemplos de funciones definidas por tramos y sus gráficas.*

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2, & 0 \le x < 4 \\ 2x - 10, & 4 \le x < 8 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & -2 \le x < 2 \\ x - 2, & 2 \le x < 4 \end{cases}$$



En equipo, grafiquen las siguientes funciones definidas por tramos.

77. $f(x) = \begin{cases} x + 3, & -1 \le x < 2 \\ 7 - x, & 2 \le x < 4 \end{cases}$

78. $g(x) = \begin{cases} 2x + 3, & -3 < x < 0 \\ -3x + 1, & 0 \le x < 2 \end{cases}$

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.1] **79.** Resuelve $3x - 2 = \frac{1}{3}(3x - 3)$.

[2.2] **80.** Resuelve la siguiente fórmula para p_2.

$$E = a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3$$

[2.5] **81.** Resuelve la desigualdad $\frac{3}{5}(x - 3) > \frac{1}{4}(3 - x)$ e indica la solución

a) sobre la recta numérica;

b) en notación de intervalo; y

c) en notación constructiva de conjuntos.

[2.6] **82.** Resuelve $\left|\frac{x - 4}{3}\right| + 9 = 11$.

3.3 Funciones lineales: gráficas y aplicaciones

1. Gráficas de funciones lineales
2. Gráficas de funciones lineales usando coordenadas al origen
3. Gráficas de ecuaciones de la forma $x = a$ y $y = b$
4. Estudio de las aplicaciones de las funciones

1 Gráficas de funciones lineales

En la sección 3.1, se graficaron ecuaciones lineales. Para graficar la ecuación lineal $y = 2x + 4$, puedes hacer una tabla de valores, trazar los puntos y dibujar la gráfica, como se muestra en la **Figura 3.32.** Dado que esta gráfica pasa la prueba de la línea vertical, la ecuación define una función y se puede escribir $f(x) = 2x + 4$.

x	y
-2	0
0	4
1	6

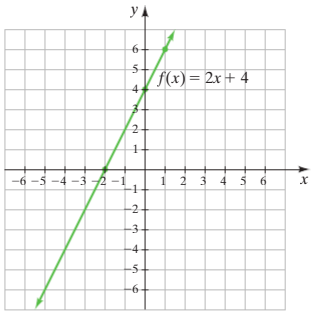


FIGURA 3.32

Este es un ejemplo de una función lineal.

Función lineal

Una función lineal es una función de la forma $f(x) = ax + b$.

- La gráfica de cualquier ecuación lineal es una línea recta.
- El dominio de cualquier función lineal es todos los números reales, $\mathbb{R}$.
- Si $a \neq 0$, entonces el rango de cualquier función lineal es todos los números reales, $\mathbb{R}$.

SUGERENCIA ÚTIL

Para graficar funciones lineales, $f(x)$ se trata como y y se sigue el mismo procedimiento usado para graficar ecuaciones lineales, que se estudió en la sección 3.1.

EJEMPLO 1 Elabora la gráfica de $f(x) = \frac{3}{4}x + 1$.

Solución Construye una tabla de valores al elegir valores para x y determinar los correspondientes valores para $f(x)$ o y. Después, se trazan los puntos y se dibuja la gráfica como se ilustra en la **Figura 3.33.**

x	$f(x)$
-4	-2
0	1
4	4

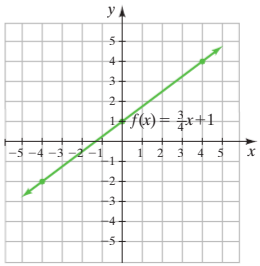


FIGURA 3.33

Ahora resuelve el ejercicio 17

Observa que el eje vertical en la **Figura 3.33**, también se puede etiquetar como $f(x)$ en lugar de y. En este libro se le seguirá etiquetando como y.

2 Gráficas de funciones lineales usando coordenadas al origen

Las ecuaciones lineales no siempre se proporcionan en la forma $y = ax + b$. La ecuación $2x + 3y = 6$ es un ejemplo de una ecuación lineal dada en *forma estándar*.

Forma estándar de una ecuación lineal

La **forma estándar de una ecuación lineal** es:

$$ax + by = c$$

donde a, b y c son números reales, y a y b no son ambos 0.

Ejemplos de ecuaciones lineales en forma estándar

$$2x - 3y = 12 \qquad 3x + 5y = 11 \qquad 4x + 7y = -13$$

En la forma estándar de una ecuación lineal, los coeficientes a, b y c pueden ser cualquier número real, sin embargo, por lo general, se prefiere escribir la ecuación con coeficientes enteros y con a positiva.

EJEMPLO 2 Escribe la ecuación lineal $y - 7 = -\frac{2}{3}(x + 4)$ en forma estándar.

Solución Dado que la ecuación contiene una fracción, comienza por multiplicar ambos lados de la ecuación por el mínimo común denominador, 3.

$$\begin{aligned} y - 7 &= -\frac{2}{3}(x + 4) \\ 3[y - 7] &= 3\left[-\frac{2}{3}(x + 4)\right] \\ 3y - 21 &= -2(x + 4) \\ 3y - 21 &= -2x - 8 \\ 2x + 3y - 21 &= -8 \\ 2x + 3y &= 13 \end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 23

Examina la gráfica de $f(x) = 2x + 4$ en la Figura 3.32 de la página 173. La gráfica cruza el eje x en $(-2, 0)$ y cruza el eje y en $(0, 4)$. Estos puntos importantes se llaman **coordenadas al origen** de la gráfica. Cuando una ecuación lineal se proporciona en forma estándar, puede ser más sencillo graficar la ecuación al determinar la intersección con el eje de las x y la intersección con el eje de las y.

Coordenadas al origen

La **intersección con el eje de las *x*** es el punto donde una gráfica cruza o toca el eje x.

- La intersección con el eje de las x siempre será de la forma $(x, 0)$.

La **intersección con el eje de las *y*** es el punto donde una gráfica cruza o toca el eje y.

- La intersección con el eje de las y siempre será de la forma $(0, y)$.

El siguiente procedimiento te ayudará a graficar ecuaciones lineales usando las coordenadas al origen.

Para graficar ecuaciones lineales usando coordenadas al origen

1. **Determina la intersección con el eje de las *y*.** Iguala x con O y determina el valor correspondiente de *y*.
2. **Determina la intersección con el eje de las *x*.** Iguala y con O y determina el valor correspondiente de *x*.
3. **Traza las coordenadas al origen.**
4. **Dibuja la recta.** Con una regla, dibuja una recta a través de los puntos. Dibuja una punta de flecha en ambos extremos de la recta.

EJEMPLO 3 Elabora la gráfica de $2x + 3y = 6$ usando las coordenadas al origen.

Solución Para determinar la intersección con el eje de las y, toma que $x = 0$ y resuelve para y.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 6 \\ 2(0) + 3y &= 6 \\ 0 + 3y &= 6 \\ 3y &= 6 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

La intersección con el eje de las y es $(0, 2)$.

Para determinar la intersección con el eje de las x, toma que $y = 0$ y resuelve para x.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 6 \\ 2x + 3(0) &= 6 \\ 2x + 0 &= 6 \\ 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

La intersección con el eje de las x es $(3, 0)$. Ahora traza las coordenadas al origen y dibuja la gráfica, como se ilustra en la **Figura 3.34.**

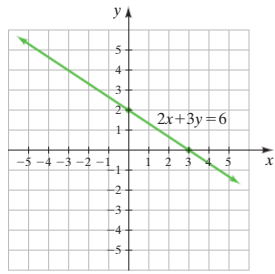


FIGURA 3.34

Ahora resuelve el ejercicio 27

SUGERENCIA ÚTIL

Cuando grafiques una ecuación lineal, usando la intersección con el eje de las x y la intersección con el eje de las y, es útil trazar un punto de control. Por ejemplo, en el ejemplo 3, si sustituyes $x = -3$ en la ecuación y resuelves para y, obtienes $y = 4$. Por tanto, un tercer punto sobre la gráfica debería ser $(-3, 4)$. Al observar la **Figura 3.34**, se ve que este punto está sobre la gráfica y de esta forma puedes asegurarte de que la gráfica es correcta.

EJEMPLO 4 Elabora la gráfica de $f(x) = -\frac{1}{3}x - 1$ usando las ***coordenadas al origen***.

Solución Trata $f(x)$ como si fuera y. Para determinar la intersección con el eje de las y, establece $x = 0$ y resuelve para $f(x)$.

$$f(x) = -\frac{1}{3}x - 1$$

$$f(x) = -\frac{1}{3}(0) - 1 = -1$$

La intersección con el eje de las y es $(0, -1)$.

Para determinar la intersección con el eje de las x, establece $f(x) = 0$ y resuelve para x.

$$f(x) = -\frac{1}{3}x - 1$$

$$0 = -\frac{1}{3}x - 1$$

$$3(0) = 3\left(-\frac{1}{3}x - 1\right) \quad \text{Multiplica ambos lados por 3.}$$

$$0 = -x - 3 \quad \text{Propiedad distributiva}$$

$$x = -3 \quad \text{Suma } x \text{ a ambos lados.}$$

La intersección con el eje de las x es $(-3, 0)$. La gráfica se muestra en la **Figura 3.35**.

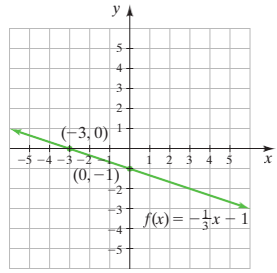


FIGURA 3.35.

Ahora resuelve el ejercicio 35

Si una gráfica contiene el origen, entonces necesitarás determinar puntos adicionales, además de la intersección con el eje de las x y la intersección con el eje de las y. Esto se ilustrará en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Elabora la gráfica de $-6x + 4y = 0$.

Solución Si sustituyes $x = 0$ se determina que $y = 0$. Por tanto, la gráfica pasa a través del origen. Se seleccionará $x = -2$ y $x = 2$ y sustituirán estos valores en la ecuación para determinar otros dos puntos sobre la gráfica.

Sea $x = -2$.	Sea $x = 2$.
$-6x + 4y = 0$	$-6x + 4y = 0$
$-6(-2) + 4y = 0$	$-6(2) + 4y = 0$
$12 + 4y = 0$	$-12 + 4y = 0$
$4y = -12$	$4y = 12$
$y = -3$	$y = 3$
Pares ordenados $(-2, -3)$	$(2, 3)$

Otros dos puntos sobre la gráfica están en $(-2, -3)$ y $(2, 3)$. La gráfica de $-6x + 4y = 0$ se muestra en la **Figura 3.36**.

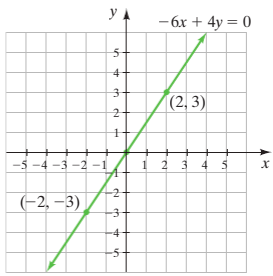


FIGURA 3.36

Ahora resuelve el ejercicio 37

Comprende el Álgebra

La gráfica de toda ecuación lineal en forma estándar con una constante de 0 (ecuaciones de la forma $ax + by = 0$) pasará a través del origen. Tanto la intersección con el eje de las x como la intersección con el eje de las y serán (0, 0).

USA TU CALCULADORA GRAFICADORA

Se determinarán las coordenadas al origen de la gráfica $y = 4x - 5$. Primero, grafica la función al presionar las teclas que se muestran a continuación. La gráfica se muestra en la **Figura 3.37a**.

Y = | 4 | X,T,Q,n, | – | 5 | GRAPH

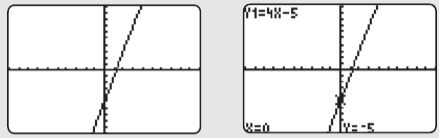


FIGURA 3.37 (a) (b)

Para obtener la intersección con el eje de las *y*, presiona TRACE. La intersección con el eje de las *y* es (0, −5), como se muestra en la **Figura 3.37b**. Para obtener la abscisa al origen, se usará la característica "cero" al presionar primero las teclas.

2nd | TRACE | 2

Se te pide una cota izquierda. Mueve el cursor parpadeante a la izquierda o derecha usando las teclas < o >. Mueve el cursor hacia la izquierda de la intersección con el eje de las x y presiona ENTER.

A continuación, se te pide una cota derecha. Mueve el cursor a la derecha de la intersección con el eje de las *x* y presiona ENTER. Finalmente, se te pide una aproximación. Mueve el cursor cerca de la intersección con el eje de las *x* y presiona ENTER. La pantalla se muestra en la **Figura 3.38**. La intersección con el eje de las *x* es (1.25, 0).

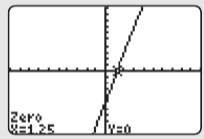


FIGURA 3.38

3 Gráficas de ecuaciones de la forma $x = a$ y $y = b$

Los ejemplos 6 y 7 ilustran cómo se grafican las ecuaciones de la forma $x = a$ y $y = b$, donde a y b son constantes.

EJEMPLO 6 Elabora la gráfica de la ecuación $y = -3$.

Solución Esta ecuación puede escribirse como $y = -3 + 0x$. Por tanto, para cualquier valor de x seleccionado, y es −3. La gráfica de $y = -3$ se ilustra en la **Figura 3.39**.

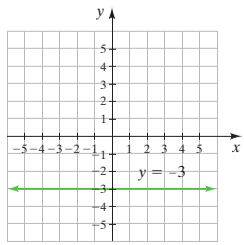


FIGURA 3.39

Ahora resuelve el ejercicio 45

Comprende el Álgebra

Una ecuación de la forma $y = b$ o $f(x) = b$, donde b representa una constante, es una función constante cuya gráfica es una recta horizontal.

Ecuación de una recta horizontal

La gráfica, de cualquier ecuación de la forma $y = b$, siempre será una recta horizontal para cualquier número real b.

Observa que la gráfica de $y = -3$ es una función, pues pasa la prueba de la recta vertical. Para cada valor de x seleccionado, el valor de y, o el valor de la función, es -3. Este es un ejemplo de una función constante. Se puede escribir:

$$f(x) = -3$$

EJEMPLO 7 Elabora la gráfica de la ecuación $x = 2$.

Solución Esta ecuación se puede escribir como $x = 2 + 0y$. Por tanto, para cada valor de y seleccionado, x, tendrá un valor de 2 (**Figura 3.40**).

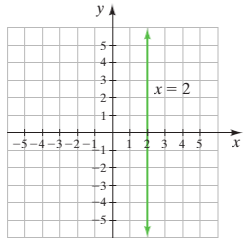


FIGURA 3.40

Ahora resuelve el ejercicio 43

Comprende el Álgebra

Una ecuación de la forma $x = a$ siempre será una recta vertical y nunca definirá una función.

Ecuación de una recta vertical

La gráfica de cualquier ecuación de la forma $x = a$, siempre será una recta vertical para cualquier número real a.

Observa que la gráfica de $x = 2$ no representa una función, pues no pasa la prueba de la recta vertical.

4 Estudio de las aplicaciones de las funciones

Las gráficas se usan con frecuencia para mostrar la relación entre variables.

EJEMPLO 8 **Ganancia de una tienda de neumáticos** La ganancia anual, p, de una tienda de neumáticos, puede estimarse mediante la función $p(n) = 20n - 30\,000$, donde n es el número de neumáticos vendidos por año.

a) Dibuja una gráfica de ganancia contra neumáticos vendidos por hasta, e incluyendo, 6 000 neumáticos.

b) Estima el número de neumáticos que deben venderse para que la compañía alcance su punto de equilibrio.

c) Estima el número de neumáticos vendidos, si la compañía tiene una ganancia de $70 000.

Comprende el Álgebra

El punto de equilibrio (o punto de tablas) de una compañía, es el punto donde la ganancia es igual que 0. En otras palabras, la compañía ni hace dinero ni pierde dinero.

Solución **a)** Entiende

p es una función de n

p es la ganancia.
p es la variable dependiente.
El eje vertical se etiquetará p.

n es el número de neumáticos vendidos.
n es la variable independiente.
El eje horizontal se etiquetará n.

Puesto que el número mínimo de neumáticos que pueden venderse es 0, el eje horizontal irá desde 0 hasta 6 000 neumáticos. Esta ecuación se graficará al determinar y trazar las coordenadas al origen.

Traduce y Realiza Para determinar la p al origen, establece $n = 0$ y resuelve para $p(n)$.

$$p(n) = 20n - 30\,000$$

$$p(0) = 20(0) - 30\,000 = -30\,000$$

Por tanto, la p al origen es $(0, -30\,000)$.

Para determinar la n al origen, establece $p(n) = 0$ y resuelve para n.

$$p(n) = 20n - 30\,000$$
$$0 = 20n - 30\,000$$
$$30\,000 = 20n$$
$$1500 = n$$

Por tanto, la n al origen es $(1\,500, 0)$.

Responde Ahora usa los p y n al origen para dibujar la gráfica (observa la **Figura 3.41**).

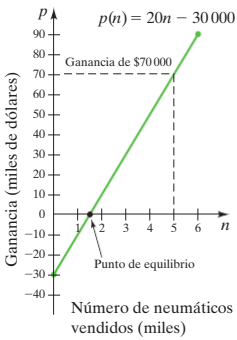


FIGURA 3.41

b) El punto de equilibrio es donde la gráfica interseca el eje n, pues es ahí donde la ganancia, p, es 0. Para quedar tablas, se deben vender aproximadamente 1 500 neumáticos.

c) Para obtener $70 000, se deben vender aproximadamente 5 000 neumáticos (que se muestran mediante la recta punteada en la Figura 3.41).

Ahora resuelve el ejercicio 53

SUGERENCIA ÚTIL

En ocasiones, es difícil leer una respuesta exacta a partir de una gráfica. Para determinar el número exacto de neumáticos que se necesitan para quedar tablas en el ejemplo 8, sustituye 0 por $p(n)$ en la función $p(n) = 20n - 30\,000$ y resuelve para n. Para determinar el número exacto de neumáticos necesarios para obtener una ganancia de $70 000, sustituye 70 000 por $p(n)$ y resuelve la ecuación para n.

EJEMPLO 9 **Ventas de una juguetería** Roberto es propietario de una juguetería. Su salario mensual consiste de $200 más 10 % de las ventas de la tienda para ese mes.

a) Escribe una función que exprese su salario mensual, m, en términos de las ventas de la tienda, s.

b) Dibuja una gráfica de su salario mensual para ventas de hasta e incluidos $20 000.

c) Si las ventas de la tienda para el mes de abril son $15 000, ¿cuál será el salario de Roberto para abril?

Solución

a) Dado que el salario mensual de Roberto depende de las ventas de la tienda, m depende de s, y m es una función de s.

Salario mensual de Roberto consiste de $200 más 10 % de las ventas de la tienda.

$$m(s) = 200 + 0.10 \cdot s$$

o $m(s) = 200 + 0.10s$

s	m
0	200
10 000	1200
20 000	2200

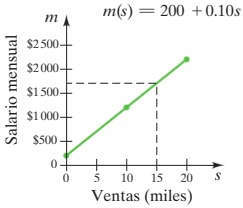


FIGURA 3.42

b) Dado que m es una función de s, s estará en el eje horizontal y m estará en el eje vertical. Esta función se graficará trazando puntos. Se seleccionan valores para s y se determinan los correspondientes valores para m. La tabla al margen, muestra tres pares ordenados que se trazarán y después se dibujará la gráfica que se muestra en la **Figura 3.42**.

c) Al leer la gráfica, cuidadosamente, se puede estimar que, cuando las ventas de la tienda son de $15 000, el salario mensual de Roberto es de aproximadamente $1700.

Ahora resuelve el ejercicio 55

3.3 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

lineal dominio rango intersección con el eje de las x intersección con el eje de las y horizontal
vertical constante estándar falla pasa reales

1. El dominio, o conjunto de coordenadas x, de toda función lineal $f(x) = ax + b, a \neq 0$, es todos los números _____, simbolizados $\mathbb{R}$.
2. El _____, o conjunto de coordenadas y, de toda función lineal $f(x) = ax + b, a \neq 0$, es todos los números reales, simbolizados $\mathbb{R}$.
3. La _____ de una gráfica, es el punto donde la gráfica cruza o toca el eje x.
4. La _____ de una gráfica, es el punto donde la gráfica cruza o toca el eje y.
5. La gráfica de una ecuación de la forma $y = b$, donde b es un número real, es una recta _____.
6. La gráfica de una ecuación de la forma $x = a$, donde a es un número real, es una recta _____.
7. Una ecuación de la forma $x = a$ siempre _____ la prueba de la recta vertical y por tanto nunca definirá una función.
8. Una función de la forma $f(x) = b$, donde b es un número real, se conoce como función _____.
9. Una función de la forma $f(x) = ax + b$, donde a y b son números reales, se llama función _____.
10. La forma _____ de una ecuación lineal es $ax + by = c$.

Practica tus habilidades

Elabora la gráfica de cada función lineal.

11. $f(x) = 3x - 2$ **12.** $f(x) = -3x + 1$ **13.** $g(x) = -\frac{2}{3}x$ **14.** $g(x) = \frac{3}{4}x$

15. $h(x) = \frac{3}{4}x - 1$ **16.** $h(x) = -\frac{2}{3}x + 1$ **17.** $r(x) = -\frac{3}{2}x - 1$ **18.** $r(x) = \frac{1}{2}x - 2$

Escribe cada ecuación en forma estándar.

19. $y = 7x - 4$ **20.** $8y + 6 = 3x$ **21.** $3(x - 2) = 4(y - 5)$

22. $2(x + 6) = -3(y - 4)$ **23.** $y - 3 = -\frac{1}{2}(x + 3)$ **24.** $y + 3 = \frac{2}{3}(x - 1)$

Elabora la gráfica de cada ecuación usando las coordenadas al origen.

25. $x + 2y = 4$ **26.** $4x + y = 4$ **27.** $3x - 4y = -12$ **28.** $5x + 3y = -15$

29. $120x - 360y = 720$ **30.** $280x + 140y = 560$ **31.** $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$ **32.** $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$

33. $0.28x + 0.35y = 1.4$ **34.** $0.18x - 0.12y = -0.36$ **35.** $f(x) = -\frac{2}{3}x + 2$ **36.** $g(x) = -\frac{3}{4}x - 3$

37. $5x - 6y = 0$ **38.** $18x + 6y = 0$ **39.** $4x - 5y = 80$ **40.** $18x + 16y = 144$

Elabora la gráfica de cada ecuación.

41. $y = 4$ **42.** $y = -4$ **43.** $x = -4$ **44.** $x = 4$

45. $y = -2$ **46.** $y = 2$ **47.** $f(x) = 1$ **48.** $f(x) = -5$

49. $x = 0$ **50.** $g(x) = 0$

Resolución de problemas

51. Distancia Usando la fórmula de distancia

$$\text{distancia} = \text{razón} \cdot \text{tiempo, o } d = rt$$

dibuja una gráfica de distancia contra el tiempo, para una razón constante de 30 millas por hora.

52. Interés simple Usando la fórmula de interés simple

$$\text{interés} = \text{principal} \cdot \text{tasa} \cdot \text{tiempo, o } i = prt$$

dibuja una gráfica de interés contra el tiempo, para un principal de \$1 000 y una tasa de 3%.

53. Ganancia de bicicletas La ganancia de un fabricante de bicicletas puede aproximarse mediante la función $p(x) = 60x - 80\,000$, donde x es el número de bicicletas producidas y vendidas.



a) Dibuja una gráfica de ganancia contra el número de bicicletas vendidas, por hasta, e incluyendo, 5 000 bicicletas.

b) Estima el número de bicicletas que deben venderse para que la compañía quede tablas.

c) Estima el número de bicicletas que se deben vender para que la compañía obtenga una ganancia de \$150 000.

54. Costos operativos de un taxi El costo semanal de Raúl, por operar un taxi, es de \$75 más 15¢ la milla.

a) Escribe una función que exprese el costo semanal de Raúl, c, en términos del número de millas, m.

b) Dibuja una gráfica que ilustre el costo semanal contra el número de millas, por hasta, e incluyendo, 200, conducidos por semana.

c) Si durante 1 semana, Raúl condujo el taxi 150 millas, ¿cuál debería ser el costo?

d) ¿Cuántas millas tendría que conducir Raúl, para que el costo semanal sea de \$135?

55. Salario más comisión El salario semanal de Jana en la tienda Cra Cra Surf es de \$500 más 15% de comisión en sus ventas semanales.



a) Escribe una función que exprese el salario semanal de Jana, s, en términos de sus ventas semanales, x.

b) Dibuja una gráfica del salario semanal de Jana contra sus ventas semanales, por hasta, e incluyendo, \$5 000 en ventas.

c) ¿Cuál es el salario semanal de Jana, si sus ventas fueron de \$3 000?

d) Si el salario semanal de Jana para la semana fue de \$1 100, ¿cuáles fueron sus ventas semanales?

56. Salario más comisión Cristina, una agente de bienes raíces, gana \$100 por semana más 3% por comisión de ventas sobre cada propiedad que vende.

a) Escribe una función que exprese su salario semanal, s, en términos de ventas, x.

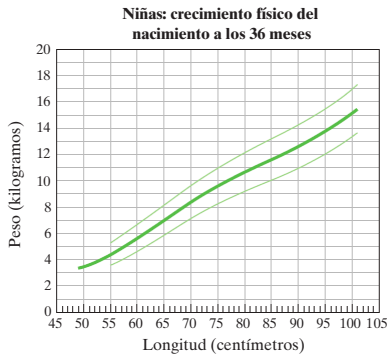
b) Dibuja una gráfica de su salario contra sus ventas semanales, por ventas de hasta \$100 000.

c) Si ella vende una casa por semana de \$75 000, ¿cuál será su salario semanal?

Ejercicios conceptuales y de redacción

57. Peso de niñas La gráfica a la derecha muestra el peso, en kilogramos, para niñas (de hasta 36 meses de edad) contra la longitud (o estatura), en centímetros. La línea media es el peso promedio para todas las niñas de la longitud dada, y las líneas superior e inferior representan los límites superior e inferior del rango normal.





Fuente: National Center for Health Statistics

(*Continúa*)

(*Continuación*)

a) Explica por qué la línea media representa una función.

b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál es la variable dependiente?

c) ¿La gráfica del peso contra la longitud, es aproximadamente lineal?

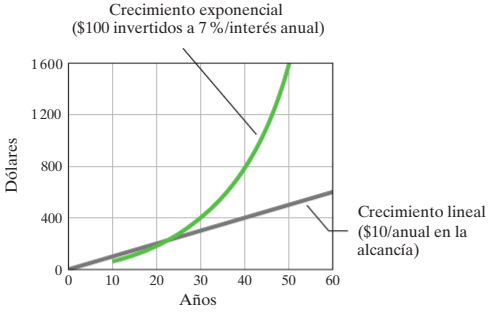
d) ¿Cuál es el peso, en kilogramos, de la niña promedio que mide 85 centímetros de largo?

e) ¿Cuál es la longitud promedio, en centímetros, de la niña promedio con un peso de 7 kilogramos?

f) ¿Qué pesos se consideran normales para una niña de 95 centímetros de largo?

g) ¿Qué ocurre con el rango normal conforme aumentan las longitudes? ¿Esto es lo que esperarías que ocurra? Explica.

58. Interés compuesto La siguiente gráfica muestra el efecto del interés compuesto.



Si un niño pone $10 cada año en una alcancía, los ahorros crecerán linealmente, como se muestran mediante la curva inferior. Si, a los 10 años de edad, el niño invierte $100 a 7 % de interés compuesto anualmente, esos $100 crecerán exponencialmente.

a) Explica por qué ambas gráficas representan funciones.

b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál es la variable dependiente?

c) Usando la curva de crecimiento lineal, determina cuánto tardará en ahorrar $600.

d) Usando la curva de crecimiento exponencial, que comienza en el año 10, ¿cuánto tiempo después de abrir la cuenta, el monto alcanzaría $600?

e) A partir del año 20, ¿cuánto tardaría en duplicarse el dinero que crece a una tasa lineal?

f) A partir del año 20, ¿cuánto tardaría en duplicarse el dinero que crece exponencialmente? (El crecimiento exponencial se discutirá con amplitud en el capítulo 9.)

59. ¿Cuándo, si alguna vez, serán iguales la intersección con el eje de las x y la intersección con el eje de las y de una gráfica? Explica.

60. Escribe dos funciones lineales cuyas coordenadas al origen sean ambas (0, 0). Explica.

61. Escribe una función cuya gráfica no tendrá intersección con el eje de las x, pero tendrá una intersección con el eje de las y en (0, 4). Explica.

62. Escribe una ecuación cuya gráfica no tendrá intersección con el eje de las y, pero tendrá una intersección con el eje de las x en -5. Explica.

Problemas de desafío

63. Determina la ecuación del eje y.

64. Determina la ecuación del eje x.

Determina las coordenadas al origen de la gráfica de cada ecuación usando tu calculadora graficadora.

65. $y = 2(x + 3.2)$

66. $5x - 2y = 7$

67. $-4x - 3.2y = 8$

68. $y = \frac{3}{5}x - \frac{1}{2}$

Actividades grupales

En los ejercicios 69 y 70, se proporcionan dos pares ordenados, los cuales están sobre una gráfica. **a)** *Traza los puntos y dibuja la recta a través de los puntos.* **b)** *Determina el cambio en* y, *o el cambio vertical, entre los puntos.* **c)** *Determina el cambio en* x, *o el cambio horizontal, entre los puntos.* **d)** *Determina la razón del cambio vertical al cambio horizontal entre estos dos puntos. ¿Tú sabes qué representa esta razón? (Esto se discutirá aún más en la sección 3.4.)*

69. (0, 2) y (−4, 0)

70. (3, 5) y (−1, −1)

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.4] **71.** Evalúa $4\{2 - 3[(1 - 4) - 5]\} - 8$.

[2.1] **72.** Resuelve $\frac{1}{3}y - 3y = 6(y + 2)$.

[2.6] *En los ejercicios 73-75,* **a)** *explica el procedimiento para resolver la ecuación o desigualdad para x (asume que* $b > 0$*)* **y b)** *resuelve la ecuación o desigualdad.*

73. $|x - a| = b$

74. $|x - a| < b$

75. $|x - a| > b$

76. Resuelve la ecuación $|x - 4| = |2x - 2|$.

3.4 La forma pendiente-intersección con el eje de las *y* de una ecuación lineal

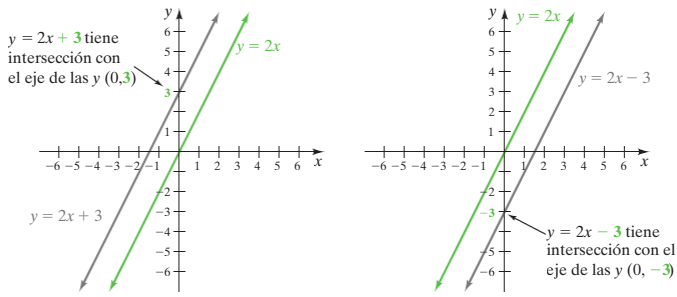
1. **Comprensión de la traslación de gráficas**
2. **Determinación de la pendiente de una recta**
3. **Reconocimiento de la pendiente como una razón de cambio**
4. **Escritura de ecuaciones lineales en forma pendiente-intersección con el eje de las *y***
5. **Gráficas de ecuaciones lineales usando la pendiente y la intersección con el eje de las *y***
6. **Uso de la forma pendiente-intersección con el eje de las *y*, para construir modelos a partir de gráficas**

1 Comprensión de la traslación de gráficas

Considera las tres ecuaciones:

$$y = 2x + 3$$
$$y = 2x$$
$$y = 2x - 3$$

Observa las gráficas que se muestran en las **Figuras 3.43a** y **3.43b**. La gráfica de $y = 2x$ se muestra en verde en ambas figuras, y tiene una intersección con el eje de las y de $(0, 0)$. Observa que la gráfica de $y = 2x + 3$; tiene intersección con el eje de las y $(0, 3)$ y que la gráfica de $y = 2x - 3$; tiene intersección con el eje de las y $(0, -3)$. Observa también que las rectas son **paralelas**; es decir, las rectas no se intersecan.



La gráfica de $y = 2x + 3$ es la gráfica de $y = 2x$ desplazada hacia *arriba* 3 unidades

(a)

La gráfica de $y = 2x - 3$ es la gráfica de $y = 2x$ desplazada hacia *abajo* 3 unidades

(b)

FIGURA 3.43

Comprende el Álgebra

En general, la gráfica de $y = mx + b$ será paralela a la gráfica de $y = mx$ y tendrá intersección con el eje de las y $(0, b)$.

Se dice que las gráficas de $y = 2x + 3$ y $y = 2x - 3$; son **traslaciones verticales** de la gráfica de $y = 2x$.

Después de ver las gráficas que se muestran en la **Figura 3.43**, ¿puedes predecir cómo se vería la gráfica de $y = 2x + 4$? La gráfica de $y = 2x + 4$ es paralela a $y = 2x$ y tiene intersección con el eje de las y $(0, 4)$. Se dice que la gráfica de $y = 2x + 4$ es la gráfica de $y = 2x$ desplazada o **trasladada** hacia arriba 4 unidades (observa la **Figura 3.44** de la siguiente página).

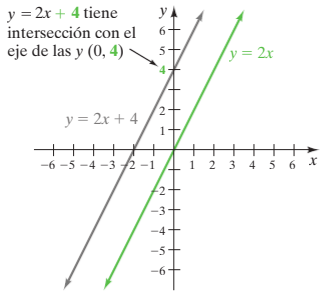


FIGURA 3.44

Observa, en las ecuaciones $y = 2x$, $y = 2x + 3$, $y = 2x - 3$ y $y = 2x + 4$, que el coeficiente de x es 2 y que las cuatro rectas son paralelas. Cuando las rectas son paralelas, tienen la misma *inclinación* o *pendiente*.

2 Determinación de la pendiente de una recta

La *pendiente de una recta* es una medida de la *inclinación* de la recta. La pendiente de una recta es un importante concepto en muchas áreas de matemáticas.

Comprende el Álgebra

La pendiente con frecuencia se describe con la frase *elevación sobre extensión*.

Pendiente de una recta

- La **pendiente de una recta**, ***m***, es la razón del cambio vertical, o *elevación*, al cambio horizontal, o *extensión*, entre cualesquier dos puntos seleccionados sobre la recta.
- m^* = **pendiente** $= \dfrac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}} = \dfrac{\text{elevación}}{\text{extensión}}$

Como un ejemplo, considera la gráfica de $y = 2x$ de la discusión anterior. Esta recta pasa a través de dos puntos, (1, 2) y (3, 6) (observa la **Figura 3.45a**). A partir de la **Figura 3.45b**, puedes ver que el cambio vertical (elevación) es $6 - 2$, o 4 unidades. El cambio horizontal (extensión), es $3 - 1$, o 2 unidades.

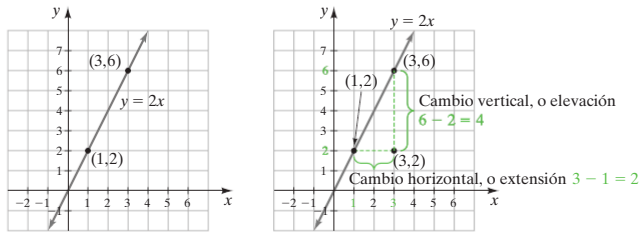


FIGURA 3.45 (a) (b)

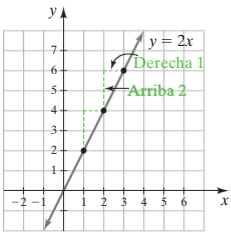


FIGURA 3.46

$$m = \text{pendiente} = \frac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}} = \frac{\text{elevación}}{\text{extensión}} = \frac{4}{2} = 2$$

Por tanto, la pendiente de la recta, a través de estos dos puntos, es 2. Al examinar la recta que conecta estos dos puntos, puedes ver que, conforme la gráfica se mue ve arriba 2 unidades, se mueve hacia la derecha 1 unidad (**Figura 3.46**).

*En Estados Unidos, la letra *m* se usa tradicionalmente para representar la pendiente. Los historiadores de las matemáticas no están seguros de por qué se seleccionó la letra *m* para la pendiente.

Comprende el Álgebra

En general, la pendiente de una ecuación de la forma

$y = mx + b$ es m.

Se determinó que la pendiente de la gráfica de $y = 2x$ es 2. Si tuvieras que calcular la pendiente de otras dos rectas en la **Figura 3.43** de la página 183, determinarías que las gráficas de $y = 2x + 3$ y $y = 2x - 3$ también tienen pendiente de 2.

¿Puedes adivinar cuál es la pendiente de las gráficas de las ecuaciones $y = -3x + 2$, $y = -3x$, y $y = -3x - 2$ La pendiente de las tres rectas es -3. En general, la pendiente de una ecuación de la forma $y = mx + b$ es m.

Ahora se presenta la fórmula para determinar la pendiente de una recta, dados cualesquier dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) sobre la recta. Observa la **Figura 3.47**. La *elevación* es la diferencia entre y_2 y y_1 y la *extensión* es la diferencia entre x_2 y x_1.

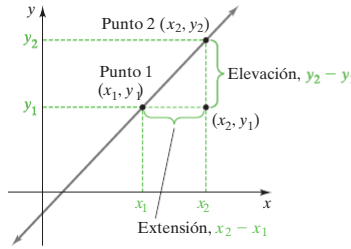


FIGURA 3.47

Comprende el Álgebra

Con frecuencia, se usa la letra griega delta mayúscula, Δ, para representar la frase "el cambio en". De este modo, Δy representa "el cambio en y" y Δx representa "el cambio en x", y la fórmula para la pendiente puede escribirse como:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Pendiente de una recta a través de los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2)

$$m = \text{pendiente} = \frac{\text{cambio vertical}}{\text{cambio horizontal}} = \frac{\text{elevación}}{\text{extensión}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

SUGERENCIA ÚTIL

Cuando se determina la pendiente de una recta, no hay diferencia acerca de cuáles dos puntos sobre una línea se seleccionen. Tampoco hace diferencia cuál punto se elija como (x_1, y_1) o (x_2, y_2).

EJEMPLO 1 Determina la pendiente de la línea en la **Figura 3.48**.

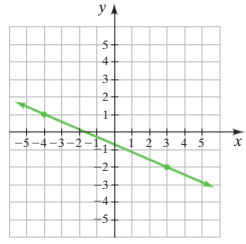


FIGURA 3.48

Solución Dos puntos sobre la recta son $(-4, 1)$ y $(3, -2)$. Sean $(x_2, y_2) = (3, -2)$ y $(x_1, y_1) = (-4, 1)$. Entonces:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 1}{3 - (-4)} = \frac{-3}{3 + 4} = \frac{-3}{7} = -\frac{3}{7}$$

La pendiente de la línea es $-\frac{3}{7}$. Observa que, si se hubiese hecho $(x_1, y_1) = (3, -2)$ y $(x_2, y_2) = (-4, 1)$, la pendiente todavía sería $-\frac{3}{7}$. Inténtalo y verifícalo.

Ahora resuelve el ejercicio 15

EJEMPLO 2 Una recta con pendiente $\frac{1}{3}$ contiene los puntos $(-4, 3)$ y $(8, q)$. Determina el valor de q.

Solución Comienza por sustituir los valores $m = \frac{1}{3}$, $(x_1, y_1) = (-4, 3)$, y $(x_2, y_2) = (8, q)$ en la fórmula de la pendiente, $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Después resuelve esta ecuación para q.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$\frac{1}{3} = \frac{q - 3}{8 - (-4)}$$
$$\frac{1}{3} = \frac{q - 3}{12}$$
$$12\left(\frac{1}{3}\right) = 12\left(\frac{q - 3}{12}\right) \quad \text{Multiplica ambos lados por el MCD, 12.}$$
$$4 = q - 3$$
$$7 = q$$

En consecuencia, $q = 7$. Una verificación mostrará que la recta que contiene los puntos $(-4, 3)$ y $(8, 7)$ tiene pendiente $\frac{1}{3}$. Observa que si se hubiese hecho $(x_1, y_1) = (8, q)$ y $(x_2, y_2) = (-4, 3)$ todavía se obtendría el mismo valor para q. Ahora intenta esto.

Ahora resuelve el ejercicio 27

Una recta que se eleva de izquierda a derecha (**Figura 3.49a**), tiene una **pendiente positiva**. Una recta que ni se eleva ni cae de izquierda a derecha (**Figura 3.49b**), tiene **pendiente cero**. Una recta que cae de izquierda a derecha (**Figura 3.49c**), tiene **pendiente negativa**.

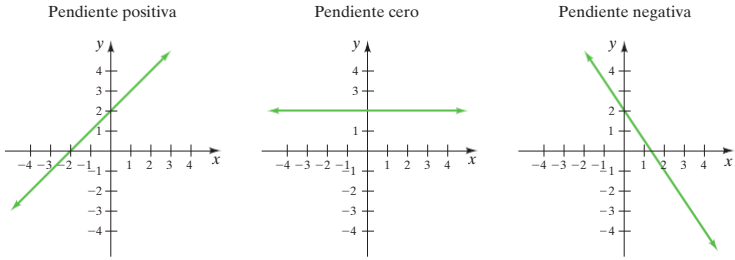


FIGURA 3.49

Considera la gráfica de $x = 3$ (**Figura 3.50**). ¿Cuál es su pendiente? La gráfica es una recta vertical y pasa a través de los puntos $(3, 2)$ y $(3, 5)$. Entonces la pendiente de la recta es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 2}{3 - 3} = \frac{3}{0}$$

La pendiente es indefinida.

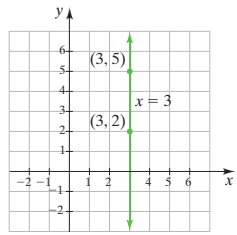


FIGURA 3.50

Comprende el Álgebra

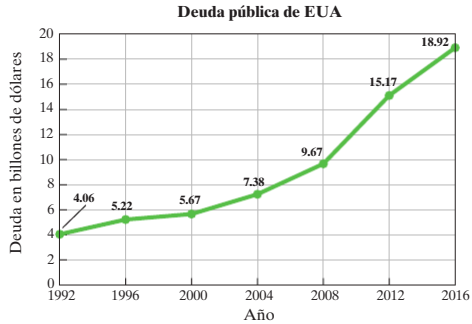
- La pendiente de cualquier recta horizontal es 0.
- La pendiente de cualquier recta vertical es *indefinida*.

Dado que no se puede dividir entre 0, se dice que la pendiente de esta recta es indefinida. *La pendiente de cualquier recta vertical* es **indefinida**.

3 Reconocimiento de la pendiente como una razón de cambio

En ocasiones, es útil describir la pendiente como una *razón de cambio*. Considera una pendiente de $\frac{3}{4}$. Esto significa que el valor y aumenta 3 unidades por cada aumento de 4 unidades en x. De manera equivalente, se puede decir que el valor y aumenta $\frac{3}{4}$ unidades, o 0.75 unidades, por cada unidad de aumento en x. Cuando se proporciona el cambio en y por unidad de cambio en x, se proporciona la pendiente como una **razón de cambio.** Cuando se estudian situaciones de la vida real o cuando se crean modelos matemáticos, con frecuencia, es útil estudiar la pendiente como una razón de cambio. En estos modelos, la variable independiente con frecuencia es el *tiempo*.

EJEMPLO 3 **Deuda pública** La deuda pública estadounidense es el monto total pedido prestado por el gobierno federal mediante la emisión de bonos. La siguiente gráfica muestra la deuda pública estadounidense en billones de dólares para años seleccionados de 1992 a 2016.



Fuente: U.S. Department of the Treasury

a) Determina la pendiente de los segmentos de recta entre los años 2008 y 2012 y entre 2012 y 2016.

b) Compara las dos pendientes encontradas en el inciso **a)**, y explica qué significa esto en términos de la deuda pública estadounidense.

Solución

a) Para determinar la pendiente del segmento de recta entre 2008 y 2012, se usan los puntos (2008, 9.67) y (2012, 15.17).

$$\text{Pendiente de los años 2008 a 2012}$$
$$m = \frac{15.17 - 9.67}{2012 - 2008} = \frac{5.50}{4} = 1.375$$

De los años 2008 a 2012, la deuda pública estadounidense aumentó a una razón de \$1.375 billones por año.

Para determinar la pendiente del segmento de recta entre los años 2012 y 2016, se usan los puntos (2012, 15.17) y (2016, 18.92).

$$\text{Pendiente de los años 2012 a 2016}$$
$$m = \frac{18.92 - 15.17}{2016 - 2012} = \frac{3.75}{4} = 0.9375$$

De 2012 a 2016, la deuda pública aumentó a una razón de \$0.9375 billones o \$937.5 miles de millones por año.

b) La pendiente mide la razón de cambio. La razón a la que aumentó la deuda pública estadounidense, de 2012 a 2016, fue menor que la razón a la que aumentó de 2008 a 2012.

Ahora resuelve el ejercicio 69

4 Escritura de ecuaciones lineales en forma pendiente-intersección con el eje de las *y*

Se dice que una ecuación lineal escrita en la forma $y = mx + b$ está en **forma pendiente-intersección con el eje de las *y***.

Forma pendiente-intersección con el eje de las *y*

La **forma pendiente-ordenada de una ecuación lineal** es

$$y = mx + b$$

donde ***m* es la pendiente** de la recta y (**0, *b*) es la intersección con el eje de las *y*** de la recta.

Comprende el Álgebra

Para escribir una ecuación lineal en forma pendiente-intersección con el eje de las *y*, resuelve la ecuación para *y*.

Ejemplos de ecuaciones en la forma de pendiente-ordenada

$$y = 3x - 6 \qquad y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Pendiente — m; b — la intersección con el eje de las *y* es $(0, b)$

$$y = mx + b$$

Ecuación	Pendiente	Intersección con el eje de las y
$y = 3x - 6$	3	$(0, -6)$
$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\left(0, \frac{3}{2}\right)$

EJEMPLO 4 Determina la pendiente y la intersección con el eje de las *y* de la gráfica de la ecuación $-5x + 2y = 8$.

Solución Escribe la ecuación, en forma pendiente-intersección con el eje de las *y*, al resolver la ecuación para *y*.

$$\begin{aligned} -5x + 2y &= 8 \\ 2y &= 5x + 8 \\ y &= \frac{5x + 8}{2} \\ y &= \frac{5x}{2} + \frac{8}{2} \\ y &= \frac{5}{2}x + 4 \end{aligned}$$

La pendiente es $\frac{5}{2}$; la intersección con el eje de las *y* es $(0, 4)$.

Ahora resuelve el ejercicio 43

5 Gráficas de ecuaciones lineales usando la pendiente y la intersección con el eje de las *y*

La forma pendiente-intersección con el eje de las *y* de una recta es útil para dibujar la gráfica de una ecuación lineal, como se ilustra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Elabora la gráfica de $2y + 4x = 6$ usando la intersección con el eje de las *y* y la pendiente.

Solución Comienza por resolver en términos de *y*, para obtener la ecuación en forma pendiente-intersección con el eje de las *y*.

$$\begin{aligned} 2y + 4x &= 6 \\ 2y &= -4x + 6 \\ y &= -2x + 3 \end{aligned}$$

La pendiente es -2 y la intersección con el eje de las *y* es $(0, 3)$. Coloca un punto en 3 sobre el eje *y* (**Figura 3.52** de la siguiente página). Dado que la pendiente es $-2 = \frac{-2}{1}$,

la razón del cambio vertical alcambio horizontal debe ser -2 a 1. Por tanto, si comienzas en (0, 3) y te mueves abajo 2 unidades y a la **derecha 1** unidad, obtendrás un segundo punto sobre la gráfica.

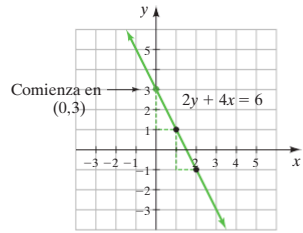


FIGURA 3.52

Continúa este proceso de moverte 2 unidades abajo y 1 unidad a la derecha, para obtener un tercer punto. Ahora dibuja una recta a través de los tres puntos para obtener la gráfica.

Ahora resuelve el ejercicio 45

En el ejemplo 5, se eligió mover abajo y a la derecha para obtener el segundo y tercer punto. Dado que -2 también es igual que $\frac{2}{-1}$, del mismo modo se podía haber elegido mover arriba 2 unidades y a la izquierda una unidad, para obtener el segundo y tercer punto.

EJEMPLO 6 Elabora la gráfica de $f(x) = \frac{4}{3}x - 3$ usando la intersección con el eje de las y y la pendiente.

Solución Puesto que $f(x)$ es lo mismo que y, esta función está en forma pendiente-intersección con el eje de las y. La intersección con el eje de las y es $(0, -3)$, y la pendiente es $\frac{4}{3}$. Coloca un punto en -3 sobre el eje y. Después, dado que la pendiente es positiva, obtén el segundo y tercer punto al mover arriba 4 unidades y a la derecha 3 unidades. La gráfica se muestra en la **Figura 3.53.**

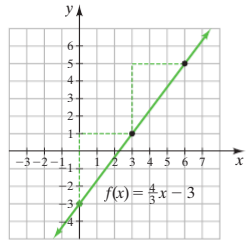


FIGURA 3.53

Ahora resuelve el ejercicio 53

6 Uso de la forma pendiente-intersección con el eje de las y, para construir modelos a partir de gráficas

Con frecuencia, se puede usar la forma pendiente-intersección con el eje de las y de una ecuación lineal, para determinar una función que modele una situación de la vida real.

EJEMPLO 7 **Población de bachillerato** Considera la línea sólida que se muestra en la **Figura 3.54** de la siguiente página, en donde se muestra la población estudiantil en declive del bachillerato Hazel City. Observa que la gráfica es un tanto lineal. La recta punteada es una función lineal que se dibujó para ajustar a la línea sólida.

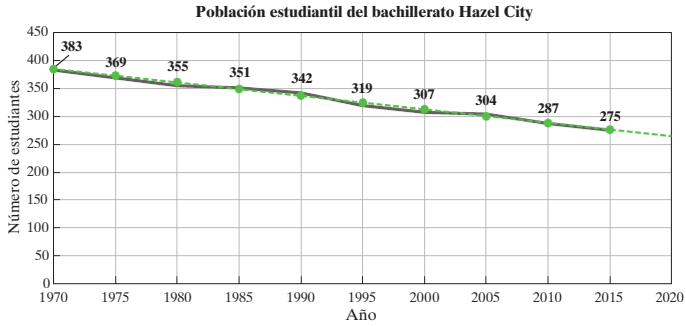


FIGURA 3.54

a) Escribe una función lineal que represente la recta punteada.

b) Si supones que esta tendencia continúa, usa la función determinada en el inciso **a)** para estimar la población estudiantil del bachillerato Hazel City en 2020.

Solución

a) Sea x = número de años desde 1970. Entonces, sobre el eje x, se puede sustituir 1970 con 0, 1975 con 5, 1980 con 10, etcétera, como se muestra en la **Figura 3.55**. Observa que en el año 2015 se sustituye con 45 y 2020 con 50. Sea y = número de estudiantes.

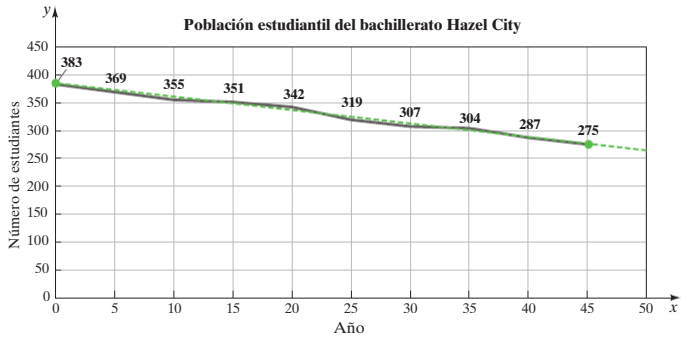


FIGURA 3.55

Se seleccionarán dos puntos sobre la gráfica para determinar la pendiente de la recta punteada. Se seleccionará la intersección con el eje de las y, (0, 383), y el punto (45, 275).

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{275 - 383}{45 - 0} = \frac{-108}{45} = -2.4$$

Dado que la pendiente es -2.4 y la intersección con el eje de las y es (0, 383), la ecuación de la recta punteada es $f(x) = -2.4x + 383$. En esta función, $f(x)$ representa el número de estudiantes y x representa el número de años desde el año 1970.

b) Para estimar la población estudiantil en el año 2020, sustituye 2020 — 1970, o 50, en la función para x.

$$\begin{aligned} f(x) &= -2.4x + 383 \\ f(50) &= -2.4(50) + 383 \\ &= -120 + 383 \\ &= 263 \end{aligned}$$

Por tanto, si la tendencia actual continúa, la población estudiantil en el bachillerato Hazel City en el año 2020 será de 263 estudiantes.

Ahora resuelve el ejercicio 73

3.4 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

traslación	paralelas	pendiente	vertical	horizontal	elevación	extensión
positiva	negativa	resuelve	función	estándar	pendiente-intersección con el eje de las y	razón

1. La _____ de una recta, es la medida de la inclinación de la recta.
2. La gráfica de $y = 2x + 3$ es una _____ de la gráfica $y = 2x$.
3. Una ecuación lineal escrita como $ax + by = c$ está en forma _____.
4. Una ecuación lineal escrita como $y = mx + b$ está en forma _____.
5. Con frecuencia, la pendiente se describe como _____ sobre _____.
6. Una recta que sube de izquierda a derecha tiene una pendiente _____.
7. Una recta que cae de izquierda a derecha tiene una pendiente _____.
8. Una recta _____ tiene pendiente cero.
9. Una recta _____ tiene pendiente indefinida.
10. Dos rectas que tienen la misma pendiente son rectas _____.
11. Cuando se proporciona el cambio en y por unidad de cambio en x, se proporciona la pendiente como una _____ de cambio.
12. Para escribir una ecuación en forma pendiente-intersección con el eje de las y, _____ la ecuación para y.

Practica tus habilidades

Determina la pendiente de la recta que pasa a través de los puntos dados. Si la pendiente de la recta es indefinida, indícalo.

13. $(1, 2)$ y $(4, 8)$

14. $(3, 5)$ y $(1, 9)$

15. $(5, 2)$ y $(1, 4)$

16. $(2, 7)$ y $(5, 9)$

17. $(-3, 7)$ y $(-6, 1)$

18. $(5, -8)$ y $(7, -6)$

19. $(4, 2)$ y $(4, -6)$

20. $(2, 6)$ y $(2, -3)$

21. $(-3, 4)$ y $(-1, 4)$

22. $(4, -6)$ y $(-5, -6)$

23. $(0, 3)$ y $(9, -3)$

24. $(0, -6)$ y $(-5, -3)$

Resuelve para la variable dada, si la recta que pasa a través de los dos puntos dados debe tener la pendiente dada.

25. $(3, 2)$ y $(4, j)$, $m = 1$

26. $(-4, 3)$ y $(-2, r)$, $m = -3$

27. $(5, 0)$ y $(1, k)$, $m = \frac{1}{2}$

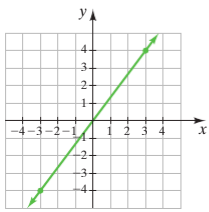
28. $(5, d)$ y $(9, 2)$, $m = -\frac{3}{4}$

29. $(x, 2)$ y $(3, -4)$, $m = 2$

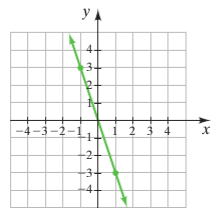
30. $(-2, -3)$ y $(x, 5)$, $m = \frac{1}{2}$

Para los ejercicios 31-42, **a)** *determina la pendiente de la recta en cada figura. Si la pendiente es indefinida, indícalo;* **b)** *escribe la ecuación de la recta dada.*

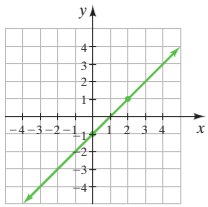
31.



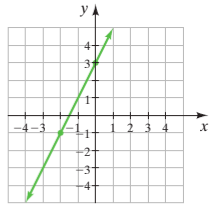
32.



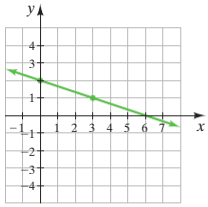
33.



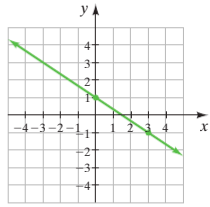
34.



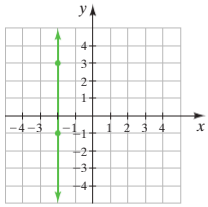
35.



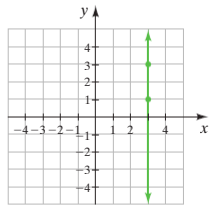
36.



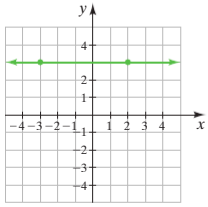
37.



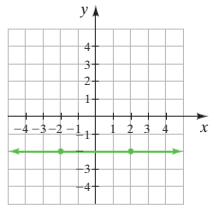
38.



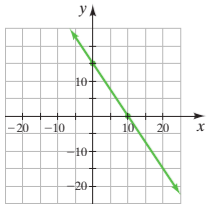
39.



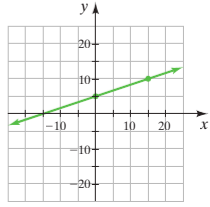
40.



41.



42.



Escribe cada ecuación en forma pendiente-intersección con el eje de las y. Determina la pendiente y la intersección con el eje de las y y úsalas para dibujar la gráfica de la ecuación lineal.

43. $x + y = 2$

44. $-2x + y = 6$

45. $5x + 15y = 30$

46. $2x + 3y = -6$

47. $-50x + 20y = 40$

48. $60x + 30y = 60$

Usa la pendiente y la intersección con el eje de las y para graficar cada función.

49. $f(x) = \frac{3}{2}x$ **50.** $g(x) = -3x$ **51.** $f(x) = -2x + 1$

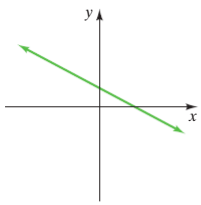
52. $g(x) = \frac{2}{3}x - 4$ **53.** $h(x) = -\frac{3}{4}x + 2$ **54.** $h(x) = -\frac{2}{5}x + 4$

Resolución de problemas

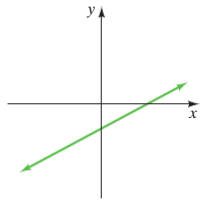
55. Dada la ecuación $y = mx + b$, para los valores de m y b dados, relaciona las partes **a)-d)** con las gráficas adecuadas etiquetadas 1-4.

a) $m > 0, b < 0$ **b)** $m < 0, b < 0$ **c)** $m < 0, b > 0$ **d)** $m > 0, b > 0$

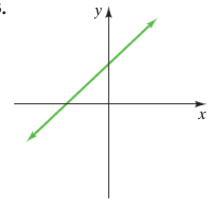
1.



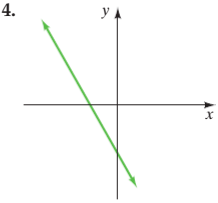
2.



3.



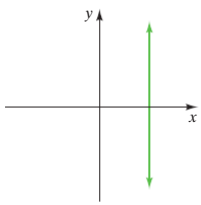
4.



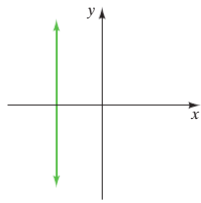
56. Dada la ecuación $y = mx + b$, para los valores de m y b dados, relaciona las partes **a)-d)** con las gráficas adecuadas etiquetadas 1-4.

a) $m = 0, b > 0$ **b)** $m = 0, b < 0$ **c)** m es indefinida, intersección con el eje de las $x < 0$ **d)** m es indefinida, intersección con el eje de las $x > 0$

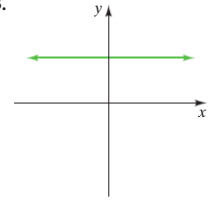
1.



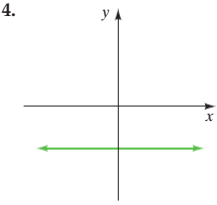
2.



3.



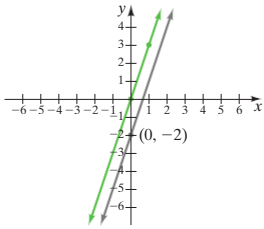
4.



57. Si un punto sobre una gráfica es (6, 3) y la pendiente de la recta es $\frac{4}{3}$, determina la intersección con el eje de las y de la gráfica.

58. Si un punto sobre una gráfica es (9, 2) y la pendiente de la línea es $m = \frac{2}{3}$, determina la intersección con el eje de las y de la gráfica.

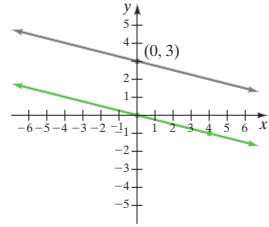
59. En la siguiente figura, la recta de la derecha es una traslación de la recta de la izquierda.



a) Determina la ecuación de la recta de la izquierda.

b) Usa la ecuación de la recta de la izquierda, para determinar la ecuación de la recta de la derecha.

60. En la siguiente figura, la recta superior es una traslación de la recta inferior.



a) Determina la ecuación de la recta inferior.

b) Usa la ecuación de la recta inferior para determinar la ecuación de la recta superior.

61. La gráfica de $y = x$ se traslada arriba 4 unidades. Determina:

a) la pendiente de la gráfica trasladada.

b) la intersección con el eje de las y de la gráfica trasladada.

c) la ecuación de la gráfica trasladada.

62. La gráfica de $y = -\frac{3}{2}x$ se trasladó hacia abajo 3 unidades. Determina:

a) la pendiente de la gráfica trasladada.

b) la intersección con el eje de las y de la gráfica trasladada.

c) la ecuación de la gráfica trasladada.

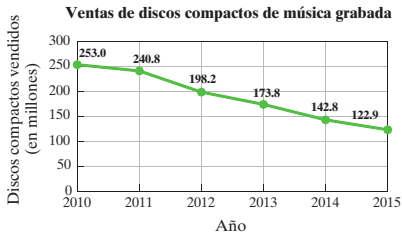
63. La gráfica de $3x - 2y = 6$ se trasladó hacia abajo 4 unidades. Determina la ecuación de la gráfica trasladada.

64. La gráfica de $-3x - 5y = 15$ se trasladó hacia arriba 3 unidades. Determina la ecuación de la gráfica trasladada.

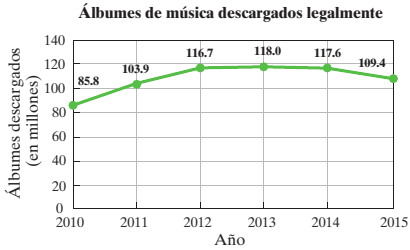
65. Si una recta pasa a través de los puntos (6, 4) y (−4, 2), determina el cambio de y con respecto a un cambio de 1 unidad en x.

66. Si una recta pasa a través de los puntos (−3, −4) y (5, 2), determina el cambio de y con respecto a un cambio de 1 unidad en x.

Ventas de música *Para los ejercicios 67 y 68, usa las siguientes gráficas. La primera gráfica muestra ventas de discos compactos de música grabada (en millones) y la segunda gráfica muestra los álbumes legalmente descargados (en millones) para los años 2010-2015.*



Fuente: Recording Industry Association of America



Fuente: Recording Industry Association of America

67. **a)** Para la gráfica de ventas de discos compactos, determina la pendiente del segmento de recta de los años 2011 a 2012.

b) Para la gráfica de ventas de discos compactos, determina la pendiente del segmento de recta de los años 2014 a 2015.

c) Para la gráfica de ventas de discos compactos, determina la razón de cambio promedio de los años 2010 a 2015.

68. **a)** Para la gráfica de álbumes de música descargados legalmente, determina la pendiente del segmento de recta de los años 2011 a 2012.

b) Para la gráfica de álbumes de música descargados legalmente, determina la pendiente del segmento de recta de los años 2014 a 2015.

c) Para la gráfica de álbumes de música descargados legalmente, determina la razón de cambio promedio de los años 2010 a 2015.

69. **Aumento de vocabulario** La siguiente tabla proporciona la extensión de vocabulario promedio, en miles de palabras, para varias edades.

Edad (en años)	Extensión de vocabulario (en miles de palabras)
5	6
10	12
15	20
20	23

Fuente: testyourvocab.com

a) Traza estos puntos en una gráfica.

b) Conecta estos puntos usando segmentos de recta.

c) Determina las pendientes de los tres segmentos de recta.

d) ¿Durante cuáles periodos hubo mayor tasa de cambio promedio?

70. **Exportaciones a China** La siguiente tabla proporciona las exportaciones anuales, en miles de millones de dólares estadounidenses, de Estados Unidos a China, para los años seleccionados.

Año	Exportaciones a China (en miles de millones de dólares EUA)
2010	90
2012	109
2014	121
2016	116

Fuente: U.S. Department of Commerce

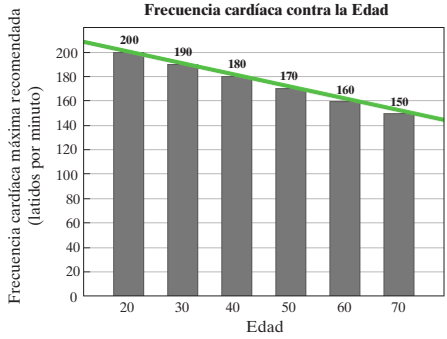
a) Traza estos puntos sobre una gráfica.

b) Conecta estos puntos usando segmentos de recta.

c) Determina las pendientes de los tres segmentos de recta.

d) ¿Durante cuáles periodos hubo mayor tasa de cambio promedio?

71. **Frecuencia cardíaca** La gráfica de barras en la parte superior de la siguiente página, muestra la frecuencia cardíaca máxima recomendada, en latidos por minuto, bajo estrés para hombres de diferentes edades. Las barras se conectan mediante una recta.



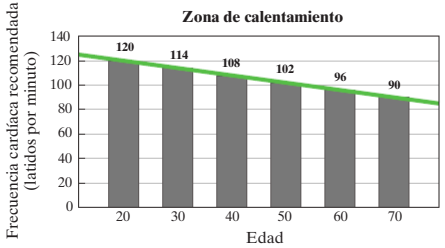
Fuente: The American Geriatric Society

a) Usa la recta para determinar una función que pueda usarse para estimar la frecuencia cardíaca máxima recomendada, h para $0 \leq x \leq 50$, donde x es el número de años después de los 20.

b) Con la función del inciso **a)**, determina la frecuencia cardíaca máxima recomendada para un hombre de 34 años de edad.



72. Zona de calentamiento Cuando comienzas un programa de ejercicio, la American Heart Association recomienda a las personas pasar dos semanas en una *zona de calentamiento*, para minimizar el riesgo de lesión cardíaca*. La siguiente gráfica de barras muestra la frecuencia cardíaca recomendada durante ejercicio moderado para diferentes edades. Las barras están conectadas mediante una recta.

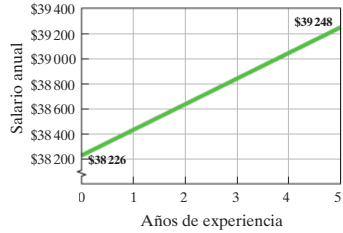


a) Usa la recta para determinar una función que pueda usarse para estimar la frecuencia cardíaca recomendada, h, para el número de años después de los 20, x.

b) Con la función del inciso **a)**, determina la frecuencia cardíaca recomendada para una persona de 60 años de edad que esté en la zona de calentamiento.

73. Salarios de profesores La siguiente gráfica, muestra salarios de los profesores del condado Truman, para profesores cuyo máximo grado es el de licenciatura. Sea S el salario anual del profesor y t los años de experiencia.

Escala salarial para profesores del condado Truman



a) Con los dos puntos dados, determina una función lineal $S(t)$ que se ajuste a estos datos.

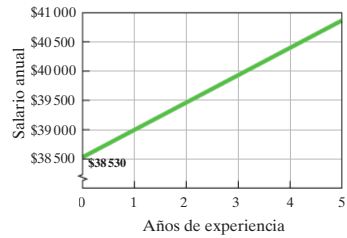
b) Con la función determinada en el inciso **a)**, estima el salario anual para un profesor con 3 años de experiencia. Compara tu respuesta con la gráfica, para ver si la gráfica respalda tu respuesta.

c) Si supones que esta tendencia continúa, ¿cuál será el salario anual para un profesor con 10 años de experiencia?

d) Si supones que esta tendencia continúa, ¿cuántos años de experiencia docente debe tener un profesor para ganar $41 292?

74. Salarios de profesores La siguiente gráfica, muestra los salarios de los profesores del condado Nixon, para profesores cuyo grado más alto es el de licenciatura. Sea S el salario anual del profesor y t los años de experiencia.

Escala salarial para profesores del condado Nixon



a) Con los dos puntos dados, determina una función lineal $S(t)$ que se ajuste a estos datos.

b) Con la función determinada en el inciso **a)**, estima el salario anual para un profesor con 3 años de experiencia. Compara tu respuesta con la gráfica, para ver si la gráfica respalda tu respuesta.

*Antes de iniciar un programa de ejercicio consulta con tu medico.

c) Si supones que esta tendencia continúa, ¿cuál será el salario anual de un profesor con 10 años de experiencia?

d) Si supones que esta tendencia continúa, ¿cuántos años de experiencia docente debe tener un profesor para ganar $41 330.8?

75. Salarios de guardabosques En Maryland, los guardabosques estatales, con 0 años de experiencia, ganan un salario anual de $37 855; y los guardabosques, con 5 años de experiencia, ganan un salario anual de $47 123. Sea S el salario anual del guardabosques y t los años de experiencia.



Fuente: www.dbm.maryland.gov

a) Determina una función lineal $S(t)$ que se ajuste a estos datos.

b) Usa la función del inciso **a)** para estimar el salario anual para un guardabosques con 3 años de experiencia.

c) Si supones que esta tendencia continúa, ¿cuál será el salario anual para un guardabosques con 10 años de experiencia?

d) Si supones que esta tendencia continúa, ¿cuántos años de experiencia debe tener un guardabosques para ganar un salario anual de $52 683.80?

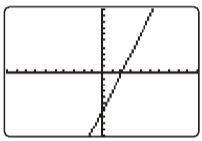
76. Seguridad social En Estados Unidos, el número de trabajadores por beneficiario de Seguridad Social ha declinado de manera aproximadamente lineal desde el año 1970. En el año 1970 había 3.7 trabajadores por beneficiario. En el año 2050 se proyecta que habrá 2.0 trabajadores por beneficiario. Sea W los trabajadores por beneficiario de Seguridad Social y t el número de años desde el año 1970.

a) Determina una función $W(t)$ que se ajuste a estos datos.

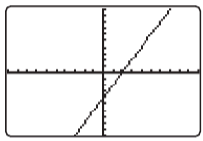
b) Estima el número de trabajadores por beneficiario en el año 2020.

Supón que intentas graficar las ecuaciones, que a continuación se muestran, y obtienes las pantallas que se presentan. Explica cómo sabes que cometiste un error al ingresar cada ecuación. En cada gráfica se utiliza la configuración estándar de ventana.

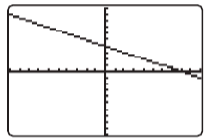
77. $y = 3x + 6$



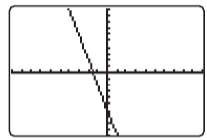
78. $y = -2x - 4$



79. $y = \frac{1}{2}x + 4$



80. $y = -4x - 1$



Problemas de desafío

81. Castillo La fotografía de abajo es del Castillo de Chichén Itzá, México. Cada lado del castillo tiene una escalera que consiste de 91 escalones. Los escalones del castillo son bastante estrechos e inclinados, lo que los hace difíciles de subir. La distancia vertical total de los 91 escalones es de 1292.2 pulgadas. Si se dibujara una recta que conectara las puntas de los escalones, el valor absoluto de la pendiente de esta línea sería 2.21875. Determina la altura y ancho promedio de un escalón.



82. Una **recta tangente** es una recta que toca una curva en un solo punto (la recta tangente puede cruzar la curva en un punto diferente si se extiende). La **Figura 3.56** muestra tres rectas tangentes a la curva, en los puntos a, b y c. Observa que la recta tangente en el punto a tiene una pendiente positiva, la recta tangente en el punto b tiene una pendiente de 0, y la recta tangente en el punto c tiene una pendiente negativa. Ahora considera la curva en la **Figura 3.57**. Imagina que se dibujan rectas tangentes en todos los puntos sobre la curva, excepto en los puntos extremos a y e. ¿Dónde, en la curva de la **Figura 3.57**, las rectas tangentes tendrían una pendiente positiva, una pendiente de 0 y una pendiente negativa?

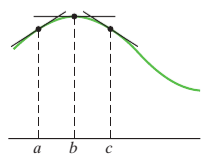


FIGURA 3.56

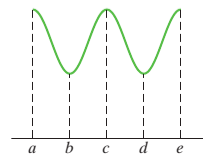


FIGURA 3.57

Actividad grupal

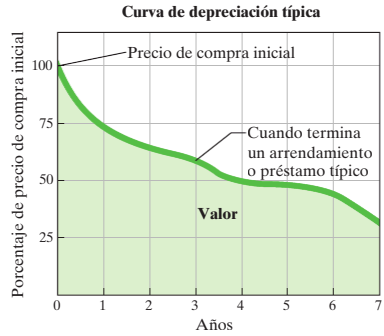
83. La siguiente gráfica muestra la depreciación de un automóvil típico. El precio de compra inicial se representa como 100%.

a) Miembro 1 del equipo: determina el periodo de 1 año, que es cuando un automóvil se deprecia más. A partir de la gráfica, estima el porcentaje que se deprecia un automóvil durante este periodo.

b) Miembro 2 del equipo: determina entre cuáles años, la depreciación aparece lineal o casi lineal.

c) Miembro 3 del equipo: determina entre cuáles 2 años, la depreciación es la más baja.

d) Como equipo, estimen la pendiente del segmento de recta del año 0 al año 1. Expliquen qué significa esto en términos de tasa de cambio.



Ejercicios de repaso acumulativo

[1.4] **84.** Evalúa $\dfrac{-6^2 - 32 \div 2 \div |-8|}{5 - 3 \cdot 2 - 4 \div 2^2}$.

Resuelve cada ecuación.

[2.1] **85.** $\dfrac{1}{4}(x + 3) + \dfrac{1}{5}x = \dfrac{2}{3}(x - 2) + 1$

86. $2.6x - (-1.4x + 3.4) = 6.2$

[2.4] **87. Trenes** Dos trenes parten de Chicago, Illinois, y viajan en la misma dirección a lo largo de vías paralelas. El primer tren sale 3 horas antes que el segundo, y su rapidez es 15 millas por hora más rápido que el segundo. Determina la rapidez de cada tren, si están apartados por 270 millas 3 horas después de que el segundo tren sale de Chicago.

[2.6] **88.** Resuelve:

a) $|2x + 1| > 5$.

b) $|2x + 1| < 5$.

EXAMEN DE MITAD DE CAPÍTULO: SECCIONES 3.1-3.4

Para averiguar qué tan bien entiendes el material del capítulo hasta este punto, resuelve esta breve evaluación. Las respuestas, y las secciones donde el material se discutió inicialmente, se proporcionan en la parte final del libro. Revisa cualquier pregunta que respondas de manera incorrecta.

1. ¿En qué cuadrante se ubica el punto (−3.5, −4.2)?

Grafica cada ecuación en los ejercicios 2-5.

2. $y = 3x + 2$

3. $y = -x^2 + 3$. Usa los siguientes valores para x: $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ y 3.

4. $y = |x| - 4$. Usa los siguientes valores para x: $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ y 3.

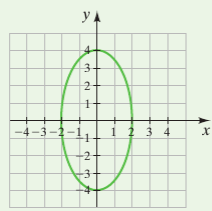
5. $y = \sqrt{x - 4}$. Usa los siguientes valores para x: 4, 5, 8, y 13.

6. a) ¿Qué es una relación?
b) ¿Qué es una función?
c) ¿Toda relación es una función? Explica.
d) ¿Toda función es una relación? Explica.

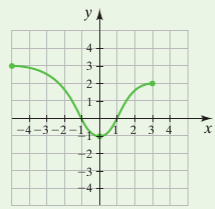
En los ejercicios 7-9, determina cuáles de las siguientes relaciones también son funciones. Proporciona el dominio y el rango de cada relación o función.

7. $\{(1, 5), (2, -3), (7, -1), (-5, 6)\}$

8.



9.



10. Si $g(x) = 2x^2 + 8x - 13$, determina $g(-2)$.

11. La altura, h, en pies de una manzana lanzada desde lo alto de un edificio es

$$h(t) = -6t^2 + 3t + 150$$

donde t es tiempo en segundos. Determina la altura de la manzana, 3 segundos después de que se lanza.

12. Escribe la ecuación $7(x + 3) + 2y = 3(y - 1) + 18$ en forma estándar.

En los ejercicios 13-15, elabora la gráfica de cada ecuación.

13. $x + 3y = -3$

14. $x = -4$

15. $y = 5$

16. **Ganancia** La ganancia diaria, en dólares, para una compañía de zapatos es $p(x) = 30x - 660$, donde x es el número de pares de zapatos fabricados y vendidos.

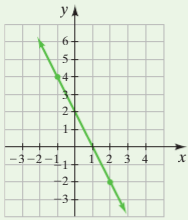
a) Dibuja una gráfica de ganancia contra el número de pares de zapatos vendidos (para hasta 40 pares).

b) Determina el número de pares de zapatos que deben venderse para que la compañía quede tablas.

c) Determina el número de pares de zapatos que deben venderse para que la compañía obtenga una ganancia diaria de $360.

17. Determina la pendiente de la recta que pasa a través de $(9, -2)$ y $(-7, 8)$.

18. Escribe la ecuación de la recta dada en la gráfica que se muestra.



19. Escribe la ecuación $-3x + 2y = 18$ en forma pendiente-intersección con el eje de las y. Determina la pendiente y la intersección con el eje de las y.

20. Si la gráfica de $y = 5x - 3$ se traslada hacia arriba 4 unidades, determina

a) la pendiente de la gráfica trasladada.

b) la intersección con el eje de las y de la gráfica trasladada.

c) la ecuación de la gráfica trasladada.

3.5 La forma punto-pendiente de una ecuación lineal

1 **Comprensión de la forma punto-pendiente de una ecuación lineal**

2 **Uso de la forma punto-pendiente, para construir modelos a partir de gráficas**

3 **Reconocimiento de rectas paralelas y perpendiculares**

1 Comprensión de la forma punto-pendiente de una ecuación lineal

La **forma punto-pendiente** de una recta, se usa para determinar la ecuación de la recta cuando se conoce un *punto* sobre la recta y la *pendiente* de la recta. La forma punto-pendiente puede desarrollarse, a partir de la ecuación para la pendiente entre cualesquier dos puntos (x, y) y (x_1, y_1) sobre una recta, como se muestra en la **Figura 3.58**.

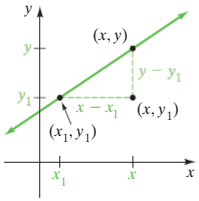


FIGURA 3.58

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación por $x - x_1$, se obtiene

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Forma punto-pendiente

La **forma punto-pendiente de una ecuación lineal** es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

donde m es la *pendiente* de la recta y (x_1, y_1) es un *punto específico* sobre la recta.

EJEMPLO 1 Usa la forma punto-pendiente para escribir la ecuación de la recta que pasa a través del punto $(-4, 3)$ y tiene pendiente -2. Luego escribe la ecuación en forma pendiente-intersección con el eje de las y.

Solución Dado que se proporciona un *punto* sobre la recta y la *pendiente* de la recta, comienza por usar la forma punto-pendiente. El punto sobre la recta es $(-4, 3)$, de modo que $x_1 = -4$ y $y_1 = 3$. La pendiente es -2, así que $m = -2$.

$$\begin{array}{rcl} y - y_1 & = & m(x - x_1) \\ \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\ y - 3 & = & -2(x - (-4)) \\ y - 3 & = & -2(x + 4) \end{array}$$

La ecuación de la recta, en forma punto-pendiente, es $y - 3 = -2(x + 4)$. Para escribir la ecuación en forma pendiente-intersección con el eje de las y, resuelve la ecuación para y.

$$\begin{aligned} y - 3 &= -2x - 8 \\ y &= -2x - 5 \end{aligned}$$

La forma pendiente-intersección con el eje de las y de la ecuación es $y = -2x - 5$.

Ahora resuelve el ejercicio 7

La forma punto-pendiente también se puede usar para determinar la ecuación de una recta cuando se proporcionan dos puntos sobre la recta. Esto se muestra en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Usa la forma punto-pendiente para escribir la ecuación de la recta que pasa a través de los puntos $(2, 3)$ y $(1, 4)$. Luego escribe la ecuación en forma pendiente-intersección con el eje de las y.

Solución Aunque no se proporciona la pendiente de la recta, se pueden usar los dos puntos dados para determinar la pendiente. Después se puede proceder como se hizo en el ejemplo 1. Se tomará a $(2, 3)$ como (x_1, y_1) y $(1, 4)$ como (x_2, y_2).

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 3}{1 - 2} = \frac{1}{-1} = -1$$

La pendiente, m, es -1. Ahora debes elegir uno de los dos puntos dados para usar como (x_1, y_1) en la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta. Se elegirá $(2, 3)$. Se tiene $m = -1$, $x_1 = 2$, y $y_1 = 3$.

$$\begin{array}{rcll} y - y_1 & = & m(x - x_1) & \\ \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow & \\ y - 3 & = & -1(x - 2) & \text{Forma punto-pendiente.} \\ y - 3 & = & -x + 2 & \text{Propiedad distributiva.} \\ y & = & -x + 5 & \text{Forma pendiente-intersección con el eje de las } y. \end{array}$$

La gráfica de $y = -x + 5$ se muestra en la **Figura 3.59**. Observa que la intersección con el eje de las y de esta recta está en 5, la pendiente es -1 y la recta pasa a través de los puntos $(2, 3)$ y $(1, 4)$.

Ahora resuelve el ejercicio 13

Comprende el Álgebra

Cuando se usa la forma punto-pendiente y tienes varios puntos disponibles, puedes usar cualquiera de los puntos dados. Debes intentar usar el punto que haga tus cálculos más sencillos.

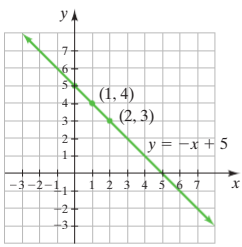


FIGURA 3.59

2 Uso de la forma punto-pendiente, para construir modelos a partir de gráficas

Ahora se observará una aplicación donde se usa la forma punto-pendiente para determinar una función que modele una situación dada.

EJEMPLO 3 **Quema de calorías** El número de calorías quemadas en 1 hora de paseo en bicicleta, es una función lineal de la rapidez de la bicicleta. Una persona que viaja a 12 mph, quemará alrededor de 564 calorías en 1 hora; y si viaja a 18 mph, quemará aproximadamente 846 calorías en 1 hora. Esta información se muestra en la **Figura 3.60** de la siguiente página.



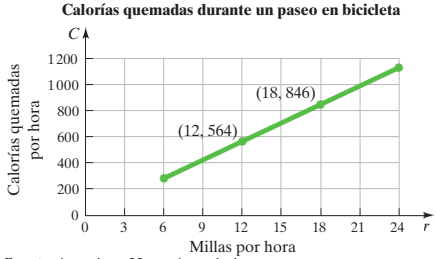


FIGURA 3.60 *Fuente:* American Heart Association

a) Determina una función lineal que puede usarse para estimar el número de calorías, C, quemadas en 1 hora cuando se pasea en bicicleta a r mph, para $6 \le r \le 24$.

b) Usa la función determinada en el inciso **a)**, para estimar el número de calorías quemadas en 1 hora cuando se pasea en bicicleta a 20 mph.

c) Usa la función determinada en el inciso **a)**, para estimar la rapidez a la cual debe pasearse en bicicleta para quemar 800 calorías en 1 hora.

Solución

a) Entiende y Traduce Se usarán las variables r (para tasa) y C (para calorías), en lugar de x y y, respectivamente. Para determinar la función necesaria, se usarán los puntos (12, 564) y (18, 846), y se procederá como se hizo en el ejemplo 2. Primero se calculará la pendiente y después se usará la forma punto-pendiente para determinar la ecuación de la recta.

Realizar

$$m = \frac{C_2 - C_1}{r_2 - r_1} = \frac{846 - 564}{18 - 12} = \frac{282}{6} = 47$$

Ahora escribe la ecuación usando la forma punto-pendiente. Se elegirá el punto (12, 564) para (r_1, C_1).

$$\begin{aligned} C - C_1 &= m(r - r_1) \\ C - 564 &= 47(r - 12) \quad \text{Forma punto-pendiente.} \\ C - 564 &= 47r - 564 \\ C &= 47r \quad \text{Forma pendiente-intersección con el eje de las } y. \end{aligned}$$

Responde Dado que el número de calorías quemadas, C, es una función de la tasa, r, la función que se busca es:

$$C(r) = 47r$$

b) Para estimar el número de calorías quemadas en 1 hora mientras se pasea en bicicleta a 20 mph, se sustituye 20 por r en la función.

$$\begin{aligned} C(r) &= 47r \\ C(20) &= 47(20) = 940 \end{aligned}$$

Por tanto, mientras se pasea en bicicleta a 20 mph durante 1 hora, se queman 940 calorías.

c) Para estimar la rapidez a la cual una se debe pasear en bicicleta para quemar 800 calorías en 1 hora, sustituye 800 por $C(r)$ en la función.

$$\begin{aligned} C(r) &= 47r \\ 800 &= 47r \\ \frac{800}{47} &= r \\ r &\approx 17.02 \end{aligned}$$

Por tanto, la persona necesitaría pasear en bicicleta más o menos a 17.02 mph para quemar 800 calorías en 1 hora.

Ahora resuelve el ejercicio 61

En el ejemplo 3, la función fue $C(r) = 47r$. La gráfica de esta función tiene una pendiente de 47 y una intersección con el eje de las y en (0, 0). Si la gráfica en la **Figura 3.60** de la página 200 se extiende hacia la izquierda, intersecaría el origen. Esto tiene sentido, pues una razón de 0 millas por hora, resultaría en 0 calorías quemadas.

3 Reconocimiento de rectas paralelas y perpendiculares

La **Figura 3.61** muestra dos rectas *paralelas*.

Comprende el Álgebra

- Las rectas paralelas nunca intersecan y tienen la misma pendiente.
- Las rectas perpendiculares intersecan en ángulos rectos y tienen pendientes que son recíprocos negativos.

Rectas paralelas

Dos rectas son **paralelas** cuando tienen la misma pendiente. Cualesquiera dos rectas verticales son mutuamente paralelas.

Todas las rectas verticales son paralelas, aun cuando su pendiente sea indefinida.

Rectas paralelas

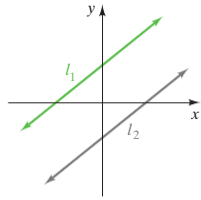


FIGURA 3.61

Rectas perpendiculares

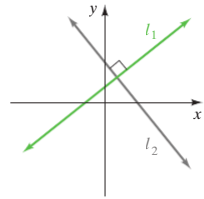


FIGURA 3.62

La **Figura 3.62** ilustra rectas perpendiculares. Dos rectas son *perpendiculares* cuando intersecan en ángulos rectos (o 90°).

Comprende el Álgebra

El producto de un número distinto de cero, a, y su recíproco negativo, $-\frac{1}{a}$, siempre es -1.

$$a\left(-\frac{1}{a}\right) = -1$$

Rectas perpendiculares

Dos rectas son **perpendiculares** cuando sus pendientes son *recíprocos negativos*. Cualquier recta vertical es perpendicular con cualquier recta horizontal.

Para cualquier número distinto de cero, a, su **recíproco negativo**, es $\frac{-1}{a}$ o $-\frac{1}{a}$. Por ejemplo, el recíproco negativo de 2 es $\frac{-1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$. El producto de cualquier número distinto de cero y su recíproco negativo es -1.

EJEMPLO 4 Dos puntos sobre la recta l_1 son (0, 2) y (3, 4). Dos puntos sobre la recta l_2, son (−2, 4) y (2, −2). Al comparar sus pendientes, determina si l_1 y l_2 son rectas paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos.

Solución Primero determina la pendiente m_1 de l_1.

$$m_1 = \frac{4-2}{3-0} = \frac{2}{3}$$

Por tanto, la pendiente de la primera recta es $\frac{2}{3}$. A continuación, determina la pendiente m_2 de l_2.

$$m_2 = \frac{-2-4}{2-(-2)} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

En consecuencia, la pendiente de la segunda recta es $-\frac{3}{2}$. Dado que las pendientes no son iguales, las rectas no son paralelas. Las pendientes son recíprocos negativos una de otra. Observa que

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$$

Puesto que las pendientes son recíprocos negativos mutuos, las rectas son perpendiculares.

Ahora resuelve el ejercicio 23

EJEMPLO 5 Determina la ecuación de la recta que contiene el punto $(3, -2)$ y es perpendicular a la recta, cuya ecuación es $y = \frac{1}{2}x - 1$. Escribe la ecuación usando notación de función.

Solución Se proporciona un *punto* sobre la recta y se puede usar la ecuación de la recta perpendicular para determinar la *pendiente* de la recta. En consecuencia, se comenzará con la forma punto-pendiente. La pendiente de la recta perpendicular es $\frac{1}{2}$. Como las pendientes de recta perpendiculares son recíprocos negativos mutuos, se usará $m = -2$. También se proporciona el punto (3, 2), de modo que se usará $x_1 = 3$ y $y_1 = -2$.

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - (-2) &= -2(x - 3) \\ y + 2 &= -2x + 6 \\ y &= -2x + 4 \end{aligned}$$

La ecuación escrita en forma pendiente-intersección con el eje de las y, es $y = -2x + 4$. Para escribir la ecuación usando notación de función, sustituye y con $f(x)$. Por tanto, la ecuación escrita en notación de función es $f(x) = -2x + 4$. Las gráficas de $y = \frac{1}{2}x - 1$ (en verde) y $f(x) = -2x + 4$ (en gris), se muestran ambas en la **Figura 3.63**. Observa que la recta gris es perpendicular a la recta verde, y la recta gris contiene el punto (3, −2).

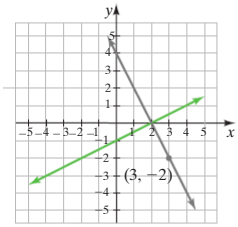


FIGURA 3.63

Ahora resuelve el ejercicio 37

EJEMPLO 6 Determina la ecuación de la recta que contiene el punto $(2, -3)$ y es paralela a la recta cuya ecuación es $5x + 2y = 8$. Escribe la ecuación en forma estándar.

Solución Se proporciona un *punto* sobre la recta, y se puede usar la ecuación de la recta paralela para determinar la *pendiente* de la recta. Comienza por resolver la ecuación dada en términos de y.

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= 8 \\ 2y &= -5x + 8 \\ \frac{2y}{2} &= \frac{-5x + 8}{2} \\ y &= -\frac{5}{2}x + 4 \end{aligned}$$

La pendiente de la recta paralela es $-\frac{5}{2}$. Como las pendi entes de rectas paralelas son iguales, se usará $m = -\frac{5}{2}$. También se proporciona el punto $(2, -3)$, así que se usará $x_1 = 2$ y $y_1 = -3$.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-3) = -\frac{5}{2}(x - 2)$$

$$y + 3 = -\frac{5}{2}(x - 2)$$

Comprende el Álgebra

Formas de las ecuaciones lineales:

1. Notación de Función: $f(x) = ax + b$
2. Forma estándar: $ax + by = c$
3. Forma pendiente-ordenada: $y = mx + b$
4. Forma punto-pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$

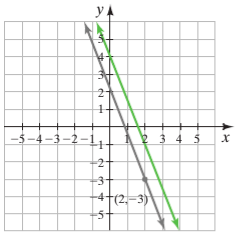


FIGURA 3.64

Para escribir la ecuación en la forma estándar, primero se elimina la fracción al multiplicar ambos lados por 2.

$$\begin{aligned} 2(y+3) &= 2\left[-\frac{5}{2}(x-2)\right] \\ 2(y+3) &= -5(x-2) \\ 2y+6 &= -5x+10 \\ 5x+2y+6 &= 10 \\ 5x+2y &= 4 \end{aligned}$$

La ecuación en forma estándar es $5x + 2y = 4$. Las gráficas de $5x + 2y = 8$ (en verde) y $5x + 2y = 4$ (en gris), se muestran ambas en la **Figura 3.64**. Observa que la recta gris es paralela a la recta verde y que la recta gris contiene el punto $(2, -3)$.

Ahora resuelve el ejercicio 43

La siguiente tabla resume las tres formas de una ecuación lineal que estudiaste y menciona cuándo puede ser útil cada una.

Formas de ecuaciones lineales

Forma estándar: $ax + by = c$	Se usa para graficar una ecuación lineal al determinar las coordenadas al origen de una gráfica.
Forma pendiente-intersección con el eje de las y: $y = mx + b$	Se usa para determinar la pendiente y la intersección con el eje de las y de una línea. Se usa para determinar la ecuación de una recta, dadas su pendiente e intersección con el eje de las y. Se usa para determinar si dos rectas son paralelas o perpendiculares. Se usa para graficar una ecuación lineal usando la pendiente y la intersección con el eje de las y.
Forma punto-pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$	Se usa para determinar la ecuación de una recta cuando se proporciona la pendiente, m, de una recta y un punto (x_1, y_1) sobre la recta. Se usa para determinar la ecuación de una recta cuando se proporcionan dos puntos sobre la recta.

3.5 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

estándar punto-pendiente pendiente-intersección con el eje de las y paralelas perpendicular recíprocos

1. Dos rectas que tienen la misma pendiente son rectas _____.
2. Las rectas perpendiculares tienen pendientes que son _____ negativos una de otra.
3. La forma _____ de la ecuación de una recta, es $y - y_1 = m(x - x_1)$.
4. La forma _____ de la ecuación de una recta, es $y = mx + b$.

Practica tus habilidades

Usa la forma punto-pendiente para determinar la ecuación de una recta con las propiedades dadas. Luego escribe la ecuación en forma pendiente-intersección con el eje de las y.

5. Pendiente = 2, a través de (1, 7)
6. Pendiente = 5, a través de (7, 2)
7. Pendiente = −4, a través de (−6, 1)
8. Pendiente = −3, a través de (1, −2)
9. Pendiente = $-\frac{1}{2}$, a través de (4, −1)
10. Pendiente = $-\frac{7}{8}$, a través de (−8, −2)

11. A través de $(4, -1)$ y $(1, 5)$

12. A través de $(-11, 8)$ y $(-7, -4)$

13. A través de $(2, -3)$ y $(-6, 9)$

14. A través de $(4, -3)$ y $(6, -2)$

15. Pendiente $= \frac{1}{2}$, a través de $(-1, -5)$

16. Pendiente $= -\frac{3}{2}$, a través de $(7, -4)$

17. A través de $(1, 0)$ y $(-4, -1)$

18. A través de $(4, -2)$ y $(1, 9)$

Se proporcionan dos puntos sobre l_1 y dos puntos sobre l_2. Determina si l_1 es paralela a l_2, l_1 es perpendicular a l_2, o ninguna de las dos opciones.

19. l_1: $(3, 2)$ y $(-1, -2)$; l_2: $(2, 0)$ y $(3, -1)$

20. l_1: $(3, 5)$ y $(9, 1)$; l_2: $(4, 0)$ y $(6, 3)$

21. l_1: $(4, 6)$ y $(5, 7)$; l_2: $(-1, -1)$ y $(1, 4)$

22. l_1: $(-3, 4)$ y $(4, -3)$; l_2: $(-5, -6)$ y $(6, -5)$

23. l_1: $(-2, 0)$ y $(0, 2)$; l_2: $(-3, 0)$ y $(0, 3)$

24. l_1: $(7, 6)$ y $(3, 9)$; l_2: $(5, -1)$ y $(9, -4)$

Determina si las dos ecuaciones representan rectas que son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos opciones.

25. $y = -3x + 4$
$y = -3x - 2$

26. $y = \frac{3}{4}x - 1$
$y = -\frac{4}{3}x - 1$

27. $3x - 4y = 2$
$4x + 3y = 2$

28. $2x + 3y = 11$
$y = -\frac{2}{3}x + 4$

29. $2x - y = 4$
$-x + 4y = 4$

30. $6x + 2y = 8$
$4x - 5 = -y$

31. $3x - 4y = 1$
$6x - 8y = 7$

32. $2x - y = 4$
$3x + 6y = 18$

33. $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = 1$
$\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}y = -1$

34. $-\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{11}{12}$
$\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \frac{5}{6}$

Determina la ecuación de una recta con las propiedades dadas. Escribe la ecuación en la forma indicada.

35. A través de $(-2, 1)$ y paralela a la gráfica de $y = -5x + 2$ (forma pendiente-intersección con el eje de las y).

36. A través de $(4, -7)$ y paralela a la gráfica de $y = -3x + 1$ (forma pendiente-intersección con el eje de las y).

37. A través de $(1, -4)$ y perpendicular a la gráfica de $f(x) = \frac{1}{7}x + 2$ (forma pendiente-intersección con el eje de las y).

38. A través de $(-4, 1)$ y perpendicular a la gráfica de $f(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{7}{8}$ (forma pendiente-intersección con el eje de las y).

39. A través de $(3, -1)$ y paralela a la gráfica de $6x - 3y = 1$ (notación de función).

40. A través de $(-2, -3)$ y paralela a la gráfica de $5x + y = 8$ (notación de función).

41. A través de $(4, 5)$ y perpendicular a la gráfica de $2x - 8y = 3$ (notación de función).

42. A través de $(-1, 7)$ y perpendicular a la gráfica de $3x + 9y = 11$ (notación de función).

43. A través de $(-3, -5)$ y paralela a la gráfica de $2x - 5y = 7$ (forma estándar).

44. A través de $(3, -1)$ y paralela a la gráfica de $3x - 7y = 9$ (forma estándar).

45. A través de $(8, 3)$ y perpendicular a la gráfica de $2x + 7y = -15$ (forma estándar).

46. A través de $(-2, 5)$ y perpendicular a la gráfica de $3x - 4y = 1$ (forma estándar).

47. A través de $(-4, -7)$ y paralela a la recta con intersección con el eje de las x $(2, 0)$ e intersección con el eje de las y $(0, 3)$ (forma pendiente-intersección con el eje de las y).

48. A través de $(-3, 5)$ y paralela a la recta a través de los puntos $(-1, 4)$ y $(17, -2)$ (forma pendiente-intersección con el eje de las y).

49. A través de $(6, -11)$ y perpendicular a la recta que pasa a través de los puntos $(-4, 1)$ y $(-6, 4)$ (forma pendiente-intersección con el eje de las y).

50. A través de $(-2, 7)$ y perpendicular a la recta con intersección con el eje de las x $(-4, 0)$ e intersección con el eje de las y $(0, 5)$ (forma pendiente-intersección con el eje de las y).

Resolución de problemas

51. Caminadora El número de calorías quemadas en 1 hora en una caminadora, es función de la rapidez de la misma. Una persona que camina sobre una caminadora con una rapidez de 2.5 millas por hora, quemará alrededor de 210 calorías. A 6 millas por hora, la persona quemará aproximadamente 370 calorías. Sea C las calorías quemadas en 1 hora y s la rapidez de la caminadora.

a) Determina una función lineal $C(s)$ que se ajuste a los datos.

b) Estima las calorías quemadas por la persona en una caminadora en 1 hora, a una rapidez de 5 millas por hora.

52. Caminadora inclinada El número de calorías quemadas durante 1 hora en una caminadora yendo a rapidez constante, es función de la inclinación de la caminadora. A 4 millas por hora, una persona sobre una inclinación de 5° quemará 525 calorías. A 4 mph, sobre una inclinación de 15°, la persona quemará 880 calorías. Sea C las calorías quemadas y d los grados de inclinación de la caminadora.

a) Determina una función lineal $C(d)$ que se ajuste a los datos.

b) Determina el número de calorías quemadas por la persona en 1 hora, sobre una caminadora que va a 4 millas por hora y en una inclinación de 9°.

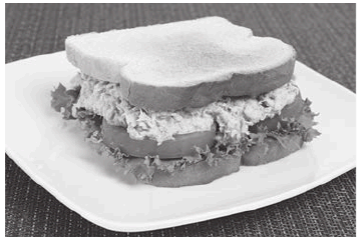
53. Carteras de diseñador La *demanda* de un producto es el número de artículos que el público quiere comprar a un precio dado. Supón que la demanda, d, de carteras de diseñador vendidas en 1 mes, es una función lineal del precio, p, para $\$150 \le p \le \$400$. Si el precio es \$200, entonces se venderán 50 carteras cada mes. Si el precio es \$300, solamente se venderán 30 carteras.

a) Con pares ordenados de la forma (p, d), escribe una ecuación para la demanda, d, como función del precio, p.

b) Con la función del inciso **a)**, determina la demanda cuando el precio de las carteras es \$260.

c) Con la función del inciso **a)**, determina el precio cobrado si la demanda por carteras es 45.

54. Demanda de nuevos sándwiches El gerente de un restaurante determina que la demanda, d, de un nuevo sándwich, es una función lineal del precio, p, para $\$0.80 \le p \le \$4.00$. Si el precio es \$1.00, entonces se venderán 530 sándwiches cada mes. Si el precio es \$2.00, solamente se venderán 400 sándwiches cada mes.



a) Con pares ordenados de la forma (p, d), escribe una ecuación para la demanda, d, como una función del precio, p.

b) Con la función del inciso **a)**, determina la demanda cuando el precio del sándwich es de \$2.60.

c) Con la función del inciso **a)**, determina el precio cobrado, si la demanda por sándwiches es de 244 sándwiches.

55. Suministro de cometas El *suministro* de un producto, es el número de artículos que un vendedor quiere vender a un precio dado. La fabricante de un nuevo cometa para niños, determina que el número de cometas que quiere suministrar, s, es una función lineal del precio de venta p para $\$2.00 \le p \le \$4.00$. Si un cometa se vende por \$2.00, entonces se suministrarán 130 por mes. Si un cometa se vende por \$4.00, entonces se suministrarán 320 por mes.

a) Con pares ordenados de la forma (p, s), escribe una ecuación para el suministro, s, como función del precio, p.

b) Con la función del inciso **a)**, determina el suministro cuando el precio de un cometa es de \$2.80.

c) Con la función del inciso **a)**, determina el precio pagado, si el suministro es de 225 cometas.

56. Suministro de carriolas El fabricante de carriolas determina que el suministro, s, es una función lineal del precio de venta, p, para $\$200 \le p \le \$300$. Si una carriola se vende por \$210.00, entonces se suministrarán 20 carriolas por mes. Si una carriola se vende por \$230.00, entonces se suministrarán 30 carriolas por mes.



a) Con pares ordenados de la forma (p, s), escribe una ecuación para el suministro, s, como una función del precio, p.

b) Con la función del inciso **a)**, determina el suministro, cuando el precio de una carriola es de \$220.00.

c) Con la función del inciso **a)**, determina el precio de venta, si el suministro es de 35 carriolas.

57. Obra teatral de bachillerato El ingreso, i, de una obra teatral de bachillerato, es una función lineal del número de boletos vendidos, t.

Cuando se venden 80 boletos, el ingreso es de $1000. Cuando se venden 200 boletos, el ingreso es de $2500.



a) Usa estos datos para escribir el ingreso, i, como función del número de boletos vendidos, t.

b) Usa la función del inciso **a)** para determinar el ingreso si se venden 120 boletos.

c) Si el ingreso es de $2200, ¿cuántos boletos se vendieron?

58. Millaje de gasolina de un automóvil El millaje de gasolina, m, de un automóvil específico, es una función lineal de la rapidez, v, a la que se conduce el vehículo, para $30 \leq v \leq 60$. Si el automóvil se conduce a una razón de 30 mph, el millaje de gasolina del automóvil es de 35 millas por galón. Si el automóvil se conduce a 60 mph, el millaje de gasolina del automóvil es de 20 millas por galón.

a) Usa estos datos para escribir el millaje de gasolina, m, como una función de la rapidez, v.

b) Usa la función del inciso **a)** para determinar el millaje de gasolina, si el automóvil se conduce a una rapidez de 48 mph.

c) Usa la función del inciso **a)** para determinar la rapidez a la que debe conducirse el automóvil, para obtener un millaje de gasolina de 40 millas por galón.

59. Registro automotriz La tarifa de registro, r, para un vehículo en cierta región, es una función lineal del peso del vehículo, w, para $1000 \leq w \leq 6000$ libras. Cuando el peso es 2000 libras, la tarifa de registro es de $30. Cuando el peso es 4000 libras, la tarifa de registro es de $50.

a) Usa estos datos para escribir la tarifa de registro, r, como una función del peso del vehículo, w.

b) Usa la función del inciso **a)** para determinar la tarifa de registro para un Ford Mustang, si el peso del vehículo es de 3613 libras.

c) Si el costo de registrar un vehículo es de $60, determina el peso del vehículo.

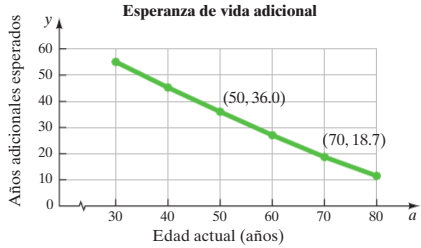
60. Salario de un conferencista Supón que el salario anual de un catedrático en la Universidad de Chaumont es una función lineal del número de años de experiencia docente. A un catedrático con 9 años de experiencia docente, le pagan $41350. A un catedrático con 15 años de experiencia docente, le pagan $46687.

a) Usa estos datos para escribir el salario anual de un catedrático, s, como una función del número de años de experiencia docente, n.

b) Usa la función del inciso **a)** para determinar el salario anual de un catedrático con 10 años de experiencia docente.

c) Usa la función del inciso **a)** para estimar el número de años de experiencia docente que debe tener un catedrático para obtener un salario anual de $44908.

61. Esperanza de vida Como se ve en la siguiente gráfica, el número esperado de años de vida restantes de una persona, y, *se aproxima* a una función lineal. El número esperado de años restantes, es una función de la edad actual de la persona, a, para $30 \leq a \leq 80$.



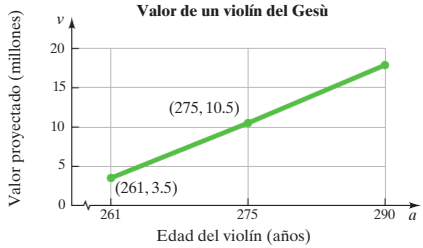
Fuente: TIAA/CREF

a) Con los dos puntos sobre la gráfica, determina la función $y(a)$ que puede usarse para aproximar la gráfica.

b) Con la función del inciso **a),** estima la esperanza de vida adicional de una persona que actualmente tiene 37 años de edad.

c) Con la función del inciso **a)**, estima la edad actual de una persona que tenga una esperanza de vida adicional de 25 años.

62. Violín Guarneri del Gesù La siguiente gráfica muestra que el valor proyectado, v, de un violín Guarneri del Gesù, es una función lineal de la edad, a, en años, del violín, para $261 \leq a \leq 290$.



Fuente: Machold Rare Violins, LTD

a) Determina la función $v(a)$ representada por esta recta.

b) Con la función del inciso **a)**, determina el valor proyectado de un violín Guarneri del Gesù de 265 años de edad.

c) Con la función del inciso **a)**, determina la edad de un violín Guarneri del Gesù con un valor proyectado de $15 millones.



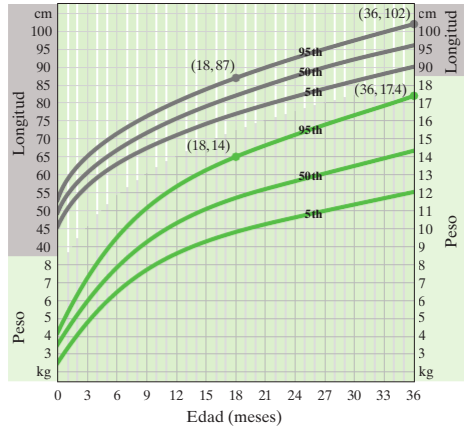
Un violín Guarneri del Gesù

63. Pesos de niños El diagrama de la derecha muestra percentiles para longitudes (estaturas) y pesos de niños, desde el nacimiento hasta los 36 meses de edad. Ciertas porciones de las gráficas pueden aproximarse con una ecuación lineal. Por ejemplo, la gráfica que representa el percentil 95 de pesos de niños (la parte superior roja) de los 18 a los 36 meses de edad, es aproximadamente lineal.

a) Usa los puntos que se muestran en la gráfica del percentil 95 para escribir el peso, w, como una función lineal de la edad, a, para niños entre 18 y 36 meses de edad.

b) Usa la función del inciso **a)** para estimar el peso de un niño de 22 meses de edad, que está en el percentil 95 para peso. Compara tu respuesta con la gráfica, para ver si la gráfica respalda tu respuesta.

Niños: del nacimiento a los 36 meses
Percentiles de longitud para la edad y peso para la edad



Fuente: National Center for Health Statistics

64. Longitudes de niños El diagrama del ejercicio 63, muestra que la gráfica que representa el percentil 95 de las longitudes de niños (la línea superior gris) de los 18 meses a los 36 meses de edad, es aproximadamente lineal.

a) Usa los puntos que se muestran en la gráfica del percentil 95 para escribir la longitud, l, como una función lineal de la edad, a, para niños entre las edades de 18 y 36 meses.

b) Usa la función del inciso **a)** para estimar la longitud de un niño de 21 meses de edad, que está en el percentil 95. Compara tu respuesta con la gráfica, para ver si la gráfica respalda tu respuesta.

Actividad grupal

65. La gráfica de la derecha, muestra el crecimiento de la circunferencia de la cabeza de una niña. La línea central es la circunferencia de la cabeza de todas las niñas para la edad dada, mientras que las líneas verdes representan los límites superior e inferior del rango normal. Discute y responde en equipo las siguientes preguntas.

a) Explica por qué la gráfica de la circunferencia promedio de la cabeza representa una función.

b) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál es la variable dependiente?

c) ¿Cuál es el dominio de la gráfica de la circunferencia promedio de la cabeza? ¿Cuál es el rango de la gráfica de la circunferencia promedio de la cabeza?

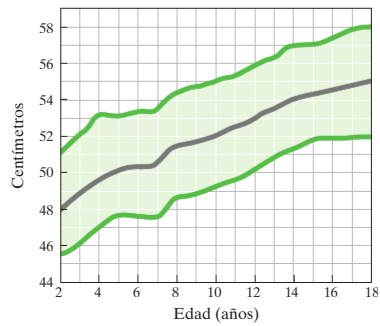
d) ¿Qué intervalo se considera normal para niñas de 18 años de edad?

e) Para esta gráfica, ¿la circunferencia de la cabeza es una función de la edad, o la edad es una función de la circunferencia de la cabeza? Explica tu respuesta.

f) Estima la circunferencia promedio de la cabeza de una niña a las edades de 10 y 14 años.

g) Esta gráfica parece ser casi lineal. Determina una ecuación o función que pueda usarse para estimar la recta central entre (2, 48) y (18, 55).

Circunferencia de la cabeza



Fuente: National Center for Health Statistics

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.5] **66.** Resuelve la desigualdad $6 - \frac{1}{2}x > 2x + 5$ e indica la solución en notación de intervalo.

67. ¿Qué debes hacer cuando multiplicas por o divides, ambos lados de una desigualdad, entre un número negativo?

[3.2] **68.** **a)** ¿Qué es una relación?
b) ¿Qué es una función?
c) Dibuja una gráfica que sea una relación, mas no una función.

69. Determina el dominio y el rango de la función $\{(4,7),(5,-4),(3,2),(6,-1)\}$.

3.6 El Álgebra de las funciones

1 **Determinación de la suma, la resta, el producto y el cociente de funciones**
2 **Gráficas de la suma de funciones**

1 Determinación de la suma, la resta, el producto y el cociente de funciones

En esta sección, se introducen algunas formas en las que pueden combinarse las funciones. Considera las funciones $f(x) = x - 3$ y $g(x) = x^2 + 2x$. Se determinan $f(5)$ y $g(5)$ del modo siguiente:

$$f(x) = x - 3 \qquad g(x) = x^2 + 2x$$
$$f(5) = 5 - 3 = 2 \qquad g(5) = 5^2 + 2(5) = 35$$

A continuación, si observas la suma de las dos funciones, se obtiene:

$$\begin{array}{ccccc} f(x) & + & g(x) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (x-3) & + & (x^2+2x) & = & x^2+3x-3 \end{array}$$

Esta nueva función se designa como $(f+g)(x)$ y se escribe:

$$(f+g)(x) = x^2 + 3x - 3$$

Se determina $(f+g)(5)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(f+g)(5) &= 5^2 + 3(5) - 3 \\ &= 25 + 15 - 3 = 37\end{aligned}$$

Observa que

$$\begin{aligned} f(5) + g(5) &= (f+g)(5) \\ 2 + 35 &= 37 \quad \text{Verdadero}\end{aligned}$$

De hecho, para cualquier número real sustituido por x podrás darte cuenta que:

$$f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

Una notación similar existe para la resta, la multiplicación y la división de funciones.

Comprende el Álgebra

El dominio de una función es el conjunto de valores que pueden usarse para la variable independiente. Por ejemplo, el dominio de:

- $f(x) = 2x^2 - 6x + 5$ son todos los números reales, pues cualquier número real se puede sustituir por x.
- $g(x) = \frac{1}{x-8}$ son todos los números reales excepto el 8, pues $x = 8$ conduce a $\frac{1}{0}$, que es indefinido.

Operaciones sobre funciones

Si $f(x)$ representa una función, $g(x)$ representa una segunda función, y x está en el dominio de ambas funciones, entonces las siguientes operaciones o funciones pueden realizarse:

Suma de funciones: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
Resta de funciones: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
Producto de funciones: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
Cociente de funciones: $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, siempre que $g(x) \neq 0$

EJEMPLO 1 Si $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ y $g(x) = x^2 + 5x - 4$, determina:

a) $(f + g)(x)$ **b)** $(f - g)(x)$

c) $(g - f)(x)$ **d)** $(f - g)(x) = (g - f)(x)$?

Solución

a) $$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &= (2x^2 - 3x - 1) + (x^2 + 5x - 4)\\ &= 2x^2 - 3x - 1 + x^2 + 5x - 4\\ &= 3x^2 + 2x - 5\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}(f - g)(x) &= f(x) - g(x)\\ &= (2x^2 - 3x - 1) - (x^2 + 5x - 4)\\ &= 2x^2 - 3x - 1 - x^2 - 5x + 4\\ &= x^2 - 8x + 3\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}(g - f)(x) &= g(x) - f(x)\\ &= (x^2 + 5x - 4) - (2x^2 - 3x - 1)\\ &= x^2 + 5x - 4 - 2x^2 + 3x + 1\\ &= -x^2 + 8x - 3\end{aligned}$$

d) Al comparar las respuestas a los incisos **b)** y **c)**, se ve que:

$$(f - g)(x) \neq (g - f)(x)$$

Ahora resuelve el ejercicio 11

EJEMPLO 2 Si $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = x - 2$, determina:

a) $(f - g)(6)$ **b)** $(f \cdot g)(5)$ **c)** $(f/g)(8)$

Solución

a) $$\begin{aligned}(f - g)(x) &= f(x) - g(x)\\ &= (x^2 - 4) - (x - 2)\\ &= x^2 - x - 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f - g)(6) &= 6^2 - 6 - 2\\ &= 36 - 6 - 2\\ &= 28\end{aligned}$$

También se podría determinar la solución de la siguiente manera:

$$f(x) = x^2 - 4 \qquad g(x) = x - 2$$

$$f(6) = 6^2 - 4 = 32 \qquad g(6) = 6 - 2 = 4$$

$$\begin{aligned}(f - g)(6) &= f(6) - g(6)\\ &= 32 - 4 = 28\end{aligned}$$

b) Se determinará $(f \cdot g)(5)$ usando el hecho de que

$$(f \cdot g)(5) = f(5) \cdot g(5)$$

$$f(x) = x^2 - 4 \qquad g(x) = x - 2$$

$$f(5) = 5^2 - 4 = 21 \qquad g(5) = 5 - 2 = 3$$

Por tanto, $f(5) \cdot g(5) = 21 \cdot 3 = 63$. En consecuencia, $(f \cdot g)(5) = 63$.

c) Se determinará $(f/g)(8)$ usando el hecho de que

$$(f/g)(8) = f(8)/g(8)$$

$$f(x) = x^2 - 4 \qquad g(x) = x - 2$$

$$f(8) = 8^2 - 4 = 60 \qquad g(8) = 8 - 2 = 6$$

Por tanto, $(f/g)(8) = f(8)/g(8) = 60/6 = 10$. En consecuencia, $(f/g)(8) = 10$.

Ahora resuelve el ejercicio 31

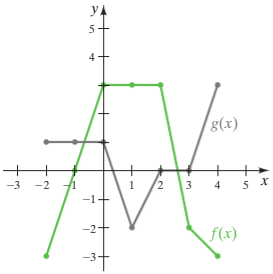


FIGURA 3.65

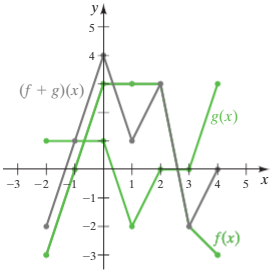


FIGURA 3.66

2 Gráficas de la suma de funciones

Ahora se explicará cómo se pueden graficar la suma, la resta, el producto o el cociente de dos funciones. La **Figura 3.65** muestra dos funciones, $f(x)$, ilustrada en verde, y $g(x)$, ilustrada en gris.

La siguiente tabla proporciona los valores enteros de x desde -2 hasta 4, los valores de $f(-2)$ a $f(4)$, y los valores de $g(-2)$ a $g(4)$. Estos valores se toman directamente de la **Figura 3.65**. Los valores de $(f+g)(-2)$ a $(f+g)(4)$ se determinan al sumar los valores de $f(x)$ y $g(x)$. La gráfica de $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ se ilustra en gris en la **Figura 3.66**.

x	$f(x)$	$g(x)$	$(f+g)(x)$
-2	-3	1	$-3 + 1 = -2$
-1	0	1	$0 + 1 = 1$
0	3	1	$3 + 1 = 4$
1	3	-2	$3 + (-2) = 1$
2	3	0	$3 + 0 = 3$
3	-2	0	$-2 + 0 = -2$
4	-3	3	$-3 + 3 = 0$

Se podría graficar la resta, el producto o el cociente de las dos funciones, usando una técnica similar. Por ejemplo, para graficar la función del producto $(f \cdot g)(x)$, podrías evaluar $(f \cdot g)(-2)$ de la siguiente manera:

$$(f \cdot g)(-2) = f(-2) \cdot g(-2)$$
$$= (-3)(1) = -3$$

Por tanto, la gráfica de $(f \cdot g)(x)$ tendría un par ordenado en $(-2, -3)$. Otros pares ordenados se determinarían mediante el mismo procedimiento.

En periódicos, revistas y en internet, con frecuencia se encuentran gráficas que muestran la suma de dos o más funciones. Las gráficas que muestran la suma de funciones, por lo general, se indican en una de tres maneras: gráficas de líneas, gráficas de barras o gráficas de líneas apiladas (o acumuladas). Los ejemplos del 3 al 5 muestran los tres métodos generales. Cada uno de estos ejemplos usará los mismos datos pertenecientes a colesterol.

EJEMPLO 3 **Gráfica de líneas** Denise mantiene un registro de su colesterol malo (lipoproteína de baja densidad, o LDL) y de su colesterol bueno (lipoproteína de alta densidad, o HDL), desde 2014 hasta 2018. La **Tabla 3.2** muestra sus LDL y HDL para estos años.

Tabla 3.2 **Colesterol**

	2014	2015	2016	2017	2018
LDL	220	240	140	235	130
HDL	30	40	70	35	40

a) Explica por qué los datos que consisten de los años y los valores de LDL son una función, y los datos que consisten de los años y los valores de HDL también son una función.

b) Dibuja una gráfica de líneas que muestre el LDL, el HDL y el colesterol total de 2014 a 2018. El colesterol total es la suma del LDL y el HDL.

c) Si L representa la cantidad de LDL y H representa la cantidad de HDL, demuestra que $(L+H)(2018) = 170$.

d) Al observar la gráfica dibujada en el inciso **b)**, determina los años en los cuales el LDL fue menor que 180.

Solución

a) Los datos que consisten de los años y los valores LDL son una función porque, para cada año, existe exactamente un valor LDL. Observa que el año es la variable independiente y el valor LDL es la variable dependiente. Los datos que consisten de los años y los valores HDL, son una función por la misma razón.

b) Para cualquier año dado, el colesterol total es la suma del LDL y el HDL para dicho año. Por ejemplo, para 2017, para determinar el colesterol total, suma $235 + 35 = 270$. La gráfica en la **Figura 3.67** muestra LDL, HDL y colesterol total para los años de 2014 a 2018.

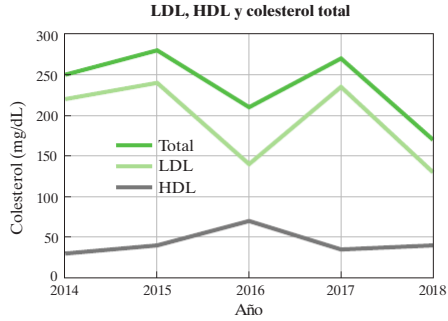


FIGURA 3.67

c) Para determinar LDL + HDL, o el colesterol total, se suman los dos valores para 2018.

$$\begin{aligned}(L + H)(2018) &= L(2018) + H(2018)\\ &= 130 + 40 = 170\end{aligned}$$

d) Al observar la gráfica dibujada en el inciso **b)**, se ve que los años en los que el LDL fue menor que 180, son 2016 y 2018.

Ahora resuelve el ejercicio 63a

EJEMPLO 4 Gráfica de barras

a) Con los datos dados en la **Tabla 3.2** de la página 210, dibuja una gráfica de barras que muestre el LDL, el HDL y el colesterol total para los años de 2014 a 2018.

b) Si L representa la cantidad de LDL y H representa la cantidad de HDL, usa la gráfica dibujada en el inciso **a)** para determinar $(L + H)(2015)$.

c) Al observar la gráfica dibujada en el inciso **a)**, determina en cuáles años el colesterol total fue menor que 220.

d) Al observar la gráfica dibujada en el inciso **a)**, estima el HDL en 2016.

Solución

a) Para obtener una gráfica de barras que muestre el colesterol total, se suma el HDL al LDL para cada año dado. Por ejemplo, para 2014, comienza por dibujar una gráfica hasta 220 para representar el LDL. Directamente, encima de dicha barra, se agrega una segunda barra de 30 unidades para representar el HDL. Esto lleva la barra total a $220 + 30$ o 250 unidades. El mismo procedimiento se usa para cada año de 2015 a 2018. La gráfica de barras se muestra en la **Figura 3.68**.

b) Al observar la gráfica de la **Figura 3.68**, se ve que $(L + H)(2015)$, o el colesterol total para 2015, es de aproximadamente 280.

c) Al observar la gráfica, se ve que el colesterol total fue menor que 220 en 2016 y 2018.

d) Para 2016, la barra de HDL comienza aproximadamente en 140 y termina más o menos en 210. La diferencia en estas cantidades, $210 - 140 = 70$, representa la cantidad de HDL en 2016. Por tanto, el HDL en 2016 fue de aproximadamente 70.

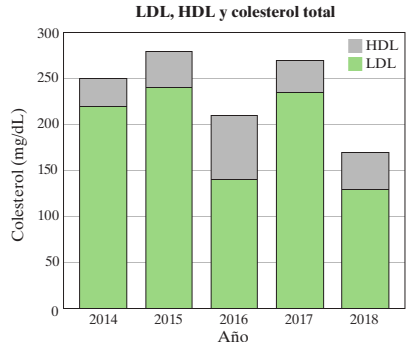


FIGURA 3.68

Ahora resuelve el ejercicio 63b

EJEMPLO 5 Gráfica de líneas apiladas

a) Con los datos de la **Tabla 3.2** de la página 210, dibuja una gráfica de líneas apiladas (o acumuladas) que muestre el LDL, el HDL y el colesterol total para los años 2014–2018.

b) Con la gráfica dibujada en el inciso **a)**, determina en cuáles años el colesterol total fue mayor que o igual que 200.

c) Con la gráfica dibujada en el inciso **a)**, estima la cantidad de HDL en 2018.

d) Con la gráfica del inciso **a)**, determina los años en los cuales el LDL fue mayor que o igual que 180, y el colesterol total fue menor que o igual que 250.

Solución

a) Para obtener una gráfica de líneas apiladas, comienza por dibujar una gráfica de líneas para representar el LDL. Esta es la misma gráfica de líneas usada en la **Figura 3.67** de la página 211. El área bajo esta gráfica de líneas (el área verde en la **Figura 3.69**) representa el LDL. A continuación, al ir año por año, se agrega el HDL al LDL para crear una segunda gráfica de líneas. Por ejemplo, en el año 2014, la segunda gráfica de líneas tiene un valor en $220 + 30$ o 250. El área entre las dos gráficas de líneas (el área gris en la **Figura 3.69**) representa el HDL, y el área total bajo la gráfica de líneas superior representa el colesterol total.

b) Al observar la gráfica, se ve que el colesterol total, indicado mediante la línea gris oscuro, fue mayor que o igual que 200 en 2014, 2015, 2016 y 2017.

c) Al observar el área de HDL de la gráfica, puedes ver que en 2018 el área de HDL comienza en aproximadamente 130 y termina en alrededor de 170. Si se restan, se obtiene $170 - 130 = 40$.

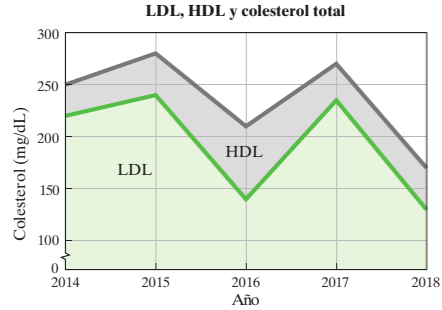


FIGURA 3.69

Por tanto, el HDL en 2018 es de aproximadamente 40. Si H representa la cantidad de HDL, entonces $H(2018) \approx 40$.

d) Al observar la gráfica, se puede determinar que el único año en el cual el LDL fue mayor o igual que 180, y el colesterol total fue menor que o igual que 250, fue 2014.

Ahora resuelve el ejercicio 63c

3.6 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

dominio	rango	$\dfrac{x^2}{2x-5}$	x^2+2x-5	x^2-2x+5	x^2-2x-5
$2x^3-5x^2$	reales	3	5	7	excepto

Para los ejercicios 1-6, sea $f(x)=x^2$ *y* $g(x)=2x-5$.

1. $(f-g)(x)=$ _____.
2. $(f-g)(2)=$ _____.
3. $(f+g)(x)=$ _____.
4. $(f+g)(2)=$ _____.
5. $(f\cdot g)(x)=$ _____.
6. $(f/g)(x)=$ _____.
7. El dominio de la función $f(x)=x-3$ es todos los números _____.
8. El dominio de la función $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ es todos los números reales _____ 3.

Practica tus habilidades

Para cada par de funciones, determina **a)** $(f+g)(x)$, **b)** $(f+g)(a)$, **c)** $(f-g)(x)$, *y* **d)** $(g-f)(x)$.

9. $f(x)=2x-7, g(x)=5x+1$
10. $f(x)=2x^2-3, g(x)=5x-2$
11. $f(x)=-3x^2+x-4, g(x)=x^3+3x^2$
12. $f(x)=4x^3+2x^2-x-1, g(x)=x^3-x^2+2x+6$
13. $f(x)=4x^3-3x^2-x, g(x)=3x^2+4$
14. $f(x)=3x^2-x+2, g(x)=6-4x^2$

Sea $f(x)=x^2-4$ *y* $g(x)=-5x+3$. *Determina lo siguiente:*

15. $f(3)+g(3)$
16. $f(5)+g(5)$
17. $f(4)-g(4)$
18. $f(-2)-g(-2)$
19. $f(3)\cdot g(3)$
20. $f(-1)\cdot g(-1)$
21. $\dfrac{f\left(\frac{3}{5}\right)}{g\left(\frac{3}{5}\right)}$
22. $\dfrac{g(2)}{f(2)}$
23. $f(0)\cdot g(0)$
24. $g(6)\cdot f(6)$
25. $g(0)/f(0)$
26. $f(2)/g(2)$

Sea $f(x)=2x^2-x$ *y* $g(x)=x-6$. *Determina lo siguiente:*

27. $(f-g)(x)$
28. $(f-g)(t)$
29. $(f+g)(1)$
30. $(f+g)(-3)$
31. $(f-g)(-2)$
32. $(f-g)(1)$
33. $(f\cdot g)(0)$
34. $(f\cdot g)(3)$
35. $(g/f)(0)$
36. $(f/g)(6)$
37. $(g/f)(5)$
38. $(g-f)(4)$
39. $(g-f)(x)$
40. $(g-f)(r)$

Resolución de problemas

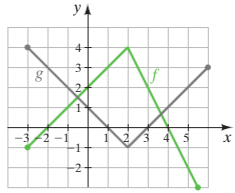
Con la gráfica de la derecha, determina el valor de lo siguiente.

41. $(f+g)(0)$ **42.** $(f-g)(0)$

43. $(f\cdot g)(2)$ **44.** $(g\cdot f)(-1)$

45. $(g-f)(-1)$ **46.** $(f+g)(5)$

47. $(g/f)(4)$ **48.** $(f/g)(1)$



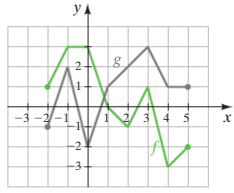
Con la gráfica de la derecha, determina el valor de lo siguiente.

49. $(f+g)(-2)$ **50.** $(f-g)(-1)$

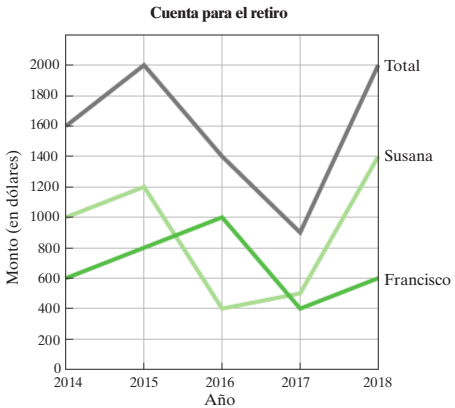
51. $(f\cdot g)(1)$ **52.** $(g+f)(3)$

53. $(f/g)(4)$ **54.** $(g/f)(5)$

55. $(g/f)(2)$ **56.** $(g\cdot f)(0)$



57. Cuenta para el retiro La siguiente gráfica muestra la cantidad de dinero que Susana y su esposo Francisco han aportado a una cuenta para el retiro conjunta, para los años 2014 a 2018.



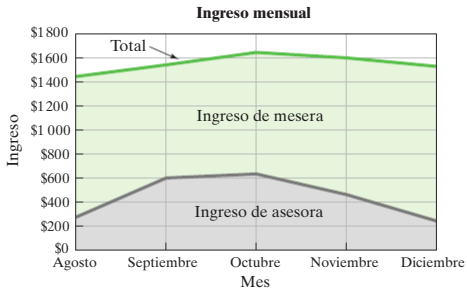
a) ¿En cuál año Francisco aportó $1 000?

b) En el año 2018, estima cuánto más aportó Susana que Francisco, a la cuenta para el retiro.

c) Para este periodo de cinco años, estima el monto total que aportaron Susana y Francisco a la cuenta para el retiro conjunta.

d) Si la aportación de Francisco es una función $F(x)$ y la aportación de Susana es una función $S(x)$, estima $(F+S)(2017)$.

58. Empleo universitario Karla es una estudiante universitaria que trabaja como mesera los fines de semana, y como asesora durante la semana. La siguiente gráfica, muestra su ingreso para los meses de agosto, septiembre, octubre, noviembre y diciembre.



a) ¿En qué mes Karla ganó un total de más de $1 600?

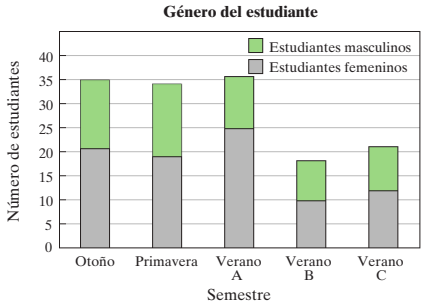
b) En septiembre, estima el ingreso de Karla como mesera.

c) Para este periodo de 5 meses, estima el ingreso total de Karla.

d) Si el ingreso como asesora es una función $T(x)$, y el ingreso como mesera es una función $W(x)$, estima $(W+T)$ (octubre).



59. Conformación de género de clases La gráfica de barras en la parte superior de la siguiente página, muestra el número total de estudiantes en la clase de Álgebra intermedia del Dr. Romero para cada semestre mostrado. Las barras grises en la parte inferior de la gráfica, representan el número de estudiantes femeninos, F, y las barras verdes en la parte superior de la gráfica, representan el número de estudiantes masculinos, M.



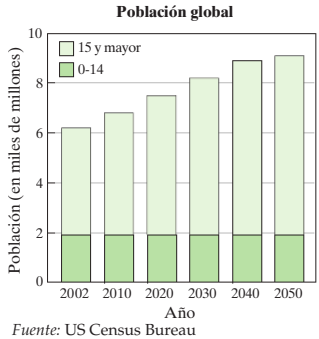
a) ¿En cuál semestre el Dr. Romero tuvo mayor número de estudiantes de Álgebra intermedia? ¿Cuántos estudiantes hubo en dicha clase?

b) ¿En qué semestre el Dr. Romero tuvo menor número de estudiantes femeninos? ¿Cuántos estudiantes femeninos tuvo en clase dicho semestre?

c) Estima M(*Verano A*).

d) Estima F(*Primavera*).

60. Población global La siguiente gráfica, muestra la población global total proyectadas y la población proyectadas de niños de 0-14 años de edad, de los años 2002 a 2050.



Fuente: US Census Bureau

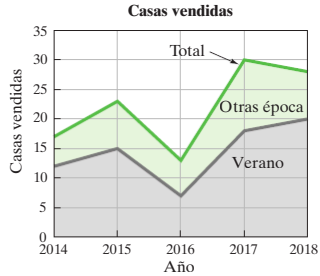
a) Estima la población global proyectada para el año 2050.

b) Estima el número proyectado de niños de 0-14 años de edad en el año 2050.

c) Estima el número proyectado de personas de 15 años de edad y mayores en el año 2050.

d) Estima la diferencia proyectada en la población global total entre los años 2002 y 2050.

61. Ventas de casas En muchas regiones de Estados Unidos, las casas se venden mejor en el verano que en otras épocas del año. La siguiente gráfica muestra las ventas totales de casas en el pueblo de Hard Scrabble, de 2014 a 2018. La gráfica también muestra la venta de casas en el verano, S, y en otras épocas del año, Y.



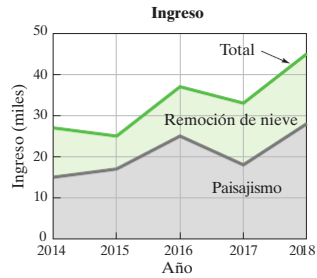
a) Estima el número de casas vendidas en el verano del año 2018.

b) Estima el número de casas vendidas en otras épocas en el año 2018.

c) Estima $Y(2017)$.

d) Estima $(S + Y)(2015)$.

62. Ingreso Rodrigo posee un negocio donde hace paisajismo en verano y remoción de nieve en invierno. La siguiente gráfica muestra el ingreso total, T, para los años 2014-2018, desglosado en su ingreso por paisajismo, L, y su ingreso por remoción de nieve, S.



a) Estima el ingreso total para el año 2018.

b) Estima $L(2014)$.

c) Estima $S(2017)$.

d) Estima $(L + S)(2015)$.

63. Ingreso La siguiente tabla muestra el ingreso del Sr. y la Sra. Altamirano, para los años de 2014 a 2018.

	2014	2015	2016	2017	2018
Sr. Altamirano	$15 500	$17 000	$8 000	$25 000	$20 000
Sra. Altamirano	$4 500	$18 000	$28 000	$7 000	$22 500

a) Dibuja una gráfica de líneas que ilustre el ingreso del Sr. Altamirano, el ingreso de la Sra. Altamirano y su ingreso total para los años 2014-2018. Consulta el ejemplo 3.

b) Dibuja una gráfica de barras que ilustre la información dada. Consulta el ejemplo 4.

c) Dibuja una gráfica de líneas apiladas que ilustre la información dada. Consulta el ejemplo 5.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.5] **78.** Evalúa $(-4)^{-3}$.

[1.6] **79.** Expresa 2960000 en notación científica.

[2.2] **80.** Resuelve la fórmula $A = \frac{1}{2}bh$ para h.

[2.3] **81. Máquina lavadora** El costo de una máquina lavadora, incluyendo un impuesto sobre ventas de 6%, es de \$477. Determina el costo, antes de impuestos, de la máquina lavadora.

[3.1] **82.** Elabora la gráfica de $y = |x| - 2$.

[3.3] **83.** Elabora la gráfica de $3x - 4y = 12$.

3.7 Gráficas de desigualdades lineales

1 Gráficas de desigualdades lineales en dos variables

Comprende el Álgebra

Los siguientes símbolos se usan en las desigualdades lineales:
- $<$ es menor que
- $>$ es mayor que
- $\leq$ es menor o igual que
- $\geq$ es mayor o igual que

1 Gráficas de desigualdades lineales en dos variables

Desigualdad lineal en dos variables

Una **desigualdad lineal en dos variables** puede escribirse en una de las siguientes formas:

$$ax + by < c, \quad ax + by > c, \quad ax + by \leq c, \quad ax + by \geq c$$

donde a, b y c son números reales, y a y b no son ambos 0.

Ejemplos de desigualdades lineales en dos variables

$$2x + 3y > 2 \qquad 3y < 4x - 9$$
$$-x - 2y \leq 3 \qquad 5x \geq 2y - 7$$

Considera la gráfica de la ecuación $x + y = 3$, que se muestra abajo en la **Figura 3.70**. La gráfica de $x + y = 3$ es una recta que actúa como **límite** entre dos *medios planos* y divide el plano en tres diferentes conjuntos de puntos: los puntos en la recta en sí, los puntos en el medio plano en un lado de la recta, y los puntos en el medio plano en el otro lado de la recta.

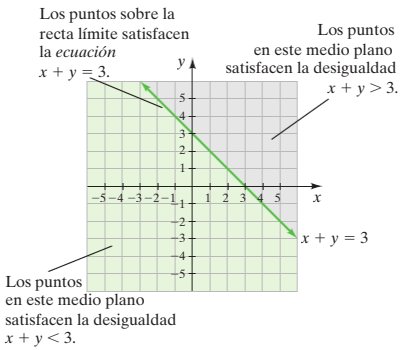


FIGURA 3.70

Comprende el Álgebra

Si una desigualdad lineal tiene
- $<$ o $>$, dibuja una recta límite *punteada*.
- $\leq$ o $\geq$, dibuja una recta límite sólida.

Cuando graficas desigualdades lineales, por lo general, sólo se sombrea uno de los dos medios planos establecidos por la recta límite. Si la desigualdad se escribe usando $<$ o $>$, se dibuja una recta punteada para indicar que la recta límite no es parte del conjunto solución. Si la desigualdad se escribe usando $\leq$ o $\geq$, se dibuja una recta sólida para indicar que la recta límite es parte del conjunto solución.

Para elaborar la gráfica de una desigualdad lineal de dos variables

1. Para obtener la ecuación de la recta límite, sustituye el símbolo de desigualdad con un signo de igualdad.
2. Dibuja la gráfica de la ecuación del paso 1. Si la desigualdad original contiene un símbolo $\geq$ o $\leq$, dibuja la recta límite con una recta sólida. Si la desigualdad original contiene un símbolo $>$ o $<$, dibuja la recta límite con una recta punteada.
3. Selecciona algún punto que no esté sobre la recta límite y determina si este punto es una solución a la desigualdad original. Si el punto seleccionado es una solución, sombrea el medio plano en el lado de la recta que contiene este punto. Si el punto seleccionado no satisface la desigualdad, sombrea el medio plano en el lado de la recta que no contiene este punto.

En el paso 3, se decidirá cuál medio plano contiene puntos que satisfacen la desigualdad dada.

EJEMPLO 1 Elabora la gráfica de la desigualdad $y < \frac{2}{3}x - 3$.

Solución Primero elabora la gráfica de la ecuación $y = \frac{2}{3}x - 3$. Dado que la desigualdad original contiene un signo menor que, $<$, usa una recta punteada cuando dibujes la recta límite (**Figura 3.71**). La recta punteada indica que los puntos sobre esta recta no son soluciones a la desigualdad $y < \frac{2}{3}x - 3$. Selecciona un punto que no esté sobre la recta y determina si este punto satisface la desigualdad. Con frecuencia el punto más sencillo de usar es el origen, (0, 0).

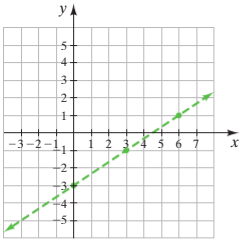


FIGURA 3.71

Punto de control $(0, 0)$

$$y < \frac{2}{3}x - 3$$

$$0 \stackrel{?}{<} \frac{2}{3}(0) - 3$$

$$0 \stackrel{?}{<} 0 - 3$$

$0 < -3$ Falso

Dado que 0 no es menor que -3, el punto (0, 0) no satisface la desigualdad. La solución será todos los puntos en el medio plano que *no* contiene el punto (0, 0). Sombrea este medio plano (**Figura 3.72**). Todo punto en el medio plano sombreado satisface la desigualdad dada. Se verificarán algunos puntos seleccionados A, B y C.

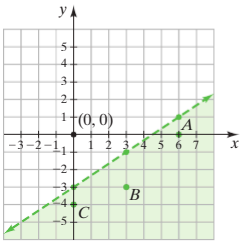


FIGURA 3.72

Punto *A*	Punto *B*	Punto *C*
$(6, 0)$	$(3, -3)$	$(0, -4)$
$y < \frac{2}{3}x - 3$	$y < \frac{2}{3}x - 3$	$y < \frac{2}{3}x - 3$
$0 \stackrel{?}{<} \frac{2}{3}(6) - 3$	$-3 \stackrel{?}{<} \frac{2}{3}(3) - 3$	$-4 \stackrel{?}{<} \frac{2}{3}(0) - 3$
$0 \stackrel{?}{<} 4 - 3$	$-3 \stackrel{?}{<} 2 - 3$	$-4 \stackrel{?}{<} 0 - 3$
$0 < 1$ Verdadero	$-3 < -1$ Verdadero	$-4 < -3$ Verdadero

Ahora resuelve el ejercicio 11

EJEMPLO 2 Elabora la gráfica de la desigualdad $y \geq -2x$.

Solución Primero, grafica la ecuación $y = -2x$. Dado que el símbolo de desigualdad es $\geq$, se usará una recta límite sólida para indicar que los puntos sobre la recta son soluciones a la desigualdad (**Figura 3.73**). Puesto que la recta límite contiene el punto (0, 0), se debe seleccionar un punto diferente como punto de verificación. Se seleccionará el punto (1, 0).

Punto de control $(1, 0)$

$$y \geq -2x$$
$$0 \stackrel{?}{\geq} -2(1)$$
$$0 \geq -2 \quad \text{Verdadero}$$

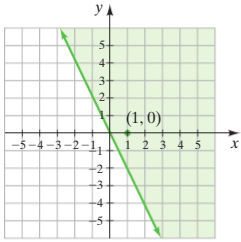


FIGURA 3.73

Dado que el punto (1, 0) satisface la desigualdad, todo punto en el mismo medio plano que (1, 0), también satisface la desigualdad $y \geq -2x$. Sombrea este medio plano como se muestra en la **Figura 3.73**. Todo punto en el medio plano sombreado, y todo punto sobre la recta límite satisfacen la desigualdad.

Ahora resuelve el ejercicio 19

EJEMPLO 3 Elabora la gráfica de la desigualdad $3x - 2y < -6$.

Solución Primero, elabora la gráfica de la ecuación $3x - 2y = -6$. Dado que la desigualdad es $<$, se usa una recta límite punteada (**Figura 3.74**). Sustituir el punto de control (0, 0) en la desigualdad, resulta en un enunciado falso.

Punto de control $(0, 0)$

$$3x - 2y < -6$$
$$3(0) - 2(0) \stackrel{?}{<} -6$$
$$0 < -6 \quad \text{Falso}$$

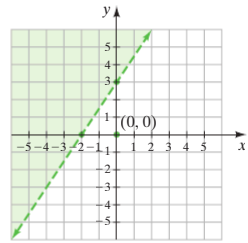
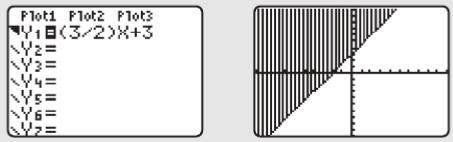


FIGURA 3.74

Ahora resuelve el ejercicio 17

USA TU CALCULADORA GRAFICADORA

Se graficará la desigualdad $3x - 2y < -6$ que se graficó en el ejemplo 3. Primero, resuelve la desigualdad en términos de y para obtener $y > \frac{3}{2}x + 3$. Comienza por ingresar la ecuación de la línea límite $y = \frac{3}{2}x + 3$. La **Figura 3.75a** muestra la pantalla de la TI-84 Plus.



(a) (b)

FIGURA 3.75

Observa el símbolo a la izquierda de Y_1. El símbolo indica que el sombreado irá arriba de la recta límite, pues la desigualdad utilizada es $>$. Para obtener este símbolo, usa la tecla de flecha izquierda, hasta que el cursor esté en esta posición sobre la pantalla. Luego oprime ENTER hasta que aparezca el símbolo. Después de presionar GRAPH, la ventana muestra la gráfica en la **Figura 3.75b**. Compara la **Figura 3.75b** con la **Figura 3.74** anterior. Precaución: observa que la ventana no muestra una recta límite punteada.

3.7 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

sólido punto de control límite punteada medio plano

1. Cuando se grafica una desigualdad lineal, la recta _____ divide el plano en dos medios planos.
2. Si la desigualdad lineal contiene $<$ o $>$, dibuja una recta límite _____.
3. Si la desigualdad lineal contiene $\leq$ o $\geq$, dibuja una recta límite _____.
4. Cuando graficas una desigualdad lineal, para determinar cuál medio plano sombrear, elige un _____ que no esté sobre la recta límite.

Practica tus habilidades

Elabora la gráfica de cada desigualdad.

5. $y < x + 1$
6. $y \geq 2x - 1$
7. $y \leq -x + 4$
8. $y > -2x + 3$
9. $y \leq -3x + 5$
10. $y < 3x + 2$
11. $y \geq \frac{1}{2}x - 3$
12. $y \leq \frac{2}{3}x + 3$
13. $2x - 3y \geq 12$
14. $2x + 3y > 6$
15. $2x + y < 4$
16. $3x - 4y \leq 12$
17. $10 \geq 5x - 2y$
18. $-15 < -3x + 5y$
19. $y \geq -3x$
20. $y < 4x$
21. $y < \frac{2}{3}x$
22. $y \geq -\frac{3}{2}x$
23. $y < -2$
24. $y \geq -3$
25. $x > 1$
26. $x \leq -1$

27. **Acuario** Patricio lleva a algunas amigos al acuario de la ciudad. Los boletos cuestan \$8 para niños y \$15 para adultos, y Patricio tiene \$175 para gastar. Sea x el número de boletos de niño comprados y y el número de boletos de adulto comprados.
   a) Escribe una desigualdad lineal, en la cual el costo total de los boletos sea menor o igual que \$175.
   b) ¿Patricio tiene suficiente dinero para comprar boletos para 8 niños y 6 adultos?
   c) ¿Patricio tiene suficiente dinero para comprar boletos para 10 niños y 8 adultos?

28. **Peso de canoa** David y Elyse usan una canoa para transportar jarras de agua y cajas de alimentos para víctimas de una inundación. Su canoa tiene un peso máximo de carga de 800 libras. David pesa 175 libras y Elyse pesa 145 libras. Cada jarra de agua pesa 8.5 libras y cada caja de alimento pesa 12 libras. Sea x el número de jarras de agua y y el número de cajas de alimento.
   a) Escribe una desigualdad lineal, en la cual el peso total en la canoa, incluidos el de David y Elyse, sea menor o igual que 800 libras.
   b) Con David y Elyse, ambos en la canoa, ¿pueden transportar 20 jarras de agua y 20 cajas de alimento, sin exceder el límite de peso de la canoa?



Consulta el ejercicio 27.

   c) Con David y Elyse, ambos en la canoa, ¿pueden transportar 25 jarras de agua y 25 cajas de alimento, sin exceder el límite de peso de la canoa?

29. **a)** Elabora la gráfica de $f(x) = 2x - 4$.
   b) En la gráfica, sombrea la región acotada por $f(x)$, $x = 2$, $x = 4$ y el eje x.

30. **a)** Elabora la gráfica de $g(x) = -x + 4$.
   b) En la gráfica, sombrea la región acotada por $g(x)$, $x = 1$ y los ejes x y y.

Ejercicios conceptuales y de redacción

31. Cuando elaboras la gráfica de una desigualdad que contiene $>$ o $<$, ¿por qué los puntos sobre la recta no son soluciones a la desigualdad?

32. Cuando elaboras la gráfica de una desigualdad que contiene $\geq$ o $\leq$, ¿por qué los puntos sobre la recta son soluciones a la desigualdad?

33. Cuando elaboras la gráfica de una desigualdad lineal, ¿cuándo no se puede usar (0, 0) como punto de control?

34. Cuando elaboras la gráfica de una desigualdad lineal de la forma $y > ax + b$, donde a y b son números reales, ¿la solución siempre estará arriba de la recta? Explica.

Problemas de desafío

Elabora la gráfica de cada desigualdad.

35. $y < |x|$ **36.** $y \geq x^2$ **37.** $y < x^2 - 4$

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.1] **38.** Resuelve la ecuación $9 - \frac{5x}{3} = -6$.

[2.2] **39.** Si $C = \bar{x} + Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, determina C cuando $\bar{x} = 80, Z = 1.96, \sigma = 3$, y $n = 25$.

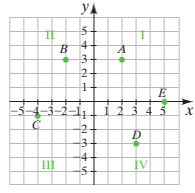
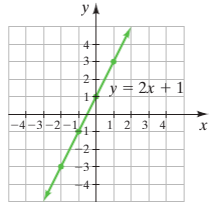
[2.3] **40. Venta de liquidación** La tienda de Discos y Materiales de Olivia, saldrá del negocio. La primera semana todos los artículos se redujeron 10%. La segunda semana todos los artículos se redujeron \$2 adicionales. Si durante la segunda semana Bruno compra un CD por \$12.15, determina el costo original del CD.

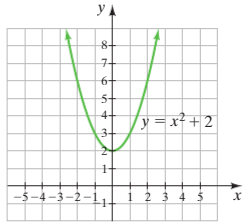
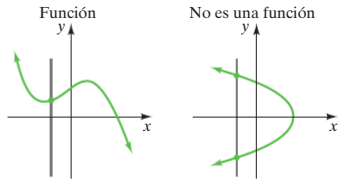
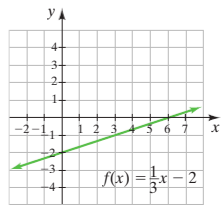
[3.2] **41.** $f(x) = -x^2 + 5$; determina $f(-3)$.

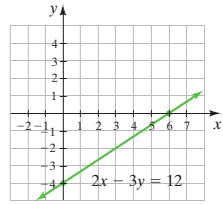
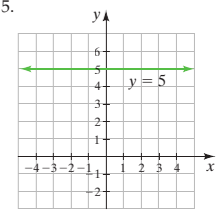
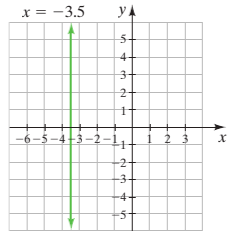
[3.4] **42.** Determina la pendiente de la recta que pasa a través de $(-2, 7)$ y $(2, -1)$.

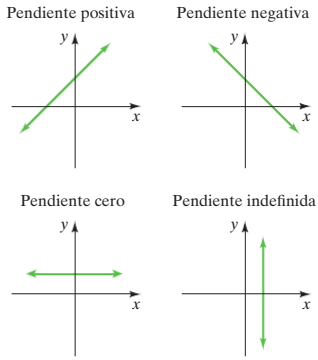
[3.5] **43.** Escribe una ecuación de la recta que pasa a través del punto $(8, -2)$ y es perpendicular a la recta, cuya ecuación es $2x - y = 4$. Escribe la ecuación en forma pendiente-intersección con el eje de las y.

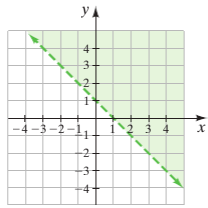
Capítulo 3 Resumen

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 3.1	
El sistema **coordenado cartesiano** (o **rectangular**), consiste de dos ejes dibujados mutuamente perpendiculares. El **eje *x*** es el eje horizontal. El **eje *y*** es el eje vertical. El **origen** es el punto de intersección de los dos ejes. Los dos ejes producen cuatro **cuadrantes** (I, II, III, IV). Un **par ordenado** (x, y) se usa para proporcionar las dos coordenadas de un punto.	Traza los siguientes puntos sobre el mismo conjunto de ejes. $A(2, 3), B(-2, 3), C(-4, -1), D(3, -3), E(5, 0)$ 
La **gráfica de una ecuación** es una ilustración del conjunto de puntos, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación. Se dice que los puntos sobre la misma línea recta son **colineales**. Una **ecuación lineal** es una ecuación cuya gráfica es una línea recta. Una ecuación lineal también se llama **ecuación de primer grado**.	$y = 2x + 1$ es una ecuación lineal cuya gráfica se ilustra a continuación.  Los puntos sobre la gráfica (1, 3), (0, 1), (−1, −1) y (-2, −3), son colineales.

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 3.1 (Continuación)	
Una **ecuación no lineal** es una ecuación cuya gráfica no es una recta.	$y = x^2 + 2$ es una ecuación no lineal cuya gráfica se ilustra a continuación. 
Sección 3.2	
Para una ecuación con variables x y y, si el valor de y depende del valor de x, entonces y es la **variable dependiente** y x es la **variable independiente**.	En la ecuación $y = 2x^2 + 3x - 4$, x, x es la variable independiente y y es la variable dependiente.
Una **relación** es cualquier conjunto de pares ordenados de la forma (x, y). El conjunto de coordenadas x de una relación, es el **dominio**. El conjunto de coordenadas y de una relación, es el **rango**. Una **función** es una relación, en la cual cada elemento en el dominio corresponde a exactamente un elemento en el rango. **Definición alternativa** Una **función** es un conjunto de pares ordenados, en los cuales ninguna primera coordenada se repite.	$\{(1, 2), (2, 3), (1, 4)\}$ es una relación, mas no una función. $\{(1, 6), (2, 7), (3, 10)\}$ es una relación. También es una función, pues cada elemento en el dominio corresponde a exactamente un elemento en el rango. dominio: $\{1, 2, 3\}$, rango $= \{6, 7, 10\}$ dominio: $\{1, 2, 3\}$, rango $= \{6, 7, 10\}$
La **prueba de la recta vertical** puede usarse para determinar si una gráfica representa una función. Si una recta vertical puede dibujarse a través de cualquier parte de la gráfica y la recta interseca otra parte de la gráfica, la gráfica no representa una función. Si no se puede dibujar una recta vertical para intersecar la gráfica en más de un punto, la gráfica representa una función.	
La **notación de función** se puede usar para escribir una ecuación cuando y es una función de x. Para la notación de función, sustituye y con $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, etcétera. Dado $y = f(x)$, para determinar $f(a)$, sustituye cada x con a.	$y = 7x - 9$ puede escribirse como $f(x) = 7x - 9$ Sea $f(x) = x^2 + 2x - 8$. Entonces $f(1) = 1^2 + 2(1) - 8 = -5$ $f(a) = a^2 + 2a - 8$.
Sección 3.3	
Una **función lineal** es una función de la forma $f(x) = ax + b$. La gráfica de una función lineal es una recta.	Elabora la gráfica de $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$. 

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 3.3 (Continuación)	
La **forma estándar de una ecuación lineal** es $ax + by = c$, donde a, b y c son números reales; y a y b no son ambos cero.	$3x + 5y = 7, \quad 5x - 4y = -13$
La **intersección con el eje de las x** es el punto donde la gráfica cruza o toca el eje x. Para determinar la intersección con el eje de las x, establece $y = 0$ y resuelve para x. La **intersección con el eje de las y** es el punto donde la gráfica cruza o toca el eje y. Para determinar la intersección con el eje de las y, establece $x = 0$ y resuelve para y.	Elabora la gráfica de $2x - 3y = 12$ usando las coordenadas al origen. Para la intersección con el eje de las x, sea $y = 0$. $2x - 3y = 12$ $2x - 3(0) = 12$ $2x = 12$ $x = 6$ Por tanto, la intersección con el eje de las x es $(6, 0)$.  Para la intersección con el eje de las y, sea $x = 0$. $2x - 3y = 12$ $2(0) - 3y = 12$ $-3y = 12$ $y = -4$ Por tanto, la intersección con el eje de las y es $(0, -4)$.
La gráfica de cualquier ecuación de la forma $y = b$ (o cualquier función de la forma $f(x) = b$), siempre será una recta horizontal para cualquier número real b. La función $f(x) = b$ se llama **función constante**.	Elabora la gráfica de $y = 5$ o $f(x) = 5$. 
La gráfica de cualquier ecuación de la forma $x = a$, siempre será una recta vertical para cualquier número real a.	Elabora la gráfica de $x = -3.5$. 
Sección 3.4	
La **pendiente de una recta**, es la razón del cambio vertical (o elevación) al cambio horizontal (o extensión) entre cualesquier dos puntos. La pendiente de la recta que pasa a través de los distintos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), es $m = \text{pendiente} = \dfrac{\text{elevación}}{\text{extensión}} = \dfrac{\text{cambio en } y \text{ (cambio vertical)}}{\text{cambio en } x \text{ (cambio horizontal)}} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ siempre que $x_1 \neq x_2$.	La pendiente de la recta que pasa a través de $(-1, 3)$ y $(7, 5)$ es: $m = \dfrac{5 - 3}{7 - (-1)} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}.$

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 3.4 (Continuación)	
Una recta que sube de izquierda a derecha tiene **pendiente positiva**. Una recta que cae de izquierda a derecha tiene **pendiente negativa**. Una recta horizontal tiene **pendiente cero**. La pendiente de una recta vertical es **indefinida**.	
La **forma pendiente-intersección con el eje de las y de una ecuación lineal** es: $y = mx + b$ donde m es la pendiente de la recta y $(0, b)$ es la intersección con el eje de las y de la recta.	$y = 7x - 1$ tiene pendiente de 7 y intersección con el eje de las y $(0, -1)$ $y = -3x + 10$ tiene pendiente de -3 y intersección con el eje de las y $(0, 10)$
Sección 3.5	
La forma punto-pendiente de una ecuación lineal es: $y - y_1 = m(x - x_1)$ donde m es la pendiente de la recta y (x_1, y_1) es un punto sobre la recta.	Si $m = 9$ y (x_1, y_1) es $(5, 2)$, entonces: $y - 2 = 9(x - 5)$
Dos rectas son **paralelas** si tienen la misma pendiente, pero diferente intersección con el eje de las y. Dos rectas son **perpendiculares** si sus pendientes son recíprocos negativos. Para cualquier número real $a \neq 0$, su recíproco negativo es $-\frac{1}{a}$.	Las gráficas de $y = 2x + 4$ y $y = 2x + 7$ son paralelas, pues ambas gráficas tienen la misma pendiente, 2, pero diferentes intersecciones con el eje de las y. Las gráficas de $y = 3x - 5$ y $y = -\frac{1}{3}x + 8$ son perpendiculares, pues una gráfica tiene una pendiente de 3 y la otra gráfica tiene una pendiente de $-\frac{1}{3}$. El número $-\frac{1}{3}$ es el recíproco negativo de 3.
Sección 3.6	
Operaciones sobre funciones **Suma de funciones:** $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ **Resta de funciones:** $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ **Producto de funciones:** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ **Cociente de funciones:** $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$	Si $f(x) = x^2 + 2x - 5$ y $g(x) = x - 3$, entonces $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x^2 + 2x - 5) + (x - 3)$ $= x^2 + 3x - 8$ $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (x^2 + 2x - 5) - (x - 3)$ $= x^2 + x - 2$ $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ $= (x^2 + 2x - 5)(x - 3)$ $= x^3 - x^2 - 11x + 15$ $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 2x - 5}{x - 3}, \quad x \neq 3$

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 3.7	
Una **desigualdad lineal en dos variables** puede escribirse en una de las formas siguientes: $ax + by < c, ax + by > c, ax + by \le c, ax + by \ge c$ donde a, b y c son números reales, y a y b no son ambos 0.	$3x - 4y > 1, \quad 2x + 5y \le -4$
Para elaborar la gráfica de una desigualdad lineal de dos variables **1.** Para obtener la ecuación de la recta límite, sustituye el símbolo de desigualdad con un signo de igualdad. **2.** Dibuja la gráfica de la ecuación en el paso 1. Si la desigualdad original es $\ge$ o $\le$, dibuja una recta límite sólida. Si la desigualdad original es $>$ o $<$, dibuja una recta límite punteada. **3.** Selecciona algún punto que no esté sobre la recta límite. Si el punto seleccionado es una solución, sombrea el medio plano en el lado de la recta que contiene este punto. Si el punto seleccionado no satisface la desigualdad, sombrea el medio plano en el lado de la recta que no contiene este punto.	Elabora la gráfica de $y > -x + 1$. 

[3.1] **1.** Traza los pares ordenados sobre los mismos ejes.

Capítulo 3 Ejercicios de repaso

a) $A(5, 3)$ **b)** $B(0, -3)$ **c)** $C\left(5, \frac{1}{2}\right)$ **d)** $D(-4, 2)$ **e)** $E(-6, -1)$ **f)** $F(-2, 0)$

En los ejercicios 2-11, elabora la gráfica de cada ecuación. Para los ejercicios 6-9, usa los siguientes valores para $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ y 3. Para los ejercicios 10-11, usa los siguientes valores para $-2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} 1$ y 2.

2. $y = \frac{1}{2}x$ **3.** $y = -2x - 1$ **4.** $y = \frac{1}{2}x + 3$ **5.** $y = -\frac{3}{2}x + 1$ **6.** $y = x^2$

7. $y = x^2 - 1$ **8.** $y = |x|$ **9.** $y = |x| - 1$ **10.** $y = x^3$ **11.** $y = x^3 + 4$

[3.2] **12.** Define "función".

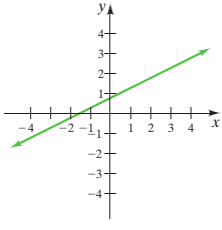
13. ¿Toda relación es una función? ¿Toda función es una relación? Explica.

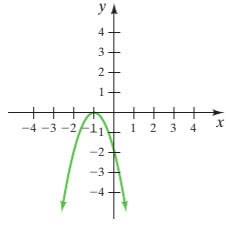
Determina si las siguientes relaciones son funciones.

14.

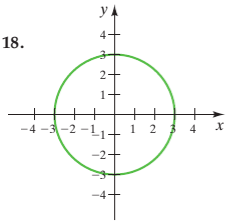

15. $\{(1, 1), (1, -1), (4, 2), (-4, -2)\}$

Para los ejercicios 16-19, **a)** *determina si las siguientes gráficas representan funciones;* **b)** *determina el dominio y el rango de cada relación o función.*

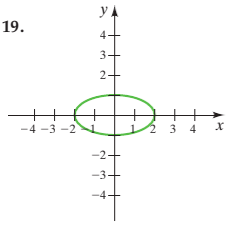
16.


17.


18.



19.



20. Si $f(x) = 3x - 7$, determina

a) $f(2)$ y

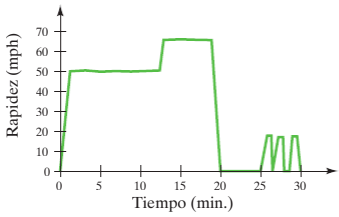
b) $f(h)$.

21. Si $g(t) = 2t^3 - 3t^2 + 6$, determina

a) $g(-1)$ y

b) $g(a)$.

22. Rapidez de automóvil Graciela sale a dar un paseo en automóvil. La siguiente gráfica muestra la rapidez del automóvil como función del tiempo. Escribe una historia que corresponda a esta gráfica.



23. Huerto de manzanas El número de canastas de manzanas, N, que se producen por x árboles en un pequeño huerto ($x \le 100$), está dado por la función $N(x) = 40x - 0.2x^2$. ¿Cuántas canastas de manzanas producen

a) 30 árboles?

b) 50 árboles?

24. Bola que cae Si una bola se suelta desde lo alto de un edificio de 196 pies, su altura sobre el suelo, h, en cualquier tiempo, t, puede determinarse por la función $h(t) = -16t^2 + 196, 0 \le t \le 3.5$. Determina la altura de la bola a

a) 1 segundo.

b) 3 segundos.

[3.3] Elabora la gráfica de *cada ecuación usando coordenadas al origen.*

25. $3x - 4y = 6$

26. $\frac{1}{3}x = \frac{1}{8}y + 10$

Elabora la gráfica de cada ecuación o función.

27. $f(x) = 4$

28. $x = -2$

29. Compañía de bagels La ganancia anual, p, de una compañía de bagels, puede estimarse mediante la función $p(x) = 0.1x - 5000$, donde x es el número de bagels vendidos al año.

a) Dibuja una gráfica de ganancias contra los bagels vendidos por hasta, e incluyendo, 250 000 bagels.

b) Estima el número de bagels que deben venderse para que la compañía quede tablas.

c) Estima el número de bagels vendidos, si la compañía tiene una ganancia de $22 000.

30. Interés Dibuja una gráfica que ilustre el interés sobre un préstamo de $12 000, por un periodo de 1 año para varias tasas de interés de hasta, e incluyendo, 20%. Usa:

$$\text{interés} = \text{principal} \cdot \text{tasa} \cdot \text{tiempo}$$

[3.4] *Determina la pendiente y la intersección con el eje de las y de la gráfica representada por la ecuación dada.*

31. $y = \frac{1}{2}x + 6$

32. $f(x) = -2x + 3$

33. $3x + 5y = 13$

34. $3x + 4y = 10$

35. $x = -7$

36. $f(x) = 8$

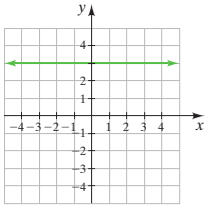
Determina la pendiente de la línea que pasa a través de los dos puntos dados.

37. $(-1, 3), (2, 9)$

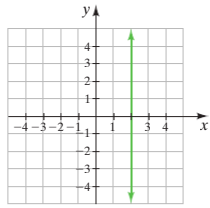
38. $(-2, 3), (4, 1)$

Determina la pendiente de cada recta. Si la pendiente es indefinida, indícalo. Luego escribe la ecuación de la recta.

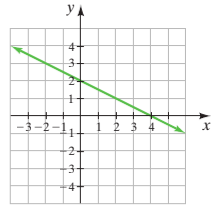
39.



40.



41.



42. Si la gráfica de $y = -2x + 5$ se traslada hacia abajo 4 unidades, determina

a) la pendiente de la gráfica trasladada.

b) la intersección con el eje de las y de la gráfica trasladada.

c) la ecuación de la gráfica trasladada.

43. Si un punto sobre una gráfica es $(-6, -4)$ y la pendiente es $\frac{2}{3}$, determina la intersección con el eje de las y de la gráfica.

44. Ingresos de Hazel City La siguiente tabla muestra el ingreso anual para el distrito escolar Hazel City, para años seleccionados de 1995 a 2015.

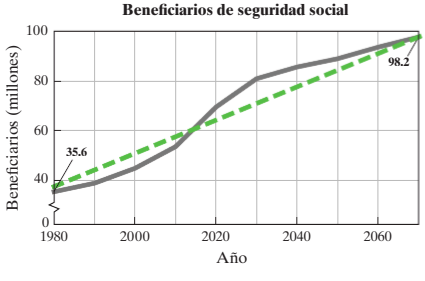
Año	Ingreso (en millones de dólares)
1995	11.2
2000	10.7
2005	10.3
2010	9.8
2015	9.1

a) Traza cada punto y dibuja segmentos de recta de punto a punto.

b) Calcula la pendiente de los segmentos de recta.

c) ¿Durante cuál periodo de 5 años, el ingreso disminuyó más?

45. Seguridad social La siguiente gráfica muestra el número de beneficiarios de seguridad social en Estados Unidos desde 1980, proyectado hasta 2070. Usa la recta punteada para determinar una función que pueda usarse para estimar el número de beneficiarios, n, para $0 \le t \le 90$, donde t es el número de años desde 1980.



[3.5] *Se proporcionan dos puntos sobre l_1 y dos puntos sobre l_2. Determina si l_1 es paralela a l_2, l_1 es perpendicular a l_2, o ninguna de las dos opciones.*

46. l_1: $(5, 3)$ y $(0, -3)$; l_2: $(1, -1)$ y $(2, -2)$

47. l_1: $(0, 1)$ y $(1, 0)$; l_2: $(4, 1)$ y $(1, 4)$

48. l_1: $(7, 3)$ y $(4, 6)$; l_2: $(5, 2)$ y $(6, 3)$

49. l_1: $(-3, 5)$ y $(2, 3)$; l_2: $(-4, -2)$ y $(-1, 2)$

Determina si las dos rectas dadas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos opciones.

50. $-3x + 4y = 7$
$y = \frac{3}{4}x + 7$

51. $2x - 3y = 7$
$-3x - 2y = 8$

52. $4x - 2y = 13$
$-2x + 4y = -9$

Determina la ecuación de la recta con las propiedades dadas. Escribe cada respuesta en forma pendiente-intersección con el eje de las y.

53. Pendiente $= \frac{1}{2}$, a través de $(-2, 1)$

54. A través de $(-3, 1)$ y $(4, -6)$

55. A través de $(0, 6)$ y paralela a la gráfica de $y = -\frac{2}{3}x + 1$

56. A través de $(2, 8)$ y paralela a la gráfica cuya ecuación es $5x - 2y = 7$.

57. A través de $(-3, 1)$ y perpendicular a la gráfica cuya ecuación es $y = \frac{3}{5}x + 5$.

58. A través de $(4, 5)$ y perpendicular a la gráfica cuya ecuación es $4x - 2y = 8$.

59. Tasas de seguros Las tasas mensuales para $100 000 de seguro de vida, en el Grupo Financiero General para hombres, aumenta de manera aproximadamente lineal desde los 35 años de edad hasta los 50 años de edad. La tasa para un hombre de 35 años de edad, es de $10.76 mensual; y la tasa para un hombre de 50 años de edad, es de $19.91 mensual.

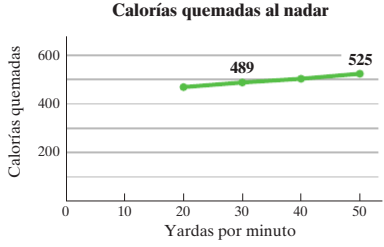
Sea r la tasa y a la edad de un hombre entre 35 y 50 años de edad.

a) Determina una función lineal $r(a)$ que se ajuste a estos datos.

b) Con la función del inciso **a)** estima la tasa mensual para un hombre de 40 años de edad.

60. Quema de calorías El número de calorías quemadas en 1 hora de natación, cuando se nada entre 20 y 50 yardas por minuto, es una función lineal de la rapidez del nadador. Una persona que nada a 30 yardas por minuto, quemará alrededor de 489 calorías en 1 hora. Mientras que si nada a 50 yardas por minuto, quemará aproximadamente 525 calorías en 1 hora. Esta información se muestra en la siguiente gráfica.

a) Determina una función lineal que se pueda usar para estimar el número de calorías, C, quemadas en 1 hora, cuando una persona nada a r yardas por minuto.



Fuente: Health Magazine Sitio web: www.health.com

b) Usa la función del inciso **a)** para determinar el número de calorías quemadas en 1 hora, cuando una persona nada a 40 yardas por minuto.

c) Usa la función del inciso **a)** para estimar la rapidez a la que una persona debe nadar para quemar 600 calorías en 1 hora.

[3.6] *Dadas* $f(x) = x^2 - 3x + 4$ *y* $g(x) = 2x - 5$, *determina lo siguiente.*

61. $(f + g)(x)$

62. $(f + g)(4)$

63. $(g - f)(x)$

64. $(g - f)(-1)$

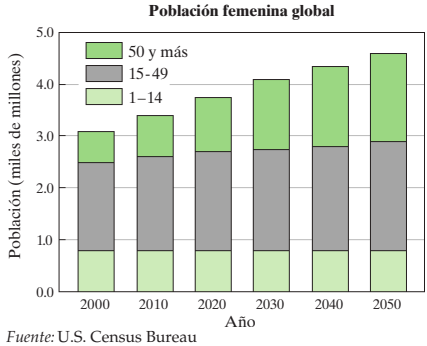
65. $(f \cdot g)(-1)$

66. $(f \cdot g)(3)$

67. $(f/g)(1)$

68. $(f/g)(2)$

69. Población femenina De acuerdo con el censo de Estados Unidos, se espera que crezca a nivel mundial la población femenina. La siguiente gráfica muestra la población femenina a nivel mundial para años seleccionados, de 2000 a 2050.



Fuente: U.S. Census Bureau

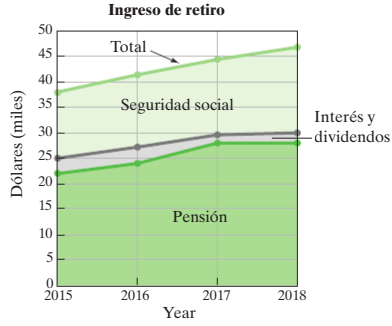
a) Estima la población femenina proyectada a nivel mundial en el año 2050.

b) Estima el número proyectado de mujeres de 15-49 años de edad en el año 2050.

c) Estima el número de mujeres, que en el año 2010, estuvieron en el grupo etario de 50 años y más.

d) Estima el aumento porcentual, en el número de mujeres de 50 años y más, de los años 2000 a 2010.

70. Pensión de retiro Patricia recientemente se retiró de su empleo de tiempo completo. La siguiente gráfica, muestra su ingreso de retiro para los años 2015-2018.



a) Estima el ingreso, de retiro total, de Patricia en el año 2018.

b) Estima el ingreso, por pensión, de Patricia en el año 2017.

c) Estima el ingreso, por interés y dividendos, de Patricia en el año 2015.

[3.7] Elabora la gráfica de *cada desigualdad.*

71. $y \geq -5$

72. $x < 4$

73. $3x - 4y > 12$

74. $y < \frac{1}{3}x - 2$

Capítulo 3 Examen de práctica

1. Elabora la gráfica de $y = -2x + 1$.

2. Elabora la gráfica de $y = \sqrt{x}$. Usa los siguientes valores para x: 0, 1, 4 y 9.

3. Elabora la gráfica de $y = x^2 - 4$. Usa los siguientes valores para x: $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ y 3.

4. Elabora la gráfica de $y = |x|$. Usa los siguientes valores para x: $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ y 3.

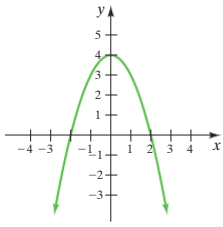
5. Define *función*.

6. ¿El siguiente conjunto de pares ordenados, es una función? Explica tu respuesta.

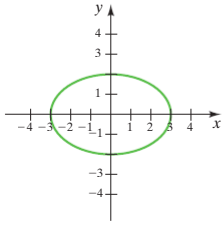
$$\{(3,1), (-2,6), (4,6), (5,2), (7,3)\}$$

En los ejercicios 7 y 8, determina si las gráficas representan funciones. Proporciona el dominio y el rango de la relación o función.

7.



8.



9. Si $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$, determina $f(-2)$.

En los ejercicios 10 y 11, grafica la ecuación usando las coordenadas al origen.

10. $-20x + 10y = 40$

11. $\dfrac{x}{5} - \dfrac{y}{4} = 1$

12. Elabora la gráfica de $f(x) = -3$

13. Elabora la gráfica de $x = 4$.

14. Gráfica de una ganancia La ganancia anual, p, de Zico Publishing Company, por las ventas de un libro particular, se pueden estimar mediante la función $p(x) = 10.2x - 50\,000$, donde x es el número de libros producidos y vendidos.

a) Dibuja una gráfica de ganancia contra los libros vendidos por hasta, e incluyendo, 30 000 libros.

b) Usa la función $p(x)$ para estimar el número de libros que deben venderse, para que la compañía quede tablas.

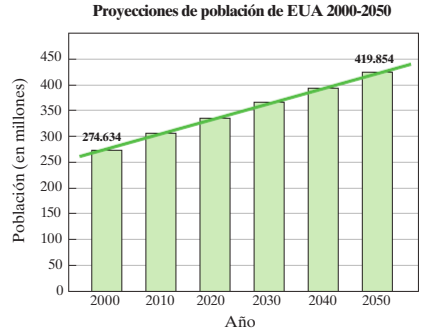
c) Usa la función $p(x)$ para estimar el número de libros que debe vender la compañía, para obtener una ganancia de \$100 000.

15. Determina la pendiente y la intersección con el eje de las y de la gráfica de la ecuación $4x - 3y = 15$.

16. Escribe la ecuación, en forma pendiente-intersección con el eje de las y, de la línea que pasa a través de los puntos (3, 2) y (4, 5).

17. Determina la ecuación, en forma pendiente-intersección con el eje de las y, de la recta que pasa a través del punto $(6, -5)$ y es perpendicular a la gráfica de $y = \dfrac{1}{2}x + 1$.

18. Población de Estados Unidos Determina la función representada por la recta verde en la gráfica, que se puede usar para estimar la población estadounidense proyectada, p, de los años 2000 a 2050. Sea 2000 el año de referencia, de modo que 2000 corresponde a $t = 0$.

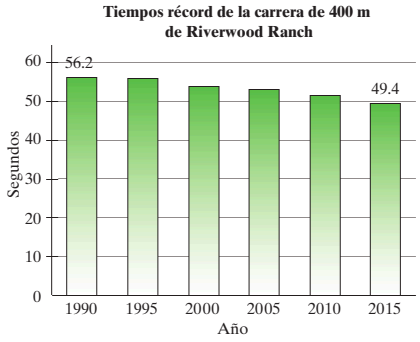


Fuente: U.S. Census Bureau

19. Determina si las gráficas de las dos ecuaciones son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos opciones. Explica tu respuesta.

$$2x - 3y = 12$$
$$4x + 10 = 6y$$

20. Récords de una carrera de 400 m La gráfica de barras siguiente muestra los tiempos récord individuales del bachillerato Riverwood Ranch, en segundos, para la carrera de 400 metros para años seleccionados de 1990 a 2015.



a) Sea r el tiempo récord y t el número de años desde 1990. Escribe una función lineal $r(t)$, que pueda usarse para aproximar los datos.

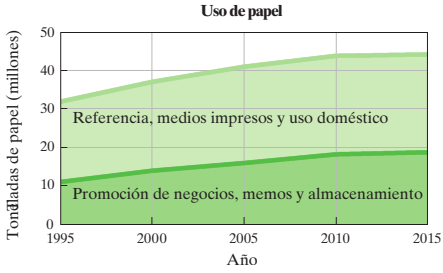
b) Usa la función del inciso **a)** para estimar el tiempo récord en el año 2012.

c) Si supones que esta tendencia continúa, estima el tiempo récord en el año 2020.

En los ejercicios 21-23, si $f(x) = 2x^2 - x$ *y* $g(x) = x - 6$, *determina*

21. $(f + g)(3)$ **22.** $(f/g)(-1)$ **23.** $f(a)$

24. Uso de papel La siguiente gráfica muestra el uso de papel de los años 1995 a 2015.



Fuente: CAP Ventures

a) Estima el número total de toneladas de papel usado en el año 2010.

b) Estima el número de toneladas de papel usadas por los negocios en el año 2010.

c) Estima el número de toneladas de papel usadas para referencia, medios impresos y uso doméstico en el año 2010.

25. Elabora la gráfica de $y < 3x - 2$.

Examen de repaso acumulativo

Realiza la siguiente evaluación y compara tus respuestas con las dadas en la parte final del libro. Revisa cualquier pregunta que hayas respondido de manera incorrecta. Después de la respuesta, se indica la sección donde se cubrió el material.

1. Para $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 14\}$, determina

a) $A \cap B$. **b)** $A \cup B$.

2. Considera el conjunto $\left\{-6, -4, \frac{1}{3}, 0, \sqrt{3}, 4.67, \frac{37}{2}, -\sqrt{5}\right\}$.

Menciona los elementos del conjunto que son

a) números naturales.

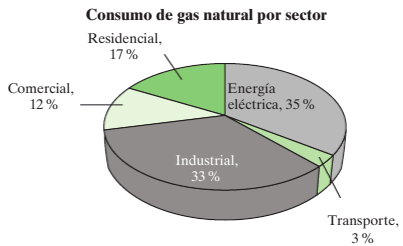
b) números reales.

3. Evalúa $10 - \{3[6 - 4(6^2 \div 4)]\}$.

Simplifica.

4. $\left(\frac{5x^2}{y^{-3}}\right)^2$ **5.** $\left(\frac{3x^4y^{-2}}{6xy^3}\right)^3$

6. Gas natural El consumo total de gas natural en Estados Unidos en 2015 fue de 27.5 billones de pies cúbicos. La siguiente gráfica circular, muestra el desglose de consumo por sector.



Fuente: US Energy Information Administration

Responde las siguientes preguntas usando notación científica.

a) Escribe el número, 27.5 billones, en notación científica.

b) ¿Cuánto gas natural consumió el sector de energía eléctrica en el año 2015?

c) ¿Cuánto más gas natural consumió el sector industrial, que el sector residencial en 2015?

d) ¿Cuánto más gas natural consumió el sector comercial, que el sector de transporte en 2015?

En los ejercicios 7 y 8, resuelve las ecuaciones.

7. $2(x + 4) - 5 = -3[x - (2x + 1)]$

8. $\frac{4}{5} - \frac{x}{3} = 10$

9. Simplifica $7x - \{4 - [2(x - 4)] - 5\}$.

10. Resuelve $A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$ para b_1.

11. Soluciones de peróxido de hidrógeno ¿Cuántos galones de solución de peróxido de hidrógeno al 15% deben mezclarse con 10 galones de solución de peróxido de hidrógeno al 4%, para obtener una solución de peróxido de hidrógeno al 10%?

12. Resuelve la desigualdad $4(x - 4) < 8(2x + 3)$.

13. Resuelve la desigualdad $-1 < 3x - 7 < 11$.

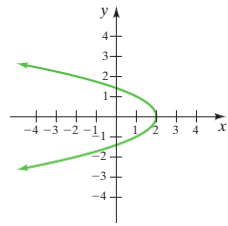
14. Determina el conjunto solución de $|3x + 5| = |2x - 10|$.

15. Determina el conjunto solución de $|2x - 1| \leq 3$.

16. Elabora la gráfica de $y = -\frac{3}{2}x - 4$.

17. **a)** Determina si la siguiente gráfica representa una función.

b) Determina el dominio y el rango de la gráfica.



18. Determina la pendiente de la recta que pasa a través de los puntos $(-5, 3)$ y $(4, -1)$.

19. Determina si las gráficas de las dos ecuaciones dadas son paralelas, perpendiculares o ninguna de las dos opciones.

$$2x - 5y = 8$$
$$5x - 2y = 12$$

20. Si $f(x) = x^2 + 3x - 2$ y $g(x) = 4x - 9$, determina $(f + g)(x)$.

4.1 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales de dos variables

1. **Resolución gráfica de sistemas de ecuaciones lineales**
2. **Resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante la sustitución**
3. **Resolución de sistemas de ecuaciones lineales usando el método de adición**

Sistema de ecuaciones lineales

Cuando dos o más ecuaciones lineales se consideran simultáneamente, las ecuaciones son llamadas **sistema de ecuaciones lineales**.

Por ejemplo,

$$\left.\begin{aligned}(1)\ y &= x + 5\\ (2)\ y &= 2x + 4\end{aligned}\right\}\ \text{Sistema de ecuaciones lineales}$$

Resolución de un sistema de ecuaciones lineales de dos variables

Una **solución a un sistema de ecuaciones lineales de dos variables,** es un par ordenado que satisface cada ecuación en el sistema.

La única solución al sistema anterior es (1, 6).

Verificar en ecuación (1)

$$\begin{aligned}&(1, 6)\\ &y = x + 5\\ &6 \stackrel{?}{=} 1 + 5\\ &6 = 6 \quad \text{Verdadero}\end{aligned}$$

Verificar en ecuación (2)

$$\begin{aligned}&(1, 6)\\ &y = 2x + 4\\ &6 \stackrel{?}{=} 2(1) + 4\\ &6 = 6 \quad \text{Verdadero}\end{aligned}$$

El par ordenado (1, 6) satisface *ambas* ecuaciones y es una solución al sistema de ecuaciones.

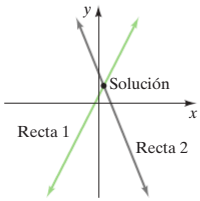
Comprende el Álgebra

- Una solución a un sistema de dos ecuaciones lineales con variables x y y, es un par ordenado (x, y) que satisface ambas ecuaciones.
- Una solución a un sistema de tres ecuaciones lineales con variables x, y y z, es una triada ordenada (x, y, z) que satisface las tres ecuaciones.

1 Resolución gráfica de sistemas de ecuaciones lineales

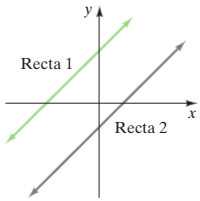
Para resolver gráficamente un sistema de ecuaciones lineales de dos variables, se debe elaborar la gráfica de ambas ecuaciones en el sistema sobre los mismos ejes. Si el sistema tiene una solución única, entonces la solución será el par ordenado común a ambas rectas, o el punto de intersección de ambas rectas en el sistema.

Cuando dos rectas se grafican, existen tres casos posibles, como se ilustra en la **Figura 4.1** abajo.



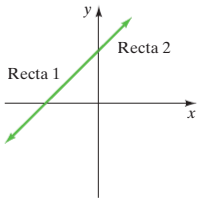
La Recta 1 *interseca* la Recta 2

- Exactamente una solución.
- La solución está en el punto de intersección.
- **Sistema consistente.***
- Las rectas tienen pendientes diferentes.



La Recta 1 es *paralela* a la Recta 2

- Sin solución.
- Dado que las rectas paralelas no intersecan, no hay solución.
- **Sistema inconsistente.**
- Las rectas tienen las mismas pendientes y diferentes intersecciones con el eje de las y.



La Recta 1 es la misma recta que la Recta 2

- Número infinito de soluciones.
- Todo punto sobre la recta común, es una solución.
- **Sistema dependiente.***
- Las rectas tienen la misma pendiente y la misma intersección con el eje de las y.

Comprende el Álgebra

- Un *sistema de ecuaciones consistente*, tiene al menos una solución.
- Un *sistema de ecuaciones inconsistente*, no tiene solución.
- Un *sistema de ecuaciones dependiente* tiene un número infinito de soluciones.

FIGURA 4.1

*Un sistema consistente tiene *al menos una* solución. Dado que un sistema dependiente tiene al menos una solución, un sistema dependiente también es un sistema consistente.

Es posible determinar si un sistema de ecuaciones lineales tiene exactamente una solución, ninguna solución o un número infinito de soluciones, al escribir cada ecuación en forma pendiente−intersección con el eje de las y y comparar las pendientes e intersecciones con el eje de las y (observa la **Figura 4.1**).

EJEMPLO 1 Sin graficar las ecuaciones, determina si el siguiente sistema de ecuaciones tiene exactamente una solución, no tiene solución o tiene un número infinito de soluciones.

$$5x - y = 1$$
$$10x - 2y = 3$$

Solución Escribe cada ecuación en forma pendiente-intersección con el eje de las y.

$$5x - y = 1$$
$$-y = -5x + 1$$
$$y = 5x - 1$$
$$10x - 2y = 3$$
$$-2y = -10x + 3$$
$$y = 5x - \frac{3}{2}$$

Las líneas tienen la misma pendiente, 5, y diferentes intersecciones con el eje de las y, -1 y $-\frac{3}{2}$, respectivamente. Por tanto, las ecuaciones representan rectas paralelas y el sistema no tiene solución.

Ahora resuelve el ejercicio 19

EJEMPLO 2 Resuelve, gráficamente, el siguiente sistema de ecuaciones.

$$y = x + 2$$
$$y = -x + 4$$

Solución Elabora la gráfica de ambas ecuaciones sobre los mismos ejes (**Figura 4.2**). La solución es el punto de intersección de las dos líneas, (1, 3).

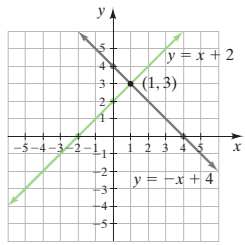


FIGURA 4.2

Ahora resuelve el ejercicio 23

SUGERENCIA ÚTIL

Cuando resuelvas un sistema de ecuaciones mediante gráficas, siempre es buena idea verificar la solución al sustituir los valores para x y y en *cada una* de las ecuaciones originales. Verifica ahora la solución del ejemplo 2.

USA TU CALCULADORA GRAFICADORA

En el capítulo 3, aprendiste cómo usar una calculadora graficadora para graficar las ecuaciones de rectas. Aquí usarás una calculadora graficadora para resolver gráficamente un sistema de ecuaciones lineales.

EJEMPLO Usa tu calculadora graficadora para resolver los sistemas de ecuaciones.

$$y = 2x - 3$$
$$y = -\frac{3}{2}x + 4$$

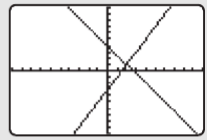


FIGURA 4.3

Solución Presiona [Y =] e ingresa estas ecuaciones como Y_1 y Y_2, respectivamente, luego oprime [GRAPH]. Las gráficas de las ecuaciones se muestran en la **Figura 4.3**.

La solución está en el punto de intersección de las dos rectas. Para determinar el punto, presiona [2nd] [TRACE] [5] para activar la función "intersección". La calculadora te pedirá elegir las curvas. Hazlo al oprimir [ENTER] [ENTER]. Ahora te pide hacer una aproximación. Presiona [◀] o [▶] hasta que veas el cursor parpadeante cerca del punto de intersección y después oprime [ENTER]. La **Figura 4.4** muestra que la intersección de las dos rectas está en el punto (2, 1). Sustituye $x = 2$ y $y = 1$ en cada una de las ecuaciones originales para confirmar que (2, 1) es una solución al sistema de ecuaciones.

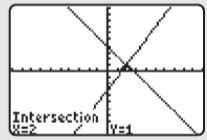


FIGURA 4.4

2 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante la sustitución

Aunque resolver gráficamente sistemas de ecuaciones ayuda a visualizar un sistema de ecuaciones y su solución, en ocasiones, es difícil determinar una solución exacta a partir de la gráfica. Por esta razón, se introducen dos métodos algebraicos para determinar la solución a un sistema de ecuaciones lineales de dos variables. El primero de estos es la **sustitución**.

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante la sustitución

1. Resuelve para una variable en cualquier ecuación. Si es posible, resuelve para una variable con un coeficiente numérico de 1, para evitar trabajar con fracciones.
2. Sustituye la expresión obtenida para la variable en el paso 1 *en la otra ecuación*. Esto resultará en una ecuación que contiene solamente una variable.
3. Resuelve la ecuación obtenida en el paso 2.
4. Sustituye el valor obtenido en el paso 3 en la ecuación del paso 1. Resuelve la ecuación para determinar la variable restante.
5. Escribe la solución como un par ordenado.
6. Comprueba tu solución en *todas* las ecuaciones del sistema.

EJEMPLO 3 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones mediante sustitución.

$$y = 2x + 5$$
$$4x - 3y = -9$$

Solución Dado que la primera ecuación ya está resuelta para y; se sustituirá $2x + 5$ por y en la segunda ecuación. Entonces, se resolverá para la variable restante, x.

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= -9 \\ 4x - 3(2x + 5) &= -9 \\ 4x - 6x - 15 &= -9 \\ -2x - 15 &= -9 \\ -2x &= 6 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Para determinar y, se sustituirá $x = -3$ en alguna de las ecuaciones originales. Dado que la primera ecuación ya está resuelta para y, se sustituirá $x = -3$ en la primera ecuación, $y = 2x + 5$.

$$\begin{aligned} y &= 2x + 5 \\ y &= 2(-3) + 5 \\ y &= -6 + 5 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

La solución al sistema de ecuaciones es $x = -3$ y $y = -1$, o el par ordenado $(-3, -1)$.

Ahora resuelve el ejercicio 35

EJEMPLO 4 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones por sustitución.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 11 \\ x + 3y &= 18 \end{aligned}$$

Solución Comienza por resolver para una de las variables en alguna de las ecuaciones. Si es posible, debes resolver para una variable con un coeficiente numérico de 1, para evitar trabajar con fracciones.

Se resolverá para y en $2x + y = 11$.

Comprende el Álgebra
En el ejemplo 4, también podrías comenzar por resolver para x en la segunda ecuación.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 11 \\ y &= -2x + 11 \end{aligned}$$

A continuación, sustituye $(-2x + 11)$ por y en la *otra ecuación*, $x + 3y = 18$, y resuelve para la variable restante, x.

$$\begin{aligned} x + 3y &= 18 \\ x + 3(-2x + 11) &= 18 \qquad \text{Se sustituye } (-2x + 11) \text{ por } y. \\ x - 6x + 33 &= 18 \\ -5x + 33 &= 18 \\ -5x &= -15 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Finalmente, sustituye $x = 3$ en la ecuación $y = -2x + 11$ y resuelve para y.

$$\begin{aligned} y &= -2x + 11 \\ y &= -2(3) + 11 = 5 \end{aligned}$$

La solución es el par ordenado $(3, 5)$. Verifica esta solución.

Ahora resuelve el ejercicio 41

SUGERENCIA ÚTIL
En ocasiones, los estudiantes resuelven exitosamente para una de las variables y olvidan resolver para la otra. Recuerda que una solución debe contener un valor numérico para cada variable en el sistema.

3 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales, usando el método de adición

Un tercer método para resolver un sistema de ecuaciones, es el **método de adición** (o eliminación). La meta de este proceso, es obtener dos ecuaciones cuya suma será una ecuación que contenga solamente una variable.

EJEMPLO 5 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones, usando el método de adición.

$$2x + 5y = 3$$
$$3x - 5y = 17$$

Solución Observa que una ecuación contiene $+5y$ y la otra contiene $-5y$. Al sumar las ecuaciones, puedes eliminar la variable y y obtener una ecuación que contiene solamente una variable, x.

$$\begin{array}{r} 2x + 5y = 3 \\ 3x - 5y = 17 \\ \hline 5x \quad\quad = 20 \end{array}$$

Ahora resuelve para la variable restante, x.

$$\frac{5x}{5} = \frac{20}{5}$$
$$x = 4$$

Finalmente, resuelve para y al sustituir 4 por x en cualquiera de las ecuaciones originales.

$$2x + 5y = 3$$
$$2(4) + 5y = 3$$
$$8 + 5y = 3$$
$$5y = -5$$
$$y = -1$$

La verificación mostrará que la solución es $(4, -1)$.

Ahora resuelve el ejercicio 53

Para resolver un sistema lineal de ecuaciones con el método de adición (o eliminación)

1. Si es necesario, reescribe cada ecuación en la forma general, $ax + by = c$.
2. Si es necesario, multiplica una o ambas ecuaciones por una(s) constante(s) de modo que, cuando las ecuaciones se sumen, la suma tendrá solamente una variable.
3. Suma los lados respectivos de las ecuaciones. Esto resultará en una sola ecuación que tendrá solamente una variable.
4. Resuelve la ecuación obtenida en el paso 3.
5. Sustituye el valor obtenido en el paso 4 en cualquiera de las ecuaciones originales. Resuelve esta ecuación para determinar el valor de la variable restante.
6. Escribe la solución como un par ordenado.
7. Verifica tu solución en todas las ecuaciones del sistema.

En el paso 2 del procedimiento, se indica que puede ser necesario multiplicar ambos lados de una ecuación por una constante. Para ayudar a evitar confusiones, se numerarán las ecuaciones del texto usando paréntesis, como (*ec.* 1) o (*ec.* 2).

En el ejemplo 6, se resolverá el mismo sistema resuelto en el ejemplo 4, pero esta vez se usará el método de adición.

EJEMPLO 6 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones, usando el método de adición.

$$2x + y = 11 \quad (ec.\ 1)$$
$$x + 3y = 18 \quad (ec.\ 2)$$

Solución La meta, es obtener dos ecuaciones cuya suma será una ecuación que tenga solamente una variable. Para eliminar la variable x, multiplica (*ec.* 2) por -2 y luego suma las dos ecuaciones.

$$2x + y = 11 \quad (ec.\ 1)$$
$$-2x - 6y = -36 \quad (ec.\ 2)\ \text{Multiplicada por } -2.$$

Ahora suma.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 11 \\ -2x - 6y &= -36 \\ \hline -5y &= -25 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

Ahora resuelve para x al sustituir 5 por y, en cualquiera de las ecuaciones originales.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 11 \\ 2x + 5 &= 11 \quad \text{Sustituye 5 por } y. \\ 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

La solución es (3, 5).

Ahora resuelve el ejercicio 57

En el ejemplo 6, primero podrías eliminar la variable y al multiplicar (*ec.* 1) por −3 y luego sumar.

En ocasiones, ambas ecuaciones deben multiplicarse por diferentes números, para que una de las variables sea eliminada. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 7.

EJEMPLO 7 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones, usando el método de adición.

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= 7 \quad (ec.\ 1) \\ 3x - 7y &= -3 \quad (ec.\ 2) \end{aligned}$$

Solución Puedes eliminar la variable x al multiplicar (*ec.* 1) por −3 y (*ec.* 2) por 4.

$$\begin{aligned} -12x - 9y &= -21 \quad (ec.\ 1) \text{ Multiplicada por } -3. \\ 12x - 28y &= -12 \quad (ec.\ 2) \text{ Multiplicada por 4.} \\ \hline -37y &= -33 \quad \text{Suma de ecuaciones.} \\ y &= \frac{33}{37} \end{aligned}$$

Podemos determinar x al sustituir $\frac{33}{37}$ por y en una de las ecuaciones originales, y resolver para x. Un método aún más fácil para resolver para x, es el regresar a las ecuaciones originales y eliminar la variable y, al multiplicar (*ec.* 1) por 7 y (*ec.* 2) por 3.

$$\begin{aligned} 28x + 21y &= 49 \quad (ec.\ 1) \text{ Multiplicada por 7.} \\ 9x - 21y &= -9 \quad (ec.\ 2) \text{ Multiplicada por 3.} \\ \hline 37x &= 40 \quad \text{Suma de ecuaciones.} \\ x &= \frac{40}{37} \end{aligned}$$

La solución es $\left(\frac{40}{37}, \frac{33}{37}\right)$.

Ahora resuelve el ejercicio 73

En el ejemplo 7, la misma solución podría obtenerse al multiplicar (*ec.* 1) por 3 y (*ec.* 2) por −4 y después sumar. Inténtalo ahora y compruebalo.

EJEMPLO 8 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones, usando el método de adición.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 11 \quad (ec.\ 1) \\ \frac{1}{18}x + \frac{1}{6}y &= 1 \quad (ec.\ 2) \end{aligned}$$

Comprende el Álgebra

- Si una ecuación contiene fracciones, elimina las fracciones al multiplicar ambos lados de la ecuación por el MCD de las fracciones.
- Si una ecuación contiene números decimales, elimina los números decimales al multiplicar ambos lados de la ecuación por una potencia adecuada de 10.

Solución Cuando un sistema de ecuaciones contiene una ecuación con fracciones, por lo general, es mejor *eliminar* las fracciones de dicha ecuación. En (*ec.* 2), si ambos lados de la ecuación se multiplican por el mínimo común denominador, 18, se obtiene

$$18\left(\frac{1}{18}x + \frac{1}{6}y\right) = 18(1)$$
$$18\left(\frac{1}{18}x\right) + 18\left(\frac{1}{6}y\right) = 18(1)$$
$$x + 3y = 18 \quad (ec.\ 3)$$

Ahora el sistema es

$$2x + y = 11 \quad (ec.\ 1)$$
$$x + 3y = 18 \quad (ec.\ 3)$$

Este es el mismo sistema de ecuaciones resuelto en el ejemplo 6. Por tanto, la solución a esta sistema es (3, 5), la misma que se obtuvo en el ejemplo 6.

Ahora resuelve el ejercicio 75

EJEMPLO 9 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones, usando el método de adición.

$$0.2x + 0.1y = 1.1 \quad (ec.\ 1)$$
$$x + 3y = 18 \quad (ec.\ 2)$$

Solución Cuando un sistema de ecuaciones contiene una ecuación con números decimales, por lo general, es mejor *eliminar* los números decimales de dicha ecuación. En (*ec.* 1), si ambos lados de la ecuación se multiplican por 10, se obtiene

$$10(0.2x) + 10(0.1y) = 10(1.1)$$
$$2x + y = 11 \quad (ec.\ 3)$$

Ahora el sistema es

$$2x + y = 11 \quad (ec.\ 3)$$
$$x + 3y = 18 \quad (ec.\ 2)$$

Este es el mismo sistema de ecuaciones resuelto en el ejemplo 6. Por tanto, la solución a este sistema es (3, 5), la misma que se obtuvo en el ejemplo 6.

Ahora resuelve el ejercicio 65

EJEMPLO 10 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones, usando el método de adición.

$$x - 3y = 4 \quad (ec.\ 1)$$
$$-2x + 6y = 1 \quad (ec.\ 2)$$

Solución Comienza por multiplicar (*ec.* 1) por 2.

$$\begin{array}{rl} 2x - 6y = 8 & (ec.\ 1)\ \text{Multiplicada por 2.} \\ -2x + 6y = 1 & (ec.\ 2) \\ \hline 0 = 9 & \text{Falso} \end{array}$$

Dado que $0 = 9$, es una ecuación que siempre es *falsa*, este sistema no tiene solución. El sistema es inconsistente y las gráficas de estas ecuaciones son rectas paralelas.

Ahora resuelve el ejercicio 63

EJEMPLO 11 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones, usando el método de adición.

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1 \quad (ec.\ 1)$$
$$y = \frac{2}{3}x - 2 \quad (ec.\ 2)$$

Solución Primero, escribe cada ecuación en forma general. En (*ec.* 1), elimina las fracciones al multiplicar ambos lados de la ecuación por 6.

$$6\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right) = 6(1)$$
$$2x - 3y = 6 \quad (ec.\ 3)$$

A continuación, en (*eq.* 2), se sustituye $\frac{2}{3}x$ de ambos lados y después se elimina la fracción al multiplicar ambos lados de la ecuación por 3.

$$y = \frac{2}{3}x - 2$$
$$-\frac{2}{3}x + y = -2$$
$$3\left(-\frac{2}{3}x + y\right) = 3(-2)$$
$$-2x + 3y = -6 \quad (ec.\ 4)$$

Ahora el sistema consiste de (*ec.* 3) y (*ec.* 4), que se resolverá mediante el método de adición.

$$\begin{array}{rl} 2x - 3y = 6 & (ec.\ 3) \\ -2x + 3y = -6 & (ec.\ 4) \\ \hline 0 = 0 & \textbf{Verdadero} \end{array}$$

Puesto que $0 = 0$ es una ecuación que siempre es *verdadera*, el sistema es dependiente y tiene un número infinito de soluciones. Ambas ecuaciones representan la misma recta.

Ahora resuelve el ejercicio 67

Comprende el Álgebra

Si, cuando resuelves un sistema de ecuaciones por el método, ya sea sustitución o de adición, obtienes una ecuación que siempre es:

- *falsa*, como $5 = 6$ o $0 = 9$, el sistema es inconsistente y no tiene solución.
- *verdadera*, como $6 = 6$ o $0 = 0$, el sistema es dependiente y tiene un número infinito de soluciones.

Se han ilustrado tres métodos que puedes usar para resolver un sistema de ecuaciones lineales: por gráficas, por sustitución y por el método de adición. Cuando necesites una solución exacta, el método gráfico podría ser inadecuado. De los dos métodos algebraicos, el método de adición puede ser el más sencillo si no hay coeficientes numéricos de 1 en el sistema.

4.1 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

única	dependiente	consistente	inconsistente	intersecan	ordenada
variable	perpendicular	paralelas	misma	par	

1. La meta del método de adición, es obtener una ecuación que contenga solamente una _____.
2. Para un sistema de ecuaciones con tres ecuaciones y tres variables, la solución es una triada _____.
3. Un sistema de ecuaciones que tenga un número infinito de soluciones, es un sistema _____.
4. Un sistema de ecuaciones que no tenga solución, es un sistema _____.
5. Un sistema de ecuaciones que tenga al menos una solución, es un sistema _____.
6. La solución _____ a un sistema de dos ecuaciones lineales se localiza en el punto de intersección de las gráficas de las ecuaciones.
7. Las rectas que representan las ecuaciones en un sistema inconsistente de ecuaciones lineales, son rectas _____.
8. Las rectas que representan las ecuaciones en un sistema dependiente de ecuaciones lineales, son la _____recta.
9. Para un sistema lineal consistente, con dos ecuaciones y dos variables, una solución es un _____ ordenado.
10. Las rectas que representan las ecuaciones en un sistema consistente de ecuaciones lineales, con una solución única, son rectas que _____.

Practica tus habilidades

Determina si alguno, de los pares ordenados o triadas ordenadas dados, satisfacen el sistema de ecuaciones lineales.

11. $y = 3x - 1$
$y = 2x + 3$
a) $(0, 3)$
b) $(4, 11)$

12. $4x + 3y = 11$
$y = \frac{3}{2}x - 2$
a) $(2, 1)$
b) $(0, -2)$

13. $x + 2y = 4$
$y = -\frac{1}{2}x + 2$
a) $(2, 1)$
b) $(4, 0)$

14. $y = \frac{x}{3} - \frac{7}{3}$
$5x - 35 = 15y$
a) $(1, -2)$
b) $(7, 0)$

15. $x + 2y - z = -5$
$2x - y + 2z = 8$
$3x + 3y + 4z = 5$
a) $(3, 1, -2)$
b) $(1, -2, 2)$

16. $4x + y - 3z = 1$
$2x - 2y + 6z = 11$
$-6x + 3y + 12z = -4$
a) $(2, -1, -2)$
b) $\left(\frac{1}{2}, 2, 1\right)$

Escribe cada ecuación en forma pendiente–intersección con el eje de las y. Sin elaborar la gráfica de las ecuaciones, indica si el sistema de ecuaciones tiene exactamente una solución, ninguna solución o un número infinito de soluciones.

17. $x + y = -2$
$3y + 12 = -6x$

18. $2x - 4y = 5$
$x - 2y = 1$

19. $3x - 3y = 9$
$2x - 2y = -4$

20. $2x = 3y + 4$
$6x - 9y = 12$

21. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$
$4x + 3y = 12$

22. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$
$2x - 3y = 12$

Determina gráficamente la solución a cada sistema de ecuaciones.

23. $y = -5x + 5$
$y = 2x - 2$

24. $y = 2x + 8$
$y = -3x - 12$

25. $y = -\frac{1}{3}x - 1$
$2x - 3y = 12$

26. $y = -2x - 1$
$x + 2y = 4$

27. $x + y = 3$
$x - y = 1$

28. $4x - y = 9$
$x - 3y = 16$

29. $2x + 3y = 6$
$4x = -6y + 12$

30. $2x - 5y = 10$
$y = \frac{2}{5}x - 2$

31. $y = 4x - 1$
$3y = 12x + 9$

32. $x - \frac{1}{2}y = -2$
$2y = 4x - 6$

33. $5x + 3y = 13$
$x = 2$

34. $3x - 4y = 2$
$y = -2$

Determina la solución a cada sistema de ecuaciones mediante sustitución.

35. $2x - 7y = -1$
$y = -2x + 7$

36. $4x - 5y = 3$
$y = -6x + 13$

37. $x = 4y - 1$
$3x - 2y = 7$

38. $4x = 3y + 17$
$x = -2y - 4$

39. $x = 2y + 3$
$y = x$

40. $y = 3x - 16$
$x = y$

41. $a + 3b = 5$
$2a - b = 3$

42. $x - 5y = -8$
$3x - 2y = -11$

43. $a + b = 3$
$0.05a + 0.3b = 0.6$

44. $x + y = 13.5$
$0.02x + 0.08y = 0.81$

45. $a - \frac{1}{2}b = 2$
$b = 2a - 4$

46. $x + 3y = -2$
$y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

47. $5x - 2y = -7$
$y = \frac{5}{2}x + 1$

48. $y = \frac{2}{3}x - 1$
$2x - 3y = 5$

49. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 2$
$\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}y = 6$

50. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 3$
$\frac{1}{5}x + \frac{1}{8}y = 1$

51. $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$
$-\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

52. $-\frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 1$
$-\frac{x}{6} + \frac{y}{5} = 1$

Resuelve cada sistema de ecuaciones, usando el método de adición.

53. $x + y = -1$
$x - y = -7$

54. $x + 5y = -2$
$3x - 5y = 14$

55. $-5s + t = 14$
$-3s + t = -2$

56. $6x + 3y = 30$
$2x + 3y = 18$

57. $5x + 3y = 12$
$3x - 6y = 15$

58. $4r - 3s = 2$
$2r + s = 6$

59. $7p - 3q = 4$
$2p + 5q = 7$

60. $2x - 7y = 3$
$-5x + 3y = 7$

61. $5x - 2y = 1$
$7y = 2x + 12$

62. $5x + 4y = 6$
$2x = -5y - 1$

63. $2c - 5d = 1$
$-4c + 10d = 6$

64. $2x - 5y = 6$
$-4x + 10y = -1$

65. $0.2x - 0.5y = -0.4$
$-0.3x + 0.4y = -0.1$

66. $0.3j - 0.5k = 1.2$
$0.7j + 0.2k = -1.3$

67. $10m - 2n = 6$
$-5m + n = -3$

68. $5a - 10b = 15$
$a = 2b + 3$

69. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 1$
$\frac{1}{4}x - \frac{1}{9}y = \frac{2}{3}$

70. $\frac{x}{8} - \frac{y}{12} = \frac{1}{3}$
$\frac{x}{21} + \frac{y}{15} = \frac{1}{35}$

71. $a + b = 20$
$0.03a + 0.09b = 1.32$

72. $c + d = 16$
$0.125c + 0.625d = 4$

73. $3x - 4y = 5$
$2x = 5y - 3$

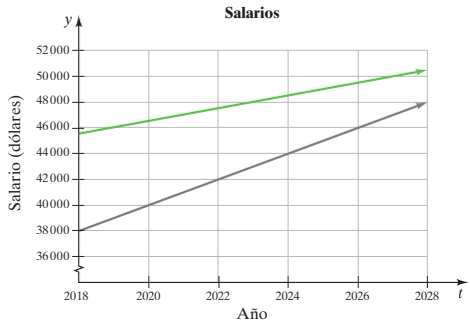
74. $4x + 5y = 3$
$2x - 3y = 4$

75. $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$
$\frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 1$

76. $\frac{x}{4} - \frac{y}{5} = 1$
$\frac{x}{2} - \frac{y}{7} = 1$

Resolución de problemas

77. Salarios En enero de 2018, María comenzó un nuevo empleo con un salario anual de $38 000. Su jefe estuvo de acuerdo en aumentar su salario $1 000 cada enero, en los años por venir. Su salario está determinado por la ecuación $y = 38\,000 + 1\,000t$, donde t es el número de años desde 2018. (Observa la recta inferior en la gráfica). Además, en enero de 2018, Regina comenzó un nuevo empleo con un salario anual de $45 500. Su jefe estuvo de acuerdo en aumentar su salario $500 cada enero, en los años por venir. Su salario está determinado por la ecuación $y = 45\,500 + 500t$, donde t es el número de años desde 2018. (Observa la recta superior en la gráfica.) Resuelve el sistema de ecuaciones para determinar el año cuando ambos salarios serán iguales. ¿Cuál será el salario en dicho año?



78. Renta de un camión Esperanza planea mudarse y necesita rentar un camión de 24 pies por un día. *Trucker* cobra \$50 más 79 centavos por milla. *Movers* cobra \$40 más 99 centavos por milla. Los costos para cada compañía pueden representarse mediante el siguiente sistema de ecuaciones, donde x representa el número de millas conducidas, y y representa el costo total de rentar el camión por un día.

$$y = 50 + 0.79x$$
$$y = 40 + 0.99x$$

Resuelve el sistema para determinar el número de millas, para que los costos de ambas compañías sean iguales. ¿Cuál será dicho costo?



En los ejercicios 79 y 80, **a)** *crea un sistema de ecuaciones lineales que tenga la solución indicada y* **b)** *explica cómo determinaste tu solución.*

79. (2, 5)

80. (−3, 4)

81. La solución al siguiente sistema de ecuaciones, es (2, −3). Determina A y B.

$$Ax + 4y = -8$$
$$3x - By = 21$$

82. La solución al siguiente sistema de ecuaciones, es (−5, 3). Determina A y B.

$$3x + Ay = -3$$
$$Bx - 2y = -16$$

83. Si (2, 6) y (−1, −6) son dos soluciones de $f(x) = mx + b$, determina m y b.

84. Si (3, −5) y (−2, 10) son dos soluciones de $f(x) = mx + b$, determina m y b.

Ejercicios conceptuales y de redacción

85. Explica cómo puedes determinar, sin graficar o resolver, si un sistema de dos ecuaciones lineales es consistente, inconsistente o dependiente.

86. Cuando resuelves un sistema de ecuaciones lineales usando el método de adición (o eliminación), ¿cuál es el objeto del proceso?

87. Cuando resuelves un sistema lineal por adición, ¿cómo puedes decir si el sistema es dependiente?

88. Cuando resuelves un sistema lineal por adición, ¿cómo puedes decir si el sistema es inconsistente?

89. Explica cómo puedes decir, por observación, que el siguiente sistema es dependiente.

$$2x + 3y = 1$$
$$4x + 6y = 2$$

90. Explica cómo puedes decir, por observación, que el siguiente sistema es inconsistente.

$$-x + 3y = 5$$
$$2x - 6y = -13$$

91. a) Escribe un sistema de ecuaciones que sería más fácil de resolver mediante sustitución.

b) Explica por qué la sustitución sería el método más sencillo de usar.

c) Resuelve el sistema por sustitución.

92. a) Escribe un sistema de ecuaciones que sería más fácil de resolver usando el método de adición.

b) Explica por qué el método de adición sería el método más sencillo de usar.

c) Resuelve el sistema usando el método de adición.

93. Las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales incluyen (−4, 3) y (−6, 11).

a) ¿Cuántas otras soluciones tiene el sistema? Explica.

b) Determina la pendiente de la recta que contiene (−4, 3) y (−6, 11). Determina la ecuación de la recta que contiene estos puntos. Luego determina la intersección con el eje de las y.

c) ¿Esta recta representa una función?

94. Las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales incluyen (−5, 1) y (−5, −4).

a) ¿Cuántas otras soluciones tiene el sistema? Explica.

b) Determina la pendiente de la recta que contiene (−5, 1) y (−5, −4). Determina la ecuación de la recta que contiene estos puntos. ¿Esta gráfica tiene intersección con el eje de las y? Explica.

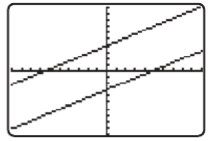
c) ¿Esta recta representa una función?

95. Construye un sistema de ecuaciones que sea dependiente. Explica cómo creaste tu sistema.

96. Construye un sistema de ecuaciones que sea inconsistente. Explica cómo creaste tu sistema.

97. Supón que graficas un sistema de dos ecuaciones lineales en tu calculadora graficadora pero, en la ventana, sólo se muestra una recta. ¿Cuáles son las dos posibles explicaciones para esto?

98. Supón que elaboras la gráfica de un sistema de ecuaciones lineales en tu calculadora graficadora y obtienes lo siguiente.



a) Al observar la ventana, ¿puedes estar seguro de que este sistema es inconsistente? Explica.

b) ¿Qué puedes hacer en tu calculadora graficadora para determinar si el sistema es inconsistente?

Problemas de desafío

Resuelve cada sistema de ecuaciones.

99. $\dfrac{x+2}{2} - \dfrac{y+4}{3} = 4$

$\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x-y}{3}$

100. $\dfrac{5x}{2} + 3y = \dfrac{9}{2} + y$

$\dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2}y = 6x + 12$

Resuelve cada sistema de ecuaciones. (Sugerencia: Sea $u = \dfrac{1}{a}$*; entonces,* $\dfrac{3}{a} = 3 \cdot \dfrac{1}{a} = 3u$ *)*

101. $\dfrac{3}{a} + \dfrac{4}{b} = -1$

$\dfrac{1}{a} + \dfrac{6}{b} = 2$

102. $\dfrac{6}{x} + \dfrac{1}{y} = -1$

$\dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{y} = -3$

Al resolver para x y y*, determina la solución a cada sistema de ecuaciones. En todas las ecuaciones,* $a \neq 0$ *y* $b \neq 0$*. La solución contendrá ya sea a o b, o ambas letras.*

103. $4ax + 3y = 19$

$-ax + y = 4$

104. $ax = 2 - by$

$-ax + 2by - 1 = 0$

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.2] **105.** Explica la diferencia entre un número racional y un número irracional.

[1.2] **106.** **a)** ¿Todos los números racionales son números reales?

b) ¿Todos los números irracionales son números reales?

[2.1] **107.** Resuelve la ecuación $\dfrac{1}{2}(x-7) = \dfrac{3}{4}(2x+1)$.

[2.2] **108.** Determina todos los números tales que $|x-6| = |6-x|$.

[2.2] **109.** Evalúa $A = p\left(1 + \dfrac{r}{n}\right)^{nt}$, cuando; $p = 500$, $r = 0.04$, $n = 2$ y $t = 1$.

[3.5] **110.** ¿La siguiente relación es una función? Explica tu respuesta. $\{(-3, 4), (7, 2), (-4, 5), (5, 0), (-3, -1)\}$

[3.6] **111.** Sea $f(x) = x + 3$ y $g(x) = x^2 - 9$. Determina $(f/g)(3)$.

4.2 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales de tres variables

1. **Resolución de sistemas de ecuaciones lineales de tres variables**
2. **Interpretación geométrica de un sistema de ecuaciones lineales de tres variables**
3. **Reconocimiento de sistemas inconsistentes y dependientes**

1 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales de tres variables

La ecuación $2x - 3y + 4z = 8$, es un ejemplo de una **ecuación lineal de tres variables**. La solución a una ecuación lineal de tres variables, es una *triada ordenada* de la forma (x, y, z). Una solución a la ecuación dada es (1, 2, 3). Comprueba ahora, para verificar que (1, 2, 3) es una solución a la ecuación.

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales con tres variables, puedes usar ya sea el método de sustitución o el de adición, los cuales se estudiaron en la sección 4.1.

EJEMPLO 1 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones, usando sustitución.

$$\begin{aligned} 5x &= -20 \quad (ec.\ 1)\\ 3x + 2y &= -6 \quad (ec.\ 2)\\ 2x + 3y - 6z &= 13 \quad (ec.\ 3) \end{aligned}$$

Solución Observa que (*ec.* 1) sólo tiene una variable, x. Por tanto, esta ecuación se puede resolver para x.

$$\begin{aligned} 5x &= -20 \quad (ec.\ 1)\\ x &= -4 \end{aligned}$$

A continuación, observa que (*ec.* 2) tiene dos variables, x y y. Se puede sustituir $x = -4$ en esta ecuación y resolver para y.

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= -6 \quad (ec.\ 2)\\ 3(-4) + 2y &= -6\\ -12 + 2y &= -6\\ 2y &= 6\\ y &= 3 \end{aligned}$$

Ahora, se sabe que $x = -4$ y $y = 3$. Puedes sustituir estos valores en (*ec.* 3) y resolver en términos de z.

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 6z &= 13 \quad (ec.\ 3)\\ 2(-4) + 3(3) - 6z &= 13\\ -8 + 9 - 6z &= 13\\ 1 - 6z &= 13\\ -6z &= 12\\ z &= -2 \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene $x = -4, y = 3$, y $z = -2$ o, escrito como una triada ordenada, $(-4, 3, -2)$.

Verifica La triada ordenada debe verificarse en las tres ecuaciones originales.

(*ec.* 1)
$$\begin{aligned} 5x &= -20\\ 5(-4) &\stackrel{?}{=} -20\\ -20 &= -20 \end{aligned}$$ Verdadero

(*ec.* 2)
$$\begin{aligned} 3x + 2y &= -6\\ 3(-4) + 2(3) &\stackrel{?}{=} -6\\ -12 + 6 &\stackrel{?}{=} -6\\ -6 &= -6 \end{aligned}$$ Verdadero

(*ec.* 3)
$$\begin{aligned} 2x + 3y - 6z &= 13\\ 2(-4) + 3(3) - 6(-2) &\stackrel{?}{=} 13\\ -8 + 9 + 12 &\stackrel{?}{=} 13\\ 13 &= 13 \end{aligned}$$ Verdadero

En consecuencia, la triada ordenada (−4, 3, −2), es la solución al sistema de ecuaciones.

Ahora resuelve el ejercicio 7

No todo sistema de ecuaciones lineales de tres variables se puede resolver fácilmente por sustitución. También se puede determinar la solución mediante el método de adición, como se ilustra en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones, usando el método de adición.

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \quad (ec.\ 1)\\ 2x - 3y + 2z &= -7 \quad (ec.\ 2)\\ x + 4y - z &= 10 \quad (ec.\ 3) \end{aligned}$$

Solución El primer paso, es usar el método de adición para escribir dos nuevas ecuaciones, donde cada una tenga las mismas dos variables. Esto se hace al eliminar una de las tres variables x, y o z. Observa que (*ec.* 1) tiene el término z y que (*ec.* 3) tiene el término $-z$. Dado que estos términos son opuestos uno de otro, se pueden sumar las dos ecuaciones para eliminar la variable z. Esto se hace abajo, y a la nueva ecuación se le llama (*ec.* 4).

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \quad (ec.\ 1)\\ x + 4y - z &= 10 \quad (ec.\ 3)\\ \hline 4x + 6y &= 14 \quad \text{Suma de ecuaciones, } (ec.\ 4). \end{aligned}$$

Comprende el Álgebra

Cuando se resuelve un sistema de tres ecuaciones con tres variables, con el método de adición, el primer paso es escribir dos nuevas ecuaciones en las que existan las mismas dos variables. Esto se hace al eliminar una de las tres variables. Entonces, se puede resolver este nuevo sistema de la misma forma en que se resolvieron los sistemas de la sección 4.1.

Ahora, usa (*ec.* 1) y (*ec.* 2) para eliminar z, y llama a esta nueva ecuación (*ec.* 5). Observa que (*ec.* 1) se multiplicó por -2, de modo que, después de sumar (*ec.* 1) y (*ec.* 2), z se eliminaría de (*ec.* 5).

$$\begin{aligned} -6x - 4y - 2z &= -8 \quad (ec.\ 1) \text{ Multiplicada por } -2.\\ 2x - 3y + 2z &= -7 \quad (ec.\ 2)\\ \hline -4x - 7y &= -15 \quad \text{Suma de ecuaciones, } (ec.\ 5). \end{aligned}$$

Ahora, se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos variables, (*ec.* 4) y (*ec.* 5). Este sistema se puede resolver usando el método de adición.

$$\begin{aligned} 4x + 6y &= 14 \quad (ec.\ 4)\\ -4x - 7y &= -15 \quad (ec.\ 5)\\ \hline -y &= -1 \quad \text{Suma de ecuaciones.}\\ y &= 1 \end{aligned}$$

A continuación, se sustituye $y = 1$ en cualquiera de las dos ecuaciones que contengan solamente dos variables [(*ec.* 4) o (*ec.* 5)] y resuelve para x.

$$\begin{aligned} 4x + 6y &= 14 \quad (ec.\ 4)\\ 4x + 6(\mathbf{1}) &= 14 \quad \text{Sustituye 1 por } y \text{ en } (ec.\ 4).\\ 4x + 6 &= 14\\ 4x &= 8\\ x &= 2 \end{aligned}$$

Finalmente, sustituye $x = 2$ y $y = 1$ en cualquiera de las ecuaciones originales y resuelve para z.

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4 \quad (ec.\ 1)\\ 3(2) + 2(1) + z &= 4 \quad \text{Sustituye 2 por } x \text{ y 1 por } y \text{ en } (ec.\ 1).\\ 6 + 2 + z &= 4\\ 8 + z &= 4\\ z &= -4 \end{aligned}$$

La solución es la triada ordenada $(2, 1, -4)$. Verifica esta solución en *las tres* ecuaciones originales.

Ahora resuelve el ejercicio 17

EJEMPLO 3 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= -1 \quad (ec.\ 1)\\ x + 2y \quad\ \ &= 14 \quad (ec.\ 2)\\ x \quad\ \ - 5z &= -11 \quad (ec.\ 3) \end{aligned}$$

Solución La tercera ecuación, sólo tiene las variables x y z. Por tanto, usa el método de adición para escribir una nueva ecuación, que también sólo tenga variables x y z. Usa (*ec.* 1) y (*ec.* 2). Se multiplicará (*ec.* 1) por 2 y (*ec.* 2) por 3, de modo que se pueda eliminar la variable y cuando se sumen las ecuaciones. A esta nueva ecuación se le llamará (*ec.* 4).

$$\begin{aligned} 4x - 6y + 4z &= -2 \quad (ec.\ 1)\ \text{Multiplicada por 2.}\\ 3x + 6y \quad\ \ &= 42 \quad (ec.\ 2)\ \text{Multiplicada por 3.}\\ \hline 7x \quad\ \ + 4z &= 40 \quad \text{Suma de ecuaciones, } (ec.\ 4). \end{aligned}$$

Ahora, se tienen dos ecuaciones que contienen solamente las variables x y z.

$$\begin{aligned} 7x + 4z &= 40 \quad (ec.\ 4)\\ x - 5z &= -11 \quad (ec.\ 3) \end{aligned}$$

A continuación, se eliminará la variable x.

$$\begin{aligned} 7x + 4z &= 40 \quad (ec.\ 4)\\ -7x + 35z &= 77 \quad (ec.\ 3)\ \text{Multiplicada por } -7\\ \hline 39z &= 117 \quad \text{Suma de ecuaciones.}\\ z &= 3 \end{aligned}$$

Ahora, resuelve para x usando una de las ecuaciones que contienen solamente las variables x y z. Sustituye 3 por z en (*ec.* 3).

$$\begin{aligned} x - 5z &= -11 \quad (ec.\ 3)\\ x - 5(3) &= -11 \quad \text{Sustituye 3 por } z \text{ en } (ec.\ 3).\\ x - 15 &= -11\\ x &= 4 \end{aligned}$$

Finalmente, resuelve para y usando cualquiera de las ecuaciones originales que contengan y.

$$\begin{aligned} x + 2y &= 14 \quad (ec.\ 2)\\ 4 + 2y &= 14 \quad \text{Sustituye 4 por } x \text{ en } (ec.2).\\ 2y &= 10\\ y &= 5 \end{aligned}$$

La solución es la triada ordenada (4, 5, 3).

Verifica

(*ec.* 1)	(*ec.* 2)	(*ec.* 3)
$2x - 3y + 2z = -1$	$x + 2y = 14$	$x - 5z = -11$
$2(4) - 3(5) + 2(3) \stackrel{?}{=} -1$	$4 + 2(5) \stackrel{?}{=} 14$	$4 - 5(3) \stackrel{?}{=} -11$
$8 - 15 + 6 \stackrel{?}{=} -1$	$4 + 10 \stackrel{?}{=} 14$	$4 - 15 \stackrel{?}{=} -11$
$-1 = -1$ Verdadero	$14 = 14$ Verdadero	$-11 = -11$ Verdadero

Ahora resuelve el ejercicio 13

Comprende el Álgebra

En un sistema de ecuaciones lineales de tres variables, cada ecuación se representa mediante un plano en un sistema coordenado tridimensional. Una solución al sistema, es una triada ordenada (x, y, z) que se representa mediante un punto en la intersección de los tres planos.

2 Interpretación geométrica de un sistema de ecuaciones lineales de tres variables

La solución a un sistema de ecuaciones lineales de *dos* variables, ocurre en el punto de intersección de las dos *rectas* que representan las ecuaciones en el sistema. Las rectas se dibujan en el sistema coordenado cartesiano bidimensional.

La solución a un sistema de ecuaciones lineales de *tres* variables, ocurre en el punto de intersección de los tres *planos* que representan las ecuaciones en el sistema. (Consulta el ejercicio

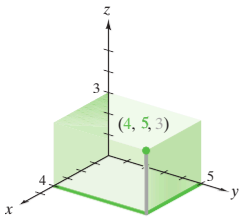


FIGURA 4.5

47 de la página 251). Los planos se dibujan en un sistema coordenado tridimensional en el que un eje x, un eje y y un eje z, son todos mutuamente perpendiculares (observa la **Figura 4.5**).

En el ejemplo 3, la solución al sistema fue la triada ordenada (4, 5, 3). El punto representado por esta triada ordenada, se muestra en la **Figura 4.5**. Elaborar la gráfica de los planos en un sistema coordenado tridimensional, está más allá del alcance de este libro.

3 Reconocimiento de sistemas inconsistentes y dependientes

Recuerda que *un sistema inconsistente de ecuaciones, es aquel que no tiene solución*. Si, mientras resuelves un sistema de ecuaciones lineales de tres variables, obtienes un enunciado que siempre es falso, como $3 = 0$, el sistema es inconsistente y no tiene solución. En tal sistema, al menos dos de los planos que representan las ecuaciones, son paralelos y, por tanto, no existe un punto único de intersección de los tres planos. (Consulta los ejercicios 45 y 46 de la página 251).

Recuerda que *un sistema dependiente de ecuaciones, es aquel que tiene un número infinito de soluciones*. Si, mientras resuelves un sistema de ecuaciones lineales de tres variables, obtienes un enunciado que siempre es verdadero, como $0 = 0$, el sistema es dependiente y tiene un número infinito de soluciones. En tal sistema, o los planos que representan las ecuaciones son todos el mismo plano, o los tres planos intersecan en una recta. (Consulta el ejercicio 48 de la página 251).

EJEMPLO 4 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} -3x + 5y + z &= -3 \quad (ec.\ 1)\\ 6x - 10y - 2z &= 1 \quad (ec.\ 2)\\ 7x - 4y + 11z &= -6 \quad (ec.\ 3) \end{aligned}$$

Solución Se comenzará por eliminar la variable x de (*ec.* 1) y (*ec.* 2).

$$\begin{aligned} -6x + 10y + 2z &= -6 \quad (ec.\ 1)\ \text{Multiplicada por 2.}\\ 6x - 10y - 2z &= 1 \quad (ec.\ 2)\\ \hline 0 &= -5 \quad \text{Falso} \end{aligned}$$

Dado que se obtuvo el enunciado falso, $0 = -5$, este sistema es inconsistente y no tiene solución.

Ahora resuelve el ejercicio 33

EJEMPLO 5 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \quad (ec.\ 1)\\ x + 2y - z &= 1 \quad (ec.\ 2)\\ x - 4y + 3z &= 1 \quad (ec.\ 3) \end{aligned}$$

Solución Se comenzará por eliminar la variable x de (*ec.* 1) y (*ec.* 2) y, después, de (*ec.* 1) y (*ec.* 3).

$$\begin{aligned} -x + y - z &= -1 \quad (ec.\ 1)\ \text{Multiplicada por } -1.\\ x + 2y - z &= 1 \quad (ec.\ 2)\\ \hline 3y - 2z &= 0 \quad \text{Suma de ecuaciones, } (ec.\ 4).\\ x - y + z &= 1 \quad (ec.\ 1)\\ -x + 4y - 3z &= -1 \quad (ec.\ 3)\ \text{Multiplicada por } -1.\\ \hline 3y - 2z &= 0 \quad \text{Suma de ecuaciones, } (ec.\ 5). \end{aligned}$$

Ahora elimina la variable y usando (*ec.* 4) y (*ec.* 5).

$$\begin{aligned} -3y + 2z &= 0 \quad (ec.\ 4)\ \text{Multiplicada por } -1.\\ 3y - 2z &= 0 \quad (ec.\ 5)\\ \hline 0 &= 0 \quad \text{Verdadero} \end{aligned}$$

Puesto que se obtuvo el enunciado verdadero $0 = 0$, este sistema es dependiente y tiene un número infinito de soluciones.

Ahora resuelve el ejercicio 35

Comprende el Álgebra

Si, mientras resuelves un sistema de ecuaciones lineales de tres variables, obtienes un enunciado que siempre es:

- *falso*, como $0 = -5$, el sistema es inconsistente y no tiene solución.
- *verdadero*, como $0 = 0$, el sistema es dependiente y tiene un número infinito de soluciones.

SUGERENCIA ÚTIL

Si una ecuación en un sistema contiene fracciones, elimina las fracciones multiplicando cada término en la ecuación por el mínimo común denominador. Luego continúa la resolución del sistema. Si, por ejemplo, una ecuación en el sistema es $\frac{3}{4}x - \frac{5}{8}y + z = \frac{1}{2}$, multiplica ambos lados de la ecuación por 8, para obtener la ecuación equivalente $6x - 5y + 8z = 4$.

4.2 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

par triada plano recta dependiente inconsistente

1. La solución a un sistema de ecuaciones lineales de tres variables es una _____ ordenada.
2. Una ecuación lineal de tres variables, se representa mediante un _____ en un sistema coordenado tridimensional.
3. Si, mientras resuelves un sistema de ecuaciones lineales de tres variables, obtienes un enunciado que siempre es falso, el sistema es _____ y no tiene solución.
4. Si, mientras resuelves un sistema de ecuaciones lineales de tres variables, obtienes un enunciado que siempre es verdadero, el sistema es _____ y tiene un número infinito de soluciones.

Practica tus habilidades

Resuelve por sustitución.

5. $x + 2y = 6$
$3y = 9$
$x + 2z = 12$

6. $5x - 6z = -17$
$3x - 4y + 5z = -20$
$2z = -6$

7. $2x + 1 = 7$
$3x - 4y = 1$
$2x - 5y + 3z = -7$

8. $5x + 4y + z = 3$
$4y - 3 = -11$
$3y + 4z = -2$

9. $2x - 6y = -7$
$6y + 5 = 7$
$2x - 3y + 4z = 7$

10. $x - y + 5z = -4$
$3x - 2z = 6$
$10z - 4 = 1$

Resuelve usando el método de adición.

11. $3x + 2y = -1$
$5x - 2y = 9$
$4x - 3y + 2z = 16$

12. $5x - 3y + 2z = -1$
$2x + 7y = 11$
$4x - 7y = 1$

13. $2y + 4z = 2$
$x + y + 2z = -2$
$2x + y + z = 2$

14. $x - y + 2z = 1$
$y - 4z = 2$
$-2x + 2y - 5z = 2$

15. $3p + 2q = 11$
$4q - r = 6$
$6p + 7r = 4$

16. $3s + 5t = -12$
$2t - 2u = 2$
$-s + 6u = -2$

17. $p + q + r = 4$
$p - 2q - r = 1$
$2p - q - 2r = -1$

18. $x - 2y + 3z = -7$
$2x - y - z = 7$
$-4x + 3y + 2z = -14$

19. $r - 2s + t = 2$
$2r + 3s - t = -3$
$2r - s - 2t = 1$

20. $3a - 3b + 4c = -1$
$a - 2b + 2c = 2$
$2a - 2b - c = 3$

21. $2a + 2b - c = -1$
$3a + 4b + c = 10$
$5a - 2b - 3c = 2$

22. $a - 2b + 2c = -10$
$2a - 3b + 2c = -13$
$a + b + 6c = -19$

23. $2x - 2y + 3z = 5$
$2x + y - 2z = -1$
$4x - y - 3z = 0$

24. $2x - y - 2z = 3$
$x - 3y - 4z = 2$
$x + y + 2z = -1$

25. $-x + 3y + z = 0$
$-2x + 4y - z = 0$
$3x - y + 2z = 0$

26. $x + y + z = 0$
$-x - y + z = 0$
$-x + y + z = 0$

27. $-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = -2$
$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{4}z = 2$
$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z = 1$

28. $\frac{2}{3}x + y - \frac{1}{3}z = \frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}x + y + z = \frac{5}{2}$
$\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = \frac{3}{2}$

29. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{8}z = \frac{3}{32}$
$\frac{3}{4}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{2}z = \frac{2}{3}$
$\frac{1}{6}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{4}z = -\frac{5}{16}$

30. $x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = -2$
$\frac{2}{3}x + y - \frac{2}{3}z = \frac{1}{3}$
$-\frac{1}{4}x + y - \frac{1}{4}z = \frac{3}{4}$

31. $0.2x + 0.3y + 0.3z = 1.1$
$0.4x - 0.2y + 0.1z = 0.4$
$-0.1x - 0.1y + 0.3z = 0.4$

32. $0.6x - 0.4y + 0.2z = 2.2$
$-0.1x - 0.2y + 0.3z = 0.9$
$-0.2x - 0.1y - 0.3z = -1.2$

Determina si los siguientes sistemas son inconsistentes, dependientes o ninguna de las dos opciones.

33. $2x - y + 4z = -5$
$5x + 2y - 3z = 1$
$-6x + 3y - 12z = -13$

34. $x - 2y + z = 2$
$4x - 6y + 2z = 3$
$2x - 3y + z = 0$

35. $x - 4y - 3z = -1$
$-3x + 12y + 9z = 3$
$2x - 10y - 7z = 5$

36. $5a - 4b + 2c = 5$
$-10a + 8b - 4c = -10$
$-7a - 4b + c = 7$

37. $x + 3y + 2z = 6$
$x - 2y - z = 8$
$-3x - 9y - 6z = -7$

38. $2x - 2y + 4z = 2$
$-3x + y = -9$
$2x - y + z = 5$

Resolución de problemas

39. Tres soluciones a la ecuación $Ax + By + Cz = 1$, son $(-1, 2, -1)$, $(-1, 1, 2)$ y $(1, -2, 2)$. Determina los valores de A, B y C, y escribe la ecuación, usando los valores numéricos obtenidos.

40. Tres soluciones a la ecuación $Ax + By + Cz = 14$, son $(3, -1, 2)$, $(2, -2, 1)$ y $(-5, 3, -24)$. Determina los valores de A, B y C, y escribe la ecuación, usando los valores numéricos obtenidos.

En los ejercicios 41 y 42, escribe un sistema de ecuaciones lineales de tres variables que tenga la solución dada.

41. $(3, 1, 6)$

42. $(-2, 5, 3)$

43. **a)** Determina los valores de a, b y c, tales que los puntos $(1, -1)$, $(-1, -5)$ y $(3, 11)$, se encuentren en la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$.

b) Determina la ecuación cuadrática, cuya gráfica paso a través de los tres puntos indicados. Explica cómo determinaste tu respuesta.

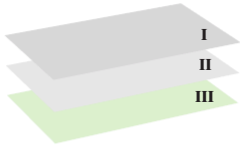
44. **a)** Determina los valores de a, b y c, tales que los puntos $(1, 7)$, $(-2, -5)$ y $(3, 5)$, se encuentren en la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$.

b) Determina la ecuación cuadrática, cuya gráfica pasa a través de los tres puntos indicados. Explica cómo determinaste tu respuesta.

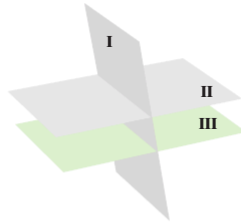
Ejercicios conceptuales y de redacción

Una ecuación en tres variables representa un plano. Considera un sistema de ecuaciones que consista de tres ecuaciones de tres variables. Responde las siguientes preguntas.

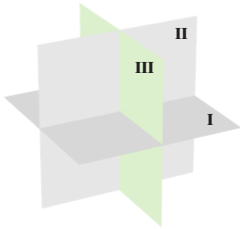
45. Si los tres planos son paralelos entre sí, como se ilustra en la figura, ¿cuántos puntos serán comunes a los tres planos? ¿El sistema es consistente o inconsistente? Explica tu respuesta.



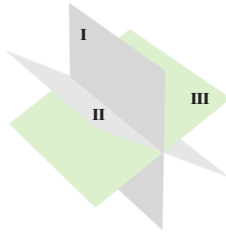
46. Si dos de los planos son paralelos entre sí, y el tercer plano interseca a cada uno de los otros dos planos, ¿cuántos puntos serán comunes a los tres planos? ¿El sistema es consistente o inconsistente? Explica tu respuesta.



47. Si los tres planos son, como se ilustra en la figura, ¿cuántos puntos serán comunes a los tres planos? ¿El sistema es consistente o inconsistente? Explica tu respuesta.



48. Si los tres planos son, como se ilustra en la figura, ¿cuántos puntos serán comunes a los tres planos? ¿El sistema es dependiente? Explica tu respuesta.



49. ¿Es posible que un sistema de ecuaciones lineales de tres variables tenga exactamente

a) ninguna solución,

b) una solución,

c) dos soluciones? Explica tu respuesta.

50. En un sistema de ecuaciones lineales de tres variables, si las gráficas de dos ecuaciones son planos paralelos, ¿es posible que el sistema sea

a) consistente,

b) dependiente,

c) inconsistente? Explica tu respuesta.

Problemas de desafío

Determina la solución a los siguientes sistemas de ecuaciones.

51. $3p + 4q = 11$
$2p + r + s = 9$
$q - s = -2$
$p + 2q - r = 2$

52. $3a + 2b - c = 0$
$2a + 2c + d = 5$
$a + 2b - d = -2$
$2a - b + c + d = 2$

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **53. Esquí a campo traviesa** Magda comienza a esquiar a lo largo de una pista a 3 millas por hora. Diez minutos $\left(\frac{1}{6}\text{ hora}\right)$ después, su esposo, David, comienza a esquiar a lo largo de la misma pista a 5 millas por hora.

a) ¿Cuánto tiempo después, de que parte David, alcanzará a Magda?

b) ¿Cuán lejos del punto de partida estarán cuando se encuentren?



[2.6] *Determina cada conjunto solución.*

54. $\left|4 - \frac{2x}{3}\right| > 5$ **55.** $\left|\frac{3x - 4}{2}\right| + 1 < 7$ **56.** $\left|3x + \frac{1}{5}\right| = -5$

4.3 Sistemas de ecuaciones lineales: aplicaciones y resolución de problemas

1 Uso de sistemas de ecuaciones para resolver aplicaciones

2 Uso de sistemas lineales de tres variables para resolver aplicaciones



1 Uso de sistemas de ecuaciones para resolver aplicaciones

Muchas de las aplicaciones resueltas en capítulos anteriores, que usaban sólo una variable, ahora pueden resolverse usando dos variables. Siempre que se usen dos variables para resolver un problema aplicado, debes escribir un sistema de dos ecuaciones.

EJEMPLO 1 **Pepsi Center** El Pepsi Center, en Denver, es hogar tanto de los Nuggets de Denver, de la NBA, como de los Colorado Avalanche, de la NHL. Un domingo, el Pepsi Center alojó un juego de los Nuggets y, más tarde el mismo día, un juego de los Avalanche. La asistencia combinada a estos dos juegos fue de 40 634 personas. La diferencia en la asistencia, entre los dos juegos, fue de 1 200 personas. Si el juego de los Nuggets tuvo mayor asistencia, determina la asistencia a cada juego.

Solución Entiende Es necesario determinar la asistencia al juego de los Nuggets y la asistencia al juego de los Avalanche. Se usarán dos variables y, por tanto, se necesitará escribir dos ecuaciones.

Traduce Sea x = la asistencia al juego de los Nuggets.
Sea y = la asistencia al juego de los Avalanche.

Dado que la asistencia combinada de los dos juegos es de 40 634 personas, la primera ecuación es

$$x + y = 40\,634$$

Ya que el juego de los Nuggets tuvo mayor asistencia, y como la diferencia en la asistencia entre los dos juegos fue de 1 200 personas, la segunda ecuación es

$$x - y = 1\,200$$

El sistema de dos ecuaciones es

$$x + y = 40\,634 \quad (ec.1)$$
$$x - y = 1\,200 \quad (ec.2)$$

Comprende el Álgebra

Siempre que uses *dos* variables para resolver un problema aplicado, debes determinar *dos* ecuaciones para resolver el problema.

Realiza Se usará el método de adición para resolver este sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} x + y &= 40\,634 \\ x - y &= 1\,200 \\ \hline 2x &= 41\,834 \quad \text{Suma de dos ecuaciones.} \\ x &= 20\,917 \quad \text{Divide ambos lados entre 2.} \end{aligned}$$

Por tanto, $x = 20\,917$. Para determinar y, sustituye 20 917 en (*ec.* 1) para x.

$$\begin{aligned} x + y &= 40\,634 \\ 20\,917 + y &= 40\,634 \\ y &= 19\,717 \quad \text{Resta } 20\,917 \text{ de ambos lados.} \end{aligned}$$

Responde La asistencia al juego de los Nuggets, fue de 20 917 personas y la asistencia al juego de los Avalanche, fue de 19 717 personas.

Ahora resuelve el ejercicio 1

EJEMPLO 2 **Rapidez de un kayak** Tadeo practica con su kayak en el río Grant. Su rapidez promedio es de 4.75 millas por hora, cuando rema con la corriente; y de 2.25 millas por hora cuando rema contra la corriente. Determina la rapidez del kayak en agua quieta y la rapidez de la corriente.



Solución Entiende Cuando viaja con la corriente, la rapidez del kayak es la rapidez del kayak en agua quieta *más* la rapidez de la corriente. Cuando viaja contra la corriente, la rapidez del kayak es la rapidez del kayak en aguas quietas *menos* la rapidez de la corriente.

Traduce Sea s = rapidez del kayak en agua quieta.
Sea c = rapidez de la corriente.

El sistema de ecuaciones es:

rapidez del kayak que viaja con la corriente: $s + c = 4.75$
rapidez del kayak que viaja contra la corriente: $s - c = 2.25$

Realiza Se usará el método de adición, como se estudió en la sección 4.1, para resolver este sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} s + c &= 4.75 \\ s - c &= 2.25 \\ \hline 2s &= 7.00 \\ s &= 3.5 \end{aligned}$$

La rapidez del kayak en agua quieta, es de 3.5 millas por hora. Ahora, determina la rapidez de la corriente.

$$\begin{aligned} s + c &= 4.75 \\ 3.5 + c &= 4.75 \\ c &= 1.25 \end{aligned}$$

Responde La rapidez de la corriente es de 1.25 millas por hora, y la rapidez del kayak en agua quieta es de 3.5 millas por hora.

Ahora resuelve el ejercicio 13

EJEMPLO 3 **Comisión** Amalia es representante de servicios al cliente, en la tienda Wavy Craze Surf. Ella recibe un salario semanal más una comisión, la cual es un porcentaje de sus ventas. Una semana, con ventas de $3 500, su total de salario más comisión fue de $1 305. La siguiente semana, con ventas de $2 500, su total de salario más comisión fue de $1 125. Determina el salario semanal de Amalia y su tasa de comisión.



Solución Entiende A Amalia le pagan un salario mensual más una comisión, con base en su monto de ventas. Se proporciona información acerca de dos semanas específicas, que puedes usar para determinar el salario semanal de Amalia y su tasa de comisión.

Sea s = salario semanal de Amalia.

Sea r = tasa de comisión de Amalia.

La semana 1, su comisión sobre ventas de \$3500, es $3500r$. La semana 2, su comisión sobre ventas de \$2500, es $2500r$. Por ende, el sistema de ecuaciones es

$$\begin{array}{lrcrcl} & \text{salario} & + & \text{comisión} & = & \text{total} \\ \text{Semana 1} & s & + & 3500r & = & 1305 \\ \text{Semana 2} & s & + & 2500r & = & 1125 \end{array}$$

Sistema de ecuaciones

Realiza

$$\begin{array}{rl} s + 3500r = 1305 & \text{Primera ecuación.} \\ -s - 2500r = -1125 & \text{Segunda ecuación multiplicada por } -1. \\ \hline 1000r = 180 & \text{Suma de ecuaciones.} \\ \dfrac{1000r}{1000} = \dfrac{180}{1000} & \\ r = 0.18 & \end{array}$$

Por tanto, la tasa de comisión de Amalia es 18%. Para determinar su salario semanal, sustituye 0.18 en cualquier ecuación.

$$\begin{aligned} s + 2500r &= 1125 \\ s + 2500(0.18) &= 1125 \\ s + 450 &= 1125 \\ s &= 675 \end{aligned}$$

Responde El salario semanal de Amalia es de \$675, y su tasa de comisión es 18%.

Ahora resuelve el ejercicio 15

EJEMPLO 4 **Paseo a caballo** Benito sale de su rancho montando su caballo, a 5 millas por hora. Media hora después, Joel sale del mismo rancho y se dirige por la misma ruta en su caballo, a 8 millas por hora.

a) ¿En cuánto tiempo, después de que Joel sale del rancho, alcanzará a Benito?

b) Cuando Joel alcance a Benito, ¿qué tan lejos del rancho estarán?

Solución

a) Entiende Cuando Joel alcance a Benito, ambos habrán recorrido la misma distancia. Joel habrá recorrido la distancia en $\frac{1}{2}$ hora menos de tiempo, pues él partió $\frac{1}{2}$ hora después que Benito. Se usará la fórmula distancia = razón · tiempo para resolver este problema.

Traduce

Sea b = tiempo recorrido por Benito.

Sea j = tiempo recorrido por Joel.

Elabora una tabla para organizar la información dada.

	Razón	Tiempo	Distancia
Benito	5	b	$5b$
Joel	8	j	$8j$

Dado que Benito y Joel cubren la misma distancia, escribe

$$\text{Distancia de Benito} = \text{Distancia de Joel}$$
$$5b = 8j$$

La segunda ecuación, proviene del hecho de que Joel viaja $\frac{1}{2}$ hora menos que Benito. Por tanto, $j = b - \frac{1}{2}$. En consecuencia, el sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} 5b &= 8j \\ j &= b - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Realiza Este sistema de ecuaciones se resolverá usando sustitución. Dado que $j = b - \frac{1}{2}$, sustituye $b - \frac{1}{2}$ por j en la primera ecuación y resuelve para b.

$$\begin{aligned} 5b &= 8j \\ 5b &= 8\left(b - \tfrac{1}{2}\right) \\ 5b &= 8b - 4 \\ -3b &= -4 \\ b &= \frac{-4}{-3} = 1\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Por tanto, el tiempo que ha viajado Benito es de $1\frac{1}{3}$ horas. Para obtener el tiempo que Joel ha viajado, resta $\frac{1}{2}$ hora al tiempo de Benito.

$$\begin{aligned} j &= b - \frac{1}{2} \\ j &= 1\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ j &= \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{8}{6} - \frac{3}{6} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Responde Joel alcanzará a Benito en $\frac{5}{6}$ de una hora (o 50 minutos), después de que Joel sale del rancho.

b) Es posible usar la distancia de Benito o de Joel para determinar la distancia recorrida desde el rancho. Se usará la distancia de Joel.

$$d = 8j = 8\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{1} \cdot \frac{5}{\underset{3}{\cancel{6}}} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$$

Responde En consecuencia, Joel alcanzará a Benito cuando estén a $6\frac{2}{3}$ millas del Rancho.

Ahora resuelve el ejercicio 33

EJEMPLO 5 **Mezcla de soluciones** Manuel, químico en Johnson y Johnson, quiere crear un nuevo limpiador doméstico que contenga 30% de fosfato trisódico (TSP). Manuel necesita mezclar una solución al 16% de TSP con una solución al 72% de TSP, para obtener 6 litros de una solución al 30% de TSP. ¿Cuántos litros de la solución al 16% y de la solución al 72% necesitará mezclar?

Solución Entiende Para resolver este problema, se usa el hecho de que la cantidad de TSP en una solución, se encuentra al multiplicar la intensidad porcentual de la solución por el número de litros (el volumen) de la solución. Manuel necesita mezclar una solución al 16% y una solución al 72%, para obtener 6 litros de una solución, cuya intensidad, 30%, está entre las intensidades de las dos soluciones a mezclar.

Traduce Sea x = número de litros de la solución al 16%.
Sea y = número de litros de la solución al 72%.

Se dibujará un bosquejo (**Figura 4.6**) y luego se usará una tabla para auxiliar en el análisis del problema.

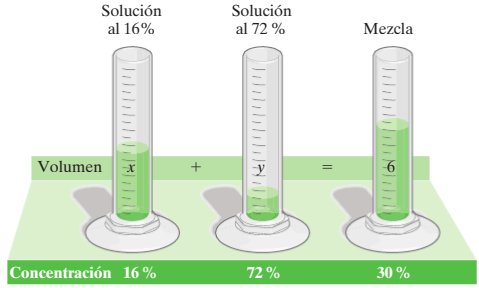


FIGURA 4.6

Solución	Concentración de la solución	Número de litros	Cantidad de TSP
Solución al 16%	0.16	x	$0.16x$
Solución al 72%	0.72	y	$0.72y$
Mezcla	0.30	6	0.30(6)

Puesto que la suma de los volúmenes de la solución al 16% y la solución al 72%, es 6 litros, la primera ecuación es:

$$x + y = 6$$

La segunda ecuación, proviene del hecho de que las soluciones se mezclan.

$$\begin{pmatrix}\text{cantidad de TSP}\\ \text{en la solución al 16\%}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{cantidad de TSP}\\ \text{en la solución al 72\%}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{cantidad de TSP}\\ \text{en la mezcla}\end{pmatrix}$$
$$0.16x \quad + \quad 0.72y \quad = \quad 0.30\,(6)$$

Por tanto, el sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} x + y &= 6 \\ 0.16x + 0.72y &= 0.30\,(6) \end{aligned}$$

Realiza Al resolver $x+y=6$ para y, se obtiene $y = -x + 6$. Al sustituir $-x+6$ por y en la segunda ecuación, se obtiene:

$$\begin{aligned} 0.16x + 0.72y &= 0.30(6) \\ 0.16x + 0.72(-x + 6) &= 0.30(6) \\ 0.16x - 0.72x + 4.32 &= 1.8 \\ -0.56x + 4.32 &= 1.8 \\ -0.56x &= -2.52 \\ x &= \frac{-2.52}{-0.56} = 4.5 \end{aligned}$$

En consecuencia, Manuel debe usar 4.5 litros de la solución al 16%. Puesto que las dos soluciones deben sumar 6 litros, se debe usar $6 - 4.5$ o 1.5 litros de la solución al 72%.

Ahora resuelve el ejercicio 19

SUGERENCIA ÚTIL

En el ejemplo 5, la ecuación $0.16x + 0.72y = 0.30(6)$ podría simplificarse, al multiplicar ambos lados de la ecuación por 100. Esto produciría la ecuación $16x + 72y = 30(6)$ o $16x + 72y = 180$. Entonces, el sistema de ecuaciones sería $x + y = 6$ y $16x + 72y = 180$. Si resuelves este sistema, deberías obtener la misma solución. Inténtalo y compruebalo.

2 Uso de sistemas lineales de tres variables para resolver aplicaciones

Ahora se tratarán algunas aplicaciones que involucran tres ecuaciones y tres variables.

EJEMPLO 6 **Préstamos bancarios** Tiny Tots Toys debe pedir en préstamo $25 000, para pagar una expansión. No es posible obtener un préstamo por la cantidad total de un solo banco, así que debe tomar préstamos de tres bancos diferentes. Pide prestado parte del dinero a un banco que cobra 8 % de interés. En el segundo banco, pide prestados $2 000 más que la mitad del monto solicitado a préstamo en el primer banco. La tasa de interés en el segundo banco es 10 %. El saldo de los $25 000, se pide prestado a un tercer banco, donde Tiny Tots paga 9 % de interés. El interés total que Tiny Tots Toys paga por los tres préstamos, es de $2 220. ¿Cuánto pide prestado a cada tasa?

Solución Entiende Se pide determinar cuánto es prestado a cada una de las tres tasas diferentes. Por tanto, este problema contendrá tres variables, una para cada cantidad solicitada a préstamo. Dado que el problema contendrá tres variables, se necesitará determinar tres ecuaciones para usar en el sistema de ecuaciones.



Traduce

Sea x = cantidad solicitada en el primer banco.
Sea y = cantidad solicitada en el segundo banco.
Sea z = cantidad solicitada en el tercer banco.

Como la cantidad total solicitada a préstamo es de $25 000, se sabe que:

$$x + y + z = 25\,000 \quad \text{La cantidad total solicitada es de \$25 000.}$$

En el segundo banco, Tiny Tots Toys pide prestados $2 000 más que la mitad del monto solicitado a préstamo en el primer banco. Por tanto, la segunda ecuación es:

$$y = \frac{1}{2}x + 2\,000 \quad y \text{ es \$2 000 más que } \frac{1}{2} \text{ de } x.$$

Comprende el Álgebra

Siempre que se utilicen *tres* variables para resolver un problema aplicado, se deben determinar *tres* ecuaciones, con las cuales se resuelva el problema.

La última ecuación proviene del hecho de que el interés anual total cobrado por los tres bancos, es de $2 220. El interés en cada banco, se encuentra al multiplicar la tasa de interés por el monto solicitado.

$$0.08x + 0.10y + 0.09z = 2\,220 \quad \text{El interés total es de \$2 220.}$$

Por tanto, el sistema de ecuaciones es:

$$x + y + z = 25\,000 \qquad (1)$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2\,000 \qquad (2)$$

$$0.08x + 0.10y + 0.09z = 2\,220 \qquad (3)$$

Ambos lados de la ecuación (2) puede multiplicarse por 2 para eliminar fracciones.

$$2(y) = 2\left(\frac{1}{2}x + 2000\right)$$

$$2y = x + 4000 \quad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$-x + 2y = 4000 \quad \text{Resta } x \text{ de ambos lados.}$$

Los decimales en la ecuación (3) pueden eliminarse al multiplicar ambos lados de la ecuación por 100. Esto produce:

$$8x + 10y + 9z = 222\,000$$

En consecuencia, el sistema de ecuaciones simplificado es:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 25000 && (ec.\,1)\\ -x + 2y &= 4000 && (ec.\,2)\\ 8x + 10y + 9z &= 222\,000 && (ec.\,3) \end{aligned}$$

Realiza Existen varias formas de resolver este sistema. Se usarán (*ec.* 1) y (*ec.* 3) para eliminar la variable z.

$$\begin{array}{rrrrl} -9x - & 9y - & 9z = & -225\,000 & (ec.\ 1)\ \text{Multiplicada por } -9. \\ 8x + & 10y + & 9z = & 222\,000 & (ec.\ 3) \\ \hline -x + & y & = & -3\,000 & \text{Suma de ecuaciones, } (ec.\ 4). \end{array}$$

Ahora usa (*ec.* 2) y (*ec.* 4) para eliminar la variable x y resolver para y.

$$\begin{array}{rrl} x - 2y = & -4\,000 & (ec.\ 2)\ \text{Multiplicada por } -1. \\ -x + y = & -3\,000 & (ec.\ 4) \\ \hline -y = & -7\,000 & \text{Suma de ecuaciones.} \\ y = & 7\,000 & \end{array}$$

Ahora que conoces el valor de y, puedes resolver para x.

$$\begin{array}{rrl} -x + 2y = & 4\,000 & (ec.\ 2) \\ -x + 2(7\,000) = & 4\,000 & \text{Sustituye } 7\,000 \text{ por } y \text{ en (ec. 2).} \\ -x + 14\,000 = & 4\,000 & \\ -x = & -10\,000 & \\ x = & 10\,000 & \end{array}$$

Finalmente, resuelve para z.

$$\begin{array}{rrl} x + y + z = & 25\,000 & (ec.\ 1) \\ 10\,000 + 7\,000 + z = & 25\,000 & \\ 17\,000 + z = & 25\,000 & \\ z = & 8\,000 & \end{array}$$

Responde Tiny Tots Toys pide prestados \$10 000 a 8%, \$7 000 a 10% y \$8 000 a 9% de interés.

Ahora resuelve el ejercicio 55

EJEMPLO 7 **Botes inflables** Hobson, Inc., tiene una pequeña fábrica que elabora tres tipos de botes inflables: los modelos para una persona, dos personas y cuatro personas. Cada bote requiere el servicio de tres departamentos: corte, ensamblado y empaquetado. A los departamentos de corte, ensamblado y empaquetado, se les permite usar un total de 380, 330 y 120 persona-horas por semana, respectivamente. Los requerimientos de tiempo para cada bote y departamento, se especifican en la siguiente tabla. Determina cuántos de cada tipo de bote debe producir Hobson cada semana, para que su planta opere a toda su capacidad.

	Tiempo (persona-h) por bote		
Departamento	Bote para una persona	Bote para dos personas	Bote para cuatro personas
Corte	0.6	1.0	1.5
Ensamblado	0.6	0.9	1.2
Empaquetado	0.2	0.3	0.5

Solución Entiende Se indica que tres diferentes tipos de botes se producen, y se pide determinar el número de cada tipo producido. Dado que este problema involucra tres cantidades a determinar, el sistema contendrá tres ecuaciones de tres variables.

Traduce Se usará la información dada en la tabla.

Sea x = número de botes para una persona.
Sea y = número de botes para dos personas.
Sea z = número de botes para cuatro personas.



El número total de horas de corte para los tres tipos de botes, debe ser igual a 380 persona-horas.

$$0.6x + 1.0y + 1.5z = 380$$

El número total de horas de ensamblado, debe ser igual a 330 persona-horas.

$$0.6x + 0.9y + 1.2z = 330$$

El número total de horas de empaquetado, debe ser igual a 120 persona-horas.

$$0.2x + 0.3y + 0.5z = 120$$

Por tanto, el sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} 0.6x + 1.0y + 1.5z &= 380 \\ 0.6x + 0.9y + 1.2z &= 330 \\ 0.2x + 0.3y + 0.5z &= 120 \end{aligned}$$

Al multiplicar cada ecuación en el sistema, por 10, se eliminarán los números decimales y se obtendrá un sistema simplificado de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 6x + 10y + 15z &= 3\,800 \quad (ec.\,1) \\ 6x + 9y + 12z &= 3\,300 \quad (ec.\,2) \\ 2x + 3y + 5z &= 1\,200 \quad (ec.\,3) \end{aligned}$$

Realiza Primero se eliminará la variable x usando (*ec.* 1) y (*ec.* 2), y luego (*ec.* 1) y (*ec.* 3).

$$\begin{aligned} 6x + 10y + 15z &= 3\,800 \quad (ec.\,1) \\ -6x - 9y - 12z &= -3\,300 \quad (ec.\,2)\ \text{Multiplicada por } -1. \\ \hline y + 3z &= 500 \quad \text{Suma de ecuaciones, } (ec.\,4). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6x + 10y + 15z &= 3\,800 \quad (ec.\,1) \\ -6x - 9y - 15z &= -3\,600 \quad (ec.3)\text{Multiplicada por } -3. \\ \hline y &= 200 \quad \text{Suma de ecuaciones, } (ec.\,5). \end{aligned}$$

Observa que, cuando se suman las dos últimas ecuaciones, las variables x y z se eliminan al mismo tiempo. Ahora se conoce el valor de y y se puede resolver para z.

$$\begin{aligned} y + 3z &= 500 \quad (ec.\,4) \\ \mathbf{200} + 3z &= 500 \quad \text{Sustituye 200 por } y. \\ 3z &= 300 \\ z &= 100 \end{aligned}$$

Finalmente, se determina x.

$$\begin{aligned} 6x + 10y + 15z &= 3\,800 \quad (ec.\,1) \\ 6x + 10(\mathbf{200}) + 15(100) &= 3\,800 \\ 6x + 2\,000 + 1\,500 &= 3\,800 \\ 6x + 3\,500 &= 3\,800 \\ 6x &= 300 \\ x &= 50 \end{aligned}$$

Responde Hobson debe producir 50 botes de una persona, 200 botes de dos personas y 100 botes de cuatro personas por semana.

Ahora resuelve el ejercicio 59

4.3 SERIE DE EJERCICIOS

Practica tus habilidades/Resolución de problemas

1. **Área territorial** El área territorial combinada de los países Georgia e Irlanda, es de 139 973 kilómetros cuadrados. La diferencia entre el área territorial de los dos países, es de 573 kilómetros cuadrados. Si Irlanda tiene mayor área territorial, determina el área territorial de cada país.
2. **Las Dakotas** El área territorial combinada de los estados de Dakota del Sur y Dakota del Norte, es de 147 946 millas cuadradas. Si Dakota del Sur tiene mayor área territorial, y si la diferencia entre las áreas territoriales, de los dos estados, es de 6 422 millas cuadradas, determina el área territorial de cada estado.
3. **Galletas y leche** Un vaso de leche y una galleta de chispas de chocolate, juntas, tienen un total de 193 calorías. Un vaso de leche tiene 77 calorías menos que el doble del número de calorías en una sola galleta de chispas de chocolate. Determina el número de calorías en un vaso de leche y el número de calorías en una galleta de chispas de chocolate.



4. **Contenido de azúcar** Una porción de limonada tiene más azúcar que una porción de Coca-Cola. La limonada tiene 17 gramos menos de azúcar que el doble de la cantidad que tiene Coca-Cola. La diferencia en la cantidad de azúcar en la limonada y la Coca-Cola, es de 8 gramos. Determina la cantidad de azúcar en una porción de limonada y la cantidad de azúcar en una porción de Coca-Cola.
   Fuente: SparkPeople.com
5. **Puesto de hot dogs** En el puesto de hot dogs de Big Al, 2 hot dogs y 3 sodas cuestan $7. El costo de 4 hot dogs y 2 sodas es de $10. Determina el costo de un hot dog y el costo de una soda.
6. **Golosinas en el estadio** En un juego de béisbol, tres conos de helado y cinco algodones de dulce cuestan $48.50. Dos conos de helado y 3 algodones de dulce cuestan $30.50. Determina el costo de un cono de helado y el costo de un algodón de dulce.



7. Jet **Ski y remolque** Linda, recientemente compró un Jet Ski Kawasaki y un remolque, por un precio total de $11 200. El precio del Jet Ski fue $1 000 más que 5 veces el precio del remolque. Determina el precio del Jet Ski y el precio del remolque.
8. **Bote pesquero y remolque** Karla, recientemente compró un pequeño bote pesquero y un remolque, por un precio total de $4 475. El precio del bote fue $25 menos que el doble del precio del remolque. Determina el precio del bote y el precio del remolque.
9. **Ángulos complementarios** Dos ángulos son **ángulos complementarios**, si la suma de sus medidas es 90°. (Consulta la sección 2.3.) Si la medida del más grande de los dos ángulos complementarios, es 15° mayor que dos veces la medida del ángulo más pequeño, determina las medidas de los dos ángulos.
10. **Ángulos complementarios** La diferencia entre las medidas de dos ángulos complementarios es 46°. Determina las medidas de los dos ángulos.
11. **Ángulos suplementarios** Dos ángulos son **ángulos suplementarios**, si la suma de sus medidas es 180°. (Consulta la sección 2.3.) Determina las medidas de dos ángulos suplementarios, si la medida de un ángulo es 28° menos que tres veces la medida del otro.
12. **Ángulos suplementarios** Determina las medidas de dos ángulos suplementarios si la medida de un ángulo es tres y medio veces más grande que la medida del otro ángulo.
13. **Rapidez de remo** El equipo de remo de Heart O'Texas, mientras practica en Austin, Texas, remó un promedio de 15.6 millas por hora, con la corriente; y 8.8 millas por hora, contra la corriente. Determina la rapidez de remo del equipo en aguas quietas y la rapidez de la corriente.



14. **Rapidez de vuelo** Julio, en su avión Piper Club, voló un promedio de 121 millas por hora, en sentido del viento; y 87 millas por hora, contra el viento. Determina la rapidez del avión en aire quieto y la rapidez del viento.

15. **Salario más comisión** Héctor, representante de ventas de equipo de oficina, gana un salario semanal más una comisión sobre sus ventas. Una semana, su compensación total sobre ventas de $4000, fue de $660. La siguiente semana, su compensación total sobre ventas de $6000, fue de $740. Determina el salario semanal de Héctor y su tasa de comisión.

16. **Pago de asociado de ventas** Ricardo, asociado de ventas en MJC Security, gana un salario mensual más una comisión sobre sus ventas. En enero, su compensación total sobre ventas de $14000, fue de $4400. En febrero, su compensación total sobre ventas de $10000, fue de $3800. Determina el salario mensual de Ricardo, y su tasa de comisión.

17. **Renta de una copiadora** Una compañía de equipo de oficina, renta copiadoras por una tarifa mensual más una tarifa por copia. Julio, renta una copiadora y le cobran $175 por hacer 1500 copias en marzo, y $223 por hacer 2300 copias en abril. ¿Cuál es la tarifa mensual y cuál es la tarifa por copia?

18. **Renta de un camión** Una agencia de renta de camiones, cobra una tarifa diaria más una tarifa por millaje. A Hugo le cobran $85 por 2 días y 100 millas, y a Cristina le cobran $165 por 3 días y 400 millas. ¿Cuál es la tarifa diaria de la agencia, y cuál es la tarifa por millaje?

19. **Aceite de lavanda** Paola, una masajista, necesita 3 onzas de una solución de aceite de lavanda al 20%. Ella sólo tiene a su disposición soluciones de aceite de lavanda al 5% y al 30 %. ¿Cuántas onzas de cada una debe mezclar, Paola, para obtener la solución deseada?

20. **Aceite de almendras** Carolina es ingeniera de producto en una compañía de productos de belleza y desarrolla una nueva loción para manos que utiliza aceite de almendras. Ella necesita 6 onzas de una solución de aceite de almendras al 20%, pero sólo tiene a su disposición soluciones de aceite de almendras al 10% y al 50%. ¿Cuántas onzas de cada una debe mezclar, Carolina, para obtener la solución deseada?

21. **Soluciones de fertilizante** Franco necesita aplicar una solución de nitrógeno líquido al 10% a su jardín de flores, pero sólo tiene disponibles una solución de nitrógeno líquido al 4% y una solución de nitrógeno líquido al 20%. ¿Qué cantidad de la solución al 4% y qué cantidad de la solución al 20% debe mezclar, Franco, para obtener 10 galones de la solución al 10%?

22. **Fertilizante para césped** El fertilizante especial para preparar el césped para el invierno, de la marca Scott es 22% nitrógeno. La cal con fertilizante para césped, de la marca Schultz, es 4% nitrógeno. Federico quiere mezclar estos dos fertilizantes para elaborar 300 libras de una mezcla especial 10% nitrógeno, para fertilizar césped a mitad de temporada. ¿Cuánto de cada fertilizante debe mezclar?

23. **Alimento para aves** El alimento para aves cuesta $0.59 la libra, y las semillas de girasol cuestan $0.89 la libra. La tienda de mascotas de Ángela quiere elaborar 30 libras de una mezcla de alimento para aves y semillas de girasol, que se venda a $0.76 la libra. ¿Cuántas libras de cada tipo de semilla debe usar?



24. **Café** Franco maneja una tienda de abarrotes. Él quiere mezclar y vender 40 libras de café, por un costo total de $219. Para obtener la mezcla, combinará el café que vende por $5.20 la libra, con café que vende por $6.30 la libra. ¿Cuántas libras de cada café debe usar?

25. **Torneo de fútbol** En un torneo regional de fútbol, los boletos para dos adultos y tres estudiantes cuestan $26. Los boletos para tres adultos y cinco estudiantes cuestan $41. Determina el precio de un boleto de adulto y el precio de un boleto de estudiante.



26. **Alitas de pollo** Un restaurante vende órdenes, tanto de tamaño regular como de tamaño jumbo, de alitas de pollo al estilo Búfalo. Tres órdenes regulares de alitas y cinco órdenes jumbo, cuestan $67. Cuatro órdenes regulares de alitas y cuatro órdenes jumbo, cuestan $64. Determina el costo de una orden regular de alitas y una orden jumbo de alitas.

27. **Cuentas de ahorros** Linda invierte un total de $10000 en dos cuentas de ahorros. Una cuenta paga 5% de interés y la otra 6%. Determina el monto colocado en cada cuenta, si las cuentas reciben un total de $540 en interés después de 1 año. Usa: interés = principal · tasa · tiempo.

28. **Inversiones** Jerónimo invierte un total de $40000 de una herencia en dos inversiones diferentes: un certificado de depósito (CD) y una cuenta de mercado de dinero. El CD paga 1.1% de interés simple y la cuenta de mercado de dinero paga 0.35% de interés simple. Si, después de un año, el interés simple total ganado por ambas inversiones, es de $376.25, determina el monto que Jerónimo colocó en cada inversión.

29. **Leche** Beatriz es ingeniero de planta en la cooperativa láctea Velda Farms. Ella quiere mezclar leche entera, que es 3.25% grasa, y leche descremada, que no tiene

grasa, para obtener 260 galones de una mezcla de leche que contiene 2% de grasa. ¿Cuántos galones de leche entera y cuántos galones de leche descremada debe mezclar, Beatriz, para obtener la mezcla deseada?

30. Receta de un postre Ana Sofía elabora una tarta de crema de chocolate. La receta requiere 8 onzas de crema *Light*, que es 25% grasa. Ana Sofía sólo tiene crema espesa, que es 36% grasa, y crema para batir, que es 11% grasa. ¿Cuántas onzas de crema espesa y cuántas onzas de crema para batir debe mezclar, Ana Sofía, para obtener la mezcla necesaria para la receta?

31. Viaje al trabajo Roberto viaja al trabajo primero conduciendo sobre caminos vecinales, a una rapidez promedio de 45 millas por hora. Luego conduce sobre la autopista interestatal, a una rapidez promedio de 75 millas por hora. La distancia de viaje total de Roberto es de 42 millas y su tiempo de viaje total es de 0.6 horas. Determina el tiempo que pasa Roberto conduciendo en caminos vecinales y el tiempo que pasa conduciendo en la autopista interestatal.

32. Construcción de un camino Karime conduce desde Atlanta hasta Louisville, una distancia de 430 millas. Debido a la construcción de un camino y a tráfico pesado, durante la primera parte de su viaje, Karime conduce con una razón promedio de 50 millas por hora. Durante el resto de su viaje, conduce a una razón promedio de 70 millas por hora. Si su viaje total dura 7 horas, ¿cuántas horas condujo a cada rapidez?

33. Conferencia de Avon Carmen y Diana son representantes Avon que van a una conferencia en Seattle. Después de la conferencia, Carmen conduce hacia su casa en Boise, con una rapidez promedio de 65 millas por hora; y Diana conduce hacia su casa en Portland, con una rapidez promedio de 50 millas por hora. Si la suma de sus tiempos de conducción es de 11.4 horas, y si la suma de las distancias conducidas es de 690 millas, determina el tiempo que cada representante pasó conduciendo hacia su casa.

34. Caminar y trotar César intenta ejercitarse todos los días. Él camina a 3 millas por hora, y luego trota a 5 millas por hora. Si le toma 0.9 horas viajar un total de 3.5 millas, ¿cuánto tiempo camina y cuánto tiempo trota?

35. Dieta de un perro El perro de Guillermo está a dieta estricta. El perro recibe, entre otros nutrimentos, 20 gramos de proteína y 6 gramos de carbohidratos. Guillermo sólo tiene dos mezclas de alimento disponible con las siguientes composiciones. ¿Cuántos gramos de cada mezcla debe usar para obtener la dieta correcta para su perro?

Mezcla	Proteína (%)	Carbohidrato (%)
Mezcla *A*	10	6
Mezcla *B*	20	2



Consulta el Ejercicio 35.

36. Fabricación de sillas Una compañía fabrica dos modelos de sillas. En la siguiente tabla, se ofrece información acerca de la construcción de las sillas. En un día particular, la compañía asigna 46.4 persona–horas para ensamblado y 8.8 persona–horas para pintado. ¿Qué cantidad de cada modelo de silla puede fabricarse?

Modelo	Tiempo para ensamblar	Tiempo para pintar
Modelo *A*	1 h	0.5 h
Modelo *B*	3.2 h	0.4 h

37. Aleación de latón Por peso, una aleación de latón es 70% cobre y 30% cinc. Otra aleación de latón es 40% cobre y 60% cinc. ¿Cuántos gramos de cada una de estas aleaciones necesitan fundirse y combinarse, para obtener 300 gramos de una aleación de latón, que es 60% cobre y 40% cinc?

38. Aleación de plata La plata sterling es 92.5% plata pura. ¿Cuántos gramos de plata pura (100%) y cuántos gramos de plata Sterling, deben mezclarse para obtener 250 g de una aleación de plata de 94%?

39. Correr a casa Después de la escuela, Jacobo y Carlos deciden correr a casa desde la escuela. Parten al mismo tiempo y corren a lo largo de la misma ruta. Jacobo corre a 5 millas por hora y Carlos corre a 6 millas por hora. Si Carlos llega a casa 10 minutos antes que Jacobo, determina el tiempo que tarda cada niño en correr a casa.

40. Conducir a la escuela Una mañana, Nicolás y Marcos conducen cada uno a la escuela. Ambos salen al mismo tiempo, y Nicolás conduce un promedio de 40 millas por hora. Marcos, quien acaba de obtener su licencia de conducir, conduce a un promedio de 30 millas por hora. Si Nicolás llega a la escuela 15 minutos antes que Marcos, determina el tiempo que tarda cada uno de ellos en conducir a la escuela.

41. Paseo en bicicleta Elizabeth y su amigo Abraham pasean en bicicleta en un evento para recaudar fondos para caridad. Abraham sale del punto de partida a las 7:00 a.m. y conduce a 15 millas por hora. Elizabeth sale del punto de partida a las 7:30 a.m. y viaja a 18 millas por hora.

a) ¿Cuánto tiempo después, de que Elizabeth salga del punto de partida, alcanzará a Abraham?

b) ¿Qué tan lejos estarán, del punto de partida?

42. Alcanzar Damián y Gustavo están en el centro de visitantes en el parque estatal cañón Palo Duro, en Texas. Damián decide comenzar a caminar a lo largo del sendero, mientras Gustavo lee acerca de la historia del parque. Damián camina a 4 millas por hora y, 15 minutos después, Gustavo camina a lo largo del mismo sendero a 4.5 millas por hora.



a) ¿Cuánto tiempo después, de que Gustavo salga del centro de visitantes, alcanzará a Damián?

b) ¿Cuán lejos del centro de visitantes estarán?

En los ejercicios 43-62, resuelve cada problema usando un sistema de tres ecuaciones de tres incógnitas.

43. Empleados de un restaurante Kapitän, es un restaurante con 23 empleados. El número de meseros es el doble del número de gerentes, y hay tres chefs más que gerentes. Determina el número de gerentes, meseros y chefs.

44. Personal de un submarino Una tripulación de 141 personas, es el estándar en un submarino clase Los Ángeles. El número de sargentos primero (enlistados), es cuatro más que el número de oficiales comisionados. El número de otros hombres enlistados, es tres menos que ocho veces el número de oficiales comisionados. Determina el número de oficiales comisionados, sargentos primero y otro personal enlistado en el submarino.

45. Competencia de latín En una competencia reciente para estudiantes de latín, la academia de Esteban ganó un total de 16 medallas en las categorías de teoría, etimología y vocabulario. El número de medallas ganadas en teoría, fue dos más que el número de medallas ganadas en vocabulario. El número total de medallas ganadas en etimología y vocabulario, fue dos más que el número de medallas ganadas en teoría. Determina el número de medallas ganada en cada categoría.

46. Manzanas orgánicas Christian cultiva manzanas orgánicas. Su huerto contiene un total de 36 árboles que producen manzanas fuji, gala y honeycrisp. El número de árboles Fuji, es seis más que el número de árboles gala. El número total de árboles gala y honeycrisp, es seis más que el número de árboles fuji. Determina el número de cada tipo de árbol.

47. Ciudades más nevadas Las tres ciudades estadounidenses con mayor promedio anual de nevada, son Syracuse, NY; Erie, PA; y Rochester, NY. El promedio anual total de nevada, para las tres ciudades, es de 287 pulgadas. Syracuse tiene un promedio anual de nevada que es 21 pulgadas más que el de Erie. Erie tiene un promedio anual de nevada que es 1 pulgada más que el de Rochester. Determina el promedio anual de nevada para las tres ciudades.

Fuente: www.noaa.gov



Syracuse, Nueva York

48. Ciudades más húmedas Las tres ciudades, dentro de Estados Unidos continental, que reciben mayor lluvia promedio anual, son Mobile, Alabama; Pensacola, Florida; y Nueva Orleáns, Louisiana. El promedio total anual de lluvia, para las tres ciudades, es de 196 pulgadas. Mobile tiene una lluvia promedio que es 3 pulgadas más que el de Nueva Orleáns. Nueva Orleáns tiene una lluvia promedio que es 1 pulgada menor que la de Pensacola. Determina la lluvia anual promedio para cada una de las tres ciudades.

Fuente: www.noaa.gov

49. Peticiones de canciones Roberto opera un servicio de DJ, y durante un año, las tres canciones más pedidas fueron *Crazy* de Patsy Cline, *Shout* de Otis Day and the Knights, y *Yeah* de Usher. El número total de peticiones para las tres canciones fue de 286. El número de peticiones por *Yeah*, fue 10 menos que el doble del número de peticiones por *Crazy*. El número de peticiones por *Shout*, fue 12 más que el número de peticiones por *Crazy*. Determina el número de peticiones por cada una de las canciones.

50. Películas populares El club cinematográfico del Colegio Estatal de Florida, tiene una biblioteca de devedés (DVD) para prestar a los estudiantes. Durante un año escolar, los devedés más populares solicitados a préstamo, fueron *Avatar*, *Tiburón* y *Titanic*. El número total de veces que se pidieron a préstamo estos devedés, fue 83. El número de veces que se prestó *Avatar,* fue cinco menos que el doble del número de veces que se prestó *Titanic*. El número de veces que se prestó *Tiburón,* fue cuatro más que el número de veces que se prestó *Titanic*. Determina el número de veces que se prestó cada devedé.

51. Boletos para un juego de fútbol Hay tres tipos de boletos disponibles para un juego de fútbol: laterales, cabecera y segundo piso. Los boletos laterales, cuestan $25 más que los boletos de cabecera, y $40 más que los boletos de segundo piso. Los boletos de cabecera cuestan $10 menos, que el doble del costo de los boletos de segundo piso. Determina el precio de cada tipo de boleto.



Consulta el Ejercicio 51.

52. Boletos para un concierto Hay tres tipos de boletos disponibles para un concierto de Ellie Lee Band: en el escenario, planta principal y balcón. Los boletos más caros, los de escenario, son el doble de costosos que los boletos de balcón. Los boletos de balcón son $10 menos que los boletos de planta principal, y $30 menos que los boletos de escenario. Determina el precio de cada tipo de boleto.

53. Triángulo La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180°. El ángulo más pequeño del triángulo, tiene una medida $\frac{2}{3}$ la medida del segundo ángulo más pequeño. El ángulo más grande, tiene una medida que es 30° menos que tres veces la medida del segundo ángulo más pequeño. Determina la medida de cada ángulo.

54. Triángulo El ángulo más grande de un triángulo, tiene una medida que es 10° menos que tres veces la medida del segundo ángulo más pequeño. La medida del ángulo más pequeño, es igual a la diferencia entre la medida del ángulo más grande y el doble de la medida del segundo ángulo más pequeño. Determina las medidas de los tres ángulos del triángulo.

55. Inversiones Tamara recibió un cheque por $10000. Ella decidió dividir el dinero (no equitativamente) en tres inversiones diferentes. Colocó parte de su dinero en una cuenta de ahorros que paga 3% de interés. El segundo monto, que fue el doble del primer monto, lo colocó en un certificado de depósito que paga 5% de interés. Colocó el saldo en un fondo de mercado de dinero que paga 6% de interés. Si el interés total de Tamara durante el periodo de 1 año fue de $525.00, ¿cuánto colocó en cada cuenta?

56. Bono Nicolás, un abogado, dividió su bono de navidad de $15000 entre tres inversiones diferentes. Con parte del dinero, compró un bono municipal que paga 5.5% de interés simple. Invirtió el doble de la cantidad de dinero que pagó por el bono municipal en un certificado de depósito que paga 4.5% de interés simple. Nicolás colocó el saldo del dinero en una cuenta de mercado de dinero que paga 3.75% de interés simple. Si el interés total de Nicolás por 1 año, fue de $692.50, ¿cuánto se colocó en cada cuenta?

57. Peróxido de hidrógeno Se debe mezclar una solución al 10%, una solución al 12% y una solución al 20% de peróxido de hidrógeno, para obtener 8 litros de una solución al 13%. ¿Cuántos litros de cada una se deben mezclar, si el volumen de la solución al 20% debe ser 2 litros menos que el volumen de la solución al 10%?

58. Ácido sulfúrico Se debe mezclar una solución al 8%, una solución al 10% y una solución al 20% de ácido sulfúrico, para obtener 100 mililitros de una solución al 12%. Si el *volumen del ácido* de la solución al 8% es igual a la suma del *volumen de ácido* de las otras dos soluciones, ¿cuánto, de cada solución, se necesita?

59. Fabricación de muebles La compañía de muebles Donaldson, produce tres tipos de mecedoras: el modelo infantil, el modelo estándar y el modelo ejecutivo. Cada silla se fabrica en tres etapas: corte, construcción y acabados. El tiempo necesario para cada etapa de cada silla, se proporciona en la siguiente tabla. Durante una semana específica, la compañía tiene disponible un máximo de 154 horas para corte, 94 horas para construcción y 76 horas para acabados. Determina qué cantidad, de cada tipo de silla, debe fabricar la compañía para operar a toda su capacidad.

Etapa	Infantil	Estándar	Ejecutivo
Corte	5 h	4 h	7 h
Construcción	3 h	2 h	5 h
Acabados	2 h	2 h	4 h

60. Fabricación de bicicletas La compañía de bicicletas Jamis, produce tres modelos de bicicletas: Dakar, Komodo y Aragon. Cada bicicleta se produce en tres etapas: soldadura, pintado y ensamblado. El tiempo necesario para cada etapa de cada bicicleta, se proporciona en la siguiente tabla. Durante una semana específica, la compañía tiene disponibles un máximo de 133 horas para soldadura, 78 horas para pintado y 96 horas para ensamblado. Determina qué cantidad, de cada tipo de bicicleta, debe fabricar la compañía para operar a toda su capacidad.

Etapa	Dakar	Komodo	Aragon
Soldadura	2	3	4
Pintado	1	2	2.5
Ensamblado	1.5	2	3

61. Flujo de corriente En electrónica, es necesario analizar el flujo de corriente a través de rutas de un circuito. En tres rutas (A, B y C) de un circuito, las relaciones son las siguientes:

$$\begin{aligned} I_A + I_B + I_C &= 0 \\ -8I_B + 10I_C &= 0 \\ 4I_A - 8I_B &= 6 \end{aligned}$$

donde I_A, I_B e I_C, representan las corrientes en las rutas A, B y C, respectivamente. Determina la corriente en cada ruta del circuito.

62. Fuerzas sobre una viga En física, con frecuencia se estudian las fuerzas que actúan sobre un objeto. Para tres fuerzas, F_1, F_2 y F_3, que actúan sobre una viga, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3F_1 + F_2 - F_3 &= 2 \\ F_1 - 2F_2 + F_3 &= 0 \\ 4F_1 - F_2 + F_3 &= 3 \end{aligned}$$

Determina las tres fuerzas.

Actividad grupal

Como equipo, discutan y respondan el ejercicio 63.

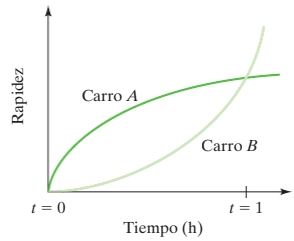
63. Dos carros Un *sistema no lineal de ecuaciones*, es un sistema de ecuaciones que contienen al menos una ecuación que no es lineal. (Los sistemas no lineales de ecuaciones, se estudiarán en el capítulo 10.) La gráfica a la derecha, muestra un sistema no lineal de ecuaciones. Las curvas representan rapidez contra el tiempo, para dos carros.

a) ¿Las dos curvas son funciones? Explica.

b) Discutan el significado de esta gráfica.

c) En el tiempo $t = 0.5$ h, ¿cuál carro viaja con mayor rapidez? Explica tu respuesta.

d) Supón que los dos carros parten desde la misma posición y viajan en la misma dirección. ¿Cuál carro, A o B, viajó más lejos en 1 hora? Explica tu respuesta.



Ejercicios de repaso acumulativo

[1.4] **64.** Evalúa $\frac{1}{2}x + \frac{2}{5}xy + \frac{1}{8}y$ cuando $x = -2, y = 5$.

[2.1] **65.** Resuelve $4 - 2[(x - 5) + 2x] = -(x + 6)$.

[3.2] **66.** Explica cómo determinar si una gráfica representa una función.

[3.5] **67.** Escribe una ecuación de la recta que pasa a través de los puntos $(6, -4)$ y $(2, -8)$.

EXAMEN DE MITAD DE CAPÍTULO: SECCIONES 4.1-4.3

Para descubrir qué tan bien entiendes el material del capítulo hasta este punto, resuelve esta breve evaluación. Las respuestas, y la sección donde el material se discutió inicialmente, se proporcionan en la parte final del libro. Revisa cualquier pregunta que respondas de manera incorrecta.

1. Para los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) Escribe cada ecuación en forma pendiente-intersección con el eje de las y.

b) Sin graficar las ecuaciones, enuncia si el sistema es consistente, inconsistente o dependiente.

c) Indica si el sistema tiene exactamente una solución, ninguna solución o un número infinito de soluciones.

$$7x - y = 13$$
$$2x + 3y = 9$$

Resuelve cada sistema de ecuaciones, usando el método gráfico.

2. $y = 2x$
$y = -x + 3$

3. $x + y = -4$
$3x - 2y = 3$

Resuelve cada sistema de ecuaciones, usando el método de sustitución.

4. $2x + 5y = -3$
$x - 2y = -6$

5. $4x - 3y = 8$
$2x + y = -1$

Resuelve cada sistema de ecuaciones, usando el método de adición.

6. $x = 4y - 19$
$7x + 5y = -1$

7. $3x + 4y = 3$
$9x + 5y = \frac{11}{2}$

Resuelve cada sistema de ecuaciones, mediante cualquier método. Si el sistema es inconsistente o dependiente, indícalo.

8. $\frac{1}{3}a - \frac{1}{4}b = -1$
$\frac{1}{2}a + \frac{1}{6}b = 5$

9. $3m - 2n = 1$
$n = \frac{3}{2}m - 7$

10. $8x - 16y = 24$
$x = 2y + 3$

Resuelve cada sistema de ecuaciones.

11. $x + y + z = 2$
$2x - y + 2z = -2$
$3x + 2y + 6z = 1$

12. $2x - y - z = 1$
$3x + 5y + 2z = 12$
$-6x - 4y + 5z = 3$

13. Cuando se le pidió resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ -x + 2y + 2z &= 5 \\ 7x + 5y - z &= -2 \end{aligned}$$

Franco afirmó que la solución era $x = 1$. Esto es incorrecto. ¿Por qué es incorrecto? Explica tu respuesta. Luego resuelve el sistema por completo.

14. Nueces de la India y nueces pecaneras Una tienda local de nueces, vende nueces de la India por \$12 la libra y nueces pecaneras por \$6 la libra. ¿Cuántas libras de cada tipo debe mezclar Alonso para tener una mezcla de 15 libras, cuyo precio es de \$10 la libra?

15. Suma de números La suma de tres números es 32. El número más grande es cuatro veces el número más pequeño. La suma de los dos números más pequeños es 8 menos que el número más grande. Determina los tres números.

4.4 Resolución de sistemas de ecuaciones usando matrices

1. **Escritura de una matriz aumentada**
2. **Resolución de sistemas de ecuaciones lineales**
3. **Resolución de sistemas de ecuaciones lineales de tres variables**
4. **Reconocimiento de sistemas inconsistentes y dependientes**

1 Escritura de una matriz aumentada

Guía para la solución de problemas

- Una **matriz** es un arreglo rectangular de números, escritos dentro de corchetes. El plural de *matriz*, es **matrices**.
- Los números en una matriz se llaman **elementos** de la matriz.
- Las **dimensiones** de una matriz, son el número de filas por el número de columnas.

Un ejemplo de matriz es

$$\begin{matrix} & \text{3 columnas} \\ & \downarrow\ \downarrow\ \downarrow \\ \text{2 filas} \rightarrow & \begin{bmatrix} 5 & 7 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \\ \text{2 filas} \rightarrow & \end{matrix}$$

Las dimensiones de esta matriz son 2 filas por 3 columnas. Se escribe 2×3 y se lee "2 por 3".

Una **matriz cuadrada**, es una matriz con el mismo número de filas y columnas. Un ejemplo de una matriz 2×2 es

$$\begin{matrix} & \text{2 columnas} \\ & \downarrow\ \downarrow \\ \text{2 filas} \rightarrow & \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 9 & -2 \end{bmatrix} \\ \text{2 filas} \rightarrow & \end{matrix}$$

Se resolverán sistemas de ecuaciones lineales usando una *matriz aumentada*. Una **matriz aumentada**, es una matriz constituida por dos matrices más pequeñas, separadas por una línea vertical. Una matriz aumentada que representa un sistema de ecuaciones lineales, tendrá los coeficientes numéricos a la izquierda de la línea vertical, y las constantes a la derecha de la línea vertical, como se ilustra a continuación. El sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 10 \\ 4x - 5y &= 9 \end{aligned}$$

se representa con la matriz aumentada

$$\begin{matrix} \text{coeficientes de } x & & \text{constantes} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 10 \\ 4 & -5 & 9 \end{array}\right] \\ \uparrow \\ \text{coeficientes de } y \end{matrix}$$

La matriz 2×2, $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$, es la **matriz de coeficientes**. La matriz 2×1, $\begin{bmatrix} 10 \\ 9 \end{bmatrix}$, es la **matriz de constantes**. De este modo, la matriz que representa el sistema de ecuaciones $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 10 \\ 4 & -5 & 9 \end{array}\right]$, es la matriz de coeficientes *aumentada* por la matriz de constantes.

Cuando un sistema de ecuaciones lineales se representa con una matriz aumentada, cada ecuación necesita estar en la forma $ax + by = c$. Por ejemplo, el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y &= -2x + 5 \\ x &= 7y - 4 \end{aligned} \quad \text{se escribiría como} \quad \begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ x - 7y &= -4 \end{aligned}$$

Este sistema se puede representar con la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -7 & -4 \end{array}\right]$$

Cuando se use una matriz aumentada para resolver un sistema de ecuaciones lineales, se usará un método muy similar al método de adición, discutido en la sección 4.1.

2 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales usando matrices, se realizan ciertos procedimientos que se estudiarán más adelante, de modo que la matriz aumentada se puede reescribir en **forma escalonada** (o **triangular**):

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & a & p \\ 0 & 1 & q \end{array}\right]$$

donde a, p y q representan números. A partir de este tipo de matriz aumentada, se puede escribir un sistema equivalente de ecuaciones. Esta matriz representa el sistema lineal

$$\begin{aligned} 1x + ay &= p \\ 0x + 1y &= q \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} x + ay &= p \\ y &= q \end{aligned}$$

Por ejemplo,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \quad \text{representa} \quad \begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

Observa que el sistema arriba a la derecha se puede resolver fácilmente por sustitución. Su solución es $(-6, 5)$.

Las **transformaciones de fila**, se utilizan para reescribir la matriz aumentada en forma escalonada. Se usarán tres procedimientos de transformación de filas. Las transformaciones de fila, sobre una matriz, son equivalentes a las operaciones que realizarías sobre las ecuaciones del sistema.

Procedimientos para transformaciones de fila

1. Todos los números en una fila pueden multiplicarse (o dividirse) por cualquier número real distinto de cero. Esto es lo mismo que multiplicar ambos lados de una ecuación, por un número real distinto de cero.
2. Todos los números en una fila pueden multiplicarse por cualquier número real distinto de cero. Estos productos pueden sumarse después a los números correspondientes en cualquiera otra fila. Esto es equivalente a eliminar una variable de un sistema de ecuaciones, usando el método de adición.
3. El orden de las filas puede intercambiarse. Esto es equivalente a intercambiar el orden de las ecuaciones en un sistema de ecuaciones.

Por lo general, cuando obtienes un 1 en la matriz aumentada, se usa el procedimiento 1 de transformación de filas y cuando obtienes un 0, se usa el procedimiento 2 de transformación de filas. *Trabaja por columnas, empezando por la izquierda.* Comienza con la primera columna y la primera fila.

Comprende el Álgebra

Cuando trabajes con una matriz aumentada:

- para obtener un 1, por lo general, se usa el primer procedimiento de transformación de filas.
- para obtener un 0, por lo general, se usa el segundo procedimiento de transformación de filas.

EJEMPLO 1 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones usando matrices.

$$2x + 4y = -2$$
$$3x - 2y = 5$$

Solución Primero escribe la matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{array}\right]$$

La meta es obtener una matriz de la forma $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & a & p \\ 0 & 1 & q \end{array}\right]$. Comienza por usar el procedimiento 1 de transformación de filas, para sustituir el 2 en la primera columna, primera fila, con 1. Para hacer esto, multiplica la primera fila de números por $\frac{1}{2}$. Esta multiplicación, se abrevia como $\frac{1}{2}R_1$ y se coloca a la derecha de la matriz, en la misma fila donde se realizó la operación.

$$\left[\begin{array}{cc|c} \left(\frac{1}{2}\right)2 & \left(\frac{1}{2}\right)4 & \left(\frac{1}{2}\right)(-2) \\ 3 & -2 & 5 \end{array}\right] \quad \frac{1}{2}R_1$$

o

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{array}\right]$$

A continuación, se usa las transformaciones de fila para producir un 0 en la primera columna, segunda fila, donde actualmente un 3 está en esta posición. Se multiplicarán los elementos en la fila 1 por -3, y se sumarán los productos a la fila 2. Esta transformación de fila se abrevia como $-3R_1 + R_2$.

Los elementos en la primera fila multiplicados por -3, son:

$$\begin{array}{ccc} -3(1) & -3(2) & -3(-1) \\ & \text{o} & \\ -3 & -6 & 3 \end{array}$$

Ahora suma estos productos a sus respectivos elementos en la segunda fila, para obtener

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -3+3 & -6+(-2) & 3+5 \end{array}\right] \quad -3R_1 + R_2$$

o

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -8 & 8 \end{array}\right]$$

A continuación, se usan transformaciones de fila para producir un 1 en la segunda fila, segunda columna, donde actualmente un -8 está en esta posición. Esto se hace al multiplicar la segunda fila por $-\frac{1}{8}$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ \left(-\frac{1}{8}\right)0 & \left(-\frac{1}{8}\right)(-8) & \left(-\frac{1}{8}\right)8 \end{array}\right] \quad -\frac{1}{8}R_2$$

o

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Ahora la matriz está en forma escalonada y el sistema equivalente de ecuaciones, es:

$$x + 2y = -1$$
$$y = -1$$

Ahora puedes resolver para x usando sustitución.

$$\begin{aligned} x + 2y &= -1 \\ x + 2(-1) &= -1 \\ x - 2 &= -1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Una verificación mostrará que $(1, -1)$ es la solución al sistema original.

Ahora resuelve el ejercicio 19

Comprende el Álgebra

Cuando reescribas la matriz aumentada en forma escalonada, trabaja por columnas, desde la columna de la extrema izquierda hasta la de la extrema derecha. Siempre completa una columna antes de moverte hacia la siguiente columna. En cada columna, primero obtén el 1 en la posición adecuada y después obtén los 0.

3 Resolución de sistemas de ecuaciones lineales de tres variables

Ahora, se usarán matrices para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales de tres variables. Se usarán los mismos procedimientos de transformación de filas utilizados cuando se resuelve un sistema de dos ecuaciones lineales. La meta, es producir una matriz aumentada en forma escalonada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & p \\ 0 & 1 & c & q \\ 0 & 0 & 1 & r \end{array}\right]$$

donde a, b, c, p, q y r representan números. Esta matriz representa el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 1x + ay + bz &= p \\ 0x + 1y + cz &= q \\ 0x + 0y + 1z &= r \end{aligned} \quad \text{o} \quad \begin{aligned} x + ay + bz &= p \\ y + cz &= q \\ z &= r \end{aligned}$$

SUGERENCIA ÚTIL

Consejo de estudio

Cuando uses matrices, ten cuidado de mantener todos los números alineados limpiamente en filas y columnas. Un ligero error al copiar números de una matriz a otra, conducirá a un intento incorrecto por resolver un sistema de ecuaciones.

Por ejemplo, el sistema de ecuaciones, $\begin{aligned} x - 3y + z &= 3 \\ 4x + 2y - 5z &= 20 \\ -5x - y - 4z &= 13 \end{aligned}$ cuando se representa correctamente con la matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 & 20 \\ -5 & -1 & -4 & 13 \end{array}\right]$, conduce a la solución $(1, -2, -4)$.

Sin embargo, una matriz que parece muy similar, $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 & 20 \\ -5 & 2 & -4 & 13 \end{array}\right]$, conduce a la triada ordenada incorrecta de $\left(-\frac{25}{53}, -\frac{130}{53}, -\frac{206}{53}\right)$.

EJEMPLO 2 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones, usando matrices.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= -7 \\ 2x - y - z &= 7 \\ -x + 3y + 2z &= -8 \end{aligned}$$

Solución Primero escribe la matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 2 & -1 & -1 & 7 \\ -1 & 3 & 2 & -8 \end{array}\right]$$

A continuación, se usan transformaciones de fila para producir una primera columna de $\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}$.

Dado que el número en la primera columna, primera fila, ya es 1, se trabajará con el 2 en la primera columna, segunda fila. Al multiplicar los números en la primera fila por -2 y sumar estos productos a los números respectivos en la segunda fila, se sustituirá el 2 con 0. Ahora la matriz es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 3 & -7 & 21 \\ -1 & 3 & 2 & -8 \end{array}\right] \quad -2R_1 + R_2$$

Al continuar, abajo de la primera columna, se quiere sustituir el -1 con 0. Al multiplicar los números en la primera fila por 1, y después sumar los productos a la tercera fila, se obtiene:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 3 & -7 & 21 \\ 0 & 1 & 5 & -15 \end{array}\right] \quad 1R_1 + R_3$$

Ahora, se trabaja con la segunda columna. Se quiere producir una segunda columna de la forma $\begin{matrix}a\\1\\0\end{matrix}$, donde a representa un número. Puesto que actualmente hay un 1 en la tercera fila, segunda columna, y se quiere un 1 en la segunda fila, segunda columna, se intercambian las filas segunda y tercera de la matriz. Esto resulta en

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 5 & -15 \\ 0 & 3 & -7 & 21 \end{array}\right] \quad \text{Intercambiar } R_2 \text{ y } R_3.$$

Al continuar, abajo por la segunda columna, se quiere sustituir el 3 en la tercera fila con 0, al multiplicar los números en la segunda fila por -3 y sumar estos productos a la tercera fila. Esto resulta en

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & -22 & 66 \end{array}\right] \quad -3R_2 + R_3$$

Ahora, trabaja con la tercera columna. Se quiere producir una tercera columna de la forma $\begin{matrix}b\\c\\1\end{matrix}$, donde b y c representan números. Puedes multiplicar los números en la tercera fila por $-\dfrac{1}{22}$ para sustituir -22 con 1.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 5 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \quad -\tfrac{1}{22}R_3$$

Esta matriz ahora está en forma escalonada. A partir de esta matriz, se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= -7 \\ y + 5z &= -15 \\ z &= -3 \end{aligned}$$

La tercera ecuación produce el valor de z en la solución. Ahora se puede resolver para y al sustituir -3 por z en la segunda ecuación.

$$\begin{aligned} y + 5z &= -15 \\ y + 5(-3) &= -15 \\ y - 15 &= -15 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Ahora resuelve para x al sustituir 0 por y y -3 por z en la primera ecuación.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= -7 \\ x - 2(0) + 3(-3) &= -7 \\ x - 0 - 9 &= -7 \\ x - 9 &= -7 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

La solución es $(2, 0, -3)$. Verifica esto ahora al sustituir los valores adecuados en cada una de las ecuaciones originales.

Ahora resuelve el ejercicio 33

4 Reconocimiento de sistemas inconsistentes y dependientes

Cuando resuelvas un sistema de dos ecuaciones, si obtienes una matriz aumentada, en la cual una fila de números en el lado izquierdo de la línea vertical es toda ceros, pero un cero no aparece en la misma fila en el lado derecho de la línea vertical, el sistema es inconsistente y no tiene solución. Por ejemplo, un sistema de ecuaciones que produce la siguiente matriz aumentada, es un sistema inconsistente.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \longleftarrow \text{Sistema inconsistente.}$$

La segunda fila de la matriz, representa la ecuación:

$$0x + 0y = 3$$

que nunca es verdadera.

Si obtienes una matriz en la cual aparece un 0 en toda una fila, el sistema de ecuaciones es dependiente. Por ejemplo, un sistema de ecuaciones que produce la siguiente matriz aumentada, es un sistema dependiente.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longleftarrow \text{Sistema dependiente.}$$

Comprende el Álgebra

Cuando trabajes con matrices aumentadas para resolver un sistema de ecuaciones lineales, si produces

- una fila con ceros a la izquierda y un número distinto de cero a la derecha de la barra vertical, el sistema es inconsistente y no tiene solución.
- una fila con todos ceros, el sistema es dependiente y tiene un número infinito de soluciones.

La segunda fila de la matriz, representa la ecuación:

$$0x + 0y = 0$$

que siempre es verdadera.

Reglas similares se aplican para sistemas con tres ecuaciones.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right] \longleftarrow \text{Sistema inconsistente.}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & -4 \end{array}\right] \longleftarrow \text{Sistema dependiente.}$$

EJEMPLO 3 Resuelve cada sistema de ecuaciones usando matrices.

a) $x + y = 4$
$2x + 2y = 3$

b) $x - y = 5$
$-3x + 3y = -15$

Solución

a) La matriz aumentada que representa este sistema de ecuaciones, es $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{array}\right]$. Se multiplica los números en la fila 1 por -2 y se suman estos productos a la segunda fila.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{array}\right] \quad -2R_1 + R_2$$

Observa que la segunda fila de la nueva matriz, representa la ecuación $0x + 0y = -5$, o $0 = -5$, que siempre es *falsa*. Por tanto, este sistema de ecuaciones es inconsistente y no tiene solución.

b) La matriz aumentada que representa este sistema de ecuaciones, es $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 5 \\ -3 & 3 & -15 \end{array}\right]$.

Se multiplicarán los números en la fila 1 por 3 y se sumarán estos productos a la segunda fila.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad 3R_1 + R_2$$

Observa que la segunda fila de la nueva matriz representa la ecuación $0x + 0y = 0$, o $0 = 0$, que siempre es *verdadera*. Por tanto, este sistema de ecuaciones es dependiente y tiene un número infinito de soluciones.

Ahora resuelve el ejercicio 23

4.4 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

transformaciones aumentada cuadrada dimensiones inconsistente elementos
escalonada funciones rectangular columna dependiente

1. Para resolver un sistema de ecuaciones lineales usando matrices, se usan _____ de fila para reescribir la matriz aumentada en forma escalonada.
2. Los números adentro de la matriz se llaman _____.
3. Para una matriz, el número de filas por el número de columnas se refiere a las _____ de la matriz.
4. Cuando una matriz consiste de dos matrices más pequeñas separadas mediante una línea vertical, se le llama matriz _____.
5. Si, mientras resuelves un sistema de ecuaciones, usando una matriz aumentada, obtienes la matriz $\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{array}\right]$, puedes concluir que el sistema es _____ y no tiene solución.
6. Si, mientras resuelves un sistema de ecuaciones, usando una matriz aumentada, obtienes la matriz $\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, puedes concluir que el sistema es _____ y tiene un número infinito de soluciones.
7. La matriz $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ es un ejemplo de una matriz _____.
8. La matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right]$ está en forma _____.

Practica tus habilidades

Realiza cada transformación de fila indicada y escribe la nueva matriz.

9. $\left[\begin{array}{cc|c} -5 & 35 & 15 \\ 2 & -3 & 16 \end{array}\right]$ Multiplica los números en la primera fila por $-\frac{1}{5}$.
10. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -7 & -3 \\ 0 & 11 & 22 \end{array}\right]$ Multiplica los números en la segunda fila por $\frac{1}{11}$.
11. $\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 3 & -8 \end{array}\right]$ Intercambia la fila 1 y la fila 3.

12. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 8 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{array}\right]$ Intercambia la fila 2 y la fila 3.

13. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 12 \\ -4 & 11 & -6 \end{array}\right]$ Multiplica los números en la primera fila por 4 y suma los productos a la segunda fila.

14. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ \frac{1}{2} & 10 & -4 \end{array}\right]$ Multiplica los números de la primera fila por $-\frac{1}{2}$ y suma los productos a la segunda fila.

15. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & \frac{1}{4} \\ 5 & 2 & 2 & -2 \\ 6 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right]$ Multiplica los números en la primera fila por -5 y suma los productos a la segunda fila.

16. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right]$ Multiplica los números en la tercera fila por $\frac{1}{3}$.

Resuelve cada sistema usando matrices.

17. $x - 2y = 4$
$2x + y = 3$

18. $x + 3y = 3$
$5x - 2y = -19$

19. $x + 3y = -2$
$-2x - 7y = 3$

20. $2x + 4y = -8$
$3x - 5y = -1$

21. $5a - 10b = -10$
$2a + b = 1$

22. $3s - 2t = 1$
$-2s + 4t = -6$

23. $2x - 5y = -6$
$-4x + 10y = 12$

24. $8x = 4y + 12$
$-2x + y = -3$

25. $7x - 4y = 11$
$3x + 7y = -4$

26. $13x - 3y = 4$
$11x + 2y = 17$

27. $-3x + 6y = 5$
$2x - 4y = 7$

28. $-2m - 4n = 7$
$3m + 6n = -8$

29. $12x - 8y = 6$
$-3x + 4y = -1$

30. $2x - 3y = 3$
$-5x + 9y = -7$

31. $10m = 8n + 15$
$16n = -15m - 2$

32. $8x = 9y + 4$
$16x - 27y = 11$

Resuelve cada sistema usando matrices.

33. $x + y + z = -2$
$2x - y + 4z = 0$
$3x + 2y - 5z = 4$

34. $x - y + 2z = -6$
$3x - 2y + z = -5$
$-2x + y - z = 3$

35. $x + 2y = 5$
$y - z = -1$
$2x - 3z = 0$

36. $3a - 5c = 3$
$a + 2b = -6$
$7b - 4c = 5$

37. $x + 2y - 3z = -7$
$2x - y - z = 1$
$x + 3y + 4z = 6$

38. $3x + 5y + 2z = 3$
$-x - y - z = -2$
$2x - 2y + 5z = 11$

39. $2x - 4y + 3z = -12$
$3x - y + 2z = -3$
$-4x + 8y - 6z = 10$

40. $x + 2y + 3z = 1$
$4x + 5y + 6z = -3$
$7x + 8y + 9z = 0$

41. $3x - 4y + z = 4$
$x + 2y - 3z = -12$
$2x + y - z = -6$

42. $3x + y + z = 4$
$-2x - y + z = -4$
$4x + 3y + 5z = 0$

43. $2x - 5y + z = 1$
$3x - 5y + z = 3$
$-4x + 10y - 2z = -2$

44. $3x - 2y + 4z = -1$
$5x + 2y - 4z = 9$
$-6x + 4y - 8z = 2$

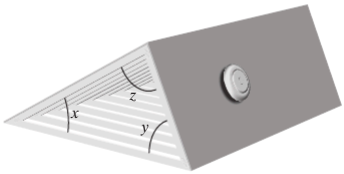
45. $5x - 3y + 4z = 22$
$-x - 15y + 10z = -15$
$-3x + 9y - 12z = -6$

46. $9x - 4y + 5z = -2$
$-9x + 5y - 10z = -1$
$9x + 3y + 10z = 1$

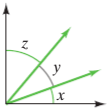
Resolución de problemas

Resuelve usando matrices.

47. Ángulos de un techo En una sección transversal triangular de un techo, la medida del ángulo más grande es 55° mayor que la medida del ángulo más pequeño. La medida del ángulo más grande es 20° mayor que la medida del ángulo restante. Determina la medida de cada ángulo.



48. Ángulo recto Un ángulo recto se divide en tres ángulos más pequeños. La medida del más grande de los tres ángulos es el doble de la medida del más pequeño. La medida del ángulo restante es 10° mayor que la medida del ángulo más pequeño. Determina la medida de cada ángulo.



49. Productor de discos Ricardo es un productor de discos que ha producido un total de 59 álbumes en las categorías de blues, hip-hop y jazz. El número de álbumes de hip-hop es dos más que el doble del número de álbumes de jazz. El número de álbumes de blues es 10 menos que el número de álbumes de hip-hop. Determina el número de álbumes que ha producido Ricardo en cada categoría.



50. Colección de autógrafos de jugadores de béisbol Alex tiene una gran colección de autógrafos de jugadores de béisbol de los equipos de las Mantarrayas de Tampa Bay, los Cerveceros de Milwaukee y los Rockies de Colorado. El número total de autógrafos de jugadores de los tres equipos es de 42. El número de autógrafos de los Mantarrayas es cinco más que el doble del número de autógrafos de los Rockies. El número de autógrafos de los Cerveceros es ocho menos que el número de autógrafos de los Mantarrayas. Determina el número de autógrafos que tiene Alex de los jugadores de cada equipo.

Ejercicios conceptuales y de redacción

51. Cuando resuelves un sistema de ecuaciones lineales mediante matrices, si dos filas son idénticas, ¿el sistema será consistente, dependiente o inconsistente?

52. Cuando resuelves un sistema de ecuaciones, usando matrices, ¿cómo sabrás si el sistema es

a) dependiente?

b) inconsistente?

53. Cuando resuelves un sistema de ecuaciones lineales usando matrices, si dos filas de matrices se intercambian, ¿la solución al sistema cambiará? Explica.

54. Es posible determinar si un sistema de dos ecuaciones de dos variables es consistente, dependiente o inconsistente, al comparar las pendientes e intersecciones con el eje de las y de las gráficas de las ecuaciones. ¿Puedes decir, sin resolver, si un sistema de tres ecuaciones de tres variables es consistente, dependiente o inconsistente? Explica.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.2] **55.** $A = \{1, 2, 4, 6, 9\}$; $B = \{3, 4, 5, 6, 10\}$. Determina

a) $A \cup B$;

b) $A \cap B$.

[2.5] **56.** Indica la desigualdad $-1 < x \leq 4$

a) sobre una recta numérica,

b) como un conjunto solución y

c) en notación de intervalo.

[3.2] **57.** ¿Qué representa una gráfica?

[3.4] **58.** Si $f(x) = -2x^2 + 3x - 6$, determina $f(-5)$.

4.5 Solución de sistemas de ecuaciones, usando determinantes y la regla de Cramer

1. **Evaluación del determinante de una matriz 2 × 2**
2. **Uso de la regla de Cramer**
3. **Evaluación del determinante de una matriz 3 × 3**
4. **Uso de la regla de Cramer para sistemas de tres variables**

1 Evaluación del determinante de una matriz 2 × 2

Asociado con toda matriz cuadrada hay un número llamado el **determinante**. Para una matriz 2 × 2, su determinante se define del modo siguiente.

Determinante

El **determinante** de una matriz 2×2, $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$, se denota $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ y se evalúa como

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Comprende el Álgebra

Para evaluar un determinante 2×2, resta el producto de las dos diagonales, como se muestra a continuación:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \searrow & b_1 \\ a_2 & \searrow b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Un sistema de ecuaciones lineales también puede resolverse usando determinantes.

EJEMPLO 1 Evalúa cada determinante.

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$

Solución

a) $a_1 = 3, b_1 = 2, a_2 = 4, b_2 = 5$

$$\begin{vmatrix} 3 \searrow & 2 \\ 4 & \searrow 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = 15 - 8 = 7$$

b) $a_1 = 4, b_1 = 6, a_2 = -3, b_2 = -2$

$$\begin{vmatrix} 4 \searrow & 6 \\ -3 & \searrow -2 \end{vmatrix} = (4)(-2) - (-3)(6) = -8 - (-18) = -8 + 18 = 10$$

Ahora resuelve el ejercicio 7

2 Uso de la regla de Cramer

Si comienzas con las ecuaciones

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

puedes usar el método de adición para mostrar que

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad \text{y} \quad y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

(consulta el Problema de desafío 67 en la página 282). Observa que los *denominadores* de x y y son ambos $a_1 b_2 - a_2 b_1$. A continuación, está el determinante que produce este denominador. Este denominador se etiquetó D.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Los *numeradores* de x y y son diferentes. A continuación, hay dos determinantes, etiquetados D_x y D_y, que producen los numeradores de x y y.

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1 \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

En la *regla de Cramer*, se usan los determinantes D, D_x y D_y. La **regla de Cramer** puede usarse para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Regla de Cramer para sistemas de ecuaciones lineales

Para un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

con

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \text{ y } D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

entonces $$x = \frac{D_x}{D} \quad \text{y} \quad y = \frac{D_y}{D}, \; D \neq 0.$$

SUGERENCIA ÚTIL

Los elementos en el determinante D, son los coeficientes de los términos x y y.

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$
$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Para obtener D_x, sustituye los valores en la primera columna con las constantes.

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$
$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Para obtener D_y, sustituye los valores en la segunda columna con las constantes.

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$
$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

EJEMPLO 2 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones usando la regla de Cramer.

$$3x + 5y = 7$$
$$4x - y = -6$$

Solución Ambas ecuaciones están dadas en la forma deseada, $ax + by = c$. Cuando se etiqueten a, b y c, $3x + 5y = 7$ se referirá como la ecuación 1, y $4x - y = -6$ como la ecuación 2, para los subíndices.

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix}$$
$$3x + 5y = 7$$
$$4x - 1y = -6$$
$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}$$

Ahora se determinarán D, D_x y D_y.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1) - 4(5) = -3 - 20 = -23$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = 7(-1) - (-6)(5) = -7 + 30 = 23$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 3(-6) - 4(7) = -18 - 28 = -46$$

Ahora se determinarán los valores de x y y.

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{23}{-23} = -1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-46}{-23} = 2$$

Por tanto, la solución es $x = -1$, $y = 2$ o el par ordenado $(-1, 2)$. Una verificación mostrará que este par ordenado satisface ambas ecuaciones.

Ahora resuelve el ejercicio 15

Cuando el determinante sea $D = 0$, la regla de Cramer no puede usarse, pues la división por 0 es indefinida. Entonces debes usar un método diferente para resolver el sistema. Sin embargo, puedes evaluar D_x y D_y para determinar si el sistema es dependiente o inconsistente.

Cuando $D = 0$

Para un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables,

- si $D = 0$, $D_x = 0$ y $D_y = 0$, entonces el sistema es dependiente y el sistema tiene un número infinito de soluciones.
- si $D = 0$ y, ya sea $D_x \neq 0$ o $D_y \neq 0$, entonces el sistema es inconsistente y el sistema no tiene solución.

3 Evaluación del determinante de una matriz 3×3

Para el determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

el **determinante menor** de a_1, se obtiene al despreciar los elementos en la misma fila y columna en la que aparece el elemento a_1. Los elementos restantes forman el determinante menor de a_1. Los determinantes menores de otros elementos se encuentran de manera similar.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{Determinante menor de } a_1.$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{Determinante menor de } a_2.$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad \text{Determinante menor de } a_3.$$

Para evaluar determinantes de una matriz 3×3, se usan determinantes menores. El recuadro de la siguiente página, muestra cómo puede evaluarse dicho determinante mediante la **expansión por menores de la primera columna**.

Expansión del determinante mediante menores de la primera columna

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Determinante menor de a_1 ↓ Determinante menor de a_2 ↓ Determinante menor de a_3 ↓

EJEMPLO 3 Evalúa $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$ usando expansión mediante menores de la primera columna.

Solución Se seguirá el procedimiento proporcionado líneas arriba.

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 4[5(-1) - (-3)0] - 3[(-2)(-1) - (-3)6] + 1[(-2)0 - 5(6)]$$
$$= 4(-5 + 0) - 3(2 + 18) + 1(0 - 30)$$
$$= 4(-5) - 3(20) + 1(-30)$$
$$= -20 - 60 - 30$$
$$= -110$$

El determinante tiene un valor de -110.

Ahora resuelve el ejercicio 13

4 Uso de la regla de Cramer para sistemas de tres variables

La regla de Cramer también se puede usar para resolver sistemas de ecuaciones de tres variables del modo siguiente.

Regla de Cramer para sistemas de ecuaciones de tres variables

Para resolver el sistema

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

con

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

entonces

$$x = \frac{D_x}{D} \quad y = \frac{D_y}{D} \quad z = \frac{D_z}{D}, \quad D \neq 0$$

SUGERENCIA ÚTIL

Observa que los denominadores de las expresiones para x, y y z, son todos el mismo determinante, D. Observa que las d sustituyen a las a, los coeficientes numéricos de los términos x, en D_x. Las d sustituyen a las b, los coeficientes numéricos de los términos y, en D_y. Y las d sustituyen las c, los coeficientes numéricos de los términos z, en D_z.

EJEMPLO 4 Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones, usando determinantes.

$$\begin{aligned} 3x - 2y - z &= -6 \\ 2x + 3y - 2z &= 1 \\ x - 4y + z &= -3 \end{aligned}$$

Solución

$$\begin{array}{llll} a_1 = 3 & b_1 = -2 & c_1 = -1 & d_1 = -6 \\ a_2 = 2 & b_2 = 3 & c_2 = -2 & d_2 = 1 \\ a_3 = 1 & b_3 = -4 & c_3 = 1 & d_3 = -3 \end{array}$$

Se usará expansión por determinantes menores de la primera columna, para evaluar D, D_x, D_y y D_z.

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} &= 3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 3(-5) - 2(-6) + 1(7) \\ &= -15 + 12 + 7 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_x = \begin{vmatrix} -6 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix} &= -6\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -6(-5) - 1(-6) - 3(7) \\ &= 30 + 6 - 21 = 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_y = \begin{vmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} &= 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -6 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -6 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 3(-5) - 2(-9) + 1(13) \\ &= -15 + 18 + 13 = 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_z = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} &= 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3(-5) - 2(-18) + 1(16) \\ &= -15 + 36 + 16 = 37 \end{aligned}$$

Comprende el Álgebra

Cuando tengas un sistema de ecuaciones de tres variables, en el que una o más ecuaciones carezcan de una variable, la variable faltante se representa con un coeficiente de 0. Por ende,

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= -1 \\ x + 2y &= 14 \\ x + 0y - 3z &= -5 \end{aligned}$$

Se determinó que $D = 4$, $D_x = 15$, $D_y = 16$, y $D_z = 37$.

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{15}{4} \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{16}{4} = 4 \qquad z = \frac{D_z}{D} = \frac{37}{4}$$

La solución al sistema es $\left(\frac{15}{4}, 4, \frac{37}{4}\right)$. Observa que la triada ordenada menciona a x, y y z, en este orden.

Ahora resuelve el ejercicio 35

SUGERENCIA ÚTIL

Cuando evalúes determinantes, si dos filas (o columnas) son idénticas, o idénticas salvo por signos opuestos, el determinante tiene un valor de 0. Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -5 & 3 & -4 \\ 6 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Análogamente al caso de los determinantes de una matriz 2×2, cuando el determinante $D = 0$, la regla de Cramer no puede usarse, ya que la división por 0 es indefinida. Entonces debes usar un método diferente para resolver el sistema. Sin embargo, puedes evaluar D_x, D_y y D_z para determinar si el sistema es dependiente o inconsistente.

Cuando $D = 0$

Para un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables,

- si $D = 0$, $D_x = 0$, $D_y = 0$, y $D_z = 0$, entonces el sistema es dependiente.
- si $D = 0$ y $D_x \neq 0$, $D_y \neq 0$, o $D_z \neq 0$, entonces el sistema es inconsistente.

4.5 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

D D_x D_y D_z determinante dependiente inconsistente única

1. Asociada con toda matriz cuadrada, hay un número llamado su _____.

Para los ejercicios 2-4, consulta el sistema de ecuaciones

$$2x - 3y = 2$$
$$x - 7y = 6$$

2. El determinante _____ $= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}$.

3. El determinante _____ $= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$.

4. El determinante _____ $= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -7 \end{vmatrix}$.

5. En un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, si $D = 0$, $D_x = 0$ y $D_y = 0$, entonces el sistema es _____ y el sistema tiene un número infinito de soluciones.

6. En un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, si $D = 0$ y ya sea que $D_x \neq 0$ o $D_y \neq 0$, entonces el sistema es _____ y el sistema no tiene soluciones.

Practica tus habilidades

Evalúa cada determinante.

7. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 13 & -\frac{2}{3} \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -6 \\ -4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 5 & -8 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \\ -5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

Resuelve cada sistema de ecuaciones usando determinantes.

15. $3x + 2y = 1$
$5x - y = -7$

16. $4x - 3y = 6$
$7x - 2y = 17$

17. $-x - 2y = 2$
$x + 3y = -6$

18. $2r + 3s = -9$
$3r + 5s = -16$

19. $5p - 7q = -21$
$-4p + 3q = 22$

20. $13j - 11k = -9$
$7j + 5k = 17$

21. $x + 5y = 3$
$2x - 6 = -10y$

22. $9x + 6y = -3$
$6x + 4y = -2$

23. $3r = -4s - 6$
$3s = -5r + 1$

24. $x = y - 1$
$3y = 2x + 9$

25. $5x - 5y = 3$
$-x + y = -4$

26. $2x - 5y = -3$
$-4x + 10y = 7$

27. $6x = 4y + 7$
$8x - 1 = -3y$

28. $6x + 3y = -4$
$9x + 5y = -6$

29. $6.3x - 4.5y = -9.9$
$-9.1x + 3.2y = -2.2$

30. $-1.1x + 8.3y = 36.5$
$3.5x + 1.6y = -4.1$

Resuelve cada sistema usando determinantes.

31. $x + y - 2z = -5$
$2x + 3y = 1$
$3y + 5z = 12$

32. $x + 4y + 3z = 2$
$3x + 2z = -2$
$5y - 3z = 27$

33. $a - b + 2c = 3$
$a - b + c = 1$
$2a + b + 2c = 2$

34. $-2x + y + 8 = -2$
$3x + 2y + z = 3$
$x - 3y - 5z = 5$

35. $x + y - z = 2$
$2x + 3y - 2z = 6$
$5x - 2y + 3z = 4$

36. $x - y - z = 0$
$5x - 2y + 3z = 14$
$4x + y + 2z = 16$

37. $5p - 8p - 7r = 1$
$7p + 9q - 5r = 37$
$6p - 4q + 3r = 1$

38. $7a - 13b + 11c = 36$
$5a + 3b - 17c = 26$
$2a - 3b + 5c = 7$

39. $a + 2b + c = 1$
$a - b + 3c = 2$
$2a + b + 4c = 3$

40. $4x - 2y + 6z = 2$
$-6x + 3y - 9z = -3$
$2x - 7y + 11z = -5$

41. $x + 4y - 3z = -6$
$2x - 8y + 5z = 12$
$3x + 4y - 2z = -3$

42. $2x + y - 2z = 4$
$2x + 2y - 4z = 1$
$-6x + 8y - 4z = 1$

43. $-6x + 3y - 12z = -13$
$5x + 2y - 3z = 1$
$2x - y + 4z = -5$

44. $x - 2y + z = 2$
$4x - 6y + 2z = 3$
$2x - 3y + z = 0$

45. $2x + \frac{1}{2}y - 3z = 5$
$-3x + 2y + 2z = 1$
$4x - \frac{1}{4}y - 7z = 4$

46. $\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y + 3z = -3$
$2x - 3y + 2z = -1$
$\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z = 1$

47. $0.3x - 0.1y - 0.3z = -0.2$
$0.2x - 0.1y + 0.1z = -0.9$
$0.1x + 0.2y - 0.4z = 1.7$

48. $0.6u - 0.4v + 0.5w = 3.1$
$0.5u + 0.2v + 0.2w = 1.3$
$0.1u + 0.1v + 0.1w = 0.2$

Resolución de problemas

Resuelve en términos de la letra indicada.

49. $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & y \end{vmatrix} = 32$

50. $\begin{vmatrix} b-3 & -4 \\ b+2 & -6 \end{vmatrix} = 14$

51. $\begin{vmatrix} 4 & 7 & y \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -35$

52. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -6 \\ -1 & x & -7 \end{vmatrix} = -31$

Resuelve usando determinantes.

53. Precios de boletos Patricio compró 5 boletos de adulto y 8 boletos de estudiante para ver el musical *Oklahoma* por $90. Roberto compró 3 boletos de adulto y 7 boletos de estudiante por $65. Determina el precio de un boleto de adulto y el precio de un boleto de estudiante.



54. Precios en locales concesionados de la liga pequeña En la liga pequeña Braden River, Karen compró 3 hot dogs, 4 botellas de agua y 2 bolsas de semillas de girasol por $11. Constanza compró 5 hot dogs, 3 botellas de agua y 4 bolsas de semillas de girasol por $14.25. Daniel compró 1 hot dog, 2 botellas de agua y 5 bolsas de semillas de girasol por $7.75. Determina el precio de un hot dog, una botella de agua y una bolsa de semillas de girasol.

Ejercicios conceptuales y de redacción

55. Dado un determinante de la forma $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, ¿cómo cambiará el valor del determinante si las a se cambian mutuamente y las b se cambian mutuamente, $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$? Explica tu respuesta.

56. Dado un determinante de la forma $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, ¿cómo cambiará el valor del determinante si las a se cambian con las b, $\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$? Explica tu respuesta.

57 En un determinante 2×2, si las filas son iguales, ¿cuál es el valor del determinante?

58. Si todos los números en una fila, o una columna, de un determinante 2×2 son 0, ¿cuál es el valor del determinante?

59. Si todos los números en una fila o una columna, de un determinante 3×3 son 0, ¿cuál es el valor del determinante?

60. Dado un determinante 3×3, si todos los números en una fila se multiplican por -1, ¿el valor del nuevo determinante cambiará? Explica.

61. Dado un determinante 3×3, si las filas primera y segunda se intercambian, ¿el valor del nuevo determinante cambiará? Explica.

62. En un determinante 3×3, si cualesquiera dos filas son iguales, ¿puedes hacer una generalización acerca del valor del determinante?

63. En un determinante 3×3, si los números en la primera fila se multiplican por -1, y los números en la segunda fila se multiplican por -1, ¿el valor del nuevo determinante cambiará? Explica.

64. En un determinante 3×3, si los números en la segunda fila se multiplican por -1 y los números en la tercera fila se multiplican por -1, ¿el valor del nuevo determinante cambiará? Explica.

65. En un determinante 3×3, si los números en la segunda fila se multiplican por 2, ¿el valor del nuevo determinante cambiará? Explica.

66. En un determinante 3×3, si los números en la primera fila se multiplican por 3 y los números en la tercera fila se multiplican por 4, ¿el valor del nuevo determinante cambiará? Explica.

Problemas de desafío

67. Usa el método de adición para resolver el siguiente sistema para **a)** x y **b)** y.

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.5] **68.** Resuelve la desigualdad $3(x - 2) < \frac{4}{5}(x - 4)$ e indica la solución en notación de intervalo.

Elabora la gráfica de $3x + 4y = 8$ usando el método indicado.

[3.2] **69.** Mediante el trazado de puntos.

70. Usando la intersección con el eje de las x y la intersección con el eje de las y.

[3.3] **71.** Usando la pendiente y la intersección con el eje de las y.

4.6 Resolución de sistemas de desigualdades lineales

1. **Resolución de sistemas de desigualdades lineales**
2. **Gráfica de restricciones en la programación lineal**
3. **Resolución de sistemas de desigualdades lineales que contienen valor absoluto**

1 Resolución de sistemas de desigualdades lineales

En la sección 3.7, se mostró cómo graficar desigualdades lineales de dos variables. En la sección 4.1, aprendiste cómo resolver gráficamente sistemas de ecuaciones. En esta sección, se muestra cómo resolver gráficamente **sistemas de desigualdades lineales**.

Para resolver un sistema de desigualdades lineales

Grafica cada desigualdad sobre los mismos ejes. La solución es el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen todas las desigualdades del sistema.

EJEMPLO 1 Determina la solución al siguiente sistema de desigualdades.

$$y < -\frac{1}{2}x + 2$$
$$x - y \leq 4$$

Solución Primero grafica la desigualdad $y < -\frac{1}{2}x + 2$ (**Figura 4.7**). Ahora, sobre los mismos ejes, grafica la desigualdad $x - y \leq 4$ (**Figura 4.8**). La solución es el conjunto de puntos comunes a las gráficas de ambas desigualdades. Es la parte de la gráfica que contiene ambos sombreados. La recta punteada no es parte de la solución, pero la parte de la recta sólida que satisface ambas desigualdades sí es parte de la solución.

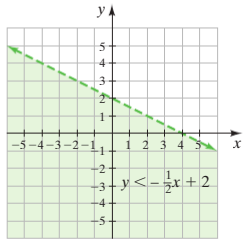


FIGURA 4.7

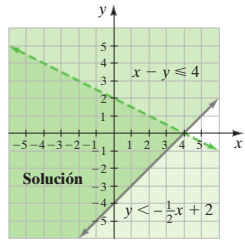


FIGURA 4.8

Ahora resuelve el ejercicio 9

Comprende el Álgebra

Recuerda, de la sección 3.7, que una línea límite punteada se usa cuando la desigualdad es $<$ o $>$, y una línea límite sólida se usa cuando la desigualdad es $\leq$ o $\geq$. Además, el sombreado se coloca en el lado de la línea límite que contiene las soluciones a la desigualdad.

EJEMPLO 2 Determina la solución al siguiente sistema de desigualdades.

$$2x + 3y \leq 6$$
$$y > \frac{2}{3}x$$

Solución Primero, grafica $2x + 3y \leq 6$ (observa la **Figura 4.9**). A continuación, elabora la gráfica de $y > \frac{2}{3}x$ sobre los mismos ejes (observa la **Figura 4.10**). La solución, es la parte de la gráfica que contiene ambos sombreados y la parte de la recta azul sólida que satisface ambas desigualdades.

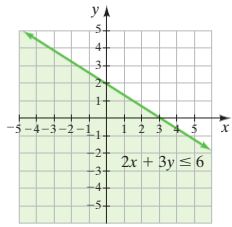


FIGURA 4.9

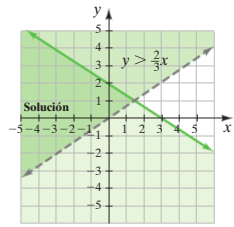


FIGURA 4.10

Ahora resuelve el ejercicio 11

EJEMPLO 3 Determina la solución del siguiente sistema de desigualdades.

$$y > -1$$
$$x \leq 4$$

Solución La solución se ilustra en la **Figura 4.11** de la siguiente página.

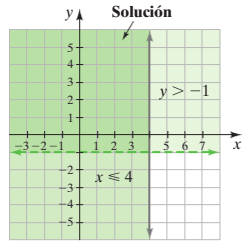


FIGURA 4.11

Ahora resuelve el ejercicio 21

2 Gráfica de restricciones en la programación lineal

La **programación lineal** es un proceso matemático de maximizar o minimizar una cantidad sujeta a varios factores limitantes. Por ejemplo, una compañía manufacturera está interesada en maximizar sus ganancias. Sin embargo, la compañía puede estar limitada por varios factores, incluidos costos de utilidad, costos de mano de obra y tiempo disponible para fabricar los productos de la compañía. En un problema de programación lineal, los factores limitantes pueden representarse mediante desigualdades lineales, llamadas **restricciones**. Para determinar la solución a un problema de programación lineal, es necesario graficar la región que satisface todas las desigualdades dadas, o restricciones. En los siguientes dos ejemplos, se graficarán las restricciones de problemas típicos de programación lineal y se indicará la región de la gráfica que satisface todas las restricciones.

EJEMPLO 4 Determina la solución al siguiente sistema de desigualdades.

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$2x + 3y \leq 12$$
$$2x + y \leq 8$$

Solución Las primeras dos desigualdades, $x \geq 0$ y $y \geq 0$, indican que la solución debe estar en el primer cuadrante, porque éste es el único cuadrante donde, tanto x como y, son positivos. La **Figura 4.12** ilustra las gráficas de las cuatro desigualdades.

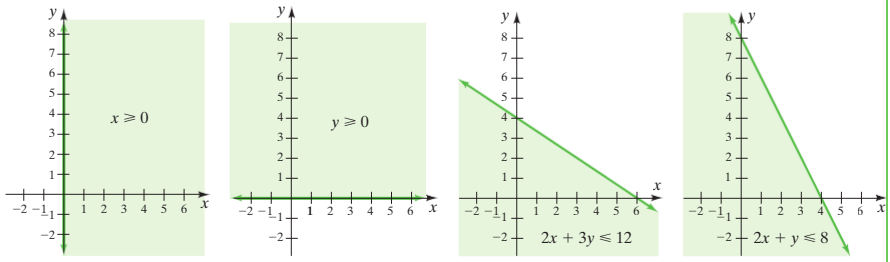


FIGURA 4.12

La **Figura 4.13**, ilustra las gráficas sobre los mismos ejes y la solución al sistema de desigualdades. Observa que todo punto en el área sombreada, y todo punto sobre las rectas que forman la región poligonal, son parte de la respuesta.

Ahora resuelve el ejercicio 23

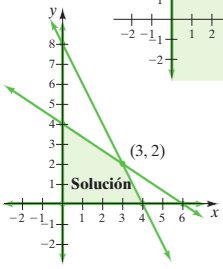


FIGURA 4.13

EJEMPLO 5 Determina la solución al siguiente sistema de desigualdades.

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$x \leq 15$$
$$8x + 8y \leq 160$$
$$4x + 12y \leq 180$$

Solución Las primeras dos desigualdades indican que la solución debe estar en el primer cuadrante. La tercera desigualdad indica que x debe ser un valor menor o igual que 15. La **Figura 4.14a**, indica las gráficas de las ecuaciones correspondientes y muestra la región que satisface todas las desigualdades en el sistema. La **Figura 4.14b**, indica la solución al sistema de desigualdades.

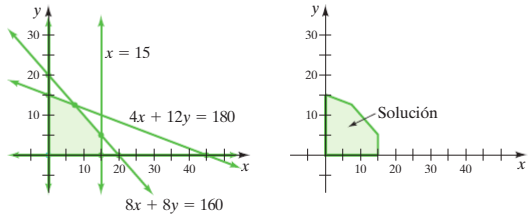


FIGURA 4.14

Ahora resuelve el ejercicio 27

3 Resolución de sistemas de desigualdades lineales que contienen valor absoluto

Ahora se graficarán sistemas de desigualdades lineales que contienen valor absoluto en el sistema coordenado cartesiano. Antes de resolver algunos ejemplos, recuerda las reglas para desigualdades con valor absoluto que aprendiste en la sección 2.6.

Resolución de desigualdades con valor absoluto

- Si $|x| < a$ y $a > 0$, entonces $-a < x < a$.
- Si $|x| > a$ y $a > 0$, entonces $x < -a$ ó $x > a$.

EJEMPLO 6 Elabora la gráfica de $|x| < 3$ en el sistema coordenado cartesiano.

Solución A partir de las reglas dadas, se sabe que $|x| < 3$ significa $-3 < x < 3$. Dibuja rectas verticales punteadas a través de -3 y 3, y sombrea el área entre ambas (**Figura 4.15**).

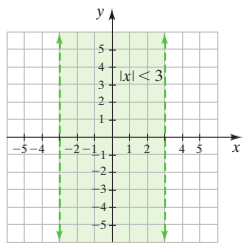


FIGURA 4.15

Ahora resuelve el ejercicio 33

EJEMPLO 7 Elabora la gráfica de $|y + 1| > 3$ en el sistema coordenado cartesiano.

Solución A partir de las reglas dadas, se sabe que $|y + 1| > 3$ significa $y + 1 < -3$ o $y + 1 > 3$. Primero, resuelve cada desigualdad.

$$y + 1 < -3 \quad \text{o} \quad y + 1 > 3$$
$$y < -4 \qquad\qquad y > 2$$

Ahora elabora la gráfica de ambas desigualdades y toma la *unión* de las dos gráficas. La solución es el área sombreada en la **Figura 4.16**.

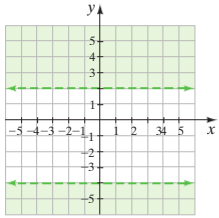


FIGURA 4.16

Ahora resuelve el ejercicio 37

EJEMPLO 8 Elabora la gráfica del siguiente sistema de desigualdades.

$$|x| < 3$$
$$|y + 1| > 3$$

Solución Dibuja ambas desigualdades sobre los mismos ejes. Por tanto, combina la gráfica dibujada en el ejemplo 6 con la gráfica dibujada en el ejemplo 7 (observa la **Figura 4.17**). Los puntos comunes a ambas desigualdades forman la solución al sistema.

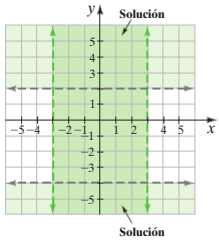


FIGURA 4.17

Ahora resuelve el ejercicio 45

4.6 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

punteada satisfacen controles restricciones sólida igual

1. La solución a un sistema de desigualdades lineales, es el conjunto de puntos cuyas coordenadas _____ todas las desigualdades del sistema.
2. Cuando graficas una desigualdad lineal que contiene el símbolo ≤ o el símbolo ≥, usas una línea límite _____.
3. Cuando graficas una desigualdad lineal que contiene el símbolo $<$ o el símbolo $>$, usas una línea límite _____.
4. En un problema de programación lineal, los factores limitantes pueden representarse mediante desigualdades lineales, llamadas _____.

Practica tus habilidades

Determina la solución a cada sistema de desigualdades.

5. $y < 3x - 2$
$y \leq -2x + 3$

6. $y \geq 2x - 5$
$y > -3x + 5$

7. $5x + 2y > 10$
$3x - y > 3$

8. $3x - 2y > 6$
$2x + y \leq 4$

9. $2x - y < 4$
$y \geq -x + 2$

10. $3x - 4y \geq 12$
$y < -\frac{1}{2}x + 3$

11. $4x - 5y < 20$
$y \leq -\frac{3}{4}x$

12. $2x + 7y \geq 14$
$y > \frac{4}{3}x$

13. $y < x$
$y \geq 3x + 2$

14. $y \leq -2x + 1$
$y > -3x$

15. $x - y \geq -2$
$x - y < 3$

16. $y < \frac{1}{2}x + 3$
$x - 2y \leq 4$

17. $-4x + 5y < 20$
$x \geq -3$

18. $y > \frac{1}{2}x - 2$
$y \leq 1$

19. $y < -\frac{3}{4}x + 3$
$y \geq 0$

20. $x \geq 0$
$x - 3y < 6$

21. $x \leq 4$
$y \geq -2$

22. $x > -3$
$y < 4$

Determina la solución a cada sistema de desigualdades. Usa el método discutido en los ejemplos 4 y 5.

23. $x \geq 0$
$y \geq 0$
$2x + 3y \leq 6$
$4x + y \leq 4$

24. $x \geq 0$
$y \geq 0$
$x + y \leq 6$
$7x + 4y \leq 28$

25. $x \geq 0$
$y \geq 0$
$3x + y \leq 9$
$2x + 5y \leq 10$

26. $x \geq 0$
$y \geq 0$
$3x + 2y \leq 18$
$2x + 4y \leq 20$

27. $x \geq 0$
$y \geq 0$
$x \leq 4$
$x + y \leq 6$
$x + 2y \leq 8$

28. $x \geq 0$
$y \geq 0$
$x \leq 4$
$2x + 3y \leq 18$
$4x + 2y \leq 20$

29. $x \geq 0$
$y \geq 0$
$x \leq 15$
$30x + 25y \leq 750$
$10x + 40y \leq 800$

30. $x \geq 0$
$y \geq 0$
$x \leq 15$
$40x + 25y \leq 1\,000$
$5x + 30y \leq 900$

31. $x \geq 0$
$y \geq 0$
$x \leq 6$
$y \leq 5$
$x + y \geq 2$
$x + y \leq 8$

32. $x \geq 0$
$y \geq 0$
$x \leq 5$
$y \leq 6$
$2x + y \geq 4$
$x + 2y \geq 4$

Determina la solución a cada desigualdad.

33. $|x| < 2$

34. $|x| \geq 3$

35. $|y| \geq 2$

36. $|y| < 4$

37. $|y - 2| \leq 4$

38. $|y + 1| < 2$

39. $|x + 1| > 3$

40. $|x - 2| \geq 1$

Determina la solución a cada sistema de desigualdades.

41. $|y| > 2$
$y \leq x + 3$

42. $|x| > 1$
$y \leq 3x + 2$

43. $|y| < 4$
$y \geq -2x + 2$

44. $|x - 2| \leq 3$
$x - y > 2$

45. $|x + 2| < 3$
$|y| > 4$

46. $|x - 2| > 1$
$y > -2$

47. $|x - 3| \leq 4$
$|y + 2| \leq 1$

48. $|x + 1| \leq 2$
$|y - 3| \leq 1$

Ejercicios conceptuales y de redacción

49. Si en un sistema de dos desigualdades, una desigualdad contiene $<$ y la otra desigualdad contiene $\geq$, ¿el punto de intersección de las dos líneas límite de las desigualdades, está en el conjunto solución? Explica.

50. Si en un sistema de dos desigualdades, una desigualdad contiene $\leq$ y la otra desigualdad contiene $\geq$, ¿el punto de intersección de las dos líneas límite de las desigualdades, está en el conjunto solución? Explica.

51. Si en un sistema de dos desigualdades, una desigualdad contiene $<$ y la otra desigualdad contiene $>$, ¿el punto de intersección de las dos líneas límite de las desigualdades, está en el conjunto solución? Explica.

52. **a)** ¿Es posible que un sistema de desigualdades lineales no tenga solución? Explica. Construye un ejemplo para respaldar tu respuesta.

b) ¿Es posible que un sistema de dos desigualdades lineales tenga exactamente una solución? Explica. Si tu respuesta es sí, construye un ejemplo para respaldar tu respuesta.

Sin graficar, determina el número de soluciones en cada sistema de desigualdades indicado. Explica tus respuestas.

53. $3x - y \leq 4$
$3x - y > 4$

54. $2x + y < 6$
$2x + y > 6$

55. $5x - 2y \leq 3$
$5x - 2y \geq 3$

56. $5x - 3y > 5$
$5x - 3y > -1$

57. $2x - y < 7$
$3x - y < -2$

58. $x + y \leq 0$
$x - y \geq 0$

Problemas de desafío

Determina la solución a cada sistema de desigualdades.

59. $y < 3x - 4$
$6x \geq 2y + 8$

60. $y \leq 3x - 2$
$\frac{1}{3}y < x + 1$

61. $y > 2x + 4$
$y < 2x - 3$

62. $-2x > y + 4$
$-x < \frac{1}{2}y - 1$

63. $y \geq x^2$
$y \leq 4$

64. $y < 4 - x^2$
$y > -5$

65. $y < |x|$
$y < 4$

66. $y \geq |x - 2|$
$y \leq -|x - 2|$

Problemas de repaso acumulativo

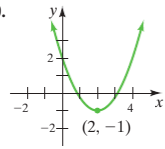
[2.2] **67.** Una fórmula para palancas en física, es $f_1d_1 + f_2d_2 = f_3d_3$. Resuelve esta fórmula para f_2.

[3.2] *Indica el dominio y el rango de cada función.*

68. $\{(4, 3), (5, -2), (-1, 2), (0, -5)\}$

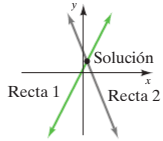
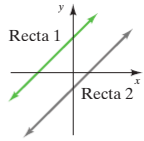
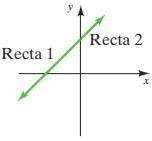
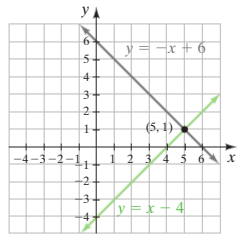
69. $f(x) = \frac{2}{3}x - 4$

70.



Capítulo 4 Resumen

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 4.1	
Un **sistema de ecuaciones lineales**, es un sistema que tiene dos o más ecuaciones lineales. Una **solución** a un sistema de ecuaciones lineales, es el(los) par(es) ordenado(s) que satisface(n) todas las ecuaciones del sistema.	Sistema de ecuaciones $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = \frac{1}{2}x + 6 \end{cases}$ La solución al sistema de ecuaciones anterior es (2, 7).

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 4.1 (Continuación)	
Un **sistema consistente de ecuaciones**, es un sistema de ecuaciones que tiene al menos una solución. Un **sistema inconsistente de ecuaciones**, es un sistema de ecuaciones que no tiene solución. Un **sistema dependiente de ecuaciones**, es un sistema de ecuaciones que tiene un número infinito de soluciones.	**Al menos 1 solución** (rectas que intersecan)  **Consistente** (a) **Sin solución** (rectas paralelas)  **Inconsistente** (b) **Número infinito de soluciones** (misma recta)  **Dependiente** (c)
Para resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante el método gráfico **1.** Elabora la gráfica de ambas rectas sobre el mismo conjunto de ejes. **2.** Determina el(los) punto(s) de intersección, si existe(n). **3.** Verifica tu solución en todas las ecuaciones del sistema.	Resuelve, gráficamente, el sistema de ecuaciones. $y = x - 4$ $y = -x + 6$ Elabora la gráfica de ambas rectas sobre el mismo conjunto de ejes.  Una verificación muestra que (5, 1), es una solución al sistema de ecuaciones.
Para resolver un sistema lineal de ecuaciones mediante la sustitución **1.** Resuelve para una variable en cualquier ecuación. **2.** Sustituye la expresión obtenida para la variable en el paso 1 en la otra ecuación. **3.** Resuelve la ecuación obtenida en el paso 2. **4.** Sustituye el valor obtenido en el paso 3 en la ecuación del paso 1. Resuelve la ecuación para determinar la variable restante. **5.** Escribe la solución como un par ordenado. **6.** Comprueba tu solución en todas las ecuaciones del sistema.	Resuelve el sistema de ecuaciones por sustitución. $y = -2x - 1$ $5x + 6y = 8$ Sustituye $y = -2x - 1$; en la segunda ecuación: $5x + 6y = 8$ $5x + 6(-2x - 1) = 8$ $5x - 12x - 6 = 8$ $-7x - 6 = 8$ $-7x = 14$ $x = -2$ Sustituye $x = -2$ en $y = -2x - 1$ para obtener $y = -2x - 1$ $y = -2(-2) - 1 = 4 - 1 = 3$ Una verificación demuestra que $(-2, 3)$, es una solución al sistema de ecuaciones.

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 4.1 (Continuación)	
Para resolver un sistema lineal de ecuaciones, usando el método de adición (o eliminación) 1. Si es necesario, reescribe cada ecuación en forma general. 2. Si es necesario, multiplica una o ambas ecuaciones por una(s) constante(s), de modo que, cuando se sumen las ecuaciones, la suma contenga solamente una variable. 3. Suma los lados respectivos de las ecuaciones. 4. Resuelve la ecuación obtenida en el paso 3. 5. Sustituye el valor encontrado en el paso 4 en cualquiera de las ecuaciones originales. Resuelve dicha ecuación para determinar el valor de la variable restante. 6. Escribe la solución como un par ordenado. 7. Verifica tu solución en todas las ecuaciones del sistema.	Resuelve el sistema de ecuaciones, usando el método de adición. $2x + y = 4$ *(ec. 1)* $x - 2y = 2$ *(ec. 2)* $4x + 2y = 8$ *(ec. 1) Multiplicada por 2.* $x - 2y = 2$ $5x = 10$ *Suma de ecuaciones.* $x = 2$ Ahora resuelve para y usando *(ec. 1)*. $2(2) + y = 4$ $y = 0$ La solución es (2, 0).
Sección 4.2	
Para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales, usa el método de sustitución o el método de adición.	Resuelve el sistema de ecuaciones. $x - y + 3z = -1$ *(ec . 1)* $4y - 7z = 2$ *(ec . 2)* $z = 2$ *(ec . 3)* Sustituye 2 por z en *(ec. 2)* para obtener el valor para y. $4y - 7z = 2$ $4y - 7(2) = 2$ $4y = 16$ $y = 4$ Sustituye 4 por y y 2 por z en *(ec. 1)* para obtener el valor para x. $x - y + 3z = -1$ $x - 4 + 3(2) = -1$ $x = -3$ Una verificación muestra que (−3, 4, 2) es una solución al sistema de ecuaciones.
Sección 4.3	
Aplicaciones Sistemas de dos ecuaciones lineales en dos incógnitas.	La suma de las áreas de dos círculos, es 180 metros cuadrados. La diferencia de sus áreas es 20 metros cuadrados. Determina el área de cada círculo. **Solución** Sea x el área del círculo grande y y el área del círculo pequeño. Las dos ecuaciones para este sistema son $x + y = 180$ *Suma de áreas.* $x - y = 20$ *Diferencia de áreas.* $2x = 200$ $x = 100$ Sustituye 100 por x en la primera ecuación para obtener $x + y = 180$ $100 + y = 180$ $y = 80$ El área del círculo grande es 100 metros cuadrados, y el área del círculo pequeño, es 80 metros cuadrados.

Sección 4.4

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES

Una **matriz** es un arreglo rectangular de números dentro de corchetes. Los números adentro de los corchetes se llaman **elementos**.

Una **matriz cuadrada**, tiene el mismo número de filas y columnas.

EJEMPLOS

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 8 \\ 6 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -1 & 5 & 2 \\ 9 & 10 & -7 \end{bmatrix}$$

Una **matriz aumentada**, es una matriz separada por una línea vertical. Para un sistema de ecuaciones, los coeficientes de las variables se colocan en el lado izquierdo de la línea vertical, y las constantes se colocan en el lado derecho de la matriz aumentada.

La **forma escalonada** (o **triangular**) de una matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & a & p \\ 0 & 1 & q \end{array}\right]$$

Sistema	Matriz aumentada
$2x - 3y = 5$ $5x + 7y = -2$	$\left[\begin{array}{cc\|c} 2 & -3 & 5 \\ 5 & 7 & -2 \end{array}\right]$
Forma escalonada	$\left[\begin{array}{cc\|c} 1 & 13 & -12 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$

Las **transformaciones de fila** se pueden usar para reescribir la matriz en forma escalonada.

Procedimientos para transformaciones de fila

1. Todos los números en una fila pueden multiplicarse (o dividirse) por cualquier número real distinto de cero.
2. Todos los números en una fila pueden multiplicarse por cualquier número real distinto de cero. Estos productos pueden sumarse después a los números correspondientes en cualquier otra fila.
3. El orden de las filas puede intercambiarse.

Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} x + 4y &= -7 \\ 6x - 5y &= 16 \end{aligned}$$

La matriz aumentada es:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -7 \\ 6 & -5 & 16 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -7 \\ 0 & -29 & 58 \end{array}\right] \quad -6R_1 + R_2$$

$$= \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \quad -\frac{1}{29}R_2$$

El sistema equivalente de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} x + 4y &= -7 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Sustituye -2 por y en la primera ecuación.

$$\begin{aligned} x + 4(-2) &= -7 \\ x - 8 &= -7 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

La solución es $(1, -2)$.

Un sistema de ecuaciones es **inconsistente** y **no tiene solución**, si obtienes una matriz aumentada, en la cual una fila de números tiene ceros en el lado izquierdo de la línea vertical y un número distinto de cero en el lado derecho de la línea vertical.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ -1 & 7 & 6 & 9 \end{array}\right]$$

La segunda fila, muestra que este sistema es inconsistente y no tiene solución.

Un sistema de ecuaciones es **dependiente** y tiene un **número infinito de soluciones**, si obtienes una matriz aumentada, en la cual un 0 aparece a través de toda una fila.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & -12 \end{array}\right]$$

La segunda fila, muestra que este sistema es dependiente y tiene un número infinito de soluciones.

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES

EJEMPLOS

Sección 4.5

El **determinante** de una matriz 2×2, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, se denota $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ y se evalúa como:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (5)(-2) = 3 + 10 = 13$$

Regla de Cramer para sistemas de ecuaciones lineales

Para un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

con

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \text{ y } D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

entonces

$$x = \frac{D_x}{D} \quad \text{y} \quad y = \frac{D_y}{D}, D \neq 0.$$

Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$2x + y = 6$$
$$4x - 3y = -13$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -10$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -13 & -3 \end{vmatrix} = -5 \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -13 \end{vmatrix} = -50$$

Entonces:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-5}{-10} = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-50}{-10} = 5$$

La solución es $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$.

Para el determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

El **determinante menor de a_1** se obtiene al despreciar los elementos en la misma fila y columna que contienen el elemento a_1.

Expansión del determinante mediante menores de la primera columna

Determinante menor de a_1 ↓ Determinante menor de a_2 ↓ Determinante menor de a_3 ↓

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Para $\begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 9 \end{vmatrix}$, el determinante menor de a_1 es $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}$.

Evalúa $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -5 & 2 \\ 3 & 6 & -4 \end{vmatrix}$ usando la expansión por menores de la primera columna.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -5 & 2 \\ 3 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 2(8) + 1(-18) + 3(15)$$
$$= 16 - 18 + 45$$
$$= 43$$

Regla de Cramer para un sistema de ecuaciones de tres variables

Para resolver el sistema:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

con

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

entonces

$$x = \frac{D_x}{D} \quad y = \frac{D_y}{D} \quad z = \frac{D_z}{D}, \quad D \neq 0.$$

Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$2x + y + z = 0$$
$$4x - y + 3z = -9$$
$$6x + 2y + 5z = -8$$

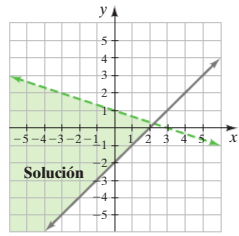
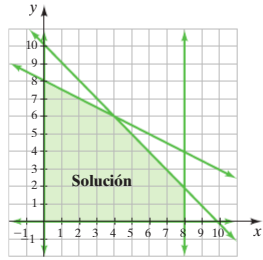
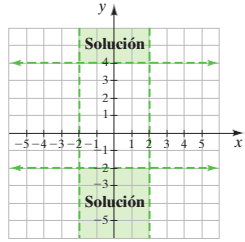
$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -10 \qquad D_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -9 & -1 & 3 \\ -8 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -5$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -9 & 3 \\ 6 & -8 & 5 \end{vmatrix} = -20 \qquad D_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -9 \\ 6 & 2 & -8 \end{vmatrix} = 30$$

Entonces:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-5}{-10} = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-20}{-10} = 2, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{30}{-10} = -3$$

La solución es $\left(\frac{1}{2}, 2, -3\right)$.

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 4.6	
Para resolver un sistema de desigualdades lineales, grafica cada desigualdad sobre los mismos ejes. La solución es el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen todas las desigualdades en el sistema.	Determina la solución al sistema de desigualdades. $y < -\frac{1}{3}x + 1$ $x - y \leq 2$ 
La **programación lineal**, es un proceso matemático de maximizar o minimizar una cantidad sujeta a varios factores limitantes. Los factores limitantes pueden representarse mediante desigualdades lineales llamadas **restricciones.**	Determina la solución al sistema de desigualdades. $x \geq 0$ $y \geq 0$ $x \leq 8$ $x + y \leq 10$ $x + 2y \leq 16$ 
Para sistemas de desigualdades lineales con valores absolutos: • Si $\|x\| < a$ y $a > 0$, entonces $-a < x < a$. • Si $\|x\| > a$ y $a > 0$, entonces $x < -a$ o $x > a$.	Determina la solución al sistema de desigualdades. $\|x\| < 2$ $\|y - 1\| > 3$ 

Capítulo 4 Ejercicios de repaso

[4.1] *Escribe cada ecuación en forma pendiente-intersección con el eje de las y. Sin graficar o resolver el sistema de ecuaciones, indica si el sistema de ecuaciones lineales tiene exactamente una solución, ninguna solución o un número infinito de soluciones.*

1. $x - 4y = -2$
$2x - 8y = 1$

2. $4x - 5y = 8$
$3x + 4y = 9$

3. $y = \frac{1}{3}x + 4$
$x + 2y = 8$

4. $6x = 5y - 8$
$4x = 6y + 10$

Determina, gráficamente, la solución a cada sistema de ecuaciones. Si el sistema es inconsistente o dependiente, indícalo.

5. $y = -2x - 3$
$y = 3x + 7$

6. $x = -5$
$y = 3$

7. $3x + 3y = 12$
$2x - y = -4$

8. $3y - 3x = -9$
$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}$

Determina la solución a cada sistema de ecuaciones por sustitución.

9. $4x + 7y = -3$
$x = 5y + 6$

10. $4x - 3y = -1$
$y = 2x + 1$

11. $a = 2b - 8$
$2b - 5a = 0$

12. $2x + y = 12$
$\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y = 1$

Determina la solución a cada sistema de ecuaciones usando el método de adición.

13. $-3x + 4y = -2$
$x - 5y = -3$

14. $-2x - y = 5$
$2x + 2y = 6$

15. $2a + 3b = 7$
$a - 2b = -7$

16. $0.4x - 0.3y = 1.8$
$-0.7x + 0.5y = -3.1$

17. $4r - 3s = 8$
$2r + 5s = 8$

18. $-2m + 3n = 15$
$3m + 3n = 10$

19. $x + \frac{3}{5}y = \frac{11}{5}$
$x - \frac{3}{2}y = -2$

20. $4x + 4y = 16$
$y = 4x - 3$

21. $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$
$x + \frac{5}{4}y = \frac{7}{2}$

22. $2x - 5y = 12$
$x - \frac{4}{3}y = -2$

23. $2x + y = 4$
$3x + \frac{3}{2}y = 6$

24. $2x = 4y + 5$
$2y = x - 7$

[4.2] *Determina la solución a cada sistema de ecuaciones usando sustitución o el método de adición.*

25. $5x - 9y + 2z = 12$
$4y - 3z = -3$
$5z = 5$

26. $2a + b - 2c = 5$
$3b + 4c = 1$
$3c = -6$

27. $x + 2y + 3z = 3$
$-2x - 3y - z = 5$
$3x + 3y + 7z = 2$

28. $-x - 4y + 2z = 1$
$2x + 2y + z = 0$
$-3x - 2y - 5z = 5$

29. $3y - 2z = -4$
$3x - 5z = -7$
$2x + y = 6$

30. $a + 2b - 5c = 19$
$2a - 3b + 3c = -15$
$5a - 4b - 2c = -2$

31. $x - y + 3z = 1$
$-x + 2y - 2z = 1$
$x - 3y + z = 2$

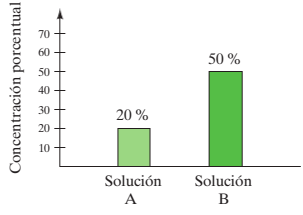
32. $-2x + 2y - 3z = 6$
$4x - y + 2z = -2$
$2x + y - z = 4$

[4.3] *Expresa cada problema como un sistema de ecuaciones lineales, y usa el método de tu elección para determinar la solución al problema.*

33. Edades Rodolfo es 10 años mayor que su sobrina, Jana. Si la suma de sus edades es 66, determina la edad de Rodolfo y la edad de Jana.

34. Rapidez del aire Un avión puede viajar a 560 millas por hora con el viento y a 480 millas por hora contra el viento. Determina la rapidez del avión en aire quieto, así como la rapidez del viento.

35. Mezcla de soluciones Salma tiene dos soluciones ácidas, como se ilustra. ¿Qué cantidad de cada una debe mezclar para obtener 6 litros de una solución ácida al 40%?



36. Hockey sobre césped La admisión a un juego de hockey sobre césped es de $15 para adultos y $11 para niños. Se vendieron un total de 650 boletos. Determina cuántos boletos de niño y cuántos boletos de adulto se vendieron, si se recolectó un total de $8790.



37. Regreso al espacio John Glenn fue el primer astronauta estadounidense en estar en órbita alrededor de la Tierra. Muchos años después regresó al espacio. La segunda vez que fue al espacio, era 5 años más joven que el doble de su edad cuando estuvo en el espacio por primera ocasión. La suma de sus edades para ambos momentos en que estuvo en el espacio es de 118. Determina su edad cada vez que estuvo en el espacio.



38. Cuentas de ahorros Jorge tiene un total de $40 000 invertidos en tres cuentas de ahorros diferentes. Él tiene algo de dinero invertido en una cuenta que le otorga 7% de interés. La segunda cuenta tiene $5000 menos que la primera cuenta y le otorga 5% de interés. La tercera cuenta produce un interés del 3%. Si el interés anual total que recibe Jorge en un año es de $2300, determina el monto en cada cuenta.

[4.4] *Resuelve cada sistema de ecuaciones usando matrices.*

39. $x + 4y = -5$
$5x - 3y = 21$

40. $2x - 5y = 1$
$2x + 4y = 10$

41. $3y = 6x - 12$
$4x = 2y + 8$

42. $2x - y - z = 5$
$x + 2y + 3z = -2$
$3x - 2y + z = 2$

43. $3a - b + c = 2$
$2a - 3b + 4c = 4$
$a + 2b - 3c = -6$

44. $x + y + z = 3$
$3x + 4y = -1$
$y - 3z = -10$

[4.5] *Resuelve cada sistema de ecuaciones usando determinantes.*

45. $7x - 2y = -3$
$-8x + 3y = 7$

46. $x + 4y = 5$
$5x + 3y = -9$

47. $9m + 4n = -1$
$7m - 2n = -11$

48. $p + q + r = 5$
$2p + q - r = -5$
$3p + 2q - 3r = -12$

49. $-2a + 3b - 4c = -7$
$2a + b + c = 5$
$-2a - 3b + 4c = 3$

50. $y + 3z = 4$
$-x - y + 2z = 0$
$x + 2y + z = 1$

[4.6] *Grafica la solución a cada sistema de desigualdades.*

51. $-x + 3y > 6$
$2x - y \leq 2$

52. $5x - 2y \leq 10$
$3x + 2y > 6$

53. $y > 2x + 3$
$y < -x + 4$

54. $x > -2y + 4$
$y < -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

Determina la solución al sistema de desigualdades.

55. $x \geq 0$
$y \geq 0$
$x + y \leq 6$
$4x + y \leq 8$

56. $x \geq 0$
$y \geq 0$
$2x + y \leq 6$
$4x + 5y \leq 20$

57. $|x| \leq 3$
$|y| > 2$

58. $|x| > 4$
$|y - 2| \leq 3$

Capítulo 4 Examen de práctica

1. Define **a)** un sistema de ecuaciones consistente, **b)** un sistema de ecuaciones dependiente y **c)** un sistema de ecuaciones inconsistente.

Determina, sin resolver el sistema, si el sistema de ecuaciones tiene exactamente una solución, ninguna solución o un número infinito de soluciones.

2. $5x + 2y = 4$
$6x = 3y - 7$

3. $5x + 3y = 9$
$2y = -\frac{10}{3}x + 6$

4. $5x - 4y = 6$
$-10x + 8y = -10$

Resuelve cada sistema de ecuaciones mediante el método indicado.

5. $y = 3x - 2$
$y = -2x + 8$
gráficamente

6. $y = -x + 6$
$y = 2x + 3$
gráficamente

7. $y = 4x - 3$
$y = 5x - 4$
sustitución

8. $4a + 7b = 2$
$5a + b = -13$
sustitución

9. $8x + 3y = 8$
$6x + y = 1$
adición

10. $0.3x = 0.2y + 0.4$
$-1.2x + 0.8y = -1.6$
adición

11. $\frac{3}{2}a + b = 6$
$a - \frac{5}{2}b = -4$
adición

12. $x + y + z = 2$
$-2x - y + z = 1$
$x - 2y - z = 1$
adición

13. Escribe la matriz aumentada para el siguiente sistema de ecuaciones.

$$-2x + 3y + 7z = 5$$
$$3x - 2y + z = -2$$
$$x - 6y + 9z = -13$$

14. Considera la siguiente matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \end{array}\right]$$

Muestra los resultados obtenidos al multiplicar los elementos en la tercera fila por -2, y sumar los productos a sus elementos correspondientes en la segunda fila.

Resuelve cada sistema de ecuaciones usando matrices.

15. $2x + 7y = 1$
$3x + 5y = 7$

16. $x - 2y + z = 7$
$-2x - y - z = -7$
$4x + 5y - 2z = 3$

Evalúa cada determinante.

17. $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 6 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

Resuelve cada sistema de ecuaciones usando determinantes y la regla de Cramer.

19. $4x + 3y = -6$
$-2x + 5y = 16$

20. $2r - 4s + 3t = -1$
$-3r + 5s - 4t = 0$
$-2r + s - 3t = -2$

Usa el método de tu elección, para determinar la solución a cada problema.

21. Mezcla de semillas para aves Agway Gardens tiene semillas de girasol, en barril, que vende por \$0.49 la libra y mezcla de semillas gourmet para aves que vende por \$0.89 la libra. ¿Qué cantidad de cada una debe mezclar, para obtener una mezcla de 20 libras que venda por \$0.73 la libra?



22. Mezcla de soluciones Tania, una química, tiene soluciones al 6% y al 15% de ácido sulfúrico. ¿Qué cantidad de cada solución debe mezclar para obtener 10 litros de una solución al 9%?

23. Suma de números La suma de tres números es 29. El número más grande es cuatro veces el número más pequeño. El número restante es 1 más que el doble del número más pequeño. Determina los tres números.

Determina la solución a cada sistema de desigualdades.

24. $3x + 2y < 9$
$-2x + 5y \leq 10$

25. $|x| > 3$
$|y| \leq 1$

5 Polinomios y funciones polinomiales

5.1 Suma y resta de polinomios

5.2 Multiplicación de polinomios

5.3 División de polinomios y división sintética

5.4 Factorización de un monomio, a partir de un polinomio y factorización por agrupación

Examen de mitad de capítulo: secciones 5.1–5.4

5.5 Factorización de trinomios

5.6 Fórmulas especiales de factorización

5.7 Repaso general de la factorización

5.8 Ecuaciones polinomiales



Con mucha frecuencia los estudiantes participan en competencias, como concursos de escribir ensayos, concursos de matemáticas, de vocabulario o de oratoria. En el ejercicio 82 de la página 305, se usa una función polinomial para determinar el número de diferentes formas en que los estudiantes pueden terminar en primer, segundo o tercer lugar, en un concurso de oratoria.

Objetivos del capítulo

En la primera parte de este capítulo, se estudian los polinomios y las funciones polinomiales. Luego se dirige la atención a la factorización. *Debes tener una comprensión profunda de la factorización, para resolver los problemas en muchos de los capítulos restantes.* Pon particular atención en cómo usar la factorización para encontrar las intersecciones con el eje de las x de una función cuadrática. Más adelante en el curso, nuevamente se hará referencia a este tema.

5.1 Suma y resta de polinomios

1. **Determinación del grado de un polinomio**
2. **Evaluación de funciones polinomiales**
3. **Comprensión de las gráficas de las funciones polinomiales**
4. **Suma y resta de polinomios**

1 Determinación del grado de un polinomio

Recuerda, del capítulo 2, que las partes que se suman o restan en una expresión matemática, se llaman **términos**. El **grado de un término,** con exponentes enteros no negativos, es la suma de los exponentes de las variables, si hay variables. Las constantes distintas de cero tienen grado 0, y el término 0 no tiene grado.

Polinomio

Un **polinomio** es una suma finita de términos, en la cual, todas las variables tienen exponentes enteros no negativos y ninguna variable aparece en un denominador.

Comprende el Álgebra

Los signos, + o −, separan los términos en un polinomio.

- $3x^2 + 2x + 6$ es un *polinomio en una variable, x.*
- $x^2y - 7x + 3$ es un *polinomio en dos variables, x y y.*
- $x^{1/2}$ *no* es un polinomio, porque la variable no tiene un exponente entero no negativo.
- $\frac{1}{x}$ (o x^{-1}) *no* es un polinomio, porque la variable no tiene un exponente entero no negativo.
- $\frac{1}{x+1}$ *no* es un polinomio, porque la variable está en el denominador.

El **término principal** de un polinomio, es el término de mayor grado. El **coeficiente principal**, es el coeficiente del término principal.

EJEMPLO 1 Para cada polinomio proporciona el número de términos, el grado del polinomio, el término principal y el coeficiente principal.

a) $2x^5 - 3x^2 + 6x - 9$ **b)** $8x^2y^4 - 6xy^3 + 3xy^2z^4$

Solución Las respuestas se organizarán en forma tabular.

Polinomio	Número de términos	Grado del polinomio	Término principal	Coeficiente principal
a) $2x^5 - 3x^2 + 6x - 9$	4	5 (de $2x^5$)	$2x^5$	2
b) $8x^2y^4 - 6xy^3 + 3xy^2z^4$	3	7 (de $3xy^2z^4$)	$3xy^2z^4$	3

Ahora resuelve el ejercicio 25

Los polinomios se clasifican de acuerdo con el número de términos que tienen, como se indica en la siguiente tabla.

Comprende el Álgebra

El prefijo *mono* significa *uno.*
El prefijo *bi* significa *dos.*
El prefijo *tri* significa *tres.*
El prefijo *poli* significa *muchos.*

Tipo de polinomio	Descripción	Ejemplos
Monomio	Un polinomio con un término	$4x^2, 6x^2y, 3, -2xyz^5, 7$
Binomio	Un polinomio con dos términos	$x^2 + 1, 2x^2 - y, 6x^3 - 5y^2$
Trinomio	Un polinomio con tres términos	$x^3 + 6x - 8, x^2y - 9x + y^2$

Los polinomios que contienen más de tres términos, no reciben nombres específicos. *Poli* es un prefijo que significa *muchos*. Un polinomio se llama **lineal**, si es de grado 0 o 1. Un polinomio en una variable se llama **cuadrático**, si es de grado 2; y **cúbico**, si es de grado 3.

Tipo de polinomio	Ejemplos
Lineal	$2x - 4, \quad 5$
Cuadrático	$3x^2 + x - 6, \quad 4x^2 - 8$
Cúbico	$-4x^3 + 3x^2 + 5, \quad 2x^3 + 7x$

Los polinomios $2x^3 + 4x^2 - 6x + 3$ y $4x^2 - 3xy + 5y^2$ son ejemplos de polinomios en **orden decreciente** de la variable x, porque los exponentes en la variable x decrecen, o se hacen menores, debido a que los términos van de izquierda a derecha. Los polinomios comúnmente se escriben en orden decreciente de una variable dada.

EJEMPLO 2 Escribe cada polinomio en orden decreciente de la variable x.

a) $7x - 3 + 6x^2$ **b)** $-7xy + 10y^2 - 12x^2$

Solución

a) $7x - 3 + 6x^2 = 6x^2 + 7x - 3$

b) $-7xy + 10y^2 - 12x^2 = -12x^2 - 7xy + 10y^2$

Ahora resuelve el ejercicio 21

2 Evaluación de funciones polinomiales

La expresión $2x^3 + 6x^2 + 3$, es un polinomio. Si escribes $P(x) = 2x^3 + 6x^2 + 3$, entonces tienes una función polinomial. En una **función polinomial**, la expresión utilizada para describir la función, es un polinomio.

EJEMPLO 3 Para la función polinomial $P(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2x + 9$, determina

a) $P(0)$ **b)** $P(3)$ **c)** $P(-2)$

Solución

a) $P(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2x + 9$

$P(0) = 4(0)^3 - 6(0)^2 - 2(0) + 9$

$= 0 - 0 - 0 + 9 = 9$

b) $P(3) = 4(3)^3 - 6(3)^2 - 2(3) + 9$

$= 4(27) - 6(9) - 6 + 9 = 57$

c) $P(-2) = 4(-2)^3 - 6(-2)^2 - 2(-2) + 9$

$= 4(-8) - 6(4) + 4 + 9 = -43$

Ahora resuelve el ejercicio 33

Empresas, gobiernos y otras organizaciones, con frecuencia necesitan rastrear y hacer proyecciones acerca de cosas tales como ventas, ganancias, cambios en la población, efectividad de nuevos medicamentos, etcétera. Para hacerlo, con frecuencia usan gráficas y funciones.

EJEMPLO 4 **Ganancias de una pizzería** La ganancia anual del restaurante, Feather's Pizza, ha aumentado de forma continua cada año, como se muestra en la **Figura 5.1.** La función polinomial que se puede usar para aproximar la ganancia anual, en cientos de dólares, es $P(t) = 26t^2 - 19.9t + 10.1$, donde t es el número de años desde la apertura del restaurante.



a) Usa la función para estimar la ganancia anual del restaurante durante el tercer año.

b) Compara tu respuesta del inciso **a)**, con la gráfica. ¿La gráfica respalda tu respuesta?

c) Si esta tendencia continúa, estima la ganancia del restaurante, Feather's Pizza, durante el décimo año.

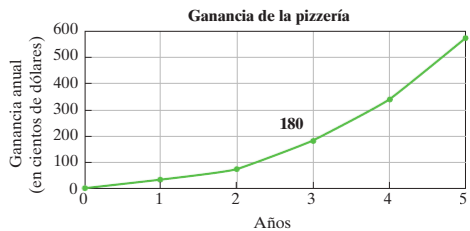


FIGURA 5.1

Solución

a) Entiende Para estimar la ganancia anual durante el tercer año, calcula $P(3)$.

Traduce y Realiza
$$\begin{aligned} P(t) &= 26t^2 - 19.9t + 10.1 \\ P(3) &= 26(3)^2 - 19.9(3) + 10.1 \\ &= 26(9) - 19.9(3) + 10.1 \\ &= 234 - 59.7 + 10.1 = 184.4 \end{aligned}$$

Verifica y Responde La ganancia anual estimada durante el tercer año, fue de aproximadamente \$184.4 cientos, o \$18440.

b) En el inciso **a)**, se estimó que la ganancia durante el tercer año era de aproximadamente \$18440. La gráfica en la **Figura 5.1**, muestra que la ganancia durante el tercer año era de \$180 cientos, o \$18000. Dado que ambos valores están muy cerca, se concluye que la gráfica respalda el resultado del inciso **a)**.

c) Entiende Para estimar la ganancia anual durante el décimo año, evalúa $P(10)$.

Traduce y Realiza
$$\begin{aligned} P(t) &= 26t^2 - 19.9t + 10.1 \\ P(10) &= 26(10)^2 - 19.9(10) + 10.1 \\ &= 26(100) - 19.9(10) + 10.1 \\ &= 2600 - 199 + 10.1 = 2411.1 \end{aligned}$$

Verifica y Responde Si esta tendencia continúa durante el décimo año, el restaurante, Feather's Pizza, tendrá una ganancia anual de \$2411.1 cientos, o \$241 110.

Ahora resuelve el ejercicio 93

Comprende el Álgebra

Una función *aumenta* si tu lápiz sube mientras trazas la gráfica de izquierda a derecha. Una función *disminuye* si tu lápiz baja conforme trazas la gráfica de izquierda a derecha.

3 Comprensión de las gráficas de las funciones polinomiales

Las gráficas de todas las funciones polinomiales, son curvas suaves continuas. La **Figura 5.2**, muestra una gráfica de una función polinomial cuadrática. Las **Figuras 5.3** y **5.4**, muestran las gráficas de funciones polinomiales cúbicas. Cada una de las funciones en estas gráficas, tiene un *coeficiente principal positivo*. Observa que, en cada gráfica, la función sigue *aumentando* (la parte verde de la gráfica) hacia la derecha de cierto valor de x.

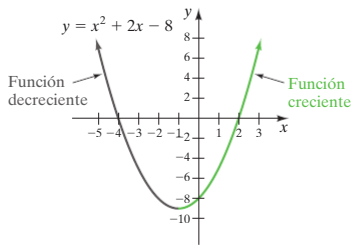


FIGURA 5.2

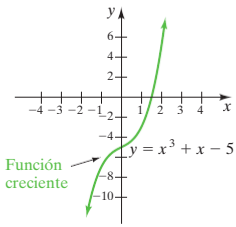


FIGURA 5.3

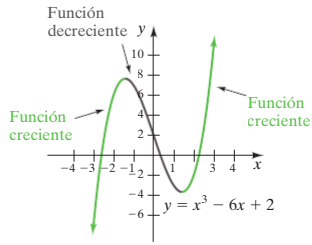


FIGURA 5.4

Comprende el Álgebra

Las funciones polinomiales, con un *coeficiente principal positivo*, *aumentarán* hacia la derecha de algún valor de x. Las funciones polinomiales, con un *coeficiente principal negativo*, *disminuirán* hacia la derecha de algún valor de x.

La **Figura 5.5** de la página 302, muestra una gráfica de una función polinomial cuadrática. Las **Figuras 5.6** y **5.7**, muestran las gráficas de funciones polinomiales cúbicas. Cada una de las funciones, en estas gráficas, tiene un *coeficiente principal negativo*. Observa que, en cada gráfica, la función sigue *disminuyendo* (la parte gris de la gráfica) hacia la derecha de algún valor de x.

¿Por qué el coeficiente principal determina si una función aumentará o disminuirá a la derecha de algún valor de x? El coeficiente principal, es el coeficiente del término con mayor exponente en la variable. Conforme x aumenta, este término, con el tiempo, dominará a todos los otros términos en la función. De modo que, si el coeficiente de este término es positivo, la función, *con el tiempo*, aumentará conforme x aumente. Si el coeficiente principal es negativo, la función, *con el tiempo*, disminuirá conforme x aumente. Esta

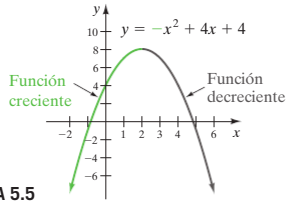


FIGURA 5.5

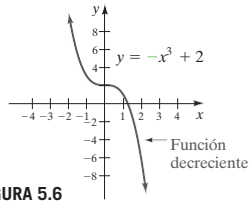


FIGURA 5.6

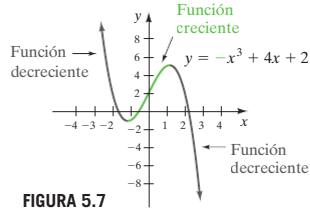


FIGURA 5.7

información, junto con la verificación de la intersección con el eje de las y de la gráfica, puede ser útil para determinar si una gráfica es correcta o completa.

USA TU CALCULADORA GRAFICADORA

Siempre que grafiques una función polinomial en tu calculadora, asegúrate de que tu pantalla muestre cada cambio en la dirección de tu gráfica. Por ejemplo, supón que graficas $y = 0.1x^3 - 2x^2 + 5x - 8$ en tu calculadora. Usando la ventana estándar, obtienes la gráfica que se muestra en la **Figura 5.8**.

Sin embargo, a partir de la discusión anterior, debes darte cuenta de que, dado que el coeficiente principal, 0.1, es positivo, la gráfica debe aumentar hacia la derecha de algún valor de x. La gráfica en la **Figura 5.8** no muestra esto. Sin embargo, puedes cambiar la ventana de previsualización. Presiona la tecla WINDOW y cambia la configuración de la siguiente manera: Xmin $= -10$, Xmax $= 30$, Xscl $= 2$, Ymin $= -100$, Ymax $= 60$, Yscl $= 10$. Este cambio en la ventana de previsualización se muestra en la Figura 5.9 usando $[-10, 30, 2, -100, 60, 10]$. Se usará una notación similar cuando se utilice una configuración de ventana distinta a la estándar. Ahora puedes ver cómo aumenta la gráfica hacia la derecha de $x = 12$. Cuando grafiques, la intersección con el eje de las y con frecuencia es útil para determinar los valores a usar para el rango. Recuerda que, para determinar la intersección con el eje de las y, se hace $x = 0$ y se resuelve en términos de y. Por ejemplo, si graficas $y = 4x^3 + 6x^2 + x - 180$, la intersección con el eje de las y estará en -180.

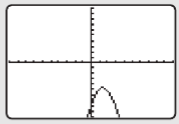
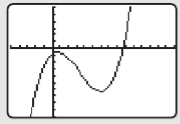


FIGURA 5.8



$[-10, 30, 2, -100, 60, 10]$

FIGURA 5.9

4 Suma y resta de polinomios

Para *sumar o restar polinomios*, quita los paréntesis, si están presentes. Luego combina los términos semejantes.

EJEMPLO 5 Simplifica $(4x^2 - 6x + 8) + (2x^2 + 5x - 1)$.

Solución

$$\begin{aligned}
&(4x^2 - 6x + 8) + (2x^2 + 5x - 1) \\
&= 4x^2 - 6x + 8 + 2x^2 + 5x - 1 && \text{Remueve los paréntesis.} \\
&= \underbrace{4x^2 + 2x^2}\ \underbrace{- 6x + 5x}\ \underbrace{+ 8 - 1} && \text{Reordena los términos.} \\
&= \quad 6x^2 \qquad -x \qquad +7 && \text{Combina los términos semejantes.}
\end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 39

EJEMPLO 6 Simplifica $(3x^2y - 4xy + y) + (x^2y + 2xy + 8y - 5)$.

Solución

$$\begin{aligned}
&(3x^2y - 4xy + y) + (x^2y + 2xy + 8y - 5) \\
&= 3x^2y - 4xy + y + x^2y + 2xy + 8y - 5 && \text{Remueve los paréntesis.} \\
&= \underbrace{3x^2y + x^2y}\ \underbrace{- 4xy + 2xy}\ \underbrace{+ y + 8y} - 5 && \text{Reordena los términos.} \\
&= \quad 4x^2y \qquad -2xy \qquad +9y \ - 5 && \text{Combina los términos semejantes.}
\end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 41

SUGERENCIA ÚTIL

Recuerda que $-x$ significa $-1 \cdot x$. Por tanto, $-(2x^2 - 4x + 6)$ significa $-1(2x^2 - 4x + 6)$, y aplica la propiedad distributiva. Cuando restes un polinomio de otro, los *signos de todo término* del polinomio a restar, deben cambiar. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 3 - (2x^2 - 4x + 6) &= x^2 - 6x + 3 - 1(2x^2 - 4x + 6) \\ &= x^2 - 6x + 3 - 2x^2 + 4x - 6 \\ &= -x^2 - 2x - 3 \end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Resta $(-x^2 - 2x + 11)$ de $(x^3 + 4x + 6)$.

Solución

$$\begin{aligned} &(x^3 + 4x + 6) - (-x^2 - 2x + 11) \\ &= (x^3 + 4x + 6) - 1(-x^2 - 2x + 11) && \text{Inserta 1.} \\ &= x^3 + 4x + 6 + x^2 + 2x - 11 && \text{Propiedad distributiva.} \\ &= x^3 + x^2 + 4x + 2x + 6 - 11 && \text{Reordena los términos.} \\ &= x^3 + x^2 + 6x - 5 && \text{Combina los términos semejantes.} \end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 61

EJEMPLO 8 Simplifica $x^2y - 4xy^2 + 5 - (2x^2y - 3y^2 + 11)$.

Solución

$$\begin{aligned} &x^2y - 4xy^2 + 5 - 1(2x^2y - 3y^2 + 11) && \text{Inserta 1.} \\ &= x^2y - 4xy^2 + 5 - 2x^2y + 3y^2 - 11 && \text{Propiedad distributiva.} \\ &= x^2y - 2x^2y - 4xy^2 + 3y^2 + 5 - 11 && \text{Reordena los términos.} \\ &= -x^2y - 4xy^2 + 3y^2 - 6 && \text{Combina los términos semejantes.} \end{aligned}$$

Observa que $-x^2y$ y $-4xy^2$ no son términos semejantes, pues las variables tienen diferentes exponentes. Además, $-4xy^2$ y $3y^2$ no son términos semejantes porque $3y^2$ no contiene la variable x.

Ahora resuelve el ejercicio 45

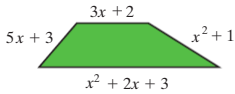


FIGURA 5.10

EJEMPLO 9 **Perímetro** Determina una expresión para el perímetro del cuadrilátero de la **Figura 5.10**.

Solución El perímetro, es la suma de las longitudes de los lados de la figura.

$$\begin{aligned} \text{Perímetro} &= (x^2 + 2x + 3) + (x^2 + 1) + (5x + 3) + (3x + 2) && \text{Suma de los lados.} \\ &= x^2 + 2x + 3 + x^2 + 1 + 5x + 3 + 3x + 2 && \text{Remueve los paréntesis.} \\ &= x^2 + x^2 + 2x + 5x + 3x + 3 + 1 + 3 + 2 && \text{Reordena los términos.} \\ &= 2x^2 + 10x + 9 && \text{Combina los términos semejantes.} \end{aligned}$$

El perímetro del cuadrilátero es $2x^2 + 10x + 9$.

Ahora resuelve el ejercicio 75

5.1 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

principal polinomio grado trinomio términos 5 monomio factores binomio 7 1 0

1. Las partes que se suman o se restan en un polinomio, se llaman _____.
2. La suma de los exponentes de las variables de un término, se llama _____ del término.
3. El grado de $-7x^3y^2$ es _____.
4. El grado de $6x$ es _____.
5. En un polinomio, el término de mayor grado, se llama término _____.
6. Un polinomio con un término es un _____.
7. Un polinomio con dos términos es un _____.
8. Un polinomio con tres términos es un _____.

Practica tus habilidades

Determina si cada expresión es un polinomio. Si el polinomio tiene un nombre específico, por ejemplo, "monomio" o "binomio", indica el nombre. Si la expresión no es un polinomio, explica por qué no lo es.

9. 7

10. $-3x$

11. $4x^{-1}$

12. $5z^{-3}$

13. $5x^2 - 6x + 9$

14. $8x^2 - 4x + 9y^2$

15. $3x^{1/2} + 2xy$

16. $\dfrac{1}{x-7}$

Escribe cada polinomio en orden decreciente de la variable x. Si el polinomio ya está en orden decreciente, indícalo. Proporciona el grado de cada polinomio.

17. $-5 + 2x - x^2$

18. $-3x - 9 + 8x^2$

19. $2x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 9x + 11$

20. $2x^3 + 7x^2 - 9x - 13$

21. $9y^2 + 3xy + 10x^2$

22. $8y^3 - 36xy^2 + 54x^2y - 27x^3$

Proporciona a) el grado de cada polinomio y b) su coeficiente principal.

23. $2x + 5$

24. 18

25. $x^4 + 3x^6 - 2x - 13$

26. $17x^4 + 13x^5 - x^7 + 4x^3$

27. $4x^2y^3 + 6xy^4 + 9xy^5$

28. $3c^5d^2 - 5c^4d^4 + 2c^2d^5$

Evalúa cada función polinomial en el valor dado.

29. Si $P(x) = 2x + 8$, determina:
a) $P(0)$ **b)** $P(2)$ **c)** $P(-4)$

30. Si $P(x) = -3x + 4$, determina:
a) $P(0)$ **b)** $P\left(\dfrac{4}{3}\right)$ **c)** $P(-2)$

31. Si $P(x) = -x^2 + x + 6$, determina:
a) $P(4)$ **b)** $P(0)$ **c)** $P(-2)$

32. Si $P(x) = -3x^2 + 2x - 7$, determina:
a) $P(2)$ **b)** $P(0)$ **c)** $P(-2)$

33. Si $P(x) = -x^3 - x^2 + 3x - 1$, determina:
a) $P(0)$ **b)** $P(2)$ **c)** $P(-1)$

34. Si $P(t) = -2t^3 + t^2 - t + 4$, determina:
a) $P(0)$ **b)** $P(3)$ **c)** $P(-2)$

En los ejercicios 35-56, simplifica.

35. $(x^2 + 3x - 1) + (6x - 5)$

36. $(5n^2 - 7) + (9n^2 + 8n + 12)$

37. $(x^2 - 8x + 11) - (5x + 9)$

38. $(2x - 13) - (3x^2 - 4x + 26)$

39. $(4y^2 + 9y - 1) - (2y^2 + 10)$

40. $(5b^2 - 8b + 7) - (2b^2 - 3b - 15)$

41. $(-k^3 + 3k^2 - k - 4) - (4k^3 + 8k + 3)$

42. $(6y^2 - 9y + 14) - (-2y^2 - y - 8)$

43. $(3a - 6b + 5c) - (-2a + 4b - 8c)$

44. $(-5r + 2s - 6t) - (4r - 3s + 7t)$

45. $(3a^2b - 6ab + 5b^2) - (4ab - 6b^2 + 5a^2b)$

46. $(3x^2 - 5y^2 - 2xy) - (4x^2 + 8y^2 - 9xy)$

47. $6x^2 - 5x - [3x - (4x^2 - 9)]$

48. $3xy^2 - 2x - [-(4xy^2 + 3x) - 5xy]$

49. $\left(-\dfrac{5}{9}a + 6\right) + \left(-\dfrac{2}{3}a^2 - \dfrac{1}{4}a - 1\right)$

50. $\left(\dfrac{5}{12}d^2 + \dfrac{1}{16}d - \dfrac{7}{8}\right) + \left(\dfrac{7}{12}d^2 - \dfrac{1}{4}d + \dfrac{3}{4}\right)$

51. $(1.4x^2 + 1.6x - 8.3) - (4.9x^2 + 3.7x + 11.3)$

52. $(-12.4x^2y - 6.2xy + 9.3y^2) - (-5.3x^2y + 1.6xy - 10.4y^2)$

53. Suma $-2x^2 - 4x - 12$ y $-x^2 - 2x$.

54. Suma $-5y^2 + 3y - 7$ y $2y^2 - 4y + 1$.

55. Suma $9x^2 - 12xy + 4y^2$ y $4x^2 + 4xy + y^2$.

56. Suma $6x^2 + 12xy$ y $-2x^2 + 4xy + 3y$.

57. Resta $4x - 11$ de $7x + 8$.

58. Resta $x^2 - 3x - 7$ de $x^2 + 5x - 9$.

59. Resta $-3x^2 + 8x - 24$ de $4x^2 + 8x - 11$.

60. Resta $-x^2 + 3x + 5$ de $4x^2 - 6x + 2$.

61. Resta $0.2a^2 - 3.9a + 26.4$ de $-5.2a^2 - 9.6a$.

62. Resta $(3.1z^2 - 5.23z + 8.11)$ de $(-2.51z^2 + 1.2z + 7.4)$.

63. Resta $\left(5x^2y + \frac{5}{9}\right)$ de $\left(-\frac{1}{2}x^2y + xy^2 + \frac{3}{5}\right)$.

64. Resta $\left(\frac{7}{8}m^2n^2 - \frac{2}{3}mn^3 + \frac{5}{8}\right)$ de $\left(\frac{5}{6}m^2n^2 - \frac{4}{5}mn^3 - \frac{5}{8}\right)$.

Simplifica. Supón que todos los exponentes representan números naturales.

65. $(3x^{2r} - 7x^r + 1) + (2x^{2r} - 3x^r + 2)$

66. $(8x^{2r} - 5x^r + 4) + (6x^{2r} + x^r + 3)$

67. $(x^{2s} - 8x^s + 6) - (2x^{2s} - 4x^s - 13)$

68. $(5a^{2m} - 6a^m + 4) - (2a^{2m} + 7)$

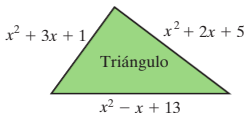
69. $(7b^{4n} - 5b^{2n} + 1) - (3b^{3n} - b^{2n})$

70. $(-3r^{3a} + r^a - 6) - (-2r^{3a} - 8r^{2a} + 6)$

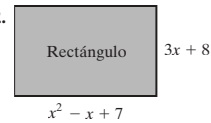
Resolución de problemas

Perímetro *En los ejercicios 71-76, determina una expresión para el perímetro de cada figura. Consulta el ejemplo 9.*

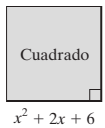
71.



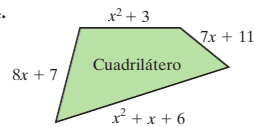
72.



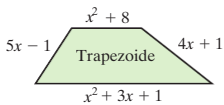
73.



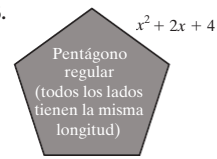
74.



75.



76.



En los ejercicios 77-86, si es necesario, usa la tecla $\boxed{\pi}$ *de tu calculadora para evaluar* π *cuando se requiera. Redondea las respuestas a la centésima más cercana.*

77. Área El área de un cuadrado es una función de su lado, s, donde $A(s) = s^2$. Determina el área de un cuadrado, si su lado es de 12 metros.

78. Volumen El volumen de un cubo es una función de su lado, s, donde $V(s) = s^3$. Determina el volumen de un cubo, si su lado es de 7 centímetros.

79. Área El área de un círculo es una función de su radio, donde $A(r) = \pi r^2$. Determina el área de un círculo, si su radio es de 6 pulgadas.

80. Volumen El volumen de una esfera es una función de su radio, donde $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Determina el volumen de una esfera, cuando su radio es de 4 pulgadas.

81. Altura Cuando un objeto se deja caer desde una altura de 1250 pies desde el Empire State, la altura del objeto, h, en pies, desde el suelo en el tiempo, t, en segundos, después de ser dejado caer, puede determinarse mediante:

$$h = P(t) = -16t^2 + 1250$$

Determina la altura de un objeto 6 segundos después de ser dejado caer.



Edificio Empire State

82. Concurso de oratoria El número de formas en las que pueden seleccionarse, de entre n participantes, a los

ganadores del primer, segundo y tercer lugar en un concurso de oratoria, está dado por $P(n) = n^3 - 3n^2 + 2n$. Si hay siete participantes, ¿en cuántas formas pueden seleccionarse a los ganadores del primer y segundo lugar?

83. Comités El número de diferentes comités de 2 estudiantes, donde los 2 estudiantes son seleccionados de una clase de n estudiantes, está dada por $c(n) = \frac{1}{2}(n^2 - n)$. Si una clase de biología tiene 15 estudiantes, ¿cuántos comités diferentes, que tengan 2 estudiantes, pueden seleccionarse?

84. Comités El número de diferentes comités de 3 estudiantes, donde los 3 estudiantes son seleccionados de una clase de n estudiantes, está dado por $c(n) = \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$. Si una clase de arte tiene 10 estudiantes, ¿cuántos comités diferentes, que tengan 3 estudiantes, pueden seleccionarse?

85. Cuenta de ahorros El 2 de enero de 2018, Jorge depositó \$650 en una cuenta que paga interés simple, a una tasa de \$24 cada año. El monto en la cuenta, es una función del tiempo dado por $A(t) = 650 + 24t$, donde t es el número de años después de 2018. Determina el monto en la cuenta en **a)** 2019. **b)** 2033.

86. Financiamiento Frank acaba de comprar una motocicleta. Después de hacer el pago inicial, el monto a financiar es de \$28 250. Usando un préstamo a 0% (o libre de interés), el pago mensual es de \$387.50. El monto que todavía se debe por la motocicleta, es función del tiempo dado por $A(t) = \$28\,250 - \$387.50t$, donde t es el número de meses después de que Frank compró la motocicleta. ¿Cuánto se debe todavía **a)** 2 meses, **b)** 15 meses después de que Frank compró la motocicleta?



Ganancia *La ganancia de una compañía se obtiene al restar su costo de su ingreso. En los ejercicios 87 y 88, $R(x)$ representa el ingreso de la compañía cuando vende x artículos y $C(x)$ representa el costo de la compañía cuando produce x artículos.* **a)** *Determina una función de ganancia $P(x)$.* **b)** *Evalúa $P(x)$ cuando $x = 100$.*

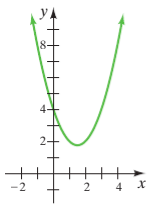
87. $R(x) = 2x^2 - 60x$
$C(x) = 8050 - 420x$

88. $R(x) = 5.5x^2 - 80.3x$
$C(x) = 1.2x^2 + 16.3x + 12\,040.6$

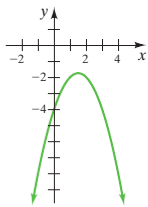
*En los ejercicios 89-92, determina cuál de las gráficas —***a), b)** o **c)***— es la gráfica de la ecuación dada. Explica cómo determinaste tu respuesta.*

89. $y = x^2 + 3x - 4$

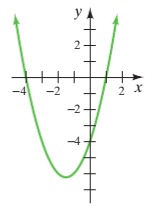
a)



b)

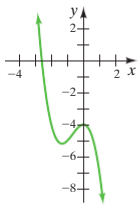


c)

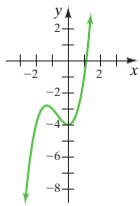


90. $y = x^3 + 2x^2 - 4$

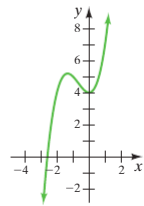
a)



b)

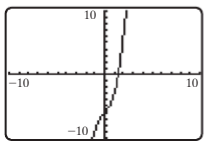


c)

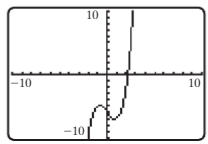


91. $y = -x^3 + 2x - 6$

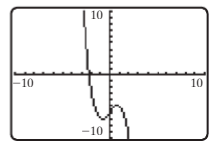
a)



b)

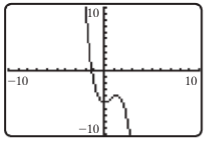


c)

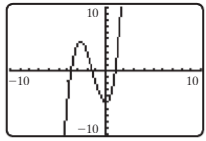


92. $y = x^3 + 4x^2 - 5$

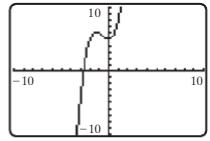
a)



b)



c)



93. Puente Royal Gorge Una pelota de golf, se deja caer desde el puente Royal Gorge en Cañon City, Colorado. La altura, $h(t)$, en pies, de la pelota de golf sobre el agua que está abajo, está dada por la función:

$$h(t) = -16t^2 + 955$$

donde t es el tiempo en segundos y $0 < t < 7.7$.



Puente Royal Gorge

Determina la altura de la pelota de golf después de

a) 1 segundo. **b)** 3 segundos.

c) 6 segundos.

94. Plano inclinado Una bola rueda por un plano inclinado. La distancia, $d(t)$, en pies, que recorre la bola, está dada por la función:

$$d(t) = 2.36t^2$$

donde t es el tiempo en segundos $0 < t < 5$.

Determina la distancia que recorre la bola por el plano inclinado en

a) 1 segundo. **b)** 3 segundos.

c) 5 segundos.



95. Inflación La función $C(t) = 0.31t^2 + 0.59t + 9.61$, donde t es años desde 2017, aproxima el costo, en miles de dólares, de comprar en el futuro lo que en el año 2017 se compraría con \$10 000. Esta función se basa en una tasa de inflación anual de 6% y $0 \le t \le 25$. Estima el costo, en 2032, de los bienes que en el año 2017 costaron \$10 000.

96. Población La población de una ciudad se estima mediante la función $P(t) = 6t^2 + 7t + 6\,500$, donde t es el número de años desde 2010. Estima cuál será la población en el año 2020.

Responde los ejercicios 97 y 98 usando una calculadora graficadora, si tienes una. Si no tienes una calculadora graficadora, dibuja las gráficas de los incisos **a)** *mediante el trazado de puntos. Luego responde los incisos del* **b)** *al* **e)**.

97. a) Elabora la gráfica de:

$$y_1 = x^3$$
$$y_2 = x^3 - 3x^2 - 3$$

b) En ambas gráficas, para valores de $x > 3$, ¿las funciones aumentan o disminuyen conforme x aumenta?

c) Cuando el término principal de una función polinomial es x^3, el polinomio debe aumentar conforme x aumenta para $x > a$, donde a es algún número real mayor que 0. Explica por qué esto debe ser así.

d) En ambas gráficas, para valores de $x < -3$, ¿las funciones aumentan o disminuyen conforme x disminuye?

e) Cuando el término principal de una función polinomial es x^3, el polinomio debe disminuir conforme x disminuye para $x < a$, donde a es algún número real menor que 0. Explica por qué esto debe ser así.

98. a) Elabora la gráfica de:

$$y_1 = x^4$$
$$y_2 = x^4 - 6x^2$$

b) En cada gráfica, para valores de $x > 3$, ¿las funciones aumentan o disminuyen conforme x aumenta?

c) Cuando el término principal de una función polinomial es x^4, el polinomio debe aumentar conforme x aumenta para $x > a$, donde a es algún número real mayor que 0. Explica por qué esto debe ser así.

d) En cada gráfica, para valores de $x < -3$, ¿las funciones aumentan o disminuyen conforme x disminuye?

e) Cuando el término principal de una función polinomial es x^4, el polinomio debe aumentar conforme x disminuye para $x < a$, donde a es algún número real menor que 0. Explica por qué esto debe ser así.

Ejercicios conceptuales y de redacción

99. ¿Cuál es el grado de una constante distinta de cero?

100. ¿Qué es el término principal de un polinomio?

101. ¿Qué es el coeficiente principal de un polinomio?

102. a) ¿Cómo determinas el grado de un término?

b) ¿Cuál es el grado de $6x^4y^3z$?

103. a) ¿Cómo determinas el grado de un polinomio?
b) ¿Cuál es el grado de $-4x^4 + 6x^3y^4 + z^5$?

104. ¿Qué significa cuando un polinomio se comporta de forma decreciente acorde con la variable x?

105. a) ¿Cuándo es un polinomio lineal?
b) Proporciona un ejemplo de un polinomio lineal.

106. a) ¿Cuándo es un polinomio cuadrático?
b) Proporciona un ejemplo de un polinomio cuadrático.

107. a) ¿Cuándo es un polinomio cúbico?
b) Proporciona un ejemplo de un polinomio cúbico.

108. Cuando un polinomio se resta de otro, ¿qué ocurre con los signos de todos los términos del polinomio a restar?

109. Escribe un trinomio de quinto grado en x, en orden decreciente, que carezca de términos de cuarto, tercer y segundo grados.

110. Escribe un polinomio de séptimo grado en y, en orden decreciente, que carezca de los términos de quinto, tercer y segundo grados.

111. ¿La suma de dos trinomios, siempre es un trinomio? Explica y proporciona un ejemplo para respaldar tu respuesta.

112. ¿La suma de dos binomios, siempre es un binomio? Explica y proporciona un ejemplo para respaldar tu respuesta.

113. ¿La suma de dos polinomios cuadráticos, siempre es un polinomio cuadrático? Explica y proporciona un ejemplo para respaldar tu respuesta.

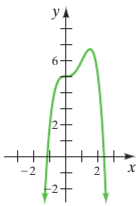
114. ¿La diferencia de dos polinomios cúbicos siempre es un polinomio cúbico? Explica y proporciona un ejemplo para respaldar tu respuesta.

Problemas de desafío

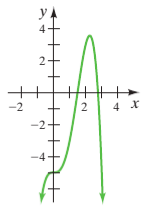
*Determina cuál de las gráficas —***a), b)** *o* **c)***— es la gráfica de la ecuación dada. Explica cómo determinaste tu respuesta.*

115. $y = -x^4 + 3x^3 - 5$

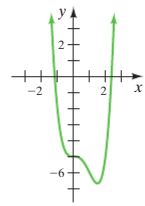
a)



b)

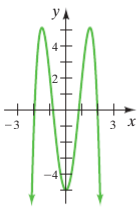


c)

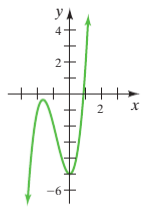


116. $y = 8x^2 + x - 5$

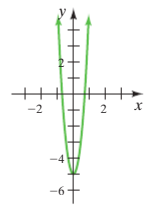
a)



b)



c)

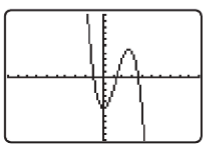


Actividad grupal

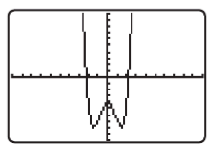
Como equipo, discute y responde los ejercicios 117 y 118.

117. Si el término principal de una función polinomial es $3x^3$, ¿cuál de las siguientes gráficas posiblemente corresponda a la gráfica del polinomio? Explica la respuesta. Considera lo que ocurre para valores grandes positivos de x y para valores grandes negativos de x.

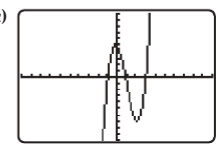
a)



b)

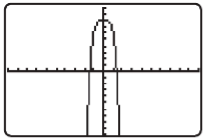


c)

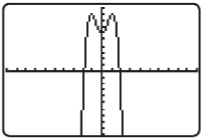


118. Si el término principal de un polinomio es $-2x^4$, ¿cuál de las siguientes gráficas, posiblemente corresponda a la gráfica del polinomio?

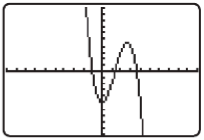
a)



b)



c)



Ejercicios de repaso acumulativo

[1.4] **119.** Evalúa $\sqrt[4]{81}$.

[2.1] **120.** Resuelve $1 = \frac{8}{5}x - \frac{1}{2}$.

[2.4] **121.** **Máquinas de moldeo** Una antigua máquina de moldeo, puede producir 40 cubetas de plástico en 1 hora. Una máquina más nueva, puede producir 50 cubetas en 1 hora. ¿Cuánto tardarán las dos máquinas en producir un total de 540 cubetas?

[3.4] **122.** Determina la pendiente de la recta que pasa a través de los puntos $(10, -4)$ y $(-1, -2)$.

[4.2] **123.** Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$-4s + 3t = 16$$
$$4t - 2u = 2$$
$$-s + 6u = -2$$

5.2 Multiplicación de polinomios

1. Multiplicación de un monomio por un polinomio
2. Multiplicación de un binomio por un binomio
3. Multiplicación de un polinomio por un polinomio
4. Determinación del cuadrado de un binomio
5. Determinación del producto de la suma y la resta de los mismos dos términos
6. Determinación del producto de funciones polinomiales

Comprende el Álgebra
Cuando multipliques expresiones con la misma base, *suma los exponentes.*

1 Multiplicación de un monomio por un polinomio

Para multiplicar polinomios, debes recordar que *cada término de un polinomio debe multiplicarse por cada término del otro polinomio.* Esto resulta en monomios que multiplican a monomios. Para multiplicar monomios, usa la regla del producto para exponentes.

Regla del producto para exponentes

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

En el ejemplo 1, se usa la palabra *factores*. Recuerda que cualesquiera expresiones que se *multiplican*, se llaman *factores*.

Multiplicación de un monomio por un monomio

EJEMPLO 1 Multiplica.

a) $(4x^2)(5x^3)$ **b)** $(3x^2y)(4x^5y^3)$ **c)** $(-2a^4b^7)(-3a^8b^3c^5)$

Solución Usa la regla del producto para exponentes, para multiplicar los factores.

a) $(4x^2)(5x^3) = 4 \cdot 5 \cdot x^2 \cdot x^3$ Remueve los paréntesis y Reordena los términos.
$= 20x^{2+3}$ Regla del producto, $x^2 \cdot x^3 = x^{2+3}$.
$= 20x^5$

b) $(3x^2y)(4x^5y^3) = 3 \cdot 4 \cdot x^2 \cdot x^5 \cdot y \cdot y^3$ Remueve los paréntesis, Reordena los términos.
$= 12x^{2+5}y^{1+3}$ Regla del producto.
$= 12x^7y^4$

c) $(-2a^4b^7)(-3a^8b^3c^5) = (-2)(-3)a^4 \cdot a^8 \cdot b^7 \cdot b^3 \cdot c^5$ Remueve los paréntesis, Reordena los términos.
$= 6a^{4+8}b^{7+3}c^5$ Regla del producto.
$= 6a^{12}b^{10}c^5$

Ahora resuelve el ejercicio 9

En el ejemplo 1 **a)**, tanto $4x^2$ como $5x^3$, son *factores* del producto $20x^5$. En el ejemplo 1 **b)**, tanto $3x^2y$ como $4x^5y^3$, son *factores* del producto $12x^7y^4$. En el ejemplo 1 **c)**, tanto $-2a^4b^7$ como $-3a^8b^3c^5$, son *factores* del producto $6a^{12}b^{10}c^5$.

Multiplicación de un monomio por un polinomio Cuando multipliques un monomio por un binomio, puedes usar la propiedad distributiva. Cuando multipliques un monomio por un polinomio que contenga más de dos términos, puedes usar la *forma desarrollada de la propiedad distributiva*.

Propiedad distributiva, forma desarrollada

$$a(b + c + d + \cdots + n) = ab + ac + ad + \cdots + an$$

En el ejemplo 2, se usará la forma desarrollada de la propiedad distributiva para multiplicar un monomio por un polinomio.

EJEMPLO 2 Multiplica.

a) $3x(5x^2 - 2x + 7)$ **b)** $-5x(x^3 - 2x^2 + 6x - 3)$ **c)** $2xy^2(3x^2 - 5xy + 9y^2)$

Solución

a) $3x(5x^2 - 2x + 7) = 3x \cdot 5x^2 + 3x \cdot (-2x) + 3x \cdot 7$
$= 15x^3 - 6x^2 + 21x$

b) $-5x(x^3 - 2x^2 + 6x - 3) = (-5x)(x^3) + (-5x)(-2x^2) + (-5x)(6x) + (-5x)(-3)$
$= -5x^4 + 10x^3 - 30x^2 + 15x$

c) $2xy^2(3x^2 - 5xy + 9y^2) = 2xy^2 \cdot 3x^2 + 2xy^2(-5xy) + 2xy^2 \cdot 9y^2$
$= 6x^3y^2 - 10x^2y^3 + 18xy^4$

Ahora resuelve el ejercicio 15

2 Multiplicación de un binomio por un binomio

Considera multiplicar $(a + b)(c + d)$. Trata $(a+b)$ como un solo término y usa la propiedad distributiva para obtener

$$(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d$$
$$= ac + bc + ad + bd$$

Cuando multipliques un binomio por un binomio, cada término del primer binomio debe multiplicarse por cada término del segundo binomio, y después se combinan todos los términos semejantes.

Los binomios pueden multiplicarse tanto vertical como horizontalmente.

EJEMPLO 3 Multiplica $(3x + 2)(x - 5)$.

Solución Se multiplicará verticalmente. Coloca los binomios en orden decreciente de la variable, uno debajo del otro. No hay diferencia en cuál se coloque arriba.

Multiplica cada término del binomio superior por cada término del binomio inferior, como se muestra. Recuerda alinear términos semejantes de modo que puedan sumarse.

$$\begin{array}{rl} & 3x + 2 \\ & x - 5 \\ \hline -5(3x + 2) \longrightarrow & -15x - 10 \quad \text{Multiplica el binomio superior por } -5. \\ x(3x + 2) \longrightarrow & 3x^2 + 2x \quad \text{Multiplica el binomio superior por } x. \\ \hline & 3x^2 - 13x - 10 \quad \text{Suma los términos semejantes en columnas.} \end{array}$$

En el ejemplo 3, los binomios $3x + 2$ y $x - 5$, son *factores* del trinomio $3x^2 - 13x - 10$.

Ahora resuelve el ejercicio 23

Comprende el Álgebra

El acrónimo *PIES o FOIL (por sus siglas en ingles)*, te ayuda a recordar cómo multiplicar *dos binomios*. En este proceso hay *cuatro* productos:

P rimeros
I nternos
E xternos
S egundos

Cuando se multiplican dos binomios usando PIES, se está utilizando la propiedad distributiva.

El método PIES

Una forma conveniente de multiplicar dos binomios, se llama **método PIES**. Para multiplicar dos binomios usando el método PIES, coloca los binomios lado a lado. La palabra PIES indica que multiplicas los P rimeros términos, los términos I nternos, los términos E xternos y los S egundos términos de los dos binomios. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 4, donde se multiplican los mismos dos binomios que se multiplicaron en el ejemplo 3.

EJEMPLO 4 Multiplica $(3x + 2)(x - 5)$ usando el método PIES.

Solución

$$(3x + 2)(x - 5)$$

S, P, I, E

$$\begin{array}{cccccccc} \text{P} & & \text{I} & & \text{E} & & \text{S} & \\ (3x)(x) & + & (2)(x) & + & (3x)(-5) & + & (2)(-5) & \\ = 3x^2 & + & 2x & - & 15x & - & 10 = 3x^2 - 13x - 10 & \end{array}$$

Ahora resuelve el ejercicio 25

SUGERENCIA ÚTIL

Cuando multipliques dos binomios, multiplicarás cada término en el primer binomio por cada término en el segundo binomio, usando el orden descrito en el método PIES. Sin embargo, mientras cada término en el primer binomio se multiplique por cada término en el segundo binomio, puedes seguir cualquier orden para multiplicar los términos.

3 Multiplicación de un polinomio por un polinomio

Cuando se multiplica un trinomio por un binomio o un trinomio por un trinomio, cada término del primer polinomio debe multiplicarse por cada término del segundo polinomio.

EJEMPLO 5 Multiplica $x^2 + 1 - 4x$ por $2x^2 - 3$.

Solución Dado que el trinomio no está en orden decreciente, reescríbelo como $x^2 - 4x + 1$.

Coloca el polinomio más largo arriba, después multiplica. Asegúrate de alinear los términos semejantes mientras multiplicas, de modo que los términos puedan sumarse con más facilidad.

$$\begin{array}{rl} x^2 - 4x + 1 & \text{Trinomio reescrito en orden decreciente.} \\ \underline{\qquad\qquad 2x^2 - 3} & \\ -3(x^2 - 4x + 1) \longrightarrow -3x^2 + 12x - 3 & \text{Multiplica la expresión superior por } -3. \\ 2x^2(x^2 - 4x + 1) \longrightarrow \underline{2x^4 - 8x^3 + 2x^2} & \text{Multiplica la expresión superior por } 2x^2. \\ 2x^4 - 8x^3 - x^2 + 12x - 3 & \text{Suma los términos semejantes en columnas.} \end{array}$$

Ahora resuelve el ejercicio 35

Otro método para multiplicar los polinomios del ejemplo 5, es escribir los polinomios, cada uno en orden decreciente uno junto al otro y después usar la propiedad distributiva dos veces. Se multiplica $2x^2$ por $(x^2 - 4x + 1)$ y -3 por $(x^2 - 4x + 1)$, como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} &(2x^2 - 3)(x^2 - 4x + 1) \\ &= 2x^2(x^2 - 4x + 1) - 3(x^2 - 4x + 1) \\ &= 2x^2 \cdot x^2 + 2x^2 \cdot (-4x) + 2x^2 \cdot 1 + (-3) \cdot x^2 + (-3) \cdot (-4x) + (-3) \cdot 1 \\ &= 2x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 3x^2 + 12x - 3 \\ &= 2x^4 - 8x^3 - x^2 + 12x - 3 \end{aligned}$$

Observa que el producto es el mismo sin importar el método usado para multiplicar los polinomios.

EJEMPLO 6 Multiplica $3x^2 + 6xy - 5y^2$ por $x + 4y$.

Solución

$$\begin{array}{rl} & 3x^2 + 6xy - 5y^2 \\ & \underline{\qquad\qquad x + 4y} \\ 4y(3x^2+6xy-5y^2) \longrightarrow & 12x^2y + 24xy^2 - 20y^3 \quad \text{Multiplica la expresión superior por } 4y. \\ x(3x^2+6xy-5y^2) \longrightarrow & \underline{3x^3 + 6x^2y - 5xy^2} \quad \text{Multiplica la expresión superior por } x. \\ & 3x^3 + 18x^2y + 19xy^2 - 20y^3 \quad \text{Suma los términos semejantes en columnas.} \end{array}$$

Ahora resuelve el ejercicio 31

Ahora se estudiarán algunas fórmulas especiales.

4 Determinación del cuadrado de un binomio

Con frecuencia se debe *elevar al cuadrado un binomio*, así que se tienen fórmulas especiales para hacerlo.

Cuadrado de un binomio

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Si olvidas las fórmulas, puedes derivarlas fácilmente al multiplicar $(a + b)(a + b)$ y $(a - b)(a - b)$.

Los ejemplos 7 y 8, ilustran el uso de las fórmulas del cuadrado de binomios.

EJEMPLO 7 Multiplica usando una fórmula de cuadrado de un binomio.

a) $(2x + 1)^2$ **b)** $(3x - 2y^2)^2$

Solución

a) $(2x + 1)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(1) + (1)^2$
$= 4x^2 + 4x + 1$

b) $(3x - 2y^2)^2 = (3x)^2 - 2(3x)(2y^2) + (2y^2)^2$
$= 9x^2 - 12xy^2 + 4y^4$

Ahora resuelve el ejercicio 47

Elevar al cuadrado ambos polinomios en el ejemplo 7, también se podría hacer usando el método PIES. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}(2x + 1)^2 &= (2x + 1)(2x + 1) \\ &= 2x \cdot 2x + 2x \cdot 1 + 1 \cdot 2x + 1 \cdot 1 \\ &= 4x^2 + 2x + 2x + 1 = 4x^2 + 4x + 1\end{aligned}$$

CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

Recuerda el término de en medio cuando elevas al cuadrado un binomio.

CORRECTO	INCORRECTO
$(x + 2)^2 = (x + 2)(x + 2)$ $= x^2 + 4x + 4$	~~$(x + 2)^2 = x^2 + 4$~~
$(x - 3)^2 = (x - 3)(x - 3)$ $= x^2 - 6x + 9$	~~$(x - 3)^2 = x^2 + 9$~~

EJEMPLO 8 Expande $[x + (y - 1)]^2$.

Solución Este ejemplo se trabaja de la misma forma que cualquier otro cuadrado de un binomio. Trata x como el primer término y $(y - 1)$ como el segundo término.

$$\begin{aligned}[x + (y - 1)]^2 &= (x)^2 + 2(x)(y - 1) + (y - 1)^2 \\ &= x^2 + (2x)(y - 1) + y^2 - 2y + 1 \\ &= x^2 + 2xy - 2x + y^2 - 2y + 1\end{aligned}$$

Ninguno de los seis términos son términos semejantes, así que no se pueden combinar términos. Observa que $(y - 1)^2$ también es el cuadrado de un binomio y se expandió como tal.

Ahora resuelve el ejercicio 55

5 Determinación del producto de la suma y la diferencia de los mismos dos términos

A continuación, se multiplica $(x + 6)(x - 6)$ mediante el método PIES.

$$(x + 6)(x - 6) = x^2 - 6x + 6x - (6)(6) = x^2 - 6^2$$

Observa que los productos exterior e interior suman 0. Al examinar este ejemplo, se ve que el producto de la suma y la diferencia de los mismos dos términos, es la diferencia de los cuadrados de los dos términos.

Producto de la suma y la diferencia de los mismos dos términos

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

En otras palabras, para multiplicar dos binomios que difieren solamente en el signo entre sus dos términos, toma la diferencia entre el cuadrado del primer término y el cuadrado del segundo término. Observa que $a^2 - b^2$ representa una **diferencia de dos cuadrados**.

EJEMPLO 9 Multiplica.

a) $(2x + 3y)(2x - 3y)$ **b)** $\left(3x + \frac{4}{5}\right)\left(3x - \frac{4}{5}\right)$

Solución Cada uno es producto de la suma y la diferencia de los mismos dos términos. Por tanto,

a) $(2x + 3y)(2x - 3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 2^2x^2 - 3^2y^2 = 4x^2 - 9y^2$

b) $\left(3x + \frac{4}{5}\right)\left(3x - \frac{4}{5}\right) = (3x)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 9x^2 - \frac{16}{25}$

Ahora resuelve el ejercicio 51

EJEMPLO 10 Multiplica $(2x^3 + 7y^5)(2x^3 - 7y^5)$.

Solución $(2x^3 + 7y^5)(2x^3 - 7y^5) = (2x^3)^2 - (7y^5)^2 = 4x^6 - 49y^{10}$

Ahora resuelve el ejercicio 53

EJEMPLO 11 Multiplica $[4x + (3y + 2)][4x - (3y + 2)]$.

Solución Trata $4x$ como el primer término y $3y + 2$ como el segundo término. Entonces se tiene la suma y la diferencia de los mismos dos términos.

$$\begin{aligned}[4x + (3y + 2)][4x - (3y + 2)] &= (4x)^2 - (3y + 2)^2 \\ &= 16x^2 - (9y^2 + 12y + 4) \\ &= 16x^2 - 9y^2 - 12y - 4\end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 57

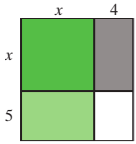


FIGURA 5.11

EJEMPLO 12 El área de la **Figura 5.11** consiste de un cuadrado y tres rectángulos. Determina una expresión polinomial para el área total de la figura.

Solución Para determinar el área total, determina las áreas de las cuatro regiones y luego suma.

$$\text{Área del cuadrado verde} = x \cdot x = x^2$$
$$\text{Área del rectángulo gris} = x \cdot 4 = 4x$$
$$\text{Área del rectángulo verde} = x \cdot 5 = 5x$$
$$\text{Área del rectángulo blanco} = 4 \cdot 5 = 20$$

El área total es la suma de estas cuatro cantidades.

$$\text{Área total} = x^2 + 4x + 5x + 20 = x^2 + 9x + 20.$$

Ahora resuelve el ejercicio 85

Observa que la **Figura 5.11** muestra una representación geométrica de que $(x + 4)(x + 5) = x^2 + 9x + 20$.

6 Determinación del producto de funciones polinomiales

Anteriormente, aprendiste que, para funciones $f(x)$ y $g(x)$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. Ahora se trabajará un ejemplo que involucra multiplicación de funciones polinomiales.

EJEMPLO 13 Sea $f(x) = x - 4$ y $g(x) = x + 2$. Determina.

a) $f(2) \cdot g(2)$ **b)** $(f \cdot g)(x)$ **c)** $(f \cdot g)(2)$

Solución

a) Tanto $f(x)$ como $g(x)$ son funciones polinomiales, pues las expresiones a la derecha de los signos de igualdad, son polinomios.

$$f(x) = x - 4 \qquad g(x) = x + 2$$
$$f(2) = 2 - 4 = -2 \qquad g(2) = 2 + 2 = 4$$
$$f(2) \cdot g(2) = -2 \cdot 4 = -8$$

b) Se sabe que

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x)\\ &= (x - 4)(x + 2)\\ &= x^2 + 2x - 4x - 8\\ &= x^2 - 2x - 8\end{aligned}$$

c) Para evaluar $(f \cdot g)(2)$, sustituye 2 por x en $(f \cdot g)(x)$.

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= x^2 - 2x - 8\\ (f \cdot g)(2) &= (2)^2 - 2(2) - 8\\ &= 4 - 4 - 8 = -8\end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 79

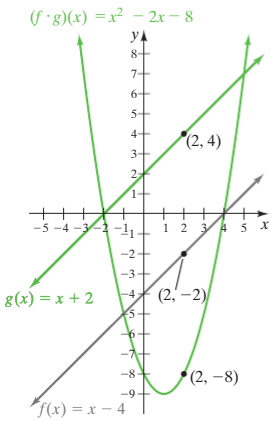


FIGURA 5.12

En el ejemplo 13, se determinó que, si $f(x) = x - 4$ y $g(x) = x + 2$, entonces $(f \cdot g)(x) = x^2 - 2x - 8$ Las gráficas de $y = f(x) = x - 4$, $y = g(x) = x + 2$ y $(f \cdot g)(x) = x^2 - 2x - 8$ se muestran en la **Figura 5.12**.

A partir de la gráficas, se ve que $f(2) = -2, g(2) = 4$ y $(f \cdot g)(2) = -8$, que es lo esperado del ejemplo 13. Observa en la **Figura 5.12**, que el producto de las dos funciones lineales $f(x) = x - 4$ y $g(x) = x + 2$, es la función cuadrática $(f \cdot g)(x) = x^2 - 2x - 8$.

5.2 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

externos	diferencia	asociativa	producto	distributiva	terceros	internos
segundos	elevar al cuadrado	suma	factores	polinomio	conmutativa	primeros

1. Para multiplicar dos polinomios, cada término de un polinomio debe multiplicarse por cada término del otro _____.
2. La regla $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, se llama regla del _____ para exponentes.
3. Las expresiones que se multiplican, se llaman _____.
4. La regla $a(b + c + d + \cdots + n) = ab + ac + ad + \cdots + an$, se llama forma desarrollada de la propiedad _____.
5. En el método PIES, P representa _____.
6. En el método PIES, I representa _____.
7. La fórmula $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, se usa para _____ un binomio.
8. La expresión $a^2 - b^2$, representa la _____ de dos cuadrados.

Practica tus habilidades

Multiplica.

9. $(7xy)(6xy^4)$
10. $(-5xy^4)(9x^4y^6)$
11. $(-5x^3y^2z)(7xy^3z^2)$
12. $(-11a^3bc^2)(-3ab^5c^3)$
13. $-5x(-3x^2 - x + 1)$
14. $2y^3(3y^2 + 2y - 10)$
15. $-3x^2y(-2x^4y^2 + 5xy^3 + 6)$
16. $3x^4(2xy^2 + 5x^7 - 9y)$
17. $\frac{2}{3}yz(3x + 4y - 12y^2)$
18. $\frac{1}{2}x^2y(4x^5y^2 + 3x - 7y^2)$
19. $0.3(2x^2 - 5x + 11y)$
20. $0.8(0.2a + 0.9b - 1.3c)$

Multiplica los siguientes binomios.

21. $(3x + 2)(2x + 5)$
22. $(7x + 1)(8x + 5)$
23. $(4x - 6)(3x - 5)$
24. $(8x - 3)(9x - 2)$
25. $(9x - 7)(8x + 9)$
26. $(8x + 7)(7x - 6)$
27. $\left(\frac{1}{2}x + 2y\right)\left(2x - \frac{1}{3}y\right)$
28. $\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b\right)\left(\frac{1}{2}a - b\right)$

Multiplica los siguientes polinomios.

29. $(x - 4)(x^2 + 3x + 1)$
30. $(x + 3)(2x^2 - x - 8)$
31. $(a - 3b)(2a^2 - ab + 2b^2)$
32. $(5r - 2s)(-2r^2 - 3rs + s^2)$
33. $(x^3 - x^2 + 3x + 7)(x + 1)$
34. $(x^3 + 3x^2 - 5x + 6)(2x - 1)$
35. $(5x^3 + 4x^2 - 6x + 2)(x + 5)$
36. $(2y^3 - 3y^2 - y + 1)(2y - 1)$
37. $(3m^2 - 2m + 4)(m^2 - 3m - 5)$
38. $(2a^2 - 6a + 3)(3a^2 - 5a - 2)$
39. $(x + 2)^3$
40. $(3x + y)^3$
41. $(2x - 1)^3$
42. $(3x - 2y)^3$

Multiplica usando, ya sea la fórmula para elevar al cuadrado un binomio o para el producto de la suma y la diferencia de los mismos dos términos.

43. $(x + 2)^2$
44. $(w + 4)^2$
45. $(z - 5)^2$
46. $(y - 6)^2$

47. $(2p + 5q)^2$

48. $(4x - 3y)^2$

49. $(z + 5)(z - 5)$

50. $(w + 4)(w - 4)$

51. $(7x + 8)(7x - 8)$

52. $(9x + 5)(9x - 5)$

53. $(5m^2 + 2n)(5m^2 - 2n)$

54. $(5p^2 + 6q^2)(5p^2 - 6q^2)$

55. $[y + (4 - 2x)]^2$

56. $[4 - (p - 3q)]^2$

57. $[(2c - d) + 4][(2c - d) - 4]$

58. $[2x + (y + 5)][2x - (y + 5)]$

Multiplica.

59. $2xy(x^2 + xy + 12y^2)$

60. $-2mn(m^2 - 4m - 7n^2)$

61. $(3a + 4)(7a - 6)$

62. $(5p - 9q)(4p - 11q)$

63. $(x + 3)(2x^2 + 4x - 3)$

64. $(5a + 4)(a^2 - a + 2)$

65. $(2r - 3s)^2$

66. $(5j + 7k)^2$

67. $(2x + 3)^3$

68. $(3x - 2)^3$

69. $(2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$

70. $(3x - 2)(9x^2 + 6x + 4)$

71. $\left(\frac{3}{4}x + \frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}x - \frac{2}{3}\right)$

72. $\left(\frac{2}{5}x + \frac{7}{9}\right)\left(\frac{2}{5}x - \frac{7}{9}\right)$

73. $[(3x + 2) + y][(3x + 2) - y]$

74. $[3x + (4y - 1)][3x - (4y - 1)]$

75. $(3x - 2)(3x + 2)(9x^2 + 4)$

76. $(2a + 3)(2a - 3)(4a^2 + 9)$

77. $\left(x - \frac{7}{4}\right)^2$

78. $\left(x + \frac{11}{6}\right)^2$

Para las funciones dadas, determina **a)** $(f \cdot g)(x)$ *y* **b)** $(f \cdot g)(4)$.

79. $f(x) = x - 5, g(x) = x + 6$

80. $f(x) = 2x - 3, g(x) = x - 1$

81. $f(x) = 2x^2 + 6x - 4, g(x) = 5x + 3$

82. $f(x) = 4x^2 + 7, g(x) = 2 - x$

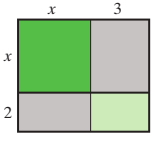
83. $f(x) = -x^2 + 3x, g(x) = x^2 + 2$

84. $f(x) = -x^2 + 2x + 7, g(x) = x^2 - 1$

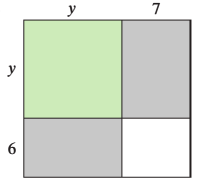
Resolución de problemas

Área *En los ejercicios 85-88, determina una expresión polinomial para el área total de cada figura.*

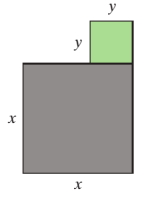
85.



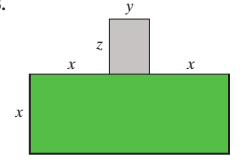
86.



87.

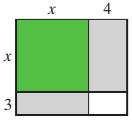


88.

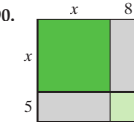


Área *En los ejercicios 89 y 90,* **a)** *determina el área del rectángulo al encontrar el área de las cuatro secciones y sumarlas, y* **b)** *multiplica los dos lados y compara el producto con tu respuesta del inciso* **a)**.

89.

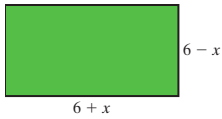


90.

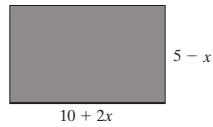


Área *Escribe una expresión polinomial para el área de cada figura. Todos los ángulos en las figuras son ángulos rectos.*

91.

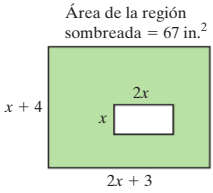


92.

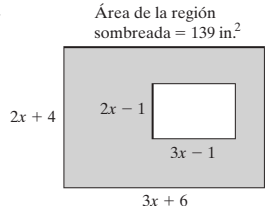


Área *En los ejercicios 93 y 94,* **a)** *escribe una expresión polinomial para el área de la porción sombreada de la figura.* **b)** *El área de la porción sombreada se indica arriba de cada figura. Determina el área de los rectángulos mayor y menor.*

93.



94.



95. Escribe dos binomios cuyo producto sea $x^2 - 49$. Explica cómo determinaste tu respuesta.

96. Escribe dos binomios cuyo producto sea $4x^2 - 9$. Explica cómo determinaste tu respuesta.

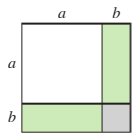
97. Escribe dos binomios cuyo producto sea $x^2 + 12x + 36$. Explica cómo determinaste tu respuesta.

98. Escribe dos binomios cuyo producto sea $16y^2 - 8y + 1$. Explica cómo determinaste tu respuesta.

99. Considera la expresión $a(x - n)^3$. Escribe esta expresión como un producto de factores.

100. Considera la expresión $P(1 - r)^4$. Escribe esta expresión como un producto de factores.

101. Área La expresión $(a + b)^2$ puede representarse mediante la siguiente figura.



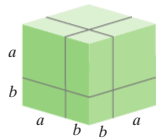
a) Explica por qué esta figura representa $(a + b)^2$.

b) Determina $(a + b)^2$, usando la figura al determinar el área de cada una de las cuatro partes de la figura, luego sumando las áreas.

c) Simplifica $(a + b)^2$ al multiplicar $(a + b)(a + b)$.

d) ¿Cómo se comparan las respuestas en los incisos **b)** y **c)**? Si no son iguales, explica por qué.

102. Volumen La expresión $(a + b)^3$ puede representarse mediante la siguiente figura.



a) Explica por qué esta figura representa $(a + b)^3$.

b) Determina $(a + b)^3$, al sumar el volumen de las ocho partes de la figura.

c) Simplifica $(a + b)^3$, mediante la multiplicación.

d) ¿Cómo se comparan las respuestas a los incisos b) y c)? Si no son iguales, explica por qué.

103. Interés compuesto La fórmula de interés compuesto es

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

donde A es el monto, P es el principal invertido, r es la tasa de interés anual, n es el número de veces que el interés se compone anualmente, y t es el tiempo en años.

a) Simplifica esta fórmula para $n = 1$.

b) Determina el valor de A, si $P = \$1\,000$, $n = 1$, $r = 6\%$ y $t = 2$ años.

104. Interés compuesto Usa la fórmula dada en el ejercicio 103 para determinar A, si $P = \$4000$, $n = 2$, $r = 8\%$ y $t = 2$ años.

105. Alineación El número de formas en que un profesor puede otorgar diferentes premios a 2 estudiantes, en una clase que tiene n estudiantes, está dado por la fórmula $P(n) = n(n - 1)$.



a) Usa esta fórmula para determinar el número de formas en que un profesor puede otorgar diferentes premios a 2 estudiantes, en una clase que tiene 11 estudiantes.

b) Reescribe la fórmula mediante multiplicación de los factores.

c) Usa el resultado del inciso **b)** para determinar el número de formas en que un profesor puede otorgar diferentes premios a 2 estudiantes, en una clase que tiene 11 estudiantes.

d) ¿Los resultados de los incisos **a)** y **c)** son iguales? Explica.

106. Carrera de caballos El número de formas en que los caballos pueden terminar en primer, segundo y tercer lugar, en una carrera que tiene n caballos, está dada por la fórmula:

$$P(n) = n(n-1)(n-2)$$

a) Usa esta fórmula para determinar el número de formas en que los caballos pueden terminar en primer, segundo y tercer lugar, en una carrera que tiene 7 caballos.

b) Reescribe la fórmula mediante multiplicación de los factores.

c) Usa el resultado del inciso **b)** para determinar el número de formas en que los caballos pueden terminar en primer, segundo y tercer lugar en una carrera que tiene 7 caballos.

d) ¿Los resultados de los incisos **a)** y **c)** son iguales? Explica.

107. Si $f(x) = x^2 - 3x + 5$, determina $f(a+b)$ al sustituir $(a+b)$ por cada x en la función.

108. Si $f(x) = 2x^2 - x + 3$, determina $f(a+b)$.

En los ejercicios 109-114, simplifica. Supón que todas las variables representan números naturales.

109. $3x^t(5x^{2t-1} + 6x^{3t})$

110. $5k^{r+2}(4k^{r+2} - 3k^r - k)$

111. $(6x^m - 5)(2x^{2m} - 3)$

112. $(x^{3n} - y^{2n})(x^{2n} + 2y^{4n})$

113. $(y^{a-b})^{a+b}$

114. $(a^{m+n})^{m+n}$

En los ejercicios 115 y 116, realiza la multiplicación polinomial.

115. $(x - 3y)^4$

116. $(2a - 4b)$

117. a) Explica cómo, una multiplicación en una variable, como $(x^2 + 2x + 3)(x + 2) = x^3 + 4x^2 + 7x + 6$, puede verificarse usando una calculadora graficadora.

b) Verifica la multiplicación dada en el inciso **a)** usando tu calculadora graficadora.

118. a) Demuestra que la multiplicación $(x^2 - 4x - 5)(x - 1) \neq x^3 + 6x^2 - 5x + 5$, usando tu calculadora graficadora.

b) Multiplica $(x^2 - 4x - 5)(x - 1)$.

c) Verifica tu respuesta del inciso **b)** en tu calculadora graficadora.

Ejercicios conceptuales y de redacción

119. a) Explica cómo multiplicar dos binomios usando el método PIES.

b) Construye dos binomios y multiplícalos usando el método PIES.

c) Multiplica los mismos dos binomios usando SEIP (segundos, externos, internos, primeros).

d) Compara los resultados de los incisos **b)** y **c)**. Si no son iguales, explica por qué.

120. a) Explica cómo se multiplica un monomio por un polinomio.

b) Multiplica $3x(4x^2 - 6x - 7)$, usando tu procedimiento del inciso **a)**.

121. a) Explica cómo se multiplica un polinomio por un polinomio.

b) Multiplica $4 + x$ by $x^2 - 6x + 3$, usando tu procedimiento del inciso **a)**.

122. a) Explica cómo expandir $(2x - 3)^2$, usando la fórmula para elevar al cuadrado un binomio.

b) Expande $(2x - 3)^2$, usando tu procedimiento del inciso **a)**.

123. a) ¿Qué se entiende por el producto de la suma y la diferencia de los mismos dos términos?

b) Proporciona un ejemplo de un problema, que sea el producto de la suma y la diferencia de los mismos dos términos.

c) ¿Cómo multiplicas el producto de la suma y la diferencia de los mismos dos términos?

d) Multiplica el ejemplo que proporcionaste en el inciso **b)** usando tu procedimiento del inciso **c)**.

124. ¿El producto de dos binomios siempre será un

a) binomio?

b) trinomio? Explica.

125. ¿El producto de dos polinomios de primer grado, siempre será un polinomio de segundo grado? Explica.

126. a) Dados $f(x)$ y $g(x)$, explica cómo determinarías $(f \cdot g)(x)$.

b) Si $f(x) = x - 8$ y $g(x) = x + 8$, determina $(f \cdot g)(x)$.

Problemas de desafío

Multiplica.

127. $[(y + 1) - (x + 2)]^2$

128. $[(a - 2) - (a + 3)]^2$

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.3] **129.** Evalúa $\frac{4}{5} - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)$.

[1.5] **130.** Simplifica $\left(\frac{2r^4s^5}{r^2}\right)^3$.

[2.5] **131.** Resuelve la desigualdad $-12 < 3x - 5 \leq -1$ y proporciona la solución en notación de intervalo.

[3.2] **132.** Si $g(x) = -x^2 + 2x + 3$, determina $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

5.3 División de polinomios y división sintética

1. **División de un polinomio entre un monomio**
2. **División de un polinomio entre un binomio**
3. **División de polinomios usando división sintética**
4. **Uso del Teorema del residuo**

1 División de un polinomio entre un monomio

Para dividir un polinomio entre un monomio, se usa el hecho de que

$$\frac{A + B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C}$$

Si el polinomio tiene más de dos términos, se expande este procedimiento.

Puesto que la división entre cero es indefinida, cuando se enfrenta un problema de división que contiene una variable en el denominador, *siempre se supone que el denominador es distinto de cero.*

Para dividir un polinomio entre un monomio

Divide cada término del polinomio entre el monomio.

Para dividir un polinomio entre un monomio, deberás usar la regla del cociente para exponentes, la regla de exponente cero y la regla de exponente negativo.

Regla del cociente para exponentes $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$

Regla de exponente cero $a^0 = 1, \quad a \neq 0$

Regla de exponente negativo $a^{-m} = \frac{1}{a^m}, \quad a \neq 0$

EJEMPLO 1 Divide.

a) $\frac{x^{15}}{x^5}$ **b)** $\frac{14x^8y^3}{21x^2y}$

Solución Se usará la regla del cociente para dividir.

a) $\frac{x^{15}}{x^5} = x^{15-5}$ Regla del cociente.

$= x^{10}$

b) $\frac{14x^8y^3}{21x^2y} = \frac{14}{21} \cdot \frac{x^8}{x^2} \cdot \frac{y^3}{y}$

$= \frac{2}{3} \cdot x^{8-2} \cdot y^{3-1}$ Regla del cociente.

$= \frac{2}{3} \cdot x^6 \cdot y^2$

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{x^6}{1} \cdot \frac{y^2}{1} = \frac{2x^6y^2}{3}$

Ahora resuelve el ejercicio 11

EJEMPLO 2 Divide.

a) $\dfrac{p^4}{p^4}$ **b)** $\dfrac{10r^9s^4}{15r^3s^6}$

Solución Se usarán, tanto la regla del cociente, como la regla de exponente cero para dividir.

a) $\dfrac{p^4}{p^4} = p^{4-4}$ Regla del cociente.

$= p^0$

$= 1$ Regla de exponente cero.

b) $\dfrac{10r^9s^4}{15r^3s^6} = \dfrac{10}{15} \cdot \dfrac{r^9}{r^3} \cdot \dfrac{s^4}{s^6}$

$= \dfrac{2}{3} \cdot r^{9-3} \cdot s^{4-6}$ Se redujo $\frac{10}{15}$ y se usó la regla del cociente.

$= \dfrac{2}{3} \cdot r^6 \cdot s^{-2}$

$= \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{r^6}{1} \cdot \dfrac{1}{s^2}$ Se usó regla de exponente negativo.

$= \dfrac{2r^6}{3s^2}$

Ahora resuelve el ejercicio 19

Ahora se dividirá un polinomio entre un monomio.

EJEMPLO 3 Divide $\dfrac{5x^2 + 3x - 2}{30x}$.

Solución Se dividirá cada término del polinomio en el numerador, entre el monomio en el denominador.

$$\frac{5x^2 + 3x - 2}{30x} = \frac{5x^2}{30x} + \frac{3x}{30x} - \frac{2}{30x}$$

$$= \frac{x}{6} + \frac{1}{10} - \frac{1}{15x}$$

Ahora resuelve el ejercicio 27

EJEMPLO 4 Divide $\dfrac{4y - 6x^4y^3 - 3x^5y^2 + 5x}{2xy^2}$.

Solución

$$\frac{4y - 6x^4y^3 - 3x^5y^2 + 5x}{2xy^2} = \frac{4y}{2xy^2} - \frac{6x^4y^3}{2xy^2} - \frac{3x^5y^2}{2xy^2} + \frac{5x}{2xy^2}$$

$$= \frac{2}{xy} - 3x^3y - \frac{3x^4}{2} + \frac{5}{2y^2}$$

Ahora resuelve el ejercicio 31

2 División de un polinomio entre un binomio

Un polinomio se divide entre un binomio, en forma muy parecida a la que se utiliza para la división larga. En un problema de división, la expresión que se divide se llama **dividendo,** y la expresión entre la que se divide se llama **divisor**.

EJEMPLO 5 Divide $\dfrac{x^2 + 7x + 10}{x + 2}$. ←Dividendo ←Divisor

Solución Reescribe el problema de división como:

$$\text{Divisor} \rightarrow \quad x + 2\overline{)x^2 + 7x + 10} \quad \leftarrow \text{Dividendo}$$

Divide x^2 (el primer término en el dividendo $x^2 + 7x + 10$) entre x (el primer término en el divisor $x + 2$).

$$\frac{5x}{x} = +5$$

Coloca el cociente, x, arriba del término que contiene x en el dividendo.

$$\begin{array}{r} x \\ x + 2\overline{)x^2 + 7x + 10} \end{array}$$

A continuación, multiplica la x por $x + 2$, como lo harías en la división larga y coloca el producto bajo el dividendo, alineando términos semejantes.

$$\begin{array}{r} \text{Por} \\ \\ x + 2\overline{)x^2 + 7x + 10} \\ \text{Igual que} \rightarrow \underline{x^2 + 2x} \quad \leftarrow x(x + 2) \end{array}$$

Ahora resta $x^2 + 2x$ de $x^2 + 7x$.

$$\begin{array}{r} x \\ x + 2\overline{)x^2 + 7x + 10} \\ \underline{-(x^2 + 2x)} \\ 5x \end{array}$$

Ahora baja el siguiente término, +10.

$$\begin{array}{r} x \\ x + 2\overline{)x^2 + 7x + 10} \\ \underline{x^2 + 2x} \\ 5x + 10 \end{array}$$

Divide $5x$ entre x.

$$\frac{5x}{x} = +5$$

Coloca +5 arriba de la constante en el dividendo y multiplica 5 por $x + 2$. Termina el problema restando.

$$\begin{array}{r} \text{Por} \\ \\ x + 2\overline{)x^2 + 7x + 10} \\ \underline{x^2 + 2x} \\ 5x + 10 \\ \text{Igual que} \rightarrow \underline{5x + 10} \quad \leftarrow 5(x + 2) \\ 0 \quad \leftarrow \text{Residuo} \end{array}$$

Por tanto, $\dfrac{x^2 + 7x + 10}{x + 2} = x + 5$.

Ahora resuelve el ejercicio 35

En el ejemplo 5, el residuo es cero. Por tanto, $x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$. Observa que $x + 2$ y $x + 5$, son ambos *factores* de $x^2 + 7x + 10$. En un problema de división, si el residuo es cero, entonces tanto el divisor como el cociente, son factores del dividendo.

Cuando escribas una respuesta en un problema de división con residuo distinto de cero, escribe el residuo sobre el divisor y suma esta expresión al cociente. Por ejemplo, supón que el residuo, en el ejemplo 5, fuese 4. Entonces la respuesta se escribiría $x + 5 + \dfrac{4}{x + 2}$. Si el residuo, en el ejemplo 5, fuese -7, la respuesta se escribiría $x + 5 + \dfrac{-7}{x + 2}$, la cual se reescribiría como $x + 5 - \dfrac{7}{x + 2}$.

EJEMPLO 6 Divide $\dfrac{6x^2 - 7x + 3}{2x + 1}$.

Solución En este ejemplo, se restará mentalmente y no se mostrará el cambio de signo en las restas.

$$\begin{array}{rl} & 3x - 5 \quad \longleftarrow \text{Cociente} \\ 2x + 1 \overline{)} & 6x^2 - 7x + 3 \quad \longleftarrow \text{Dividendo} \\ & \underline{6x^2 + 3x} \quad \longleftarrow 3x(2x + 1) \\ & -10x + 3 \\ & \underline{-10x - 5} \quad \longleftarrow -5(2x + 1) \\ & 8 \quad \longleftarrow \text{Residuo} \end{array}$$

Divisor $\longrightarrow$

Por tanto, $\dfrac{6x^2 - 7x + 3}{2x + 1} = 3x - 5 + \dfrac{8}{2x + 1}$.

Ahora resuelve el ejercicio 45

Cuando dividas un polinomio entre un binomio, la respuesta puede *verificarse* al multiplicar el divisor entre el cociente y después sumar el residuo. Deberías obtener el dividendo. Para verificar el ejemplo 6, haz lo siguiente:

$$\underset{\text{Divisor}}{(2x + 1)}\underset{\text{Cociente}}{(3x - 5)} + \underset{\text{Residuo}}{8} = 6x^2 - 10x + 3x - 5 + 8 = \underset{\text{Dividendo}}{6x^2 - 7x + 3}$$

SUGERENCIA ÚTIL

Cuando dividas un polinomio entre un binomio, debes escribir tanto el polinomio como el binomio, en orden decreciente. Si falta un término de cualquier grado, con frecuencia es útil incluir dicho término con un coeficiente numérico de 0. Por ejemplo, cuando divides $(6x^2 + x^3 - 4) \div (x - 2)$, el problema se reescribe como $(x^3 + 6x^2 + 0x - 4) \div (x - 2)$, antes de comenzar la división.

EJEMPLO 7 Divide $(4x^2 - 12x + 3x^5 - 17)$ por $(-2 + x^2)$.

Solución Escribe, tanto el dividendo como el divisor, en potencias decrecientes de la variable x. Esto produce $(3x^5 + 4x^2 - 12x - 17) \div (x^2 - 2)$. Donde falte una potencia de x, suma dicha potencia de x con un coeficiente de 0, después divide.

$$\begin{array}{rl} & 3x^3 + 6x + 4 \\ x^2 + 0x - 2 \overline{)} & 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 4x^2 - 12x - 17 \\ & \underline{3x^5 + 0x^4 - 6x^3} \quad \longleftarrow 3x^3(x^2 + 0x - 2) \\ & 6x^3 + 4x^2 - 12x \\ & \underline{6x^3 + 0x^2 - 12x} \quad \longleftarrow 6x(x^2 + 0x - 2) \\ & 4x^2 + 0x - 17 \\ & \underline{4x^2 + 0x - 8} \quad \longleftarrow 4(x^2 + 0x - 2) \\ & -9 \quad \longleftarrow \text{Residuo} \end{array}$$

Para obtener las respuestas, se realizan las divisiones:

$$\frac{3x^5}{x^2} = 3x^3 \qquad \frac{6x^3}{x^2} = 6x \qquad \frac{4x^2}{x^2} = 4$$

Los cocientes $3x^3$, $6x$ y 4, se colocaron arriba de sus términos semejantes en el dividendo. La respuesta es $3x^3 + 6x + 4 - \dfrac{9}{x^2 - 2}$. Puedes verificar esta respuesta al multiplicar el divisor por el cociente y sumar el residuo.

Ahora resuelve el ejercicio 57

3 División de polinomios usando división sintética

Cuando un polinomio se divide entre un binomio de la forma $x - a$, el proceso de división puede abreviarse enormemente mediante un procedimiento llamado **división sintética**. Considera los siguientes ejemplos. En el ejemplo de la derecha, solamente se usan coeficientes numéricos.

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 5x - 4 \\ x - 3\overline{)2x^3 - x^2 - 19x + 18} \\ \underline{2x^3 - 6x^2} \\ 5x^2 - 19x \\ \underline{5x^2 - 15x} \\ -4x + 18 \\ \underline{-4x + 12} \\ 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 + 5 - 4 \\ 1 - 3\overline{)2 - 1 - 19 + 18} \\ \underline{2 - 6} \\ 5 - 19 \\ \underline{5 - 15} \\ -4 + 18 \\ \underline{-4 + 12} \\ 6 \end{array}$$

Observa que las variables no desempeñan un papel en la determinación de los coeficientes numéricos del cociente. Este problema de división, se puede realizar más rápida y fácilmente usando división sintética.

A continuación, se presenta una explicación de cómo usar la división sintética. Considera nuevamente la división:

$$\frac{2x^3 - x^2 - 19x + 18}{x - 3}$$

1. Escribe el dividendo en orden decreciente. Luego enuncia los coeficientes numéricos de cada término en el dividendo. Si un término de cualquier grado faltase, coloca 0 en la posición apropiada para que funcione como marcador. En el problema anterior, los coeficientes numéricos del dividendo son:

$$2 \quad -1 \quad -19 \quad 18$$

2. Cuando dividas entre un binomio de la forma $x - a$, coloca a a la izquierda de la línea de números del paso 1. En este problema, se divide entre $x - 3$; por tanto, $a = 3$. Escribe:

$$3 \mid 2 \quad -1 \quad -19 \quad 18$$

3. Deja algo de espacio abajo de la fila de coeficientes, luego dibuja una línea horizontal. Baja el primer coeficiente de la izquierda de la siguiente manera:

$$3 \mid 2 \quad -1 \quad -19 \quad 18$$
$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$2$$

4. Multiplica el 3 por el número que bajaste, el 2, para obtener 6. Coloca el 6 abajo del siguiente coeficiente, el -1. Luego suma $-1 + 6$ para obtener 5.

$$3 \mid 2 \quad -1 \quad -19 \quad 18$$
$$\underline{\qquad\quad 6 \qquad\qquad}$$
$$2 \quad 5$$

5. Multiplica el 3 por la suma 5 para obtener 15. Coloca 15 abajo de -19. Luego suma para obtener -4. Repite este procedimiento como se ilustra.

$$3 \mid 2 \quad -1 \quad -19 \quad 18 \quad \longleftarrow \text{Coeficientes del dividendo}$$
$$\underline{\qquad\quad 6 \quad 15 \quad -12}$$
$$2 \quad 5 \quad -4 \quad 6 \quad \longleftarrow \text{El residuo es 6}$$
$$\text{Coeficientes de cociente}$$

En la última fila, los primeros tres números son los coeficientes numéricos del cociente, como se muestra en la división larga. El último número, 6, es el residuo obtenido mediante división larga. El grado del cociente siempre es uno menos que el grado del dividendo. En consecuencia, el cociente es $2x^2 + 5x - 4$ y el residuo es 6.

$$\text{Se tiene } \frac{2x^3 - x^2 - 19x + 18}{x - 3} = 2x^2 + 5x - 4 + \frac{6}{x - 3}.$$

Comprende el Álgebra

Cuando dividas polinomios usando división sintética, el divisor debe ser de la forma $x - a$.

Cuando el divisor es	$a =$
$x - 1$	1
$x - 2$	2
$x - 3$	3
$x + 1$	-1
$x + 2$	-2
$x + 3$	-3

EJEMPLO 8 Usa división sintética para dividir.

$$(5 - x^2 + x^3) \div (x + 2)$$

Solución Primero, coloca los términos del dividendo en orden decreciente de x.

$$(x^3 - x^2 + 5) \div (x + 2)$$

Dado que no hay término de primer grado, inserta 0 como marcador, cuando enuncies los coeficientes numéricos. Puesto que $x + 2 = x - (-2)$, $a = -2$.

$$\begin{array}{r|cccc} -2 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ & & -2 & 6 & -12 \\ \hline & 1 & -3 & 6 & -7 \end{array} \longleftarrow \text{El residuo es } -7$$

Coeficientes de cociente

Dado que el dividendo es un polinomio de tercer grado, el cociente debe ser un polinomio de segundo grado. La respuesta es $x^2 - 3x + 6 - \dfrac{7}{x + 2}$.

Ahora resuelve el ejercicio 61

Comprende el Álgebra

Cuando uses división sintética, si un término "falta" en el dividendo, inserta un cero que actúe como marcador. En el ejemplo 8, el 0 verde funciona como marcador para el término faltante de primer grado.

Como se discutió después del ejemplo 6, la respuesta a cualquier problema de división, puede verificarse al multiplicar el divisor por el cociente y después sumar el residuo. Cuando hagas esto, debes obtener el dividendo. Para el ejemplo 8 se tiene:

$$\underset{\text{Divisor}}{(x + 2)}\underset{\text{Cociente}}{(x^2 - 3x + 6)} + \underset{\text{Residuo}}{(-7)} = \underset{\text{Dividendo}}{x^3 - 3x^2 + 6x + 2x^2 - 6x + 12 - 7 = x^3 - x^2 + 5}$$

Dado que se obtuvo el dividendo, la división es correcta.

EJEMPLO 9 Usa división sintética para dividir.

$$(7x^4 - 26x^3 - 11x^2 + 13x - 4) \div (x - 4)$$

Solución

$$\begin{array}{r|ccccc} 4 & 7 & -26 & -11 & 13 & -4 \\ & & 28 & 8 & -12 & 4 \\ \hline & 7 & 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}$$

El dividendo tiene grado 4; por tanto, el cociente tiene grado 3. El cociente es $7x^3 + 2x^2 - 3x + 1$, y el residuo es 0.

Ahora resuelve el ejercicio 71

En el ejemplo 9, como el residuo es 0, se puede escribir:

$$\underset{\text{Divisor}}{(x - 4)}\underset{\text{Cociente}}{(7x^3 + 2x^2 - 3x + 1)} = \underset{\text{Dividendo}}{(7x^4 - 26x^3 - 11x^2 + 13x - 4)}$$

Observa, que tanto $(x - 4)$ como $(7x^3 + 2x^2 - 3x + 1)$, son *factores* de:

$$7x^4 - 26x^3 - 11x^2 + 13x - 4$$

4 Uso del Teorema del residuo

En el ejemplo 8, cuando se dividió $x^3 - x^2 + 5$ entre $x + 2$, se determinó que el residuo era -7. Si escribes $x + 2$ como $x - (-2)$ y evalúas la función polinomial $P(x) = x^3 - x^2 + 5$ en -2, obtienes -7.

$$P(x) = x^3 - x^2 + 5$$
$$P(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 + 5 = -8 - 4 + 5 = -7$$

¿Es sólo coincidencia que $P(-2)$, el valor de la función en -2, sea el mismo que el residuo cuando la función $P(x)$ se divide entre $x-(-2)$? La respuesta es no. Se puede demostrar que, para cualquier función polinomial $P(x)$, el valor de la función en a, $P(a)$, tiene el mismo valor que el residuo, cuando $P(x)$ se divide entre $x-a$. Este resultado se conoce como *Teorema del residuo.*

Teorema del residuo

Si el polinomio $P(x)$ se divide entre $x-a$, el residuo es igual a $P(a)$.

EJEMPLO 10 Dado $P(x) = -3x^3 + 4x^2 + 2x - 1$, usa el Teorema del residuo y división sintética para determinar $P(2)$.

Solución El Teorema del residuo afirma que $P(2)$ es igual al residuo, cuando $P(x)$ se divide entre $x-2$. Usando división sintética, se tiene:

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & -3 & 4 & 2 & -1 \\ & & -6 & -4 & -4 \\ \hline & -3 & -2 & -2 & -5 \end{array} \longleftarrow \text{Residuo}$$

Por tanto, $P(2) = -5$.

Ahora resuelve el ejercicio 87

En el ejemplo 10, se puede verificar la respuesta al evaluar $P(2)$ de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} P(x) &= -3x^3 + 4x^2 + 2x - 1 \\ P(2) &= -3(2)^3 + 4(2)^2 + 2(2) - 1 \\ &= -3 \cdot 8 + 4 \cdot 4 + 4 - 1 \\ &= -24 + 16 + 4 - 1 = -5 \end{aligned}$$

Si tuvieras que graficar la función polinomial $P(x) = -3x^3 + 4x^2 + 2x - 1$, el valor y que corresponde a $x = 2$ sería -5. En otras palabras, el punto $(2, -5)$; estaría sobre la gráfica de la función $P(x) = -3x^3 + 4x^2 + 2x - 1$.

EJEMPLO 11 Usa el Teorema del residuo para determinar si $x+3$ es un factor de la función polinomial $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$.

Solución Si $P(-3) = 0$, entonces el residuo de $\dfrac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x + 3}$ es cero y $x+3$ es un factor de $P(x)$. Si $P(-3) \neq 0$, entonces el residuo no es cero y $x+3$ no es un factor de $P(x)$. Para evaluar $P(-3)$, se usará la división sintética.

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & 4 & 1 & -6 \\ & & -3 & -3 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \longleftarrow \text{Residuo}$$

Dado que $P(-3) = 0$, $x + 3$, $x+3$ es un factor de la función $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$.

Ahora resuelve el ejercicio 93

5.3 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

primer factores artificial cociente residuo término $P(3)$
cociente $P(7)$ sintética dividendo cero divisor negativo

1. En un problema de división, la expresión que se divide se llama _____.
2. En un problema de división, la expresión por la que se divide se llama _____.
3. La regla $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, se llama regla del _____ para exponentes.
4. La regla $a^0 = 1$, se llama regla de exponente _____.
5. Para dividir un polinomio entre un monomio, divide cada _____ del polinomio entre el monomio.
6. Para verificar la respuesta a un problema de división, multiplica el divisor por el cociente y suma el _____. La suma debe ser igual al dividendo.
7. Cuando divides un polinomio entre $x - a$, en lugar de usar división larga, puedes usar un proceso más corto llamado división _____.
8. En un problema de división, si el residuo es 0, entonces el cociente y el divisor son _____ del dividendo.
9. Si el polinomio $P(x)$ se divide entre $x - 7$, entonces el residuo es igual a _____.
10. La regla $a^{-m} = \frac{1}{a^m}, a \neq 0$, se llama regla de exponente _____.

Practica tus habilidades

A lo largo de esta serie de ejercicios, supón que todos los divisores representan números distintos de cero.

Divide.

11. $\frac{x^{20}}{x^5}$
12. $\frac{y^{24}}{y^8}$
13. $\frac{t^3}{t^3}$
14. $\frac{q^6}{q^6}$
15. $\frac{u^2}{u^6}$
16. $\frac{v^5}{v^{10}}$
17. $\frac{12r^7s^{10}}{3rs^8}$
18. $\frac{7y^{14}z^7}{4y^{11}z}$
19. $\frac{12r^2s^7}{18r^6s^3}$
20. $\frac{28t^5u}{35t^2u^7}$

Divide.

21. $\frac{2x + 17}{2}$
22. $\frac{4x - 7}{7}$
23. $\frac{4x^2 + 2x}{2x}$
24. $\frac{14y^2 + 7y}{7y}$
25. $\frac{13m^4 - 39m^3}{13m^4}$
26. $\frac{14y^5 + 21y^2}{7y^4}$
27. $\frac{4x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 8x^2}{4x^2}$
28. $\frac{4x^{13} + 12x^9 - 11x^7}{4x^6}$
29. $\frac{8x^2y^2 - 10xy^3 - 5y}{2y^2}$
30. $\frac{15v^4w^2 - 30v^3w^3 + 5v^2w^4}{15v^4w^2}$
31. $\frac{9x^2y - 12x^3y^2 + 25y^3}{2xy^2}$
32. $\frac{a^2b^2c - 6abc^2 + 5a^3b^5}{2abc^2}$
33. $\frac{3xyz + 6xyz^2 - 9x^3y^5z^7}{6xy}$
34. $\frac{6abc^3 - 5a^2b^3c^4 + 8ab^5c}{3ab^2c^3}$

Divide usando la división larga.

35. $\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$
36. $\frac{x^2 + x - 20}{x + 5}$
37. $\frac{6x^2 + 7x - 3}{3x - 1}$
38. $\frac{6x^2 + 16x + 8}{3x + 2}$
39. $\frac{6x^2 + x - 2}{2x - 1}$
40. $\frac{12x^2 - 17x - 7}{4x - 7}$

41. $\dfrac{x^2 + 6x + 3}{x + 1}$

42. $\dfrac{a^2 - a - 27}{a + 3}$

43. $\dfrac{2b^2 + b - 8}{b - 2}$

44. $\dfrac{3c^2 + 2c - 2}{c + 2}$

45. $\dfrac{8x^2 + 6x - 25}{2x - 3}$

46. $\dfrac{8z^2 - 18z - 11}{4z + 1}$

47. $\dfrac{4x^2 - 36}{2x - 6}$

48. $\dfrac{16p^2 - 25}{4p + 5}$

49. $\dfrac{x^3 + 3x^2 + 5x + 9}{x + 1}$

50. $\dfrac{y^3 + 3y^2 + y + 4}{y + 2}$

51. $\dfrac{4x^3 - 6x^2 + 7}{2x + 1}$

52. $\dfrac{8x^3 - 4x + 5}{2x - 1}$

53. $(4x^3 - 3x^2 - 5) \div (x - 2)$

54. $(2x^3 + 6x + 33) \div (x + 4)$

55. $(3x^4 + x^2 - x + 1) \div (x + 1)$

56. $(2x^4 + 3x^3 - x - 3) \div (x + 2)$

57. $\dfrac{3x^5 + 2x^2 - 12x - 4}{x^2 - 2}$

58. $\dfrac{4b^5 - 18b^3 + 14b^2 + 18b - 21}{2b^2 - 3}$

59. $\dfrac{2c^4 - 8c^3 + 19c^2 - 33c + 15}{c^2 - c + 5}$

60. $\dfrac{3a^4 - 9a^3 + 13a^2 - 11a + 4}{a^2 - 2a + 1}$

Usa la división sintética para dividir.

61. $(x^2 + 7x + 12) \div (x + 4)$

62. $(x^2 + 8x + 15) \div (x + 3)$

63. $(x^2 - 7x + 6) \div (x - 6)$

64. $(x^2 - 5x + 6) \div (x - 3)$

65. $(x^2 + 5x - 14) \div (x - 3)$

66. $(x^2 - 7x + 12) \div (x - 2)$

67. $(3x^2 - 7x - 10) \div (x - 4)$

68. $(2b^2 - 9b + 2) \div (b - 6)$

69. $(p^3 + 2p^2 - 4p - 5) \div (p + 3)$

70. $(q^3 + 3q^2 + q + 11) \div (q + 4)$

71. $(4x^3 - 3x^2 + 2x) \div (x - 1)$

72. $(2y^3 - 10y - 13) \div (y - 3)$

73. $(2x^4 - 30x^2 - 41) \div (x - 4)$

74. $(3y^4 - 25y^2 - 29) \div (y - 3)$

75. $(y^4 - 1) \div (y - 1)$

76. $(a^4 - 16) \div (a - 2)$

77. $\dfrac{x^4 + 16}{x + 4}$

78. $\dfrac{z^4 + 81}{z + 3}$

79. $\dfrac{x^5 + x^4 - 9}{x + 1}$

80. $\dfrac{a^7 - 2a^6 + 15}{a - 2}$

81. $\dfrac{b^5 + 4b^4 - 14}{b + 1}$

82. $\dfrac{z^5 - 3z^3 - 7z}{z - 2}$

83. $(3x^3 + 2x^2 - 4x + 1) \div \left(x - \dfrac{1}{3}\right)$

84. $(2x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 7) \div \left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

85. $(8x^3 - 6x^2 + 7x + 12) \div \left(x + \dfrac{3}{4}\right)$

86. $(9y^3 + 9y^2 - y + 2) \div \left(y + \dfrac{2}{3}\right)$

Usa el Teorema del residuo y división sintética, para evaluar cada función polinomial en los valores indicados.

87. $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 4$
a) $P(2)$ **b)** $P(-1)$

88. $P(x) = 4x^3 - 11x^2 - 5x + 2$
a) $P(3)$ **b)** $P(-2)$

89. $P(x) = -5x^3 + 4x^2 + 3x - 2$;
a) $P(2)$ **b)** $P(-2)$

90. $P(x) = -4x^3 + 8x^2 + 20x + 3$;
a) $P(-2)$ **b)** $P(-3)$

91. $P(x) = -2x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 3$;
a) $P(1)$ **b)** $P(-1)$

92. $P(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x -$
a) $P(1)$ **b)** $P(-2)$

Usa el Teorema del residuo y división sintética, para determinar si el binomio dado es un factor de la función polinomial dada.

93. ¿$x - 2$ es un factor de $P(x) = 6x^3 - 5x^2 - 12x - 4$?

94. ¿$x + 3$ es un factor de $P(x) = 6x^3 + 17x^2 - 4x - 3$?

95. ¿$x + 3$ es un factor de $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 3$?

96. ¿$x - 3$ es un factor de $P(x) = x^3 + x^2 - 8x - 9$?

97. ¿$x + 2$ es un factor de $P(x) = x^3 - 7x - 6$?

98. ¿$x - 5$ es un factor de $P(x) = x^3 - 19x - 30$?

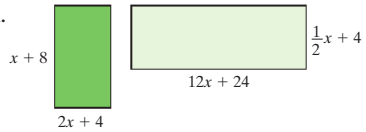
Resolución de problemas

99. Área El área de un rectángulo es $6x^2 - 8x - 8$. Si la longitud es $2x - 4$, determina el ancho.

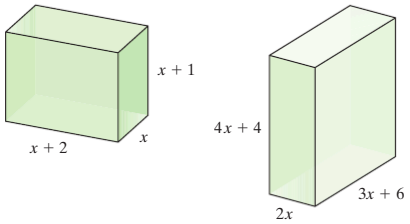
100. Área El área de un rectángulo es $15x^2 - 29x - 14$. Si el ancho es $5x + 2$, determina la longitud.

Área y volumen *En los ejercicios 101 y 102, ¿cuántas veces mayor es el área o el volumen de la figura a la derecha, que la figura de la izquierda?*

101.



102.



103. Si $\dfrac{P(x)}{x - 4} = x + 2$, determina $P(x)$.

104. Si $\dfrac{P(x)}{2x + 4} = 2x - 3$, determina $P(x)$.

105. Si $\dfrac{P(x)}{x + 4} = x + 5 + \dfrac{6}{x + 4}$, determina $P(x)$.

106. Si $\dfrac{P(x)}{2x - 3} = 2x - 1 - \dfrac{8}{2x - 3}$, determina $P(x)$.

En los ejercicios 107 y 108, divide.

107. $\dfrac{2x^3 - x^2y - 7xy^2 + 2y^3}{x - 2y}$

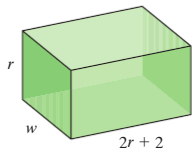
108. $\dfrac{x^3 + y^3}{x + y}$

En los ejercicios 109 y 110, divide. Las respuestas contienen fracciones.

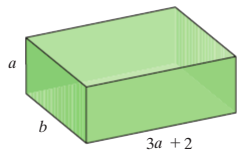
109. $\dfrac{2x^2 + 2x - 2}{2x - 3}$

110. $\dfrac{3x^3 - 7}{3x - 2}$

111. Volumen El volumen de la siguiente caja es $2r^3 + 4r^2 + 2r$. Determina w en términos de r.



112. Volumen El volumen de la siguiente caja es $6a^3 + a^2 - 2a$. Determina b en términos de a.



113. Cuando un polinomio se divide entre $x - 3$, el cociente es $x^2 - 3x + 4 + \dfrac{5}{x - 3}$. ¿Cuál es el polinomio? Explica cómo determinaste tu respuesta.

114. Cuando un polinomio se divide entre $2x - 3$, el cociente es $2x^2 + 6x - 5 + \dfrac{5}{2x - 3}$. ¿Cuál es el polinomio? Explica cómo determinaste tu respuesta.

Problemas de desafío

En los ejercicios 115 y 116, divide. Supón que todas las variables en los exponentes son números naturales.

115. $\dfrac{4x^{n+1} + 2x^n - 3x^{n-1} - x^{n-2}}{2x^n}$

116. $\dfrac{3x^n + 6x^{n-1} - 2x^{n-2}}{2x^{n-1}}$

117. ¿$x - 1$ es un factor de $x^{100} + x^{99} + \cdots + x^1 + 1$? Explica.

118. ¿$x + 1$ es un factor de $x^{100} + x^{99} + \cdots + x^1 + 1$? Explica.

119. ¿$x + 1$ es un factor de $x^{99} + x^{98} + \cdots + x^1 + 1$? Explica.

120. ¿$x - 1$ es un factor de $x^{99} - x^{98} + x^{97} - x^{96} + \ldots + x^3 - x^2 + x - 1$? Explica.

121. Divide $0.3x^3 + 0.4x^2 - 0.003x + 0.3$ entre $x - 0.1$

122. Divide $0.2x^3 - 4x^2 + 0.32x - 0.64$ entre $x - 0.4$.

Ejercicios conceptuales y de redacción

123. Cuando divides un polinomio entre un polinomio, antes de comenzar la división, ¿qué debes hacerle al polinomio?

124. Explica por qué $\dfrac{x-1}{x}$ no es un polinomio.

125. En el problema de división $\dfrac{x^2 + 11x + 21}{x + 2} = x + 9 + \dfrac{3}{x+2}$, ¿$x + 9$ es un factor de $x^2 + 11x + 21$? Explica.

126. En el problema de división $\dfrac{x^2 - 3x - 28}{x + 4} = x - 7$, ¿$x - 7$ es un factor de $x^2 - 3x - 28$? Explica.

127. ¿Es posible dividir un binomio entre un monomio y obtener un monomio como cociente? Explica.

128. a) ¿La suma, la diferencia y el producto de dos polinomios, siempre es un polinomio?

b) ¿El cociente de dos polinomios siempre es un polinomio? Explica.

129. Explica cómo puedes determinar, cuando usas división sintética, si una expresión de la forma $x - a$ es un factor de un polinomio en x.

130. Dado $P(x) = ax^2 + bx + c$ y un valor d, tal que $P(d) = 0$, explica por qué d es una solución a la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.6] **131.** Divide $\dfrac{8.45 \times 10^{23}}{4.225 \times 10^{13}}$ y expresa la respuesta en notación científica.

[2.3] **132. Triángulo** Determina los tres ángulos de un triángulo, si un ángulo es el doble del ángulo más pequeño, y el tercer ángulo es 60° mayor que el ángulo más pequeño.

[2.6] **133.** Determina el conjunto solución para $\left|\dfrac{5x-3}{2}\right| + 4 = 8$.

[3.6] **134.** Sea $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = -5x + 3$. Determina $f(6) \cdot g(6)$.

[5.1] **135.** Suma $(6r + 5s - t) + (-3r - 2s - 7t)$.

5.4 Factorización de un monomio, a partir de un polinomio y factorización por agrupación

1. **Determinación del máximo factor común**
2. **Factorización de un monomio, a partir de un polinomio**
3. **Factorización de un factor binomial común**
4. **Factorización por agrupación**

Factorizar, es lo opuesto de multiplicar. Factorizar una expresión, significa escribirla como un producto de otras expresiones. Por ejemplo, en la sección 5.2, aprendiste a realizar las siguientes multiplicaciones:

$$3x^2(6x + 3y + 4x^3) = 18x^3 + 9x^2y + 12x^5$$

Multiplicando

y

$$(6x + 3y)(2x - 5y) = 12x^2 - 24xy - 15y^2$$

Multiplicando

En esta sección, aprenderás cómo determinar los *factores* de una expresión dada. Por ejemplo, aprenderás cómo realizar cada factorización que se ilustra a continuación.

$$18x^3 + 9x^2y + 12x^5 = 3x^2(6x + 3y + 4x^3)$$
Factorizando

y

$$12x^2 - 24xy - 15y^2 = (6x + 3y)(2x - 5y)$$
Factorizando

1 Determinación del máximo factor común

Para factorizar un monomio, a partir de un polinomio, factoriza el *máximo factor común* de cada término en el polinomio. El **máximo factor común (MFC)**, es el producto de los factores que es común a todos los términos en el polinomio.

Por ejemplo, considera el polinomio $5x + 20$. El MFC es 5, pues 5 es el número más grande, que es un factor tanto de $5x$ como de 20. Para factorizar el MFC se usa la propiedad distributiva.

$$5x + 20 = 5(x + 4)$$

En este ejemplo, 5 y $(x + 4)$, son *factores* del polinomio $5x + 20$.

A continuación, considera el polinomio $x^5 + x^4 + x^3$. Observa que $x^5 = x^3 \cdot x^2$, $x^4 = x^3 \cdot x$ y $x^3 = x^3 \cdot 1$. Por tanto, el MFC de $x^5 + x^4 + x^3$ es x^3, pues x^3 es la potencia más alta de x, que es un factor de cada uno de los términos x^5, x^4 y x^3. Para factorizar el MFC, se usa la propiedad distributiva.

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 + x^3 &= x^3 \cdot x^2 + x^3 \cdot x + x^3 \cdot 1 \\ &= x^3(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

El primer paso en cualquier problema de factorización, es determinar si todos los términos tienen un factor común.

EJEMPLO 1 Determina el MFC de los siguientes términos.

a) y^{12}, y^4, y^9, y^7 **b)** x^3y^2, xy^4, x^5y^6 **c)** $6x^2y^3z, 9x^3y^4, 24x^2z^5$

Solución

a) Observa que y^4 es la potencia más alta de y, común a los cuatro términos. En consecuencia, el MFC es y^4.

b) La potencia más alta de x, que es común a los tres términos, es x (o x^1). La potencia más alta de y, que es común a los tres términos, es y^2. Por tanto, el MFC de los tres términos es xy^2.

c) El MFC es $3x^2$. Dado que y no aparece en $24x^2z^5$, no es parte del MFC. Dado que z no aparece en $9x^3y^4$, no es parte del MFC.

Ahora resuelve el ejercicio 5

EJEMPLO 2 Determina el MFC de los siguientes términos.

$$6(x - 5)^3, 15(x - 5), 21(x - 5)^2$$

Solución El número más grande, que es factor común a los tres números 6, 15 y 21, es 3. La potencia más alta de $(x - 5)$, que es común a los tres términos, es $(x - 5)$. Por tanto, el MFC es $3(x - 5)$.

Ahora resuelve el ejercicio 7

2 Factorización de un monomio, a partir de un polinomio

Cuando se factoriza un monomio, a partir de un polinomio, se factoriza el máximo factor común. *El primer paso en cualquier problema de factorización, es factorizar el MFC.*

Comprende el Álgebra

En *cualquier* problema de factorización, el primer paso es factorizar el MFC.

Para factorizar un monomio a partir de un polinomio

1. Determina el máximo factor común de todos los términos en el polinomio.
2. Escribe cada término, como el producto del MFC y de otro factor.
3. Usa la propiedad distributiva para *factorizar* el MFC.

EJEMPLO 3 Factoriza $15x^4 - 5x^3 + 25x^2$.

Solución El MFC es $5x^2$. Escribe cada término, como el producto del MFC y otro producto. Luego factoriza el MFC.

$$15x^4 - 5x^3 + 25x^2 = 5x^2 \cdot 3x^2 - 5x^2 \cdot x + 5x^2 \cdot 5$$
$$= 5x^2(3x^2 - x + 5)$$

Ahora resuelve el ejercicio 15

SUGERENCIA ÚTIL

Para verificar el proceso de factorización, multiplica los factores, usando la propiedad distributiva. El producto debe ser el polinomio con el cual comenzaste. Por ejemplo, en el ejemplo 3:

Verifica $5x^2(3x^2 - x + 5) = 5x^2(3x^2) + 5x^2(-x) + 5x^2(5)$
$= 15x^4 - 5x^3 + 25x^2$

EJEMPLO 4 Factoriza $20x^3y^3 + 6x^2y^4 - 12xy^7$.

Solución El MFC es $2xy^3$. Escribe cada término, como el producto del MFC y otro producto. Luego factoriza el MFC.

$$20x^3y^3 + 6x^2y^4 - 12xy^7 = 2xy^3 \cdot 10x^2 + 2xy^3 \cdot 3xy - 2xy^3 \cdot 6y^4$$
$$= 2xy^3(10x^2 + 3xy - 6y^4)$$

Verifica $2xy^3(10x^2 + 3xy - 6y^4) = 20x^3y^3 + 6x^2y^4 - 12xy^7$

Ahora resuelve el ejercicio 19

Cuando el coeficiente principal de un polinomio es negativo, por lo general, se factoriza un factor común con un coeficiente negativo. Esto resulta en que el coeficiente principal del polinomio restante sea positivo.

Comprende el Álgebra

Cuando el coeficiente principal de un polinomio es negativo, por lo general, se factoriza un MFC con un coeficiente negativo. Esto resulta en que el coeficiente principal del polinomio restante sea positivo, como se muestra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Factoriza. **a)** $-15p + 20$ **b)** $-6q^2 + 21q - 33$

Solución

a) $-15p + 20 = (-5)(3p) + (-5)(-4)$
$= -5[3p + (-4)] = -5(3p - 4)$

b) $-6q^2 + 21q - 33 = (-3)(2q^2) + (-3)(-7q) + (-3)(11)$
$= -3[2q^2 + (-7q) + 11] = -3(2q^2 - 7q + 11)$

Ahora resuelve el ejercicio 27

EJEMPLO 6 **Lanzamiento de una bola** Cuando una bola se lanza hacia arriba, con una velocidad de 32 pies por segundo, desde lo alto de un edificio de 160 pies de alto, su distancia, d, desde el suelo en cualquier momento, t, puede determinarse mediante la función $d(t) = -16t^2 + 32t + 160$.

a) Determina la distancia de la bola, desde el suelo, después de 3 segundos. Es decir, determinar $d(3)$.

b) Factoriza el MFC del lado derecho de la función.

c) Evalúa $d(3)$ en forma factorizada.

d) Compara tus respuestas con los incisos **a)** y **c)**.

Solución

a) $d(t) = -16t^2 + 32t + 160$

$d(3) = -16(3)^2 + 32(3) + 160$ Sustituye 3 por t.

$= -16(9) + 96 + 160$

$= 112$

La distancia es 112 pies.

b) Factoriza -16 de los tres términos, en el lado derecho del signo de igualdad.

$$d(t) = -16(t^2 - 2t - 10)$$

c) $d(t) = -16(t^2 - 2t - 10)$

$d(3) = -16[3^2 - 2(3) - 10]$ Sustituye 3 por t.

$= -16(9 - 6 - 10)$

$= -16(-7)$

$= 112$

d) Las respuestas son iguales. Quizás, descubras que los cálculos en el inciso **c)** sean más sencillos que los cálculos en el inciso **a)**.

Ahora resuelve el ejercicio 65

3 Factorización de un factor binomial común

En ocasiones, la factorización involucra factorizar un binomio como el máximo factor común, como se ilustra en los ejemplos del 7 al 10.

EJEMPLO 7 Factoriza $3x(5x - 6) + 4(5x - 6)$.

Solución El MFC es $(5x - 6)$. Al factorizar el MFC, se obtiene

$$3x\,(5x - 6) + 4\,(5x - 6) = (5x - 6)(3x + 4)$$

Ahora resuelve el ejercicio 37

En el ejemplo 7, también se podría colocar el factor común a la derecha, para obtener:

$$3x\,(5x - 6) + 4\,(5x - 6) = (3x + 4)(5x - 6)$$

Las formas factorizadas $(5x - 6)(3x + 4)$ y $(3x + 4)(5x - 6)$, son equivalentes, debido a la propiedad conmutativa de la multiplicación y ambas son correctas. Por lo general, cuando se indique la respuesta a un ejemplo o ejercicio, el término común factorizado se colocará a la izquierda.

EJEMPLO 8 Factoriza $9(2x - 5) + 6(2x - 5)^2$.

Solución El MFC es $3(2x - 5)$. Reescribe cada término, como el producto del MFC y otro factor.

$$\begin{aligned} 9(2x - 5) + 6(2x - 5)^2 &= 3(2x - 5)\cdot 3 + 3(2x - 5)\cdot 2(2x - 5) \\ &= 3(2x - 5)[3 + 2(2x - 5)] && \text{Factoriza } 3(2x - 5). \\ &= 3(2x - 5)[3 + 4x - 10] && \text{Propiedad distributiva.} \\ &= 3(2x - 5)(4x - 7) && \text{Simplifica.} \end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 57

EJEMPLO 9 Factoriza $(3x - 4)(a + b) - (x - 1)(a + b)$.

Solución El binomio $(a + b)$ es el MGC. Por tanto, se le factoriza.

$$\begin{aligned}(3x - 4)(a + b) - (x - 1)(a + b) &= (a + b)[(3x - 4) - (x - 1)] && \text{Factoriza } (a + b).\\ &= (a + b)(3x - 4 - x + 1) && \text{Simplifica.}\\ &= (a + b)(2x - 3) && \text{Factores.}\end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 55

EJEMPLO 10 **Área** En la **Figura 5.13**, el área del rectángulo grande es $7x(2x + 9)$ y el área del rectángulo pequeño es $3(2x + 9)$. Determina una expresión, en forma factorizada, para la diferencia de las áreas de estos dos rectángulos.

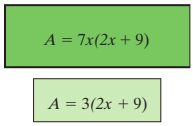


FIGURA 5.13

Solución Para determinar la diferencia de las áreas, resta el área del rectángulo pequeño, del área del rectángulo grande.

$$\begin{aligned}&7x(2x + 9) - 3(2x + 9) && \text{Resta áreas.}\\ &= (2x + 9)(7x - 3) && \text{Factoriza } (2x + 9).\end{aligned}$$

La diferencia de las áreas para los dos rectángulos, es $(2x + 9)(7x - 3)$.

Ahora resuelve el ejercicio 59

4 Factorización por agrupación

Cuando un polinomio contiene *cuatro términos*, puede que sea posible factorizar el polinomio mediante agrupación. Para *factorizar por agrupación*, remueve los factores comunes de grupos de términos. Este procedimiento se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 11 Factoriza $ax + ay + bx + by$.

Solución No hay un factor común a los cuatro términos (excepto 1). Sin embargo, a es común a los primeros dos términos y b es común a los últimos dos términos. Factoriza f de los primeros dos términos y b de los últimos dos términos.

$$ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y)$$

Ahora $(x + y)$ es común a ambos términos. Factoriza $(x + y)$.

$$a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$$

Por ende, $ax + ay + bx + by = (x + y)(a + b)$ o $(a + b)(x + y)$.

Ahora resuelve el ejercicio 39

Para factorizar cuatro términos por agrupación

1. Determina si los cuatro términos tienen factor común. Si es así, factoriza el máximo factor común de cada término.
2. Ordena los cuatro términos en dos grupos de dos términos cada uno. Cada grupo de dos términos debe tener un MFC.
3. Factoriza el MFC de cada grupo de dos términos.
4. Si los dos términos formados en el paso 3 tienen un MFC, factorízalo.

EJEMPLO 12 Factoriza $6ab - 2ac + 3b^2 - bc$ por agrupación.

Solución No hay factores comunes a los cuatro términos. Sin embargo, puedes factorizar $2a$ de los primeros dos términos y b de los últimos dos términos.

$$\begin{aligned}6ab - 2ac + 3b^2 - bc &= 2a(3b - c) + b(3b - c)\\ &= (3b - c)(2a + b)\end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 49

EJEMPLO 13 Factoriza $x^3 + 2x - 5x^2 - 10$.

Solución No hay factores comunes para los cuatro términos. Factoriza x de los dos primeros términos y -5 de los dos últimos términos.

$$\begin{aligned} x^3 + 2x - 5x^2 - 10 &= x(x^2 + 2) - 5(x^2 + 2) \\ &= (x^2 + 2)(x - 5) \end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 41

SUGERENCIA ÚTIL

Cuando factorices cuatro términos por agrupación, si los términos *primero* y *tercero* son positivos, debes factorizar una expresión positiva, tanto de los dos primeros términos como de los dos últimos términos, para obtener un factor común para los dos términos restantes (consulta el ejemplo 12). Si el *primer* término es positivo y el *tercer* término es negativo, debes factorizar una expresión positiva de los dos primeros términos y una expresión negativa para los dos últimos términos, para obtener un factor común a los dos términos restantes (consulta el ejemplo 13).

Recuerda: el primer paso, en cualquier problema de factorización, es determinar si todos los términos tienen un factor común. Si es así, comienza por factorizar el máximo factor común. Esto se mostrará en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 14 Factoriza $4x^3 - 12x^2 - 10x + 30$.

Solución Comienza por factorizar el MFC, 2, de los cuatro términos.

$$\begin{aligned} &4x^3 - 12x^2 - 10x + 30 \\ &= 2(2x^3 - 6x^2 - 5x + 15) \quad \text{Factoriza el MFC, 2.} \end{aligned}$$

A continuación, se factorizará por agrupación. Factoriza $2x^2$ de los primeros dos términos restantes y -5 de los dos últimos términos restantes.

$$\begin{aligned} &2(2x^3 - 6x^2 - 5x + 15) \\ &= 2[2x^2(x - 3) - 5(x - 3)] \quad \text{Factoriza } 2x^2 \text{ de los dos primeros términos. Factoriza } -5 \text{ de los últimos dos términos.} \\ &= 2[(x - 3)(2x^2 - 5)] \quad \text{Factoriza } (x - 3). \\ &= 2(x - 3)(2x^2 - 5) \end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 47

5.4 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

asociativa	comunes	$6x^3y^4$	conmutativa	-2	$24(x - 2)^4$	dividir
distributiva	agrupación	$4(x - 2)^3$	-1	máximo	multiplicar	$2x^2y$

1. Factorizar es lo opuesto de _____.
2. En un problema de factorización, el primer paso es factorizar el _____ factor común.
3. Cuando un polinomio contiene cuatro términos, puede ser posible factorizar el polinomio por _____.
4. El primer paso en la factorización de $-x^2 + 2x - 13$ es factorizar _____.
5. El MFC de $2x^2y^4$ y $6x^3y$ es _____.
6. Para factorizar por agrupación, remueve los factores _____ de los grupos de términos.
7. El MFC de $12(x - 2)^3$ y $8(x - 2)^4$ es _____.
8. Para verificar la respuesta a un problema de factorización, multiplica los factores usando la propiedad _____.

Practica tus habilidades

Factoriza el máximo factor común.

9. $9x - 15$

10. $12x + 8$

11. $2x^2 - 6x + 2$

12. $16d^2 + 20d - 4$

13. $4x^3 - 6x^2 + 22x$

14. $12x^3 - 8x^2 - 10x$

15. $15x^4 - 27x^3 + 9x^2 - 12x$

16. $25z^4 + 35z^3 - 20z^2 - 45z$

17. $32c^{10} - 48c^7$

18. $45y^{12} + 60y^{10}$

19. $3x^2y + 6x^2y^2 + 3xy$

20. $24a^2b^2 + 16ab^4 + 72ab^3$

21. $80a^5b^4c - 16a^4b^2c^2 + 24a^2c$

22. $36xy^2z^3 + 36x^3y^2z + 9x^2yz$

23. $9p^4q^5r - 3p^2q^2r^2 + 12pq^5r^3$

24. $8a^4b^3c^2 - 20a^2b^3c^2 + 4ab^2c$

25. $p^5q^5r^5s^5 + p^4q^4r^4s^4 - pq^2r^3s^4$

26. $a^5b^4c^3d^2 - a^4b^3c^2d^2 + a^2b^2c^2d^2$

Factoriza un factor con un coeficiente negativo.

27. $-24x + 15$

28. $-30y + 12$

29. $-x^2 - 4x + 23$

30. $-y^2 + 3y - 11$

31. $-3r^2 - 6r + 9$

32. $-12t^2 + 48t - 72$

33. $-6r^4s^3 + 4r^2s^4 + 2rs^5$

34. $-5p^6q^3 - 10p^4q^4 + 25pq^7$

35. $-10r^5s^3t - 6r^3s^2t^2 + 2r^2s$

36. $-12b^4c^4d^2 + 15b^3c^5d + 3bc^2$

Factoriza.

37. $x(a + 9) + 1(a + 9)$

38. $y(b - 2) - 6(b - 2)$

39. $am + an + bm + bn$

40. $cj + ck + dj + dk$

41. $x^3 - 3x^2 + 4x - 12$

42. $k^3 - 5k^2 + 3k - 15$

43. $x^2 + 4x - 5x - 20$

44. $a^2 + 3a - 6a - 18$

45. $10m^2 - 12mn - 25mn + 30n^2$

46. $cx - cy - dx + dy$

47. $90m^2 + 60m + 75m + 50$

48. $18m^2 + 30m + 9m + 15$

49. $5a^3 + 15a^2 - 10a - 30$

50. $2r^4 - 2r^3 - 9r^2 + 9r$

51. $-2x^3 + 4x - 20 + 10x^2$

52. $-3y^3 + 18 - 9y + 6y^2$

53. $(k + 5)(k + 2) + (k + 5)(k - 7)$

54. $(z + 4)(z + 3) + (z - 1)(z + 3)$

55. $(5x - 4)(2x - 1) - (2x - 3)(2x - 1)$

56. $(2x - 7)(9x - 2) - (2x - 7)(4x - 5)$

57. $7x(x - 4) + 2(x - 4)^2$

58. $9y(y + 1) - 5(y + 1)^2$

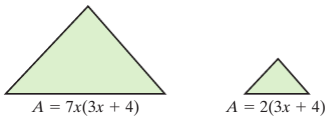
Resolución de problemas

Área *En los ejercicios 59-62, A representa una expresión para el área de la figura. Determina una expresión, en forma factorizada, para la diferencia de las áreas de las figuras geométricas. Consulta el ejemplo 10.*

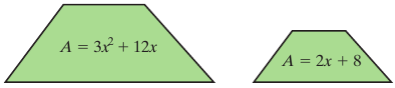
59.



60.



61.

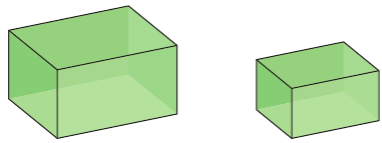


62.

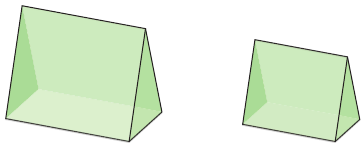


Volumen *En los ejercicios 63 y 64, V representa una expresión para el volumen de la figura. Determina una expresión, en forma factorizada, para la diferencia de los volúmenes de los sólidos geométricos.*

63.



64.



$V = 20x^2 - 60x$ $V = 5x - 15$

65. Bengala Cuando una bengala se dispara hacia arriba, con una velocidad de 80 pies por segundo, su altura, h, en pies, sobre el suelo en t segundos, puede determinarse mediante la función $h(t) = -16t^2 + 80t$.

a) Determina la altura de la bengala 3 segundos después de que se disparó.

b) Expresa la función, con el lado derecho, en forma factorizada.

c) Evalúa $h(3)$ usando la forma factorizada del inciso **b)**.

66. Tiro en elevación Cuando un basquetbolista dispara un tiro en elevación, la altura, h, en pies, de la bola sobre el suelo, en cualquier momento t, bajo ciertas circunstancias, puede determinarse mediante la función $h(t) = -16t^2 + 20t + 8$.

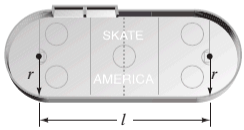


a) Determina la altura de la bola en 1 segundo.

b) Expresa la función, con el lado derecho, en forma factorizada.

c) Evalúa $h(1)$ usando la forma factorizada del inciso **b)**.

67. Pista de patinaje El área de la pista de patinaje, con extremos semicirculares, que se muestra, es $A = \pi r^2 + 2rl$.



a) Determina A cuando $r = 20$ pies y $l = 40$ pies.

b) Escribe el área A en forma factorizada.

c) Determina A cuando $r = 20$ pies y $l = 40$ pies, usando la forma factorizada del inciso **b)**.

68. Área La fórmula para determinar el área de un trapezoide, puede proporcionarse como $A = \frac{1}{2}hb_1 + \frac{1}{2}hb_2$. Expresa esta fórmula en forma factorizada.

69. Tableta Julio acaba de comprar una tableta por \$975. Con un préstamo al 0% (libre de interés), Julio debe pagar \$75 cada mes, hasta liquidar la tableta. El monto insoluto de la tableta es una función del tiempo, donde

$$A(t) = 975 - 75t$$

y t es el número de meses después de que Julio compró la tableta.

a) Determina el monto insoluto 6 meses después de que Julio compró la tableta.

b) Escribe la función en forma factorizada.

c) Usa el resultado del inciso **b)** para determinar el monto insoluto, 6 meses después de que Julio compró la tableta.

70. Salario El 2 de enero de 2018, Jimena comenzó un nuevo empleo, con un salario anual de \$33 000. Su salario aumentará en \$1 500 cada año. Por tanto, su salario es una función del número de años que ella trabaje ahí, donde

$$S(n) = 33\,000 + 1500n$$

y n es el número de años después del año 2018.

a) Determina el salario de Jimena en el año 2022.

b) Escribe la función en forma factorizada.

c) Usa el resultado del inciso **b)** para determinar el salario de Jimena en el año 2022.

71. Precio de automóviles Cuando salieron los automóviles 2018, el precio de lista de un modelo aumentó 6%, sobre el precio de lista del modelo 2017. Después, en una venta especial, los precios de todos los automóviles 2018 se redujeron 6%. El precio de venta puede representarse mediante $(x + 0.06x) - 0.06(x + 0.06x)$, donde x es el precio de lista del modelo 2017.



a) Factoriza $(x + 0.06x)$ de cada término.

b) ¿El precio de venta es mayor o menor que el precio del modelo 2017?

Lee el ejercicio 71 antes de trabajar los ejercicios 72-74.

72. Precio de un vestido Un vestido se redujo 10% y después el precio de venta se redujo otro 10%.

a) Escribe una expresión para el precio final del vestido.

b) ¿Cómo se compara el precio final con el precio regular del vestido? Usa factorización para obtener tu respuesta.

73. Precio de una podadora El precio de una podadora aumentó 15%. Después, en una venta de El Día de la Independencia , el precio se redujo 20%.

a) Escribe una expresión para el precio final de la podadora.

b) ¿Cómo se compara el precio de venta con el precio regular? Usa factorización para obtener tu respuesta.



74. Precio nuevo ¿En cuál de los siguientes, **a)** o **b)**, el precio final será menor, y por cuánto?

a) Reducir 6% el precio de un artículo y después aumentar dicho precio 8%.

b) Aumentar 6% el precio de un artículo y después reducir dicho precio 8%.

Factoriza.

75. $5a(3x + 2)^5 + 4(3x + 2)^4$

76. $4p(2r - 3)^7 - 3(2r - 3)^6$

77. $4x^2(x - 3)^3 - 6x(x - 3)^2 + 4(x - 3)$

78. $12(p + 2q)^4 - 40(p + 2q)^3 + 12(p + 2q)^2$

79. $ax^2 + 2ax - 4a + bx^2 + 2bx - 4b$

80. $6a^2 - a^2c + 18a - 3ac + 6ab - abc$

Problemas de desafío

Factoriza. Supón que todas las variables en los exponentes representan números naturales.

81. $x^{6m} - 5x^{4m}$

82. $x^{2mn} + x^{6mn}$

83. $3x^{4m} - 2x^{3m} + x^{2m}$

84. $r^{y+4} + r^{y+3} + r^{y+2}$

85. $a^r b^r + c^r b^r - a^r d^r - c^r d^r$

86. $6a^k b^k - 2a^k c^k - 9b^k + 3c^k$

Ejercicios conceptuales y de redacción

87. a) ¿Es $6x^3 - 3x^2 + 9x = 3x(2x^2 - x + 3)$?

b) Si la factorización anterior es correcta, ¿cuál debe ser el valor de $6x^3 - 3x^2 + 9x - [3x(2x^2 - x + 3)]$ para cualquier valor de x? Explica.

c) Selecciona un valor para x y evalúa la expresión en el inciso **b)**. ¿Obtuviste lo que esperabas? Si no, explica por qué.

88. a) Determina si la siguiente factorización es correcta.

$$3(x - 2)^2 - 6(x - 2) = 3(x - 2)[(x - 2) - 2]$$
$$= 3(x - 2)(x - 4)$$

b) Si la factorización anterior es correcta, ¿cuál debe ser el valor de $3(x - 2)^2 - 6(x - 2) - [3(x - 2)(x - 4)]$ para cualquier valor de x? Explica.

c) Selecciona un valor para x y evalúa la expresión en el inciso **b)**. ¿Obtuviste lo que esperabas? Si no, explica por qué.

89. Considera la factorización:

$$8x^3 - 16x^2 - 4x = 4x(2x^2 - 4x - 1)$$

a) Si consideras que:

$$y_1 = 8x^3 - 16x^2 - 4x$$
$$y_2 = 4x(2x^2 - 4x - 1)$$

Y luego graficas cada función, ¿qué esperarías? Explica.

b) En tu calculadora graficadora, grafica y_1 y y_2 como se presenta en el inciso **a)**.

c) ¿Obtuviste los resultados esperados?

d) Cuando verificas un proceso de factorización con esta técnica, ¿qué significa si las gráficas no traslapan? Explica.

90. Considera la factorización:

$$2x^4 - 6x^3 - 8x^2 = 2x^2(x^2 - 3x - 4)$$

a) Ingresa:

$$y_1 = 2x^4 - 6x^3 - 8x^2$$
$$y_2 = 2x^2(x^2 - 3x - 4)$$

en tu calculadora graficadora.

b) Si usas la función TABLE de tu calculadora, ¿cómo esperarías que se compare la tabla de valores para y_1 con la tabla de valores para y_2? Explica.

c) Usa la función TABLE para mostrar los valores de y_1 y y_2 para valores de x de 0 a 6.

d) ¿Obtuviste los resultados que esperabas?

e) Cuando verificas un proceso de factorización usando la función TABLE, ¿qué significa si los valores de y_1 y y_2 son diferentes?

91. ¿Cuál es el primer paso en *cualquier* problema de factorización?

92. ¿Qué es el máximo factor común de los términos de una expresión?

93. a) Explica cómo determinar el máximo factor común de los términos de un polinomio.

b) Usando tu procedimiento del inciso **a)**, determina el máximo factor común del polinomio:

$$6x^2y^5 - 2x^3y + 12x^9y^3$$

c) Factoriza el polinomio del inciso **b)**.

94. Determina el MFC de los siguientes términos:

$$x^4y^6, x^3y^5, xy^6, x^2y^4$$

Explica cómo determinaste tu respuesta.

95. Determina el MFC de los siguientes términos:

$$12(x-4)^3, 6(x-4)^6, 3(x-4)^9$$

Explica cómo determinaste tu respuesta.

96. Cuando un término de un polinomio es en sí mismo el MFC, ¿qué se escribe en lugar de dicho término, cuando el MFC se factoriza? Explica.

97. **a)** Explica cómo factorizar un polinomio de cuatro términos por agrupación.

b) Factoriza $6x^3 - 2xy^3 + 3x^2y^2 - y^5$ con tu procedimiento del inciso **a)**.

98. ¿Cuál es el primer paso cuando factorizas $-x^2 + 8x - 15$? ? Explica tu respuesta.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.4] **99.** Evalúa $\dfrac{\left(\left|\frac{1}{2}\right| - \left|-\frac{1}{3}\right|\right)^2}{-\left|\frac{1}{3}\right| \cdot \left|-\frac{2}{5}\right|}$.

[2.1] **100.** Resuelve $3(2x-4) + 3(x+1) = 9$.

[3.1] **101.** Elabora la gráfica de $y = x^2 - 1$.

[4.3] **102.** **Ejercicio** Javier intenta ejercitarse todos los días. Él camina a 3 mph y después trota a 5 mph. Si tarda 0.9 hr en recorrer un total de 3.5 mi, ¿cuánto tiempo trota?

[5.2] **103.** Multiplica $-7 + 2x + 5x^4 - 1.5x^3$.

EXAMEN DE MITAD DE CAPÍTULO: SECCIONES 5.1-5.4

Para descubrir qué tan bien entiendes el material del capítulo hasta este punto, resuelve esta breve evaluación. Las respuestas, y la sección donde el material se discutió inicialmente, se proporcionan en la parte final del libro. Revisa cualquier pregunta que respondas de manera incorrecta.

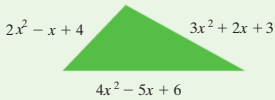
1. Escribe el polinomio $-7 + 2x + 5x^4 - 1.5x^3$ en orden decreciente. Proporciona el grado de este polinomio.

2. Evalúa $P\left(\frac{1}{2}\right)$ dado $P(x) = 8x^2 - 7x + 3$.

3. Simplifica $(2n^2 - n - 12) + (-3n^2 - 6n + 8)$.

4. Resta $(7x^2y - 10xy)$ de $(-9x^2y + 4xy)$.

5. Determina una expresión polinomial, en forma simplificada, para el perímetro del triángulo.



Multiplica.

6. $2x^5(3xy^4 + 5x^2 - 7x^3y)$

7. $(7x - 6y)(3x + 2y)$

8. $(3x+1)(2x^3 - x^2 + 5x + 9)$

9. $\left(8p - \frac{1}{5}\right)\left(8p + \frac{1}{5}\right)$

10. $(4m - 3n)(3m^2 + 2mn - 6n^2)$.

11. Escribe $x^2 - 14x + 49$ como el cuadrado de un binomio.

Divide.

12. $\dfrac{4x^4y^3 + 6x^2y^2 - 11x}{2x^2y^2}$

13. $\dfrac{12x^2 + 23x + 7}{4x + 1}$

14. $\dfrac{2y^3 - y^2 + 7y - 10}{2y - 3}$

Usa división sintética para dividir.

15. $\dfrac{x^2 - x - 72}{x + 8}$

16. $\dfrac{3a^4 - 2a^3 - 14a^2 + 11a + 2}{a - 2}$

17. Factoriza el máximo factor común en $32b^3c^3 + 16b^2c + 24b^5c^4$.

Factoriza completamente.

18. $7b(2x + 9) - 3c(2x + 9)$

19. $2b^4 - b^3c + 4b^3c - 2b^2c^2$

20. $5a(3x - 2)^5 - 4(3x - 2)^6$

5.5 Factorización de trinomios

1. Factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$
2. Factorización de un factor común
3. Factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$, usando el método de prueba y error
4. Factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$, usando agrupación
5. Factorización de trinomios por sustitución

1 Factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$

En esta sección aprenderás cómo *factorizar trinomios* de la forma $ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Observa que a representa el coeficiente del término x al cuadrado, b representa el coeficiente del término x y c representa el término constante.

Trinomials	Coefficients
$x^2 - 3x - 4$	$a = 1, \quad b = -3, \quad c = -4$
$5x^2 - 7x + 2$	$a = 5, \quad b = -7, \quad c = 2$

Para factorizar trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ (nota: $a = 1$)

1. Determina dos números cuyo producto sea c y cuya suma sea b.
2. Los factores del trinomio serán de la forma

$$(x + \square)(x + \square)$$

Un factor determinado en el paso 1 — Otro factor determinado en el paso 1

Si los números determinados en el paso 1 son, por ejemplo, 3 y −5, los factores se escribirían $(x + 3)(x - 5)$. Este procedimiento se ilustra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1 Factoriza $x^2 - x - 12$.

Solución $a = 1, b = -1, c = -12$. Se buscan dos números cuyo producto sea c, que es −12, y cuya suma sea b, que es −1. Comienza por enlistar los factores de −12 e intenta determinar un par cuya suma sea −1.

Factores de −12	Suma de factores
$(1)(-12)$	$1 + (-12) = -11$
$(2)(-6)$	$2 + (-6) = -4$
$(3)(-4)$	$3 + (-4) = -1$
$(4)(-3)$	$4 + (-3) = 1$
$(6)(-2)$	$6 + (-2) = 4$
$(12)(-1)$	$12 + (-1) = 11$

Los números que buscas son 3 y −4, porque su producto es −12 y su suma es −1. Ahora factoriza el trinomio usando 3 y −4.

$$x^2 - x - 12 = \underbrace{(x + 3)}_{\text{Un factor de } -12}\underbrace{(x - 4)}_{\text{Un factor de } -12}$$

Ahora resuelve el ejercicio 17

Comprende el Álgebra

Cuando factorices un trinomio con constante negativa, si obtienes un término x, que sea el opuesto al término x que buscas, *invierte los signos de las constantes* en los factores. Por ejemplo, supón que factorizas $x^2 - x - 12$ e intentas los factores $(x - 3)(x + 4)$. Este producto es $x^2 + x - 12$. Dado que $-x$ y $+x$ son opuestos, invierte los signos de las constantes en los factores para obtener la factorización correcta: $(x + 3)(x - 4)$.

Observa que, en el ejemplo 1, se enlistaron todos los factores de −12. Sin embargo, después de determinar los dos factores, cuyo producto es c y cuya suma es b, no hay necesidad de continuar enlistando factores. Los factores se indicaron aquí para mostrar, por ejemplo, que (2)(−6) es un conjunto de factores diferentes a (−2)(6). Observa que, conforme aumenta el factor positivo, aumenta la suma de los factores.

SUGERENCIA ÚTIL

Considera los factores $(2)(-6)$ y $(-2)(6)$, y las sumas de estos factores.

Factores	Suma de factores
$2(-6)$	$2 + (-6) = -4$
$-2(6)$	$-2 + 6 = 4$

Observa que, si cambian los signos de cada número en el producto, el signo de la suma de factores también cambia. Puedes usar este hecho para determinar más rápidamente los factores que buscas. Si, cuando buscas una suma específica, obtienes el opuesto de dicha suma, cambia el signo de cada factor para obtener la suma que buscas.

Comprende el Álgebra

Para factorizar un trinomio, $ax^2 + bx + c$, primero observa el signo del término constante, c.

$x^2 + 11x + 28 \rightarrow (x + 7)(x + 4)$

$x^2 - 11x + 28 \rightarrow (x - 7)(x - 4)$

Si c es positivo, los números tienen el mismo signo.

$x^2 + 3x - 28 \rightarrow (x + 7)(x - 4)$

$x^2 - 3x - 28 \rightarrow (x - 7)(x + 4)$

Si c es negativo, los números tienen signos diferentes.

EJEMPLO 2 Factoriza $p^2 - 7p + 6$.

Solución Se buscan dos números cuyo producto sea 6 y cuya suma sea -7. Dado que la suma de dos números negativos es un número negativo, y el producto de dos números negativos es un número positivo, ambos números deben ser números negativos. Los factores negativos de 6 son $(-1)(-6)$ y $(-2)(-3)$. Como se muestra a continuación, los números que se buscan son -1 y -6.

Factores de 6	Suma de factores
$(-1)(-6)$	$-1 + (-6) = -7$
$(-2)(-3)$	$-2 + (-3) = -5$

Por tanto,

$$p^2 - 7p + 6 = (p - 1)(p - 6)$$

Puesto que los factores pueden colocarse en cualquier orden, $(p - 6)(p - 1)$ también es una respuesta aceptable.

Ahora resuelve el ejercicio 15

SUGERENCIA ÚTIL

Verificación de la factorización

Los problemas de factorización pueden verificarse al multiplicar los factores obtenidos. Si la factorización es correcta, obtendrás el polinomio con el que empezaste. Para verificar el ejemplo 2, multiplica los factores usando el método PIES.

$$(p - 1)(p - 6) = p^2 - 6p - p + 6 = p^2 - 7p + 6$$

Dado que el producto de los factores es el trinomio con el que comenzaste, la factorización es correcta. Siempre debes verificar tu factorización.

El procedimiento empleado para factorizar trinomios de la forma $x^2 + bx + c$, puede usarse en otros trinomios, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Factoriza $x^2 + 10xy - 24y^2$.

Solución Se buscan dos números cuyo producto sea -24 y cuya suma sea 10. Los dos números son 12 y -2.

Factores de -24	Suma de factores
$12(-2)$	$12 + (-2) = 10$

Dado que el último término del trinomio contiene y^2, el segundo término de cada factor debe contener y.

$$x^2 + 10xy - 24y^2 = (x + 12y)(x - 2y)$$

Verifica

$$(x + 12y)(x - 2y) = x^2 - 2xy + 12xy - 24y^2$$
$$= x^2 + 10xy - 24y^2$$

Ahora resuelve el ejercicio 49

2 Factorización de un factor común

El primer paso, cuando factorizas cualquier trinomio, es determinar si los tres términos tienen un factor común. Si es así, factoriza el MFC. Luego factoriza el polinomio restante.

EJEMPLO 4 Factoriza $3x^4 - 6x^3 - 72x^2$.

Solución El factor $3x^2$ es el MFC de los tres términos del trinomio. Factorízalo primero.

$$3x^4 - 6x^3 - 72x^2 = 3x^2(x^2 - 2x - 24)$$ Factoriza $3x^2$.

Ahora continúa factorizando $x^2 - 2x - 24$. Determina dos números cuyo producto sea -24 y cuya suma sea -2. Los números son -6 y 4.

$$3x^2(x^2 - 2x - 24) = 3x^2(x - 6)(x + 4)$$

Por tanto, $3x^4 - 6x^3 - 72x^2 = 3x^2(x - 6)(x + 4)$.

Ahora resuelve el ejercicio 47

Comprende el Álgebra

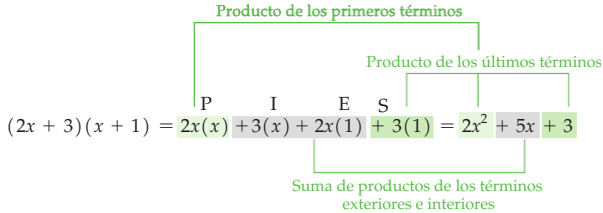
El primer paso, cuando factorizas cualquier trinomio, es determinar si los tres términos tienen un factor común. Si es así, factoriza el máximo factor común. Luego factoriza el trinomio restante.

3 Factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$, usando el método de prueba y error

El primer método que se usará para factorizar trinomios de la forma

$$ax^2 + bx + c, \quad a \neq 1$$

es el método de prueba y error. En ocasiones, a este método se le llama método PIES (o PIES inverso). Comienza por multiplicar $(2x + 3)(x + 1)$ usando el método PIES.



Por tanto, si factorizas el trinomio $2x^2 + 5x + 3$, debes darte cuenta de que el producto de los primeros términos de los factores debe ser $2x^2$, el producto de los segundos términos debe ser 3, y la suma de los productos de los términos exteriores e interiores debe ser $5x$.

Para factorizar $2x^2 + 5x + 3$, comienza como se muestra aquí.

$2x^2 + 5x + 3 = (2x \quad)(x \quad)$ El producto de los primeros términos es $2x^2$.

Ahora, se llenan los segundos términos usando enteros positivos, cuyo producto sea 3. Solamente se considerarán enteros positivos, pues el producto de los últimos términos es positivo, y la suma de los productos de los términos exteriores e interiores, también es positiva. Las dos posibilidades son:

$(2x + 1)(x + 3)$
$(2x + 3)(x + 1)$ } El producto de los últimos términos es 3.

Para determinar cuál factorización es correcta, determina la suma de los productos de los términos exteriores e interiores. Si alguno tiene una suma de $5x$, es decir, el término de en medio del trinomio, dicha factorización es correcta.

$(2x + 1)(x + 3) = 2x^2 + 6x + x + 3 = 2x^2 + 7x + 3$ El término de en medio es erróneo.

$(2x + 3)(x + 1) = 2x^2 + 2x + 3x + 3 = 2x^2 + 5x + 3$ El término de en medio es correcto.

Por tanto, los factores de $2x^2 + 5x + 3$ son $2x + 3$ y $x + 1$. Por tanto:

$$2x^2 + 5x + 3 = (2x + 3)(x + 1)$$

A continuación, se presentan los lineamientos para el método de *prueba y error* de factorización de un trinomio, donde $a \neq 1$ y los tres términos no tienen factores comunes.

Para factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$, usando prueba y error

1. Escribe todos los pares de factores del coeficiente del término al cuadrado, a.
2. Escribe todos los pares de factores de la constante, c.
3. Intenta varias combinaciones de estos factores hasta determinar el término de en medio correcto, bx.

EJEMPLO 5 Factoriza $3t^2 - 13t + 10$.

Solución Primero determina que los tres términos no tienen factor común. A continuación, determina que a es 3 y los únicos factores de 3 son 1 y 3. Por tanto, escribe:

$$3t^2 - 13t + 10 = (3t \quad)(t \quad)$$

El número 10 tiene factores positivos y negativos. Sin embargo, como el producto de los últimos términos debe ser positivo (+10), y la suma de los productos de los términos exteriores e interiores debe ser negativo (−13), los dos factores de 10 deben ser ambos negativos. Los factores negativos de 10 son (−1)(−10) y (−2)(−5). A continuación, se presenta una lista de los posibles factores. Se buscan factores que produzcan el término de en medio correcto, $-13t$.

Posibles factores	Suma de productos de términos exteriores e interiores
$(3t - 1)(t - 10)$	$-31t$
$(3t - 10)(t - 1)$	$-13t$ ← El término de en medio es correcto.
$(3t - 2)(t - 5)$	$-17t$
$(3t - 5)(t - 2)$	$-11t$

Por tanto, $3t^2 - 13t + 10 = (3t - 10)(t - 1)$.

Ahora resuelve el ejercicio 33

La siguiente Sugerencia útil, puede ayudarte a determinar los signos de los factores.

SUGERENCIA ÚTIL

Factorización mediante el método de prueba y error

Cuando factorizas un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, el signo del término constante, c, es muy útil. Si $a > 0$, entonces:

1. Cuando el término constante, c, es positivo, y el coeficiente numérico del término x, b, es positivo, ambos factores numéricos serán positivos.
   Ejemplo
   $$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$
   Positivo Positivo Positivo Positivo
2. Cuando c es positivo y b es negativo, ambos factores numéricos serán negativos.
   Ejemplo
   $$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$
   Negativo Positivo Negativo Negativo

   Siempre que la constante, c, sea positiva (como en los dos ejemplos anteriores) el signo en ambos factores será el mismo que el signo en el término x del trinomio.
3. Cuando c es negativo, uno de los factores numéricos será positivo y el otro será negativo.
   Ejemplo
   $$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$$
   Negativo Positivo Negativo

EJEMPLO 6 Factoriza $8x^2 + 8x - 30$.

Solución Primero observa que el MGC, 2, puede factorizarse.

$$8x^2 + 8x - 30 = 2(4x^2 + 4x - 15)$$

Los factores de 4, el coeficiente principal, son $4 \cdot 1$ y $2 \cdot 2$. Por tanto, la factorización será de la forma $(4x \quad)(x \quad)$ o $(2x \quad)(2x \quad)$.

Comienza con $(2x \quad)(2x \quad)$. Los factores de -15 son $(1)(-15)$, $(3)(-5)$, $(5)(-3)$, y $(15)(-1)$. Se quiere que el término de en medio sea $4x$.

Comprende el Álgebra

Cuando se eligen los factores, generalmente se comienza con los factores cercanos, es decir, los factores cuyos términos tienen coeficientes que están lo más próximos entre sí.

Posibles factores	Suma de productos de términos exteriores e interiores
$(2x + 1)(2x - 15)$	$-28x$
$(2x + 3)(2x - 5)$	$-4x$
$(2x + 5)(2x - 3)$	$4x$

Puesto que se obtiene el conjunto de factores que producen el término x correcto, puedes detenerte. En consecuencia,

$$8x^2 + 8x - 30 = 2(2x + 5)(2x - 3)$$

Ahora resuelve el ejercicio 45

En el ejemplo 6, si comparas el segundo y tercer conjunto de factores, verás que son iguales excepto por los signos de los segundos términos. Observa que, cuando los signos del segundo término en cada factor se intercambian, la suma de los productos de los términos exteriores e interiores también cambia signos.

USA TU CALCULADORA GRAFICADORA

Puedes usar una calculadora graficadora para verificar los problemas de factorización. Para verificar la factorización del ejemplo 6,

$$8x^2 + 8x - 30 = 2(2x + 5)(2x - 3)$$

sea $Y_1 = 8x^2 + 8x - 30$ y $Y_2 = 2(2x + 5)(2x - 3)$. Luego usa la función TABLE para comparar resultados, como en la **Figura 5.14**.

Dado que Y_1 y Y_2 tienen los mismos valores para cada valor de X, no se cometieron errores. Este procedimiento sólo puede indicarte si se cometió un error; no puede decirte si factorizaste por completo. Por ejemplo, $8x^2 + 8x - 30$ y $(4x + 10)(2x - 3)$ producirán el mismo conjunto de valores.

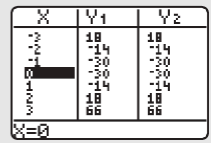


FIGURA 5.14

EJEMPLO 7 Factoriza $6x^2 - 11xy - 10y^2$.

Solución Los factores de 6 son, ya sea $6 \cdot 1$ o $2 \cdot 3$. Por tanto, los factores del trinomio pueden ser de la forma $(6x \quad)(x \quad)$ o $(2x \quad)(3x \quad)$. Se iniciará del modo siguiente.

$$6x^2 - 11xy - 10y^2 = (2x \quad)(3x \quad)$$

Los factores de -10 son $(-1)(10)$, $(1)(-10)$, $(-2)(5)$ y $(2)(-5)$. Dado que hay ocho factores de -10, habrá ocho pares de posibles factores para intentar.

La factorización correcta es:

$$6x^2 - 11xy - 10y^2 = (2x - 5y)(3x + 2y)$$

Ahora resuelve el ejercicio 51

En el ejemplo 7, primero se intentó determinar los factores correctos usando la forma $(2x \quad)(3x \quad)$. Si no hubiesen determinado los factores correctos usando estos, se habría intentado $(6x \quad)(x \quad)$.

Cuando factorices un trinomio, cuyo coeficiente principal es negativo, comienza por factorizar un número negativo. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} -24x^3 - 60x^2 + 36x &= -12x(2x^2 + 5x - 3) && \text{Factoriza } -12x. \\ &= -12x(2x - 1)(x + 3) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} -3x^2 + 8x + 16 &= -1(3x^2 - 8x - 16) && \text{Factoriza } -1. \\ &= -(3x + 4)(x - 4) \end{aligned}$$

EJEMPLO 8 **Área de la región sombreada** En la **Figura 5.15**, determina una expresión, en forma factorizada, para el área de la región sombreada.

Solución Para determinar el área de la región sombreada, es necesario restar el área del rectángulo pequeño, del área del rectángulo grande. Recuerda que el área de un rectángulo es longitud · ancho.

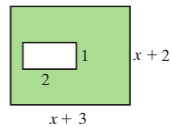


FIGURA 5.15

$$\begin{aligned} \text{Área de rectángulo grande} &= (x + 3)(x + 2) \\ &= x^2 + 2x + 3x + 6 \\ &= x^2 + 5x + 6 \\ \text{Área de rectángulo pequeño} &= (2)(1) = 2 \\ \text{Área de la región sombreada} &= \text{área grande} - \text{área pequeña} \\ &= x^2 + 5x + 6 - 2 \\ &= x^2 + 5x + 4 && \text{Simplifica.} \\ &= (x + 4)(x + 1) && \text{Factoriza.} \end{aligned}$$

El área de la región sombreada es $(x + 4)(x + 1)$.

Ahora resuelve el ejercicio 89

4 Factorización de trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$ usando agrupación

Ahora se discutirá el método de *agrupación*, para factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$.

Para factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$, usando agrupación

1. Determina dos números, cuyo producto sea $a \cdot c$ y cuya suma sea b.
2. Reescribe el término de en medio, bx, usando los números determinados en el paso 1.
3. Factoriza por agrupación.

EJEMPLO 9 Factoriza $2x^2 - 5x - 12$.

Solución Se ve que $a = 2$, $b = -5$ y $c = -12$. Debes determinar dos números, cuyo producto sea $a \cdot c$ o $2(-12) = -24$, y cuya suma sea b, -5. Los dos números son -8 y 3, porque $(-8)(3) = -24$ y $-8 + 3 = -5$. Ahora reescribe el término de en medio, $-5x$, usando $-8x$ y $3x$.

$$2x^2 - 5x - 12 = 2x^2 \overbrace{- 8x + 3x}^{-5x} - 12$$

Ahora factoriza, por agrupación, como se explicó en la sección 5.4.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x - 12 &= 2x^2 - 8x + 3x - 12 \\ &= 2x(x - 4) + 3(x - 4) \\ &= (x - 4)(2x + 3) && \text{Factoriza } (x - 4). \end{aligned}$$

En consecuencia, $2x^2 - 5x - 12 = (x - 4)(2x + 3)$.

Ahora resuelve el ejercicio 31

SUGERENCIA ÚTIL

En el ejemplo 9, se escribió $-5x$ como $-8x + 3x$. Como se muestra abajo, los mismos factores se habrían obtenido si $-5x$ se escribiera como $3x - 8x$. Por tanto, no hay diferencia acerca de cuál término se menciona primero cuando se factoriza por agrupación.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x - 12 &= 2x^2 \overbrace{+ 3x - 8x}^{-5x} - 12 \\ &= x(2x + 3) - 4(2x + 3) \\ &= (2x + 3)(x - 4) \qquad \text{Factoriza } (2x + 3). \end{aligned}$$

EJEMPLO 10 Factoriza $12a^2 - 19ab + 5b^2$.

Solución Debes determinar dos números cuyo producto sea $(12)(5) = 60$ y cuya suma sea -19. Dado que el producto de los números es positivo y su suma es negativa, los dos números deben ser negativos.

Los dos números son -15 y -4, porque $(-15)(-4) = 60$ y $-15 + (-4) = -19$. Ahora, reescribe el término de en medio, $-19ab$, usando $-15ab$ y $-4ab$. Luego factoriza por agrupación.

$$\begin{aligned} 12a^2 - 19ab + 5b^2 &= 12a^2 \overbrace{- 15ab - 4ab}^{-19ab} + 5b^2 \\ &= 3a(4a - 5b) - b(4a - 5b) \\ &= (4a - 5b)(3a - b) \end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 55

Intenta nuevamente el ejemplo 10, esta vez escribiendo $-19ab$ como $-4ab - 15ab$. Debes obtener el mismo resultado.

No todo trinomio se puede factorizar usando los métodos presentados en esta sección. Si un polinomio no puede factorizarse usando un conjunto específico de números, se dice que el polinomio es un **polinomio primo** sobre dicho conjunto de números. Por ejemplo, el polinomio $x^2 + x - 25$, es *primo sobre el conjunto de enteros*. Para mayor discusión acerca de los polinomios primos, consulta los ejercicios 103–108 de la página 349.

EJEMPLO 11 Factoriza $3x^2 - 7x - 11$.

Solución Cuando intentes factorizar este polinomio verás que no se puede factorizar usando enteros. Por tanto, este polinomio es *primo sobre el conjunto de enteros*.

Ahora resuelve el ejercicio 39

5 Factorización de trinomios por sustitución

En ocasiones, un polinomio se puede factorizar más fácilmente al sustituir una nueva variable por una expresión en el polinomio original. En este libro, y en la mayoría de los cursos de matemáticas superiores, se usa la variable u para tales sustituciones.

EJEMPLO 12 Factoriza $2x^4 + 7x^2 - 15$.

Solución Se hará una sustitución para factorizar este polinomio. Dado que x^4 puede escribirse como $(x^2)^2$, será $u = x^2$. Entonces el polinomio se puede reescribir de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} 2x^4 + 7x^2 - 15 &= 2(x^2)^2 + 7x^2 - 15 \\ &\quad\ \downarrow \qquad \downarrow \\ &= 2u^2 \quad + 7u - 15 \qquad \text{Sustituye } u \text{ por } x^2. \end{aligned}$$

Ahora factoriza el polinomio $2u^2 + 7u - 15$.

$$2u^2 + 7u - 15 = (u + 5)(2u - 3)$$

Finalmente, sustituye x^2 de vuelta en los factores por u.

$$\begin{array}{l}(u+5)\ (2u-3)\\ \downarrow\qquad\ \downarrow\\ (x^2+5)\ (2x^2-3)\end{array}$$ Sustituye de vuelta x^2 por u.

En consecuencia, $2x^4+7x^2-15=(x^2+5)(2x^2-3)$. Observa que u se sustituyó por x^2 en el polinomio original, y luego x^2 se sustituyó de vuelta por u.

Ahora resuelve el ejercicio 67

EJEMPLO 13 Factoriza $10x^6+x^3-2$.

Solución Puesto que x^6 puede escribirse como $(x^3)^2$, se hará $u=x^3$. Entonces el polinomio se puede reescribir del modo siguiente.

$$\begin{aligned}10x^6+x^3-2&=10(x^3)^2+x^3-2\\ &\quad\ \downarrow\quad\ \downarrow\\ &=\ 10u^2\ +u\ -2\end{aligned}$$ Sustituye u por x^3.

Ahora factoriza el polinomio $10u^2+u-2$.

$$10u^2+u-2=(2u+1)(5u-2)$$

Finalmente, sustituye de vuelta x^3, en los factores, por u.

$$\begin{array}{l}(2u+1)\ \ (5u-2)\\ \downarrow\qquad\ \downarrow\\ (2x^3+1)\ (5x^3-2)\end{array}$$ Sustituye x^3 de vuelta por u.

En consecuencia, $10x^6+x^3-2=(2x^3+1)(5x^3-2)$. Observa que u se sustituyó por x^3 en el polinomio original, y después x^3 se sustituyó de vuelta por u.

Ahora resuelve el ejercicio 75

EJEMPLO 14 Factoriza $2(3x-1)^2-5(3x-1)-12$.

Solución Observa que el binomio $(3x-1)$ está presente en los dos primeros términos del polinomio. Por tanto, se hará $u=3x-1$. Entonces, el polinomio se puede reescribir del modo siguiente.

$$\begin{aligned}2(3x-1)^2-5(3x-1)-12&=2(3x-1)^2-5(3x-1)-12\\ &\quad\ \downarrow\qquad\ \downarrow\\ &=\ 2u^2\ -\ 5u\ -12\end{aligned}$$ Sustituye u por $(3x-1)$.

Ahora factoriza el polinomio $2u^2-5u-12$.

$$2u^2-5u-12=(2u+3)(u-4)$$

Finalmente, sustituye $3x-1$ de vuelta, en los factores, por u.

$$\begin{aligned}&=\ \ (2u+3)\qquad(u-4)\\ &\quad\ \downarrow\qquad\ \downarrow\\ &=[2(3x-1)+3][(3x-1)-4]\\ &=[6x-2+3][3x-1-4]\\ &=(6x+1)(3x-5)\end{aligned}$$ Sustituye $3x-1$ de vuelta por u.

En consecuencia, $2(3x-1)^2-5(3x-1)-12=(6x+1)(3x-5)$. Observa que u se sustituyó por $3x-1$ en el polinomio original, y luego $3x-1$ se sustituyó de vuelta por u.

Ahora resuelve el ejercicio 79

5.5 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

multiplicar	*opuestos*	*coeficientes*	*inverso*	*negativas*
positivas	*exponentes*	*común*	*signos*	*dividir*

1. En el trinomio $ax^2 + bx + c$, las letras a, b y c representan los _____ de los términos del trinomio.
2. Cuando factorizas un trinomio con una constante negativa, si obtienes un término x, que es el opuesto del término x que buscas, para obtener la factorización correcta, invierte los _____ de las constantes en los factores.
3. Los problemas de factorización pueden verificarse al _____ los factores obtenidos.
4. El primer paso, cuando factorizas cualquier trinomio, es determinar si los tres términos tienen un factor _____.
5. El método de prueba y error, para factorizar trinomios, en ocasiones se conoce como el método de PIES _____.
6. Cuando factorizas un trinomio $ax^2 + bx + c$, cuando a es positivo, c es positivo y b es positivo, entonces las constantes en los factores binomiales serán _____.
7. Cuando factorizas un trinomio $ax^2 + bx + c$, cuando a es positivo, c es positivo y b es negativo, entonces las constantes en los factores binomiales serán _____.
8. Cuando factorizas un trinomio $ax^2 + bx + c$, cuando a es positivo y c es negativo, entonces las constantes en los factores binomiales tendrán signos _____.

Practica tus habilidades

Cuando factorices un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, determina si los signos de los números en los factores serán ambos +, ambos −, o uno +, uno −, *si:*

9. $a > 0, b > 0,$ y $c > 0$

10. $a > 0, b > 0,$ y $c < 0$

11. $a > 0, b < 0,$ y $c < 0$

12. $a > 0, b < 0,$ y $c > 0$

Factoriza cada trinomio completamente. Si el polinomio es primo sobre el conjunto de enteros, escribe primo.

13. $x^2 + 5x + 6$

14. $y^2 + 7y + 10$

15. $w^2 - 8w + 12$

16. $w^2 - 11w + 18$

17. $a^2 + 8a - 9$

18. $b^2 + 24x - 25$

19. $x^2 - 13x - 30$

20. $y^2 - 7y - 30$

21. $2c^2 + 20c + 32$

22. $3d^2 + 36d + 81$

23. $3p^2 - 33p + 84$

24. $4q^2 - 36q + 32$

25. $4r^2 + 12r - 16$

26. $5s^2 + 10s - 120$

27. $5x^2 - 50x - 120$

28. $6x^2 - 30x - 144$

29. $h^2 - 5h - 4$

30. $k^2 + 7k - 6$

31. $5w^2 + 11w + 2$

32. $7z^2 + 9z + 2$

33. $5a^2 - 17a + 6$

34. $5z^2 - 16z + 12$

35. $6c^2 + 11c - 10$

36. $8d^2 + 14d - 15$

37. $6c^2 - 13c - 63$

38. $10d^2 - 19d - 56$

39. $2x^2 + 9x + 12$

40. $3y^2 - 8y + 18$

41. $24a^2 + 46a + 20$

42. $24b^2 + 78b + 45$

43. $100b^2 - 90b + 20$

44. $48d^2 - 68d + 24$

45. $30h^2 + 5h - 75$

46. $30k^2 + 16k - 24$

47. $42m^2 - 20m - 32$

48. $18n^2 - 33n - 105$

49. $x^2 + 12xy + 35y^2$

50. $w^2 - 9wz + 18z^2$

51. $15a^2 + 8ab - 12b^2$

52. $4c^2 - 8cd - 21d^2$

53. $-4x^2 + 6x + 10$

54. $-15x^2 + 33x - 6$

55. $-30x^2 + 32xy - 8y^2$

56. $-36x^2 + 92xy + 48y^2$

57. $72a^2 + 17a - 72$

58. $63b^2 + 23b - 56$

59. $-36x^2 + 54xy + 112y^2$

60. $-75x^2 + 60xy + 36y^2$

61. $6x^4y^3 + 5x^3y^3 - 6x^2y^3$

62. $10x^5y^2 - 19x^4y^2 - 15x^3y^2$

63. $-12x^4y - 2x^3y^2 + 24x^2y^3$

64. $-18x^3y^2 + 33x^2y^3 + 30xy^4$

Factoriza cada trinomio completamente.

65. $b^4 + 9b^2 + 20$

66. $c^4 - 8c^2 + 12$

67. $x^4 + x^2 - 6$

68. $y^4 + y^2 - 12$

69. $6a^4 + 5a^2 - 25$

70. $12d^4 - 52d^2 - 9$

71. $x^2y^2 + 9xy + 14$

72. $a^2b^2 + 8ab - 33$

73. $2x^2y^2 - 9xy - 11$

74. $3b^2c^2 - bc - 2$

75. $a^6 - 7a^3 - 30$

76. $2y^6 - 9y^3 - 5$

77. $4(x + 1)^2 + 8(x + 1) + 3$

78. $6(x + 4)^2 + 19(x + 4) + 15$

79. $6(a + 2)^2 - 7(a + 2) - 5$

80. $6(p - 5)^2 + 11(p - 5) + 3$

81. $(3x - 1)^2 + 6(3x - 1) + 8$

82. $(2x + 1)^2 + 2(2x + 1) - 15$

83. $6x^8 + 13x^4 + 6$

84. $6x^{10} + 19x^5 + 10$

85. $6(2x - 1)^2 + 5(2x - 1) - 6$

86. $21(3x - 2)^2 + 26(3x - 2) - 15$

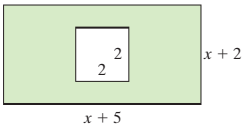
87. $12x^4y^4 - 23x^2y^2 - 24$

88. $12x^4y^4 + 16x^2y^2 - 35$

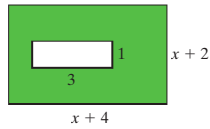
Resolución de problemas

Área *En los ejercicios 89-92, determina una expresión, en forma factorizada, para el área de la región sombreada. Consulta el ejemplo 8.*

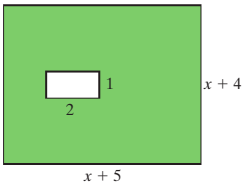
89.



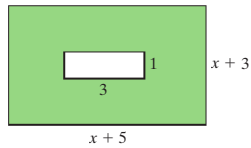
90.



91.



92.



93. Si los factores de un polinomio son $(2x + 3y)$ y $(x - 4y)$, determina el polinomio.

94. Si los factores de un polinomio son 3, $(4x + 5)$, y $(2x + 3)$, determina el polinomio.

95. Si se sabe que un factor del polinomio $x^2 + 4x - 21$ es $x - 3$, ¿cómo puedes determinar el otro factor? Determina el otro factor.

96. Si se sabe que un factor del polinomio $x^2 - xy - 6y^2$ es $x - 3y$, ¿cómo puedes determinar el otro factor? Determina el otro factor.

97. **a)** ¿Cuál de los siguientes crees que sería más difícil de factorizar mediante el método de prueba y error? Explica tu respuesta.

$$30x^2 + 23x - 40 \quad \text{o} \quad 49x^2 - 98x + 13$$

b) Factoriza ambos trinomios.

98. **a)** ¿Cuál de los siguientes crees que sería más difícil de factorizar mediante el método de prueba y error? Explica tu respuesta.

$$48x^2 + 26x - 35 \quad \text{o} \quad 35x^2 - 808x + 69$$

b) Factoriza ambos trinomios.

99. Determina todos los valores enteros de b, para los cuales $2x^2 + bx - 5$ es factorizable.

100. Determina todos los valores enteros de b, para los cuales $3x^2 + bx - 7$ es factorizable.

101. Si $x^2 + bx + 5$ es factorizable, ¿cuáles son los dos únicos valores posibles de b?

102. Si $x^2 + bx + c$ es factorizable y c es un número primo, ¿cuáles son los dos únicos valores posibles de b?

Problemas de desafío

Considera el trinomio $ax^2 + bx + c$. La expresión $b^2 - 4ac$, se llama ***discriminante****. Si el discriminante no es un cuadrado perfecto, el trinomio es primo sobre el conjunto de enteros y no se puede factorizar usando enteros. Los* ***cuadrados perfectos*** *son números como 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, etcétera. Para los ejercicios 103-108,* **a)** *determina el valor del discriminante.* **b)** *Si el discriminante es un cuadrado perfecto, factoriza el polinomio. Si el discriminante no es un cuadrado perfecto, escribe como respuesta* primo.

103. $12x^2 + 7x - 10$

104. $28x^2 + 23x - 15$

105. $12x^2 - 7x + 10$

106. $28x^2 - 23x + 15$

107. $36x^2 + 13x - 24$

108. $32x^2 + 21x - 48$

En los ejercicios 109-114, factoriza completamente. Supón que las variables en los exponentes representan enteros positivos.

109. $4a^{2n} - 4a^n - 15$

110. $a^2(a + b) - 2ab(a + b) - 3b^2(a + b)$

111. $x^2(x + y)^2 - 7xy(x + y)^2 + 12y^2(x + y)^2$

112. $3m^2(m - 2n) - 4mn(m - 2n) - 4n^2(m - 2n)$

113. $x^{2n} + 3x^n - 10$

114. $9r^{4y} + 3r^{2y} - 2$

115. Considera $x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2)$.

a) Explica cómo puedes verificar esta factorización usando gráficas en tu calculadora graficadora.

b) Verifica la factorización que explicaste en el inciso **a)** para ver si es correcta.

116. Considera $6x^3 - 11x^2 - 10x = x(2x - 5)(3x + 2)$.

a) Explica cómo puedes verificar esta factorización usando la función TABLE de una calculadora graficadora.

b) Verifica la factorización como la explicaste en el inciso **a)** para ver si es correcta.

Ejercicios conceptuales y de redacción

117. Cuando factorizas cualquier trinomio, ¿cuál debe ser siempre el primer paso?

118. En un examen, Tomás escribió la siguiente factorización y no obtuvo el puntaje completo. Explica por qué la factorización de Tomás no está completa.

$$15x^2 - 21x - 18 = (5x + 3)(3x - 6)$$

119. **a)** Explica el procedimiento, paso a paso, para factorizar $6x^2 + x - 12$.

b) Factoriza $6x^2 + x - 12$, usando el procedimiento que explicaste en el inciso **a)**.

120. **a)** Explica el procedimiento, paso a paso, para factorizar $8x^2 - 20x - 12$.

b) Factoriza $8x^2 - 20x - 12$, usando el procedimiento que explicaste en el inciso **a)**.

121. ¿$2x^2 + 8x + 6 = (x + 3)(2x + 2)$ está factorizado por completo? Si no, proporciona la factorización completa.

122. ¿$x^3 - 3x^2 - 10x = (x^2 + 2x)(x - 5)$ está factorizado por completo? Si no, proporciona la factorización completa.

123. ¿$3x^3 + 6x^2 - 24x = x(x + 4)(3x - 6)$ está factorizado por completo? Si no, proporciona la factorización completa.

124. ¿$x^4 + 11x^3 + 30x^2 = x^2(x + 5)(x + 6)$ está factorizado por completo? Si no, proporciona la factorización completa.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **125.** Resuelve $F = \frac{9}{5}C + 32$ para C.

[3.3] **126.** Elabora la gráfica de $y = -3x + 4$.

[4.5] **127.** Evalúa el determinante $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}$.

[5.2] **128.** Multiplica $[(x + y) + 6]^2$.

[5.4] **129.** Factoriza $2x^3 + 4x^2 - 5x - 10$.

5.6 Fórmulas especiales de factorización

1 **Factorización de la diferencia de dos cuadrados**
2 **Factorización de trinomios cuadrados perfectos**
3 **Factorización de la suma y la diferencia de dos cubos**

En esta sección, se presentan algunas fórmulas especiales para factorizar la diferencia de dos cuadrados, trinomios cuadrados perfectos, y la suma y la diferencia de dos cubos. Es importante memorizar estas fórmulas.

1 Factorización de la diferencia de dos cuadrados

La expresión $x^2 - 16$, es un ejemplo de la diferencia de dos cuadrados.

$$x^2 - 16 = (x)^2 - (4)^2$$

Para factorizar la diferencia de dos cuadrados, usa la *fórmula de la diferencia de dos cuadrados*.

Diferencia de dos cuadrados

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

EJEMPLO 1 Factoriza los siguientes polinomios.

a) $x^2 - 9$ **b)** $4y^2 - 25$

Solución Cada polinomio puede escribirse como la diferencia de dos cuadrados. Cada polinomio se factorizará usando la fórmula de la diferencia de dos cuadrados.

a) $x^2 - 9 = (x)^2 - (3)^2$
$= (x + 3)(x - 3)$

b) $4y^2 - 25 = (2y)^2 - (5)^2$
$= (2y + 5)(2y - 5)$

Verifica Puedes verificar la factorización de cualquier polinomio, al multiplicar los factores.

a) $(x + 3)(x - 3) = x^2 - 3x + 3x - 9$
$= x^2 - 9$

b) $(2y + 5)(2y - 5) = 4y^2 - 10y + 10y - 25$
$= 4y^2 - 25$

Dado que cada producto es el polinomio original, la factorización es correcta en cada parte.

Ahora resuelve el ejercicio 11

EJEMPLO 2 Factoriza los siguientes polinomios.

a) $x^6 - y^4$ **b)** $2c^4 - 50d^6$

Solución Reescribe cada polinomio, como una diferencia de dos cuadrados. Luego usa la fórmula.

a) $x^6 - y^4 = (x^3)^2 - (y^2)^2$
$= (x^3 + y^2)(x^3 - y^2)$

b) Primero, factoriza el máximo factor común, 2.

$$2c^4 - 50d^6 = 2(c^4 - 25d^6)$$

A continuación, reescribe $c^4 - 25d^6$, como una diferencia de dos cuadrados y factoriza usando la fórmula.

$$\begin{aligned} 2c^4 - 50d^6 &= 2(c^4 - 25d^6) \\ &= 2[(c^2)^2 - (5d^3)^2] \\ &= 2(c^2 + 5d^3)(c^2 - 5d^3) \end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 13

EJEMPLO 3 Factoriza $x^4 - 81y^4$.

Solución

$$x^4 - 81y^4 = (x^2)^2 - (9y^2)^2$$
$$= (x^2 + 9y^2)(x^2 - 9y^2)$$

Observa que, $(x^2 - 9y^2)$, también es una diferencia de dos cuadrados. Usa la fórmula de diferencia de dos cuadrados una segunda vez para obtener:

$$= (x^2 + 9y^2)[(x)^2 - (3y)^2]$$
$$= (x^2 + 9y^2)(x + 3y)(x - 3y)$$

Ahora resuelve el ejercicio 23

EJEMPLO 4 Factoriza $(x - 5)^2 - 4$.

Solución Primero expresa $(x - 5)^2 - 4$, como una diferencia de dos cuadrados.

$$(x - 5)^2 - 4 = (x - 5)^2 - 2^2$$
$$= [(x - 5) + 2][(x - 5) - 2]$$
$$= (x - 3)(x - 7)$$

Ahora resuelve el ejercicio 31

Comprende el Álgebra

La suma de dos cuadrados, $a^2 + b^2$, no puede factorizarse usando números reales. Por tanto, los siguientes son ejemplos de polinomios que son primos sobre los números reales.

$x^2 + 9$
$4y^2 + 25$
$16z^2 + 49$

Hasta el momento, se han factorizado varios polinomios usando la fórmula de la *diferencia* de dos cuadrados. Sin embargo, no es posible factorizar polinomios que puedan escribirse como la *suma* de dos cuadrados, $a^2 + b^2$, usando números reales. Por ejemplo, los polinomios $x^2 + 9$ y $4y^2 + 25$, pueden escribirse cada uno como la suma de dos cuadrados. Por tanto, estos polinomios no pueden factorizarse usando números reales, y se dice que estos polinomios son *primos sobre los números reales*.

2 Factorización de trinomios cuadrados perfectos

En la sección 5.2 se vio que:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Si se invierten los lados izquierdos y derechos de estas dos fórmulas, se obtienen dos *fórmulas de factorización especiales*.

Comprende el Álgebra

Un *trinomio cuadrado perfecto* ocurre cuando *elevas un binomio al cuadrado.*

$$\underbrace{(x + 4)^2}_{\text{cuadrado de un binomio}} = \underbrace{x^2 + 8x + 16}_{\text{trinomio cuadrado perfecto}}$$

Trinomios cuadrados perfectos

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Estos dos trinomios se llaman **trinomios cuadrados perfectos**, pues cada uno es el cuadrado de un binomio. *Para ser un trinomio cuadrado perfecto, los términos primero y último deben ser los cuadrados de algunas expresiones y el término de en medio debe ser el doble del producto de estas dos expresiones.*

Si un trinomio es un trinomio cuadrado perfecto, puedes factorizarlo usando las fórmulas que se indican arriba.

Ejemplos de trinomios cuadrados perfectos

$$y^2 + 6y + 9 \quad \text{o} \quad y^2 + 2(y)(3) + 3^2$$
$$9p^2q^2 - 24pq + 16 \quad \text{o} \quad (3pq)^2 - 2(3pq)(4) + 4^2$$
$$(r + s)^2 + 10(r + s) + 25 \quad \text{o} \quad (r + s)^2 + 2(r + s)(5) + 5^2$$

EJEMPLO 5 Factoriza $x^2 - 8x + 16$.

Solución Dado que el primer término, x^2, y el último término, 16, o 4^2, son cuadrados, este trinomio debe ser un trinomio cuadrado perfecto. Para determinar si lo es, toma dos veces el producto de x y 4, para ver si obtienes $8x$.

$$2(x)(4) = 8x$$

Dado que $8x$ es el término de en medio, y dado que el signo del término de en medio es negativo, la factorización es la siguiente

$$x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$$

Verifica Puedes verificar la factorización de cualquier polinomio al multiplicar los factores.

$$\begin{aligned}(x - 4)^2 &= (x - 4)(x - 4)\\ &= x^2 - 4x - 4x + 16 = x^2 - 8x + 16\end{aligned}$$

Dado que el producto es el polinomio original, la factorización es correcta.

Ahora resuelve el ejercicio 35

EJEMPLO 6 Factoriza $9x^4 - 12x^2 + 4$.

Solución El primer término es un cuadrado, $(3x^2)^2$, como lo es el último término, 2^2. Dado que $2(3x^2)(2) = 12x^2$, factoriza de la siguiente manera:

$$9x^4 - 12x^2 + 4 = (3x^2 - 2)^2$$

Ahora resuelve el ejercicio 41

EJEMPLO 7 Factoriza $(p + q)^2 + 12(p + q) + 36$.

Solución El primer término, $(p + q)^2$, es un cuadrado. El último término, 36 o 6^2, es un cuadrado. El término de en medio es $2(p + q)(6) = 12(p + q)$. Por tanto, este es un trinomio cuadrado perfecto. En consecuencia:

$$(p + q)^2 + 12(p + q) + 36 = [(p + q) + 6]^2 = (p + q + 6)^2$$

Ahora resuelve el ejercicio 51

EJEMPLO 8 Factoriza $x^2 - 6x + 9 - y^2$.

Solución Dado que $x^2 - 6x + 9$ es un trinomio cuadrado perfecto, que puede expresarse como $(x - 3)^2$, escribe:

$$(x - 3)^2 - y^2$$

Ahora $(x - 3)^2 - y^2$ es una diferencia de dos cuadrados; en consecuencia:

$$\begin{aligned}(x - 3)^2 - y^2 &= [(x - 3) + y][(x - 3) - y]\\ &= (x - 3 + y)(x - 3 - y)\end{aligned}$$

Por tanto, $x^2 - 6x + 9 - y^2 = (x - 3 + y)(x - 3 - y)$.

Ahora resuelve el ejercicio 77

El polinomio del ejemplo 8 tiene cuatro términos. En la sección 5.4, aprendiste a factorizar polinomios con cuatro términos por agrupación. Si estudias el ejemplo 8, verás que, sin importar cómo ordenes los cuatro términos, no es posible ordenarlos de modo que los primeros dos términos tengan un factor común y los dos últimos términos tengan un factor común.

SUGERENCIA ÚTIL

Siempre que un polinomio con cuatro términos no pueda factorizarse por agrupación, intenta reescribir tres de los términos, como el cuadrado de un binomio y luego factoriza usando la fórmula de la diferencia de dos cuadrados.

EJEMPLO 9 Factoriza $4s^2 + 12st + 9t^2 - 25$.

Solución Observa, primero, que este polinomio con cuatro términos no puede factorizarse por agrupación. A continuación, se ve que los tres primeros términos del polinomio pueden expresarse como el cuadrado de un binomio. Completa la factorización usando la diferencia de dos cuadrados.

$$\begin{aligned} 4s^2 + 12st + 9t^2 - 25 &= (2s + 3t)^2 - 5^2 \\ &= [(2s + 3t) + 5][(2s + 3t) - 5] \\ &= (2s + 3t + 5)(2s + 3t - 5) \end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 79

3 Factorización de la suma y la diferencia de dos cubos

Anteriormente, en esta sección se factorizó la diferencia de dos cuadrados. Ahora se factorizará la suma y la diferencia de dos cubos. Considera el producto de $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

$$\begin{array}{r} a^2 - ab + b^2 \\ \hline a + b \\ \hline a^2b - ab^2 + b^3 \\ a^3 - a^2b + ab^2 \\ \hline a^3 \qquad + b^3 \end{array}$$

Por tanto, $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$. Usando la multiplicación, también se puede demostrar que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. En los siguientes recuadros, aparecen las fórmulas para factorizar *la suma y la diferencia de dos cubos*.

Suma de dos cubos

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Diferencia de dos cubos

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

EJEMPLO 10 Factoriza la suma de cubos $x^3 + 64$.

Solución Reescribe $x^3 + 64$ como una suma de dos cubos, $x^3 + 4^3$. Sea que x corresponda con a y que 4 corresponda con b. Luego, factoriza usando la fórmula de la suma de dos cubos.

$$\begin{array}{ccccccccc} a^3 & + & b^3 & = & (a & + & b)(a^2 & - & a\ b\ + b^2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ x^3 & + & 4^3 & = & (x & + & 4)[\,x^2 & - & x(4) + 4^2\,] \end{array}$$

$$= (x + 4)(x^2 - 4x + 16)$$

En consecuencia, $x^3 + 64 = (x + 4)(x^2 - 4x + 16)$.

Verifica Puedes verificar la factorización de cualquier polinomio, al multiplicar los factores.

$$\begin{aligned} (x + 4)(x^2 - 4x + 16) &= x^3 - 4x^2 + 16x + 4x^2 - 16x + 64 \\ &= x^3 + 64 \end{aligned}$$

Puesto que el producto es el polinomio original, la factorización es correcta.

Ahora resuelve el ejercicio 53

EJEMPLO 11 Factoriza la diferencia de cubos $27x^3 - 8y^6$.

Solución Observa, primero, que $27x^3$ y $8y^6$ no tienen factores comunes, además de 1. Dado que tanto $27x^3$ como $8y^6$ se pueden expresar como cubos, puedes factorizar usando la fórmula de la diferencia de dos cubos.

$$\begin{aligned} 27x^3 - 8y^6 &= (3x)^3 - (2y^2)^3 \\ &= (3x - 2y^2)\left[(3x)^2 + (3x)(2y^2) + (2y^2)^2\right] \\ &= (3x - 2y^2)(9x^2 + 6xy^2 + 4y^4) \end{aligned}$$

Por tanto, $27x^3 - 8y^6 = (3x - 2y^2)(9x^2 + 6xy^2 + 4y^4)$.

Ahora resuelve el ejercicio 55

EJEMPLO 12 Factoriza $64p^3 - 8$.

Solución Primero factoriza el MFC, 8.

$$64p^3 - 8 = 8(8p^3 - 1)$$

A continuación, factoriza $8p^3 - 1$ al escribirlo como la diferencia de dos cubos.

$$\begin{aligned} 64p^3 - 8 &= 8(8p^3 - 1) \\ 8(8p^3 - 1) &= 8[(2p)^3 - 1^3] \\ &= 8\left[(2p - 1)[(2p)^2 + (2p)(1) + 1^2]\right] \\ &= 8(2p - 1)(4p^2 + 2p + 1) \end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 61

EJEMPLO 13 Factoriza $(x - 2)^3 + 125$.

Solución Escribe $(x - 2)^3 + 125$ como una suma de dos cubos y después usa la fórmula de la suma de dos cubos para factorizar.

$$\begin{aligned} (x - 2)^3 + (5)^3 &= [(x - 2) + 5]\left[(x - 2)^2 - (x - 2)(5) + (5)^2\right] \\ &= (x - 2 + 5)(x^2 - 4x + 4 - 5x + 10 + 25) \\ &= (x + 3)(x^2 - 9x + 39) \end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 65

SUGERENCIA ÚTIL

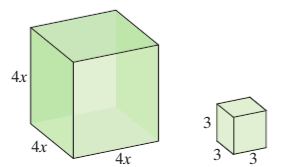
El cuadrado de un binomio tiene un 2 como parte del término de en medio del trinomio.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

La suma o la diferencia de dos cubos, tiene un factor similar al trinomio en el cuadrado del binomio. Sin embargo, el término de en medio no contiene un 2.

$$a^3 + b^3 = (a + b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$
$$\text{no } 2ab$$

EJEMPLO **Volumen** Con los cubos de la Figura 5.16, determina una expresión, en forma factorizada, para la diferencia de los volúmenes.



Cubo grande Cubo pequeño

FIGURA 5.16

Solución Para determinar la diferencia de los volúmenes, resta el volumen del cubo pequeño, del volumen del cubo grande.

$$\begin{aligned}
\text{Volumen del cubo grande} &= (4x)^3 \\
\text{Volumen del cubo pequeño} &= 3^3 \\
\text{Diferencia de los volúmenes} &= (4x)^3 - 3^3 && \text{Resta los volúmenes.} \\
&= (4x - 3)\left[(4x)^2 + (4x)3 + 3^2\right] && \text{Factoriza.} \\
&= (4x - 3)(16x^2 + 12x + 9) && \text{Simplifica.}
\end{aligned}$$

La diferencia de los volúmenes para los dos cubos es $(4x - 3)(16x^2 + 12x + 9)$.

Ahora resuelve el ejercicio 87

5.6 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

binomio trinomio suma diferencia reales perfectos cubos cuadrados

1. La fórmula $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, se llama fórmula de la diferencia de dos _____.
2. La fórmula $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, se llama fórmula de la _____ de dos cubos.
3. La fórmula $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, se llama fórmula de la suma de dos _____.
4. Las fórmulas $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ y $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$, pueden usarse para factorizar trinomios cuadrados _____.
5. La suma de dos cuadrados, $a^2 + b^2$, no se puede factorizar usando números _____.
6. Un trinomio cuadrado perfecto, ocurre cuando elevas al cuadrado un _____.

Practica tus habilidades

Usa la fórmula de diferencia de dos cuadrados, para factorizar cada polinomio.

7. $x^2 - 4$
8. $y^2 - 25$
9. $w^2 - 1$
10. $z^2 - 100$
11. $4j^2 - 9$
12. $9k^2 - 25$
13. $4r^2 - 64$
14. $9s^2 - 81$
15. $50t^2 - 98$
16. $48u^2 - 243$
17. $144w^2 - 121z^2$
18. $100c^2 - 169d^2$
19. $-36v^2 + 400$
20. $-225w^2 + 144$
21. $x^4 - 9$
22. $y^6 - 4$
23. $c^2d^2 - 25$
24. $m^2n^2 - 49$
25. $\frac{4}{9}m^2 - \frac{100}{49}$
26. $\frac{81}{64}n^2 - \frac{25}{36}$
27. $0.09p^2 - 0.49$
28. $0.16q^2 - 0.81$
29. $(5x - 1)^2 - 49$
30. $(2x - 3)^2 - 64$
31. $121 - (x - 2)^2$
32. $144 - (x + 3)^2$
33. $(2p + 5)^2 - (p + 3)^2$
34. $(4q - 3)^2 - (3q - 2)^2$

Usa una de las fórmulas de trinomio cuadrado perfecto, para factorizar cada polinomio.

35. $x^2 + 10x + 25$
36. $y^2 - 14y + 49$
37. $c^2 - 6c + 9$
38. $d^2 - 8d + 16$
39. $4p^2 - 24p + 36$
40. $9q^2 - 36q + 36$
41. $4p^2 - 12p + 9$
42. $9q^2 - 12q + 4$
43. $16x^2 + 40xy + 25y^2$
44. $9w^2 + 42wz + 49z^2$
45. $9c^2 - 6cd + d^2$
46. $49j^2 - 14jk + k^2$

47. $x^2 + x + \frac{1}{4}$ **48.** $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$ **49.** $x^2 - 0.5x + 0.0625$

50. $x^2 + 1.5x + 0.5625$ **51.** $(x + y)^2 + 6(x + y) + 9$ **52.** $(x + y)^2 + 4(x + y) + 4$

Usa la fórmula de la suma o la diferencia de dos cubos, para factorizar cada polinomio.

53. $x^3 + 1$ **54.** $y^3 + 64$ **55.** $j^3 - 125$

56. $k^3 - 216$ **57.** $8x^3 + 27$ **58.** $27y^3 + 125$

59. $64w^3 - 125z^3$ **60.** $216h^3 - 343k^3$ **61.** $8v^3 + 64$

62. $27u^3 - 729$ **63.** $x^6 - y^9$ **64.** $s^{12} + t^6$

65. $(x + 3)^3 + 8$ **66.** $(y - 2)^3 + 27$ **67.** $(c - 4)^3 - 1$ **68.** $(d + 5)^3 - 64$

Factoriza completamente, usando las fórmulas de factorización especiales.

69. $64x^2 - 112x + 49$ **70.** $25x^2 + 90y + 81$ **71.** $36x^2 + 180x + 225$

72. $36y^2 - 168y + 196$ **73.** $16u^4 - 81v^4$ **74.** $625c^4 - 256d^4$

75. $27x^6 - 125y^6$ **76.** $64m^9 + 343n^6$ **77.** $x^2 + 6x + 9 - y^2$

78. $w^2 - 8w + 16 - z^2$ **79.** $4c^4 + 12c^2d^2 + 9d^4 - 25d^2$ **80.** $9x^4 - 30x^2y^2 + 25y^4 - 49y^2$

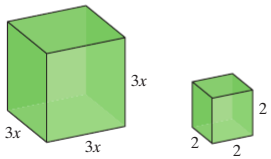
81. $(8x - 5)^2 - (2x + 1)^2$ **82.** $(5x + 4)^2 - (3x - 8)^2$ **83.** $4(3x + 5)^2 + 4(3x + 5) + 1$

84. $25(2y - 1)^2 - 40(2y - 1) + 16$ **85.** $(x + y)^3 + (x - y)^3$ **86.** $(m + n)^3 - (m - n)^3$

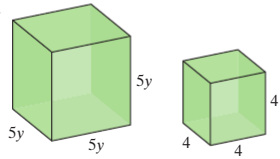
Resolución de problemas

Volumen *En los ejercicios 87-90, determina una expresión, en forma factorizada, para la diferencia de los volúmenes de los dos cubos. Consulta el ejemplo 14.*

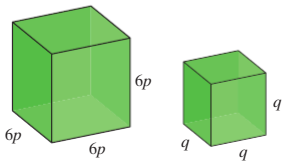
87.



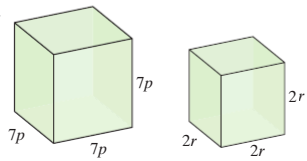
88.



89.

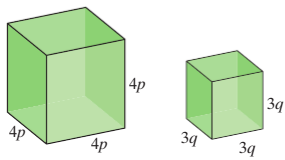


90.

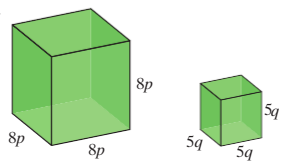


Volumen *En los ejercicios 91 y 92, determina una expresión, en forma factorizada, para la suma de los volúmenes de los dos cubos.*

91.

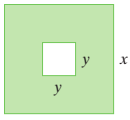


92.



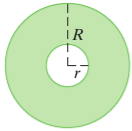
Área o volumen *En los ejercicios 93-97,* **a)** *determina el área o volumen de la figura sombreada, mediante la resta del área o volumen más pequeño, del área o volumen más grande. La fórmula para determinar el área o volumen, se proporciona abajo de la figura.* **b)** *Escribe la expresión obtenida en el inciso* **a)** *en forma factorizada. Parte del MFC en los ejercicios 94, 96 y 97, es* π.

93. Cuadrados



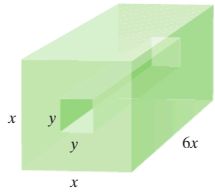
$A = s^2$

94. Círculos



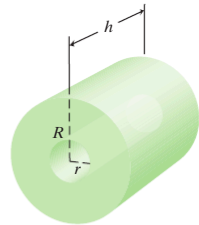
$A = \pi r^2$

95. Sólido rectangular



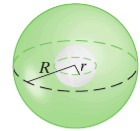
$V = lwh$

96. Cilindro



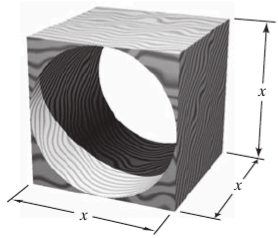
$V = \pi r^2 h$

97. Esfera



$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

98. Área y volumen En un cubo de madera, se corta un agujero circular, como se muestra en la figura.



a) Escribe una expresión en forma factorizada, en términos de x, para el área de la sección transversal de la madera restante.

b) Escribe una expresión en forma factorizada, en términos de x, para el volumen de la madera restante.

99. Determina dos valores de b, que harán de $4x^2 + bx + 9$ un trinomio cuadrado perfecto. Explica cómo determinaste tu respuesta.

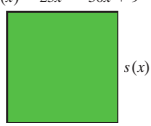
100. Determina dos valores de c, que harán de $16x^2 + cx + 4$ un trinomio cuadrado perfecto. Explica cómo determinaste tu respuesta.

101. Determina el valor de c, que hará de $25x^2 + 20x + c$ un trinomio cuadrado perfecto. Explica cómo determinaste tu respuesta.

102. Determina el valor de d, que hará de $49x^2 - 42x + d$ un trinomio cuadrado perfecto. Explica cómo determinaste tu respuesta.

103. Área Una fórmula para el área de un cuadrado, es $A = s^2$, donde s es un lado. Supón que el área de un cuadrado, está dada como se indica a continuación.

$A(x) = 25x^2 - 30x + 9$



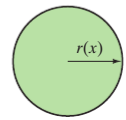
a) Explica cómo determinas la longitud del lado x, $s(x)$.

b) Determina $s(x)$.

c) Determina $s(2)$.

104. Área La fórmula para el área de un círculo es $A = \pi r^2$, donde r es el radio. Supón que el área de un círculo, está dada como se indica a continuación.

$A(x) = 9\pi x^2 + 12\pi x + 4\pi$



a) Explica cómo determinas el radio, $r(x)$.

b) Determina $r(x)$.

c) Determina $r(4)$.

105. Factoriza $x^4 + 64$, al escribir la expresión como $(x^4 + 16x^2 + 64) - 16x^2$, que es una diferencia de dos cuadrados.

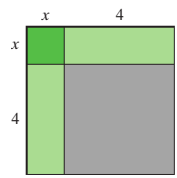
106. Factoriza $x^4 + 4$, al sumar y restar $4x^2$. (Consulta el ejercicio 105.)

107. Si $P(x) = x^2$, usa la diferencia de dos cuadrados para simplificar $P(a + h) - P(a)$.

108. Si $P(x) = x^2$, usa la diferencia de dos cuadrados para simplificar $P(a + 1) - P(a)$.

109. Suma de áreas La figura muestra cómo se *completa el cuadrado*. La suma de las áreas de las tres partes del cuadrado que está sombreado, en verde fuerte y verde es:

$x^2 + 4x + 4x$ o $x^2 + 8x$



a) Determina el área de la cuarta parte (en gris) para completar el cuadrado.

b) Determina la suma de las áreas de las cuatro partes del cuadrado.

c) Este proceso resultó en un trinomio cuadrado perfecto en la parte **b)**. Escribe este trinomio cuadrado perfecto como el cuadrado de un binomio.

110. Factoriza $(m - n)^3 - (9 - n)^3$.

En los ejercicios 111 y 112, indica si la factorización es correcta o incorrecta. Explica tus respuestas.

111. $2x^2 - 18 \stackrel{?}{=} 2(x + 3)(x - 3)$

112. $8x^3 + 27 \stackrel{?}{=} 2x(4x^2 + 5x + 9)$

Ejercicios conceptuales y de redacción

113. a) Explica cómo factorizar la diferencia de dos cuadrados.

b) Factoriza $x^2 - 16$, usando el procedimiento que explicaste en el inciso **a)**.

114. a) Explica cómo factorizar un trinomio cuadrado perfecto.

b) Factoriza $x^2 + 12x + 36$, usando el procedimiento que explicaste en el inciso **a)**.

115. Escribe la fórmula para factorizar la suma de dos cubos.

116. Escribe la fórmula para factorizar la diferencia de dos cubos.

117. Explica por qué una suma de dos cuadrados, $a^2 + b^2$, no se puede factorizar sobre el conjunto de los números reales.

118. Explica cómo determinar si un trinomio es un trinomio cuadrado perfecto.

119. ¿$x^2 + 14x - 49 = (x + 7)(x - 7)$ está factorizado correctamente? Explica.

120. ¿$x^2 + 14x + 49 = (x + 7)^2$ está factorizado correctamente? Explica.

121. ¿$x^2 - 81 = (x - 9)^2$ está factorizado correctamente? Explica.

122. ¿$x^2 - 64 = (x + 8)(x - 8)$ está factorizado correctamente? Explica.

Problemas de desafío

Factoriza completamente.

123. $64x^{4a} - 9y^{6a}$

124. $16p^{8w} - 49p^{6w}$

125. $a^{2n} - 16a^n + 64$

126. $144r^{8k} + 48r^{4k} + 4$

127. $x^{3n} - 8$

128. $27x^{3m} + 64x^{6m}$

129. La expresión $x^6 - 1$, puede factorizarse usando, ya sea la diferencia de dos cuadrados o la diferencia de dos cubos. Al principio, los factores no parecen los mismos. Pero con un poco de manipulación algebraica puede demostrarse que son iguales. Factoriza $x^6 - 1$, usando **a)** la diferencia de dos cuadrados y **b)** la diferencia de dos cubos. **c)** Demuestra que estas dos respuestas son iguales, al factorizar completamente la respuesta obtenida en el inciso **a)**. Luego multiplica por separado los dos binomios y los dos trinomios.

Actividad grupal

En equipo, discutan y respondan el ejercicio 130.

130. Más adelante, en el libro, se tendrán que construir trinomios cuadrados perfectos. Examina algunos trinomios cuadrados perfectos cuyo coeficiente principal sea 1.

a) Explica cómo se relacionan b y c, si el trinomio $x^2 + bx + c$ es un trinomio cuadrado perfecto.

b) Construye un trinomio cuadrado perfecto, si los dos primeros términos son $x^2 + 6x$.

c) Construye un trinomio cuadrado perfecto, si los dos primeros términos son $x^2 - 10x$.

d) Construye un trinomio cuadrado perfecto, si los dos primeros términos son $x^2 - 14x$.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.1] **131.** Simplifica $-2[3x - (2y - 1) - 5x] + 3y$.

[3.6] **132.** Si $f(x) = x^2 - 3x + 6$ y $g(x) = 5x - 2$, determina $(g - f)(-1)$.

[4.4] **133. Ángulos** Un ángulo recto se divide en tres ángulos más pequeños. El más grande de los tres ángulos, es el doble del más pequeño. El ángulo restante es 10° mayor que el ángulo más pequeño. Determina la medida de cada ángulo.

[5.4] **134.** Factoriza el máximo factor común de $45y^{12} + 60y^{10}$.

135. Factoriza $12x^2 - 9xy + 4xy - 3y^2$.

5.7 Repaso general de la factorización

1 Factorización de polinomios usando una combinación de técnicas

1 Factorización de polinomios usando una combinación de técnicas

Ahora se presenta un procedimiento general para factorizar cualquier polinomio.

Para factorizar un polinomio

1. Determina si todos los términos en el polinomio, tienen un máximo factor común distinto de 1. Si es así, factoriza el MFC.
2. Si el polinomio tiene dos términos, determina si es una diferencia de dos cuadrados, o una suma o diferencia de dos cubos. Si es así, factoriza usando la fórmula apropiada de la sección 5.6.
3. Si el polinomio tiene tres términos, determina si es un trinomio cuadrado perfecto. Si lo es, factoriza en concordancia. Si no lo es, factoriza el trinomio usando el método de prueba y error, agrupación, o sustitución, como se explicó en la sección 5.5.
4. Si el polinomio tiene más de tres términos, intenta factorizar por agrupación. Si eso no funciona, considera si tres de los términos son el cuadrado de un binomio.
5. Como paso final, examina tu polinomio factorizado, para ver si algunos factores indicados tienen un factor común y pueden factorizarse aún más. Si hay un factor común, factorízalo.
6. Verifica la respuesta, mediante la multiplicación de los factores.

Comprende el Álgebra

Siempre recuerda que el primer paso, en *cualquier* problema de factorización, es determinar si todos los términos tienen un máximo factor común. Si lo hay, factoriza el MFC.

Los siguientes ejemplos ilustran cómo usar el procedimiento.

EJEMPLO 1 Factoriza $2x^4 - 50x^2$.

Solución Primero, verifica si hay un máximo factor común distinto de 1. Dado que $2x^2$ es común a ambos términos, factorízalo.

$$2x^4 - 50x^2 = 2x^2(x^2 - 25) = 2x^2(x + 5)(x - 5)$$

Observa que $x^2 - 25$, se factorizó como una diferencia de dos cuadrados.

Ahora resuelve el ejercicio 1

EJEMPLO 2 Factoriza $12x^3y^2 - 46x^2y^3 + 40xy^4$.

Solución Comienza por factorizar el MFC, $2xy^2$, de cada término. Luego factoriza el trinomio restante.

$$\begin{aligned} 12x^3y^2 - 46x^2y^3 + 40xy^4 &= 2xy^2(6x^2 - 23xy + 20y^2) \\ &= 2xy^2(2x - 5y)(3x - 4y) \end{aligned}$$

Observa que ninguno de los factores puede factorizarse más.

Ahora resuelve el ejercicio 39

EJEMPLO 3 Factoriza $30x^3 + 20x^2 - 45x - 30$.

Solución Comienza por factorizar el MFC, 5, de cada término. Luego factoriza el polinomio restante, por agrupación.

$$\begin{aligned} 30x^3 + 20x^2 - 45x - 30 &= 5(6x^3 + 4x^2 - 9x - 6) \\ &= 5[2x^2(3x + 2) - 3(3x + 2)] \\ &= 5(3x + 2)(2x^2 - 3) \end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 9

EJEMPLO 4 Factoriza $16x^4 - 81$.

Solución No hay factores comunes a ambos términos. Puedes usar la fórmula de la diferencia de dos cuadrados para factorizar.

$$\begin{aligned} 16x^4 - 81 &= (4x^2)^2 - (9)^2 \\ &= (4x^2 + 9)(4x^2 - 9) \end{aligned}$$

Observa los factores. Observa que $4x^2 - 9$ puede factorizarse aún más, usando la fórmula de la diferencia de dos cuadrados.

$$\begin{aligned} (4x^2 + 9)(4x^2 - 9) &= (4x^2 + 9)[(2x)^2 - (3)^2] \\ &= (4x^2 + 9)(2x + 3)(2x - 3) \end{aligned}$$

Entonces, cuando factorizas por completo, $16x^4 - 81 = (4x^2 + 9)(2x + 3)(2x - 3)$.

Ahora resuelve el ejercicio 51

EJEMPLO 5 Factoriza $2x^4y + 54xy$.

Solución

$$\begin{aligned} 2x^4y + 54xy &= 2xy(x^3 + 27) \\ &= 2xy(x + 3)(x^2 - 3x + 9) \end{aligned}$$

Observa que $x^3 + 27$ se factorizó como una suma de dos cubos.

Ahora resuelve el ejercicio 19

EJEMPLO 6 Factoriza $3x^2 - 18x + 27 - 3y^2$.

Solución Factoriza 3 de los cuatro términos.

$$3x^2 - 18x + 27 - 3y^2 = 3(x^2 - 6x + 9 - y^2)$$

Ahora, trata de factorizar por agrupación. Dado que los cuatro términos dentro de los paréntesis no pueden factorizarse por agrupación, considera si tres de los términos pueden escribirse como el cuadrado de un binomio. Ya que esto sí se puede hacer, expresa $x^2 - 6x + 9$ como $(x - 3)^2$, y luego usa la fórmula de diferencia de dos cuadrados. En consecuencia:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 18x + 27 - 3y^2 &= 3[(x - 3)^2 - y^2] \\ &= 3[(x - 3 + y)(x - 3 - y)] \\ &= 3(x - 3 + y)(x - 3 - y) \end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 43

SUGERENCIA ÚTIL

En esta sección, se revisaron todas las técnicas para factorizar expresiones. Si todavía tienes dificultad con la factorización, debes estudiar nuevamente el material de las secciones 5.4-5.6.

5.7 SERIE DE EJERCICIOS

Practica tus habilidades

Factoriza cada polinomio completamente.

1. $3x^2 - 75$
2. $6x^2 - 96$
3. $7x^2 - 42x + 63$
4. $4x^2 - 24x + 36$

5. $10s^2 + 19s - 15$

6. $21t^2 - 29t - 10$

7. $60x^2 - 65x - 175$

8. $60x^2 - 136x - 64$

9. $3x^3 + 15x^2 - 9x - 45$

10. $2x^3 - 10x^2 + 8x - 40$

11. $6x^5 - 54x$

12. $7x^2y^2z^2 - 28x^2y^2$

13. $-42x^2 + 7x + 280$

14. $-120y^2 + 16y + 192$

15. $x^4 - x^2y^2$

16. $p^6 - p^4q^2$

17. $44c^6 - 11d^4$

18. $7y^4 - 63x^6$

19. $x^7y^2 - x^4y^2$

20. $4x^3 + 108$

21. $x^5 - 16x$

22. $2x^5 - 162x$

23. $-3z^6 + 48z^2$

24. $-2y^5 + 162y$

25. $4x^6 + 32y^3$

26. $135x^3 - 40y^6$

27. $-54c^2 + 24d^6$

28. $-48c^4 + 75$

29. $6x^2 + 36xy + 54y^2$

30. $3x^2 - 30x + 75$

31. $(3x + 1)^2 - 36$

32. $(5x - 2)^2 - 81$

33. $(y + 5)^2 + 4(y + 5) + 4$

34. $(x + 4)^2 - 12(x + 4) + 36$

35. $-16x^3 - 54y^3$

36. $-384p^3 + 6$

37. $x^3 + \dfrac{1}{64}$

38. $y^3 - \dfrac{1}{125}$

39. $6y^3 + 14y^2 + 4y$

40. $6x^2 - 15x - 9$

41. $c^{12} + 1$

42. $x^6 + y^6$

43. $x^2 - 2xy + y^2 - 25$

44. $x^2 + 16x + 64 - 100y^2$

45. $24x^2 - 34x + 12$

46. $40x^2 + 52x - 12$

47. $5bc - 10cx - 7by + 14xy$

48. $10km - 25kq - 6mp + 15pq$

49. $12a^2b^2c - 42a^2b^2d - 20ab^3c + 70ab^3d$

50. $18wx^2y^2 - 12wx^2yz - 45x^3y^2 + 30x^3yz$

51. $x^4 - 16$

52. $x^4 - 81$

53. $3x^4 - x^2 - 4$

54. $x^6 + 15x^3 + 54$

55. $98k^4 + 84k^3 + 18k^2$

56. $45a^4 - 30a^3 + 5a^2$

57. $2(y + 4)^2 + 5(y + 4) - 12$

58. $7(3m - 1)^2 + 4(3m - 1) - 3$

59. $27x^3 - 75x$

60. $16y^4 - 9y^2$

61. $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

62. $16x^4 - 72x^2 + 81$

63. $4x^2y^2 + 12xy + 9$

64. $49x^4 - 42x^2y^3 + 9y^6$

Resolución de problemas

Relaciona los ejercicios 65-72 con las expresiones marcadas de la **a)** *a la* **h)** *a la derecha.*

65. $a^2 + b^2$

66. $a^2 - b^2$

67. $a^2 + 2ab + b^2$

68. $a^3 + b^3$

69. $a^3 - b^3$

70. $a^2 - 2ab + b^2$

71. un factor de $a^3 + b^3$

72. un factor de $a^3 - b^3$

a) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

b) $(a - b)^2$

c) $a^2 - ab + b^2$

d) $(a + b)^2$

e) no factorizable

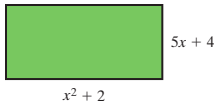
f) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

g) $(a + b)(a - b)$

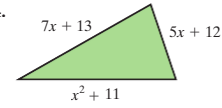
h) $a^2 + ab + b^2$

Perímetro *En los ejercicios 73 y 74, determina una expresión, en forma factorizada, para el perímetro de cada figura.*

73.

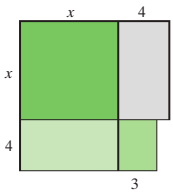


74.

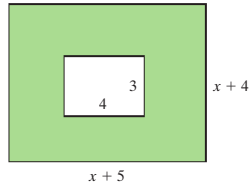


Área *En los ejercicios 75-78, determina una expresión, en forma factorizada, para el área de la región sombreada para cada figura.*

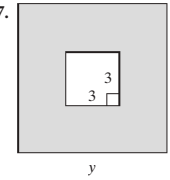
75.



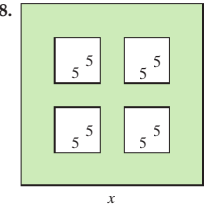
76.



77.

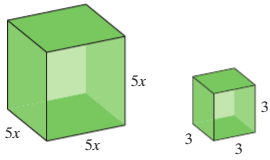


78.

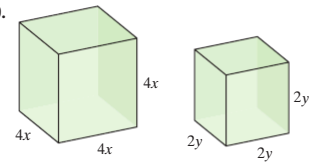


Volumen *En los ejercicios 79 y 80, determina una expresión, en forma factorizada, para la diferencia en los volúmenes de los cubos.*

79.

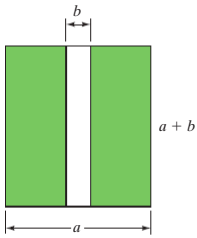


80.

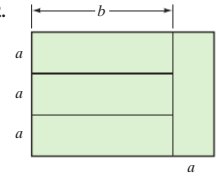


Área *En los ejercicios 81-84,* **a)** *escribe una expresión para el área sombreada de la figura, y* **b)** *escribe la expresión en forma factorizada.*

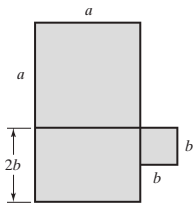
81.



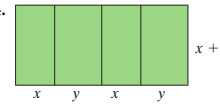
82.



83.



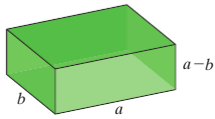
84.



85. Área superficial

a) Escribe una expresión para el área superficial de los cuatro lados de la caja mostrada (omite la parte superior y la inferior).

b) Escribe la expresión en forma factorizada.



86. Explica cómo la fórmula, para factorizar la *diferencia* de dos cubos, puede usarse para factorizar $x^3 + 27$.

87. a) Explica cómo construir un trinomio cuadrado perfecto.

b) Construye un trinomio cuadrado perfecto y luego muestra sus factores.

Problemas de desafío

En este capítulo, solamente se ha trabajado con exponentes enteros positivos. Sin embargo, los exponentes fraccionarios y los exponentes enteros negativos, también se pueden factorizar de una expresión. Las siguientes expresiones, no son polinomios. **a)** *Factoriza la variable con el exponente más bajo (o más negativo) de cada expresión. (Los exponentes fraccionarios se estudiarán en la sección 7.2.)* **b)** *Factoriza completamente.*

88. $x^{-2} - 5x^{-3} + 6x^{-4}$, factoriza x^{-4}

89. $x^{-3} - 2x^{-4} - 3x^{-5}$, factoriza x^{-5}

90. $x^{5/2} + 3x^{3/2} - 4x^{1/2}$, factoriza $x^{1/2}$

91. $5x^{1/2} + 2x^{-1/2} - 3x^{-3/2}$, factoriza $x^{-3/2}$

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.1] **92.** Resuelve $6(x + 4) - 4(3x + 3) = 6$.

[2.6] **93.** Determina el conjunto solución para $\left|\frac{6 + 2z}{3}\right| > 2$.

[4.3] **94. Mezclas de café** Demetrio administra una tienda. Él quiere mezclar 30 libras de café para venderlo por un costo total de \$170. Para obtener la mezcla, mezclará café que se vende por \$5.20 la libra, con café que se vende por \$6.30 la libra. ¿Cuántas libras de cada café debe usar?

[5.2] **95.** Multiplica $(5x + 4)(x^2 - x + 4)$.

[5.4] **96.** Factoriza $2x^3 + 6x^2 - 5x - 15$.

5.8 Ecuaciones polinomiales

1. **Uso de la propiedad del factor cero para resolver ecuaciones**
2. **Uso de la factorización para resolver ecuaciones**
3. **Uso de la factorización para resolver problemas aplicados**
4. **Uso de la factorización para determinar las intersecciones con el eje de las *x* de una función cuadrática**

Siempre que dos polinomios se igualen uno con otro, se tiene una **ecuación polinomial**.

Ejemplos de ecuaciones polinomiales

$$x^2 + 2x = x - 5$$
$$y^3 + 3y - 2 = 0$$
$$4x^4 + 2x^2 = -3x + 2$$

El **grado de una ecuación polinomial**, es el mismo que el grado de su término más alto. Por ejemplo, las tres ecuaciones anteriores tienen grados 2, 3 y 4, respectivamente.

Ecuación cuadrática

Una ecuación polinomial de segundo grado en una variable, se llama **ecuación cuadrática**.

Ejemplos de ecuaciones cuadráticas

$$3x^2 + 6x - 4 = 0$$
$$5x = 2x^2 - 4$$
$$(x + 4)(x - 3) = 0$$

Cualquier ecuación cuadrática, puede escribirse en *forma general*.

Forma general de una ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

donde a, b y c son números reales.

Antes de avanzar más, asegúrate de que puedes reescribir, en forma general, cada una de las tres ecuaciones cuadráticas anteriores, con $a > 0$.

1 Uso de la propiedad del factor cero para resolver ecuaciones

Para resolver ecuaciones usando factorización, se usa la **propiedad del factor cero**.

Propiedad del factor cero

Para todo número real, m y n, si $m \cdot n = 0$, entonces, ya sea $m = 0$ o $n = 0$, o tanto m como $n = 0$.

La propiedad del factor cero afirma que *si el producto de dos factores es igual a 0, uno (o ambos) de los factores debe ser 0.*

Comprende el Álgebra

La propiedad del factor cero, afirma que, si multiplica dos o más expresiones y obtienes un resultado de 0, entonces, al menos una de las expresiones debe ser igual que 0.

EJEMPLO Resuelve la ecuación $(x + 5)(x - 3) = 0$.

Solución Dado que el producto de los factores es igual a 0, de acuerdo con la propiedad del factor cero, uno o ambos factores debe ser igual a 0. Iguala cada factor con 0 y resuelve cada ecuación por separado.

$$x + 5 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0$$
$$x = -5 \qquad\quad x = 3$$

Por tanto, si x es ya sea -5 o 3, la ecuación es un enunciado verdadero.

Verifica $x = -5$

$$(x + 5)(x - 3) = 0$$
$$(-5 + 5)(-5 - 3) \stackrel{?}{=} 0$$
$$0(-8) \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \quad \text{Verdadero}$$

$x = 3$

$$(x + 5)(x - 3) = 0$$
$$(3 + 5)(3 - 3) \stackrel{?}{=} 0$$
$$8(0) \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \quad \text{Verdadero}$$

Ahora resuelve el ejercicio 9

2 Uso de la factorización para resolver ecuaciones

A continuación, se presenta un procedimiento que puede usarse para obtener la solución a una ecuación polinomial por factorización.

Para resolver una ecuación polinomial por factorización

1. Usa la propiedad de adición para escribir el polinomio en orden decreciente de la variable, con un lado de la ecuación igual a 0.
2. Combina cualesquier términos semejantes y factoriza el polinomio.
3. Iguala, cada factor *que contenga una variable*, a 0 y resuelve las ecuaciones resultantes.
4. Verifica las soluciones en la ecuación *original*.

EJEMPLO 2 Resuelve la ecuación $9x^2 = -18x$.

Solución Primero se sumará $18x$ a ambos lados de la ecuación. Esto resultará en que el polinomio se iguale a 0. Luego se factoriza el polinomio.

$$9x^2 = -18x$$
$$9x^2 + 18x = 0$$
$$9x(x + 2) = 0$$

A continuación, se iguala, cada factor que contenga una variable, a 0 y se resuelven las ecuaciones resultantes.

$$9x = 0 \quad \text{o} \quad x + 2 = 0$$
$$x = 0 \qquad\quad x = -2$$

Una verificación en la ecuación original, mostrará que los números 0 y -2 satisfacen la ecuación $9x^2 = -18x$.

Ahora resuelve el ejercicio 19

CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

La propiedad del factor cero puede usarse solamente, cuando un lado de la ecuación es igual a 0.

CORRECTO	INCORRECTO
$(x-4)(x+3)=0$	~~$(x-4)(x+3)=2$~~
$x-4=0 \quad \text{o} \quad x+3=0$	~~$x-4=2 \quad \text{o} \quad x+3=2$~~
$x=4 \qquad x=-3$	~~$x=6 \qquad x=-1$~~

En el proceso incorrecto ilustrado a la derecha, la propiedad del factor cero no puede usarse, pues el lado derecho de la ecuación no es igual a 0. El ejemplo 3, muestra cómo resolver correctamente tales problemas.

EJEMPLO 3

Resuelve la ecuación $(x-1)(3x+2)=4x$.

Solución No se puede usar la propiedad del factor cero, hasta obtener primero un 0 en un lado de la ecuación.

$$(x-1)(3x+2)=4x$$

$3x^2-x-2=4x$ Multiplica los factores.

$3x^2-5x-2=0$ Haz un lado igual a 0.

$(3x+1)(x-2)=0$ Factoriza el trinomio.

$3x+1=0 \quad \text{o} \quad x-2=0$ Propiedad del factor cero.

$3x=-1 \qquad x=2$ Resuelve las ecuaciones.

$x=-\frac{1}{3}$

Las soluciones son $-\frac{1}{3}$ y 2. Verifica estos valores en la ecuación original.

Ahora resuelve el ejercicio 57

SUGERENCIA ÚTIL

Cuando resuelves una ecuación cuyo término principal tiene un coeficiente negativo, por lo general, el coeficiente se hace positivo al multiplicar ambos lados de la ecuación por -1. Esto hace más sencillo el proceso de factorización, como en la siguiente ecuación.

$$-x^2+5x+6=0$$
$$-1(-x^2+5x+6)=-1\cdot 0$$
$$x^2-5x-6=0$$

Ahora puedes resolver la ecuación $x^2-5x-6=0$ por factorización.

$$(x-6)(x+1)=0$$
$$x-6=0 \quad \text{o} \quad x+1=0$$
$$x=6 \qquad x=-1$$

Los números 6 y -1, satisfacen la ecuación original, $-x^2+5x+6=0$.

EJEMPLO 4

Resuelve la ecuación $-6x^2-x+35=0$.

Solución Dado que el coeficiente principal, -6, es negativo, comienza por multiplicar ambos lados de la ecuación por -1.

$-1(-6x^2-x+35)=-1(0)$ Multiplica ambos lados por -1.

$6x^2+x-35=0$

$(2x+5)(3x-7)=0$ Factoriza el trinomio.

$2x+5=0 \quad \text{o} \quad 3x-7=0$ Propiedad del factor cero.

$2x=-5 \qquad 3x=7$

$x=-\frac{5}{2} \qquad x=\frac{7}{3}$

Una verificación demostrará que los números $-\frac{5}{2}$ y $\frac{7}{3}$, satisfacen la ecuación original $-6x^2 - x + 35 = 0$.

Ahora resuelve el ejercicio 25

EJEMPLO 5 Resuelve la ecuación $3x^2 + 2x + 12 = -13x$.

Solución

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2x + 12 &= -13x && \\ 3x^2 + 15x + 12 &= 0 && \text{Haz un lado igual a 0.} \\ 3(x^2 + 5x + 4) &= 0 && \text{Factoriza 3.} \\ 3(x+4)(x+1) &= 0 && \text{Factoriza el trinomio.} \\ x + 4 = 0 \quad \text{o} \quad & x + 1 = 0 && \text{Propiedad del factor cero.} \\ x = -4 \qquad\quad & x = -1 && \text{Resuelve en términos de } x. \end{aligned}$$

Dado que el factor 3 no contiene una variable, no se tiene que igualar a 0. Solamente los números -4 y -1 satisfacen la ecuación $3x^2 + 2x + 12 = -13x$.

Ahora resuelve el ejercicio 33

La propiedad del factor cero puede extenderse a tres o más factores, como se ilustra en el ejemplo 6.

EJEMPLO 6 Resuelve la ecuación $2p^3 + 5p^2 - 3p = 0$.

Solución Primero, factoriza, después iguala con 0 cada factor que contenga una p.

$$\begin{aligned} 2p^3 + 5p^2 - 3p &= 0 && \\ p(2p^2 + 5p - 3) &= 0 && \text{Factoriza } p. \\ p(2p-1)(p+3) &= 0 && \text{Factoriza el trinomio.} \\ p = 0 \quad \text{o} \quad 2p - 1 = 0 \quad \text{o} \quad & p + 3 = 0 && \text{Propiedad del factor cero.} \\ 2p = 1 \qquad\quad & p = -3 && \text{Resuelve en términos de } p. \\ p = \frac{1}{2} \qquad\quad & && \end{aligned}$$

Los números 0, $\frac{1}{2}$ y -3, son todos soluciones a la ecuación.

Ahora resuelve el ejercicio 35

Observa que la ecuación, en el ejemplo 6, no es una ecuación cuadrática, porque el exponente en el término principal es 3, no 2. Esta es una **ecuación cúbica**, o **de tercer grado**.

EJEMPLO 7 Para la función $f(x) = x^2 + x - 16$, determina todos los valores de a, para los cuales $f(a) = 4$.

Solución Primero, se determina que $f(a) = a^2 + a - 16$. Después, dado que $f(a) = 4$, se tiene la siguiente ecuación a resolver.

$$\begin{aligned} \overbrace{a^2 + a - 16}^{f(a)} &= 4 \\ a^2 + a - 20 &= 0 \\ (a+5)(a-4) &= 0 \\ a + 5 = 0 \quad \text{o} \quad & a - 4 = 0 \\ a = -5 \qquad\quad & a = 4 \end{aligned}$$

Una verificación mostrará que $f(-5) = 4$ y $f(4) = 4$.

Ahora resuelve el ejercicio 59

3 Uso de la factorización para resolver problemas aplicados

Ahora, se consideran algunos problemas aplicados que recurren a la factorización en su solución.

EJEMPLO 8 **Triángulo** Una tienda grande de lona, tiene una entrada con forma de triángulo (observa la **Figura 5.17**).

Determina la base y la altura de la entrada, si la altura es 3 pies menos que el doble de la base y el área total de la entrada es 27 pies cuadrados.

Solución Entiende Para comenzar, dibuja una imagen de la entrada y etiquétala con la información dada **(Figura 5.18)**.



FIGURA 5.17

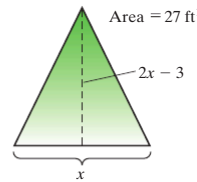


FIGURA 5.18

Traduce Usa la fórmula del área de un triángulo, para resolver el problema.

$$A = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura})$$

$$27 = \frac{1}{2}(x)(2x - 3)$$ Sustituye expresiones para la base, la altura y el área.

Realiza

$$2(27) = 2\left[\frac{1}{2}(x)(2x - 3)\right]$$ Multiplica ambos lados por 2, para remover fracciones.

$$54 = x(2x - 3)$$

$$54 = 2x^2 - 3x$$ Propiedad distributiva.

$$0 = 2x^2 - 3x - 54$$ Haz un lado igual a 0.

$$\text{or} \quad 2x^2 - 3x - 54 = 0$$

$$(2x + 9)(x - 6) = 0$$ Factoriza el trinomio.

$$2x + 9 = 0 \quad \text{o} \quad x - 6 = 0$$ Propiedad del factor cero.

$$2x = -9 \qquad x = 6$$ Resuelve en términos de x.

$$x = -\frac{9}{2}$$

Responde Dado que las dimensiones de una figura geométrica no pueden ser negativas, puedes eliminar $x = -\frac{9}{2}$ como una respuesta al problema. En consecuencia:

$$\text{base} = x = 6 \text{ pies}$$

$$\text{altura} = 2x - 3 = 2(6) - 3 = 9 \text{ pies}$$

Ahora resuelve el ejercicio 89

EJEMPLO 9 **Altura de una bala de cañón** Un cañón se asienta en lo alto de un risco de 288 pies, mirando hacia un lago. Una bala de cañón se dispara hacia arriba, con una rapidez de 112 pies por segundo. La altura, h, en pies, de la bala de cañón sobre el lago en cualquier momento, t, se determina mediante la función:

$$h(t) = -16t^2 + 112t + 288$$

Determina el tiempo que la bala de cañón tarda en golpear el agua, después de que el cañón se dispara.

Solución

Entiende Dibuja una imagen para auxiliarte a analizar el problema (observa la **Figura 5.19**). Cuando la bala de cañón golpea el agua, su altura sobre el agua es de 0 pies.

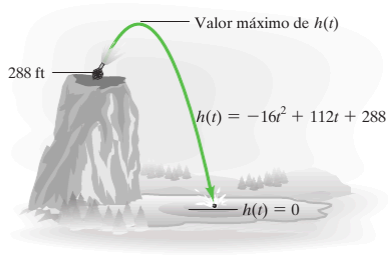


FIGURA 5.19

Traduce Para resolver el problema, debes determinar el tiempo, t, cuando $h(t) = 0$. Para hacer esto, la función dada se iguala con 0 y se resuelve en términos de t.

$$-16t^2 + 112t + 288 = 0 \quad \text{Establece } h(t) = 0.$$
$$-16(t^2 - 7t - 18) = 0 \quad \text{Factoriza } -16.$$
$$-16(t + 2)(t - 9) = 0 \quad \text{Factoriza el trinomio.}$$
$$t + 2 = 0 \quad \text{o} \quad t - 9 = 0 \quad \text{Propiedad del factor cero.}$$
$$t = -2 \qquad t = 9 \quad \text{Resuelve en términos de } t.$$

Responde Dado que t es el número de segundos, -2 no es una respuesta posible. La bala de cañón golpeará el agua en 9 segundos.

Ahora resuelve el ejercicio 95

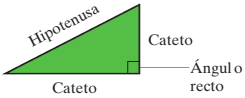


FIGURA 5.20

Teorema de Pitágoras Considera un triángulo recto (observa la **Figura 5.20**). Los dos lados más cortos de un triángulo recto se llaman **catetos**, y el lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa**. El *teorema de Pitágoras*, expresa la relación entre las longitudes de los catetos del triángulo y la longitud de su hipotenusa.

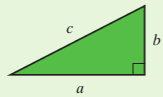
Teorema de Pitágoras

El cuadrado de la longitud de la hipotenusa de un triángulo recto, es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los dos catetos; esto es:

$$\text{cateto}^2 + \text{cateto}^2 = \text{hipotenusa}^2$$

Si a y b representan las longitudes de los catetos y c representa la longitud de la hipotenusa, entonces:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



EJEMPLO 10 **Cable para un árbol** Jacobo coloca un cable de sujeción en un árbol, para ayudarlo a crecer recto. La ubicación de la estaca y del lugar dónde el cable se une al árbol, se muestran en la **Figura 5.21**. Determina la longitud del cable.

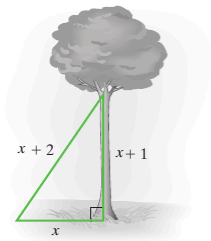


FIGURA 5.21

Solución

Entiende Observa que la longitud del cable es la hipotenusa de un triángulo recto formado por el árbol y la tierra. Para resolver este problema, se usa el teorema de Pitágoras. A partir de la figura, se ve que los catetos son x y $x + 1$, y la hipotenusa es $x + 2$.

Traduce

$$\text{cateto}^2 + \text{cateto}^2 = \text{hipotenusa}^2 \quad \text{Teorema de Pitágoras.}$$
$$x^2 + (x + 1)^2 = (x + 2)^2 \quad \text{Sustituye expresiones para los catetos y la hipotenusa.}$$

Realiza

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 + 2x + 1 &= x^2 + 4x + 4 && \text{Términos cuadrados.} \\ 2x^2 + 2x + 1 &= x^2 + 4x + 4 && \text{Simplifica.} \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 && \text{Haz un lado igual a 0.} \\ (x - 3)(x + 1) &= 0 && \text{Factoriza.} \\ x - 3 = 0 \quad &\text{o} \quad x + 1 = 0 && \text{Resuelve.} \\ x = 3 \qquad &\qquad x = -1 \end{aligned}$$

Responde A partir del diagrama, se sabe que x no puede ser un valor negativo. Por tanto, la única respuesta posible es 3. La estaca se coloca a 3 pies del árbol. El cable se agarra al árbol a $x + 1$, o 4, pies del suelo. La longitud del cable es de $x + 2$, o 5, pies.

Ahora resuelve el ejercicio 99

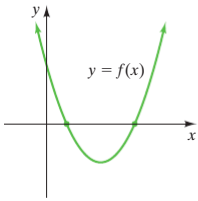


FIGURA 5.22

4 Uso de la factorización para determinar las intersecciones con el eje de las *x* de una función cuadrática

Considera la gráfica de la **Figura 5.22**.

En las intersecciones con el eje de las x, el valor de la función, o de y, es 0. Por tanto, si quieres determinar las **intersecciones con el eje de las x de una gráfica,** puedes igualar la función a 0 y resolver en términos de x.

EJEMPLO 11 Determina las intersecciones con el eje de las x, de la gráfica de $y = x^2 - 2x - 8$.

Solución En las intersecciones con el eje de las x, y tiene un valor de 0. Por tanto, para determinar las intersecciones con el eje de las x, escribe:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 8 &= 0 \\ (x - 4)(x + 2) &= 0 \\ x - 4 = 0 \quad &\text{o} \quad x + 2 = 0 \\ x = 4 \qquad &\qquad x = -2 \end{aligned}$$

Comprende el Álgebra

La intersección con el eje de las x es un punto donde la gráfica cruza o toca el eje x. La coordenada y, de una intersección con el eje de las x, siempre es 0.

Las soluciones de $x^2 - 2x - 8 = 0$, son 4 y -2. Las intersecciones con el eje de las x de la gráfica de $y = x^2 - 2x - 8$, son (4, 0) y $(-2, 0)$, como se ilustra en la **Figura 5.23**.

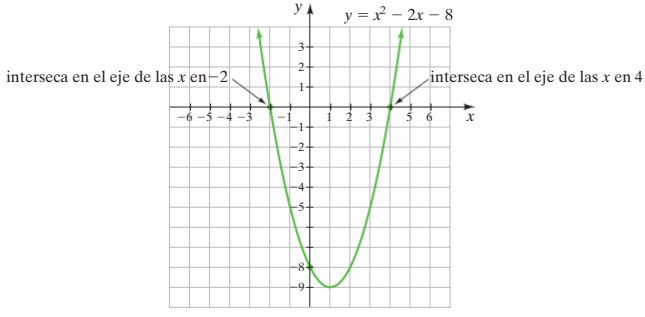


FIGURA 5.23

Ahora resuelve el ejercicio 67

Si conoces las intersecciones con el eje de las x de una gráfica, puedes trabajar en retroceso para determinar la ecuación de la gráfica. Lee el recuadro, Usa tu calculadora graficadora, de la siguiente página, para aprender cómo hacer esto.

USA TU CALCULADORA GRAFICADORA

Determina la ecuación de la gráfica en la **Figura 5.24**.

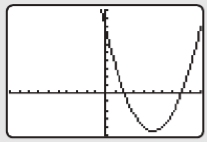


FIGURA 5.24 $[-10, 10, 1, -10, 20, 2]$

Si supones que las intersecciones son valores enteros, entonces las intersecciones con el eje de las x están en 2 y 8. Por tanto:

Intersecciones con el eje de las x en	Factores	Posible ecuación de gráfica
2 y 8	$(x-2)(x-8)$	$y=(x-2)(x-8)$
		o $y=x^2-10x+16$

Dado que el intercepto con el eje de las y de la gráfica, en la **Figura 5.24**, está en 16, $y=x^2-10x+16$, es la ecuación de la gráfica. El ejemplo 12, explica por qué se usan las palabras *posible ecuación de la gráfica*.

EJEMPLO 12 Escribe una ecuación, cuya gráfica tenga intersecciones con el eje de las x en -2 y 4.

Solución Si las intersecciones con el eje de las x están en -2 y 4, entonces un conjunto de factores que produce estas intersecciones con el eje de las x, es $(x+2)$ y $(x-4)$, respectivamente. Por tanto, una ecuación que tendrá intersecciones con el eje de las x en -2 y 4, es:

$$y=(x+2)(x-4) \text{ o } y=x^2-2x-8.$$

Observa que otras ecuaciones pueden tener gráficas con las mismas intersecciones con el eje de las x. Por ejemplo, la gráfica de $y=2(x^2-2x-8)$ o $y=2x^2-4x-16$, también tiene intersecciones con el eje de las x en -2 y 4. De hecho, la gráfica de $y=a(x^2-2x-8)$, para cualquier número real a distinto de cero, tendrá intersecciones con el eje de las x en -2 y 4.

Ahora resuelve el ejercicio 83

En el ejemplo 12, aunque las intersecciones con el eje de las x de la gráfica de $y=a(x^2-2x-8)$, siempre estarán en -2 y 4, la intersección con el eje de las y de la gráfica, dependerá del valor de a. Por ejemplo, si $a=1$, la intersección con el eje de las y estará en $1(-8)$ o -8. Si $a=2$, la intersección con el eje de las y estará en $2(-8)$ o -16, etcétera.

5.8 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

$n=0$	cateto	intersección con el eje de las x	$m=0$	expresión	$ax^2+bx=-c$
ecuación	hipotenusa	lado	término	intersección con el eje de las y	$ax^2+bx+c=0$

1. Cuando dos polinomios se igualan uno con otro, se tiene una _____ polinomial.
2. El grado de una ecuación polinomial, es el grado del _____ más alto del polinomio.
3. La forma general de una ecuación cuadrática, es _____.
4. La propiedad del factor cero afirma que, si $m \cdot n = 0$, entonces, ya sea $m=0$ o _____, o tanto $m=0$ como $n=0$.

5. Un punto donde la gráfica cruza, o toca el eje x, se llama _____.

6. En un triángulo recto, el lado opuesto al ángulo recto es la _____.

Practica tus habilidades

Resuelve.

7. $4x(x-1)=0$ **8.** $5x(x+6)=0$ **9.** $(3x-2)(7x-1)=0$

10. $(2x+3)(4x+5)=0$ **11.** $2(x+1)(x-7)=0$ **12.** $3(a-5)(a+2)=0$

13. $x(x-9)(x-4)=0$ **14.** $2a(a+3)(a+10)=0$ **15.** $x^2+5x=0$

16. $4a^2-32a=0$ **17.** $-x^2+6x=0$ **18.** $-3x^2-24x=0$

19. $4x^2=12x$ **20.** $3y^2=-21y$ **21.** $x^2+x-12=0$

22. $b^2+b-72=0$ **23.** $6x^2-7x-3=0$ **24.** $6k^2+11k-10=0$

25. $-12x^2+11x-2=0$ **26.** $-10x^2+9x+9=0$ **27.** $x^2-4x=12$

28. $x^2=7x-12$ **29.** $2y^2=-y+6$ **30.** $3a^2=-a+2$

31. $54x^2+15x=56$ **32.** $63x^2+23x=56$ **33.** $3x^2-6x-72=0$

34. $2a^2+18a+40=0$ **35.** $x^3-3x^2-28x=0$ **36.** $y^3+y^2-30y=0$

37. $x^3-3x^2=18x$ **38.** $x^3=-19x^2+42x$ **39.** $x^3+3x^2-4x-12=0$

40. $x^3-2x^2-9x+18=0$ **41.** $c^2=14c-49$ **42.** $12d-9=4d^2$

43. $16x^2=9$ **44.** $49c^2=81$ **45.** $4y^3-36y=0$

46. $3x^4-48x^2=0$ **47.** $9m^3-9m^2-16m+16=0$ **48.** $4n^3-8n^2-9n+18=0$

49. $-x^2=2x-99$ **50.** $-x^2+18x=80$ **51.** $(x+7)^2-16=0$

52. $(x-6)^2-4=0$ **53.** $p^4-13p^2+36=0$ **54.** $q^4-17q^2+16=0$

55. $6a^2-12-4a=19a-32$ **56.** $a^2+4a+4=25-11a^2$ **57.** $(2x+5)(x-1)=12x$

58. $(a-1)(3a+2)=4a$

59. Para $f(x)=x^2-2x-38$, determina todos los valores de a, para los cuales $f(a)=25$.

60. Para $f(x)=x^2+x+3$, determina todos los valores de a, para los cuales $f(a)=75$.

61. Para $g(x)=4x^2-13$, determina todos los valores de a, para los cuales $g(a)=12$.

62. Para $g(x)=9x^2-5$, determina todos los valores de a, para los cuales $g(a)=20$.

63. Para $h(x)=9x^3+27x^2-16x-24$, determina todos los valores de a, para los cuales $h(a)=24$.

64. Para $h(x)=25x^3+50x^2-4x+10$, determina todos los valores de a, para los cuales $h(a)=18$.

Usa factorización para determinar las intersecciones con el eje de las x, de las gráficas de cada ecuación (consulta el ejemplo 11).

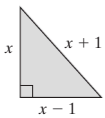
65. $y=x^2-1$ **66.** $y=x^2-4$

67. $y=x^2-10x+24$ **68.** $y=x^2-x-42$

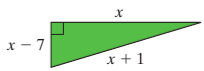
69. $y=12x^3-46x^2+40x$ **70.** $y=12x^3-39x^2+30x$

Triángulo recto *En los ejercicios 71-76, usa el teorema de Pitágoras para determinar x.*

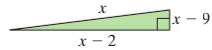
71.



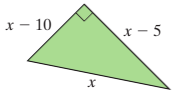
72.



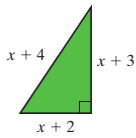
73.



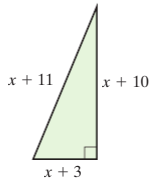
74.



75.



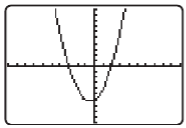
76.



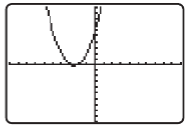
En los ejercicios 77-80, determina las intersecciones con el eje de las x de cada gráfica; luego relaciona la ecuación, con la gráfica adecuada marcada **a)-d)**.

77. $y = x^2 - 5x + 6$ **78.** $y = x^2 - x - 6$ **79.** $y = x^2 + 5x + 6$ **80.** $y = x^2 + x - 6$

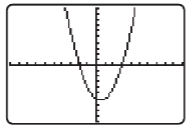
a)



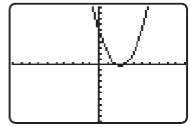
b)



c)



d)



Escribe una ecuación, cuya gráfica tendrá intersecciones con el eje de las x en los valores dados.

81. 1 y 5

82. 3 y −7

83. 4 y −2

84. −0.4 y 2.6

85. $-\frac{5}{6}$ y 2

86. $\frac{3}{2}$ y 6

Resolución de problemas

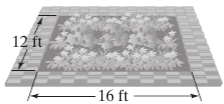
87. Mesa de café rectangular Una mesa de café es rectangular. Si la longitud de su área superficial es 1 pie mayor que el doble de su ancho, y el área superficial de la mesa es 10 pies cuadrados, determina su longitud y ancho.

88. Cobertizo rectangular El piso de un cobertizo tiene una área de 60 pies cuadrados. Determina la longitud y el ancho, si la longitud es 2 pies menos que el doble de su ancho.

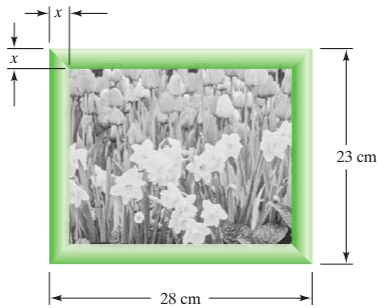
89. Vela triangular La vela de un bote es triangular, con una altura de 6 pies mayor que su base. Si el área de la vela es 80 pies cuadrados, determina su base y altura.

90. Tienda triangular Una tienda triangular tiene una altura que es 4 pies menos que su base. Si el área de un lado es de 70 pies cuadrados, determina la base y la altura de la tienda.

91. Sendero El jardín de Jimena está rodeado por un sendero con un ancho uniforme. El jardín y el sendero, juntos, cubren una área de 320 pies cuadrados. Si las dimensiones del jardín son de 12 pies por 16 pies, determina el ancho del sendero.



92. Marco de una pintura Las dimensiones exteriores de un marco de una pintura son de 20 cm por 23 cm. El área de la pintura, en sí, es de 414 centímetros cuadrados. Determina el ancho del marco, en sí.

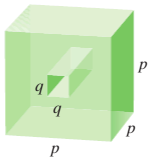


93. Jardín de vegetales El jardín de vegetales de Sara, mide 20 pies por 30 pies. Además de colocar abono en su jardín, ella quiere colocarlo alrededor del exterior del jardín con un ancho uniforme. Si ella tiene suficiente abono para cubrir una área de 936 pies cuadrados, ¿cuán ancho debe ser el borde de abono?

94. Jardín cuadrado Daniel tiene un jardín cuadrado. Él agrega un sendero de 2 pies de ancho alrededor de su jardín. Si el área total de sendero y del jardín es de 196 pies cuadrados, determina las dimensiones del jardín.

95. Escultura de agua En un edificio en Navy Pier, en Chicago, las boquillas en una fuente de agua disparan breves chorros de agua sobre un sendero. Los chorros de agua alcanzan una altura máxima y después bajan

105. Cubo A un cubo sólido, con dimensiones p^3, se le remueve un sólido rectangular con dimensiones pq^2.

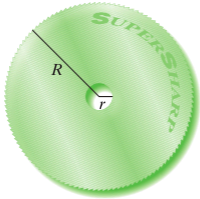


a) Escribe una fórmula para el volumen restante, V.

b) Factoriza el lado derecho de la fórmula en el inciso a).

c) Si el volumen es de 1 620 pulgadas cúbicas y p es de 12 pulgadas, determina q.

106. Navaja circular de acero Una navaja circular de acero, tiene un orificio recortado en su centro, como se muestra en la figura.

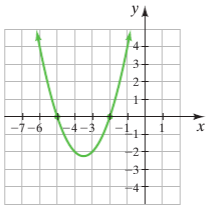


a) Escribe una fórmula para el área restante de la navaja.

b) Factoriza el lado derecho de la fórmula en el inciso a).

c) Determina A, si $R = 10$ cm y $r = 3$ cm.

107. Considera la siguiente gráfica de una función cuadrática.



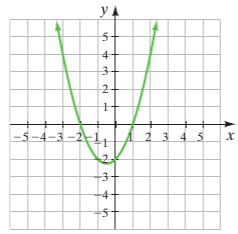
a) Escribe una función cuadrática que tenga las intersecciones con el eje de las x indicadas.

b) Escribe una ecuación cuadrática en una variable que tenga soluciones de -2 y -5.

c) ¿Cuántas funciones cuadráticas diferentes pueden tener intersecciones con el eje de las x en -2 y -5? Explica.

d) ¿Cuántas ecuaciones cuadráticas diferentes en una variable pueden tener soluciones de -2 y -5? Explica.

108. Considera la siguiente gráfica de una función cuadrática.



a) Escribe una función cuadrática que tenga las intersecciones con el eje de las x mostradas.

b) Escribe una ecuación cuadrática, en una variable, que tenga soluciones de -2 y 1.

c) ¿Cuántas funciones cuadráticas diferentes pueden tener intersecciones con el eje de las x en -2 y 1? Explica.

d) ¿Cuántas ecuaciones cuadráticas diferentes, en una variable, pueden tener soluciones de -2 y 1? Explica.

109. Considera la función cuadrática

$$P(x) = ax^2 + bx + c, a > 0.$$

a) La gráfica de este tipo de función podría no tener ninguna intersección con el eje de las x, podría tener una intersección con el eje de las x, o podría tener dos intersecciones con el eje de las x. Bosqueja cada una de estas posibilidades.

b) ¿Cuántas posibles soluciones reales puede tener la ecuación $ax^2 + bx + c = 0, a > 0$? Explica tu respuesta del inciso **b)** usando los bosquejos del inciso **a)**.

110. Distancia de frenado La distancia de frenado de un automóvil típico sobre pavimento seco, d, en pies, puede aproximarse mediante la función $d(s) = 0.034s^2 + 0.56s - 17.11$, donde s es la rapidez del automóvil antes de frenar y $60 \le s \le 80$ millas por hora. ¿Qué tan rápido va el automóvil, si requiere de 190 pies para detenerse después de haber aplicado los frenos? Redondea la respuesta a la centésima más cercana.

111. Distancia de frenado La distancia de frenado de un automóvil típico sobre pavimento húmedo, d, en pies, puede aproximarse mediante la función $d(s) = -0.31s^2 + 59.82s - 2180.22$, donde s es la rapidez del automóvil antes de frenar y $60 \le s \le 80$ millas por hora. ¿Qué tan rápido va el automóvil, si requiere de 545 pies para detenerse después de haber aplicado los frenos? Redondea la respuesta a la centésima más cercana.

Ejercicios conceptuales y de redacción

112. ¿Cómo determinas el grado de una función polinomial?

113. ¿Qué es una función cuadrática?

114. ¿Cuál es la forma general de una ecuación cuadrática?

115. a) Explica la propiedad del factor cero.

b) Resuelve la ecuación $(3x - 7)(2x + 3) = 0$ usando la propiedad del factor cero.

116. a) Explica por qué la ecuación $(x + 3)(x + 4) = 2$ *no puede* resolverse al escribir $x + 3 = 2$ o $x + 4 = 2$.

b) Resuelve la ecuación $(x + 3)(x + 4) = 2$.

117. Cuando una constante se factoriza de una ecuación, ¿por qué no es necesario igualar dicha constante a 0, cuando se resuelve la ecuación?

118. a) Explica cómo resolver una ecuación polinomial usando factorización.

b) Resuelve la ecuación $-x - 20 = -12x^2$ usando el procedimiento del inciso **a)**.

119. a) ¿Cuál es el primer paso para resolver la ecuación $-x^2 + 2x + 35 = 0$?

b) Resuelve la ecuación del inciso **a)**

120. a) ¿Como se llaman los dos lados más cortos de un triángulo recto?

b) ¿Cómo se llama el lado más largo de un triángulo recto?

121. Enuncia el teorema de Pitágoras y explica su significado.

122. Si la gráfica de $y = x^2 + 10x + 16$ tiene intersecciones con el eje de las x $(-8, 0)$ y $(-2, 0)$, ¿cuál es la solución a la ecuación $x^2 + 10x + 16 = 0$? Explica.

123. Si las soluciones a la ecuación $2x^2 - 15x + 18 = 0$ son $\frac{3}{2}$ y 6, ¿cuáles son las intersecciones con el eje de las x de la gráfica de $y = 2x^2 - 15x + 18$? Explica.

124. ¿Es posible que una función cuadrática no tenga intersecciones con el eje de las x? Explica.

125. ¿Es posible que una función cuadrática tenga solamente una intersección con el eje de las x? Explica.

126. ¿Es posible que una función cuadrática tenga dos intersecciones con el eje de las x? Explica.

127. ¿Es posible que una función cuadrática tenga tres intersecciones con el eje de las x? Explica.

Problemas de desafío

Resuelve.

128. $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$ **129.** $x^4 - 13x^2 = -36$ **130.** $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

Actividad grupal

En cursos de matemáticas más avanzados, quizás necesites resolver una ecuación para y' (léase "y prima"). Cuando hagas esto, trata a y' como una variable diferente de y. Individualmente, resuelve cada ecuación para y'. Compara tus respuestas y, en equipo, obtengan las respuestas correctas.

131. $xy' + yy' = 1$ **132.** $xy - xy' = 3y' + 2$ **133.** $2xyy' - xy = x - 3y'$

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.5] **134.** Simplifica $(4x^{-2}y^3)^{-2}$.

[2.5] **135.** Resuelve la desigualdad. Grafica la solución en la recta numérica y escribe la solución usando notación de intervalo.

$$-1 < \frac{4(3x - 2)}{3} \leq 5$$

[4.1] **136.** Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$3x + 4y = 2$$
$$2x = -5y - 1$$

[5.2] **137.** Si $f(x) = -x^2 + 3x$ y $g(x) = x^2 + 5$, determina $(f \cdot g)(4)$.

[5.7] **138.** Factoriza $(x + 1)^2 - (x + 1) - 6$.

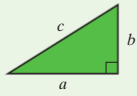
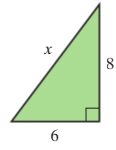
Capítulo 5 Resumen

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 5.1	
Los **términos** son las partes que se suman o restan en una expresión matemática.	Los términos de $-3x^2 + 1.6x + 15$ son $-3x^2$, $1.6x$ y 15.
Un **polinomio** es una suma finita de términos, en la cual todas las variables tienen exponentes enteros no negativos y ninguna variable aparece en el denominador.	$9x^7 - 3x^5 + 4x - \frac{1}{2}$ es un polinomio.

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 5.1 (Continuación)	
El **grado de un término**, es la suma de los exponentes de las variables.	El término $3x^2y^9$ tiene grado 11.
El **término principal** de un polinomio es el término de mayor grado. El **coeficiente principal** es el coeficiente del término principal.	En el polinomio $9x^7 - 3x^5 + 4x - \frac{1}{2}$ el término principal es $9x^7$ y el coeficiente principal es 9.
Un **monomio** es un polinomio con un término. Un **binomio** es un polinomio con dos términos. Un **trinomio** es un polinomio con tres términos.	$-13mn^2p^3$ $x^4 - 1$ $1.9x^3 - 28.3x^2 - 101.5x$
Un polinomio es **lineal**, si es de grado 0 o 1. Un polinomio en una variable es **cuadrático**, si es de grado 2. Un polinomio en una variable es **cúbico**, si es de grado 3.	$19,\ 8y + 17$ $x^2 - 5x + 16$ $-4x^3 + 11x^2 - 9x + 6$
Una **función polinomial** tiene la forma $y = P(x)$. Para evaluar $P(a)$, sustituye x por a.	$P(x) = 2x^2 - x + 3$ es una función polinomial. Para evaluar $P(x)$ en $x = 10$, $P(10) = 2(10)^2 - 10 + 3$ $= 200 - 10 + 3 = 193$
Para **sumar o restar polinomios**, combina los términos semejantes.	$(5x^2 - 9x + 10) + (2x^2 + 17x - 8)$ $= 5x^2 - 9x + 10 + 2x^2 + 17x - 8 = 7x^2 + 8x + 2$
Sección 5.2	
Para **multiplicar polinomios**, multiplica cada término de un polinomio por cada término del otro polinomio.	$3a(a - 2) = 3a \cdot a - 3a \cdot 2$ $= 3a^2 - 6a$
Propiedad distributiva, forma desarrollada $a(b + c + d + \cdots + n) = ab + ac + ad + \cdots + an$	$x(2x^2 + 8x - 5) = 2x^3 + 8x^2 - 5x$
Para **multiplicar dos binomios**, usa el **método PIES**: multiplica los términos **P**rimeros, **I**nternos, **E**xternos y **S**egundos.	$(3x - 1)(4x + 9) = 12x^2 + 27x - 4x - 9$ $= 12x^2 + 23x - 9$
Para multiplicar un polinomio por un polinomio, puedes usar el formato vertical.	Multiplica $(2x^2 - x + 8)(5x + 1)$. $2x^2 - x + 8$ $5x + 1$ $2x^2 - x + 8$ $10x^3 - 5x^2 + 40x$ $10x^3 - 3x^2 + 39x + 8$
Elevar un binomio al cuadrado $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(7x + 4)^2 = (7x)^2 + 2(7x)(4) + 4^2 = 49x^2 + 56x + 16$ $\left(\frac{1}{2}m - 3\right)^2 = \left(\frac{1}{2}m\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}m\right)(3) + 3^2 = \frac{1}{4}m^2 - 3m + 9$
Producto de la suma y diferencia de los mismos dos términos $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	$(5c + 6)(5c - 6) = (5c)^2 - 6^2 = 25c^2 - 36$
Sección 5.3	
Para dividir un polinomio entre un monomio, divide cada término del polinomio entre el monomio.	$\frac{6y + 10x^2y^5 - 17x^9y^8}{2xy^2} = \frac{6y}{2xy^2} + \frac{10x^2y^5}{2xy^2} - \frac{17x^9y^8}{2xy^2}$ $= \frac{3}{xy} + 5xy^3 - \frac{17x^8y^6}{2}$

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 5.3 (Continuación)	
Para dividir dos polinomios, usa la regla de división larga.	Divide $(8x^2 + 6x - 9) \div (2x + 1)$. $\begin{array}{r} 4x + 1 \\ 2x + 1 \overline{)\,8x^2 + 6x - 9} \\ \underline{8x^2 + 4x} \\ 2x - 9 \\ \underline{2x + 1} \\ -10 \end{array}$ Por tanto, $\dfrac{8x^2 + 6x - 9}{2x + 1} = 4x + 1 - \dfrac{10}{2x + 1}$
Para dividir un polinomio entre un binomio de la forma $x - a$, usa **división sintética**.	Usa división sintética para dividir $(x^3 + 2x^2 - 11x + 5) \div (x + 4)$ $\begin{array}{r\|rrrr} -4 & 1 & 2 & -11 & 5 \\ & & -4 & 8 & 12 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 17 \end{array}$ Por tanto, $\dfrac{x^3 + 2x^2 - 11x + 5}{x + 4} = x^2 - 2x - 3 + \dfrac{17}{x + 4}$
Teorema del residuo Si el polinomio $P(x)$ se divide entre $x - a$, el residuo es $P(a)$.	Dado $P(x) = 5x^3 - 4x^2 - 7x + 5$, usa el Teorema del residuo y división sintética, para evaluar $P(2)$. $\begin{array}{r\|rrrr} 2 & 5 & -4 & -7 & 5 \\ & & 10 & 12 & 10 \\ \hline & 5 & 6 & 5 & 15 \end{array}$ ← Residuo Por tanto, $P(2) = 15$.
Sección 5.4	
El **máximo factor común** (MFC) es el producto de los factores comunes a todos los términos en el polinomio.	El MFC de z^5, z^4, z^9, z^2 es z^2. El MFC de $9(x - 4)^3, 6(x - 4)^{10}$ es $3(x - 4)^3$.
Para factorizar un monomio a partir de un polinomio 1. Determina el máximo factor común de todos los términos en el polinomio. 2. Escribe cada término, como el producto del MFC y de otro factor. 3. Usa la propiedad distributiva para *factorizar* el MFC.	$35x^6 + 15x^4 + 5x^3 = 5x^3(7x^3) + 5x^3(3x) + 5x^3(1)$ $= 5x^3(7x^3 + 3x + 1)$ $4n(7n + 10) - 13(7n + 10) = (7n + 10)(4n - 13)$
Para factorizar cuatro términos por agrupación 1. Determina si los cuatro términos tienen un factor común. Si lo tienen, factoriza el MFC de cada término. 2. Ordena los cuatro términos en dos grupos de dos términos cada uno. Cada grupo de dos términos debe tener un MFC. 3. Factoriza el MFC de cada grupo de dos términos. 4. Si los dos términos formados en el paso 3 tienen un MFC, factorízalo.	$cx + cy + dx + dy = c(x + y) + d(x + y)$ $= (x + y)(c + d)$ $x^3 + 6x^2 - 5x - 30 = x^2(x + 6) - 5(x + 6)$ $= (x + 6)(x^2 - 5)$
Sección 5.5	
Para factorizar trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ 1. Determina dos números (o factores) cuyo producto sea c y cuya suma sea b. (*Continúa*)	Factoriza $m^2 - m - 42$.

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 5.5 (Continuación)	
2. Los factores del trinomio, serán de la forma: $(x + \square)(x + \square)$ ↑ Un factor determinado en el paso 1 ↑ Otro factor determinado en el paso 1	Los factores de -42, cuya suma es -1, son -7 y 6. Observa que, $(-7)(6) = -42$ y $-7 + 6 = -1$. Por tanto, $m^2 - m - 42 = (m - 7)(m + 6)$
Para factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$, usando el método de prueba y error **1.** Escribe todos los pares de factores del coeficiente del término al cuadrado, a. **2.** Escribe todos los pares de factores de la constante, c. **3.** Prueba varias combinaciones de estos factores hasta obtener el término de en medio correcto, bx.	$4t^2 + 9t + 5 = (4t + 5)(t + 1)$ Observa que $4t + 5t = 9t$. $2a^2 - 15ab + 28b^2 = (2a - 7b)(a - 4b)$ Observa que $-8ab - 7ab = -15ab$.
Para factorizar trinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 1$, por agrupación **1.** Determina dos números cuyo producto sea $a \cdot c$, y cuya suma sea b. **2.** Reescribe el término de en medio, bx, usando los números obtenidos en el paso 1. **3.** Factoriza por agrupación.	Factoriza $2y^2 + 9y - 18$, por agrupación. Dos números cuyo producto es -36 y cuya suma es 9, son 12 y -3. Por tanto, $2y^2 + 9y - 18 = 2y^2 + 12y - 3y - 18$ $= 2y(y + 6) - 3(y + 6)$ $= (y + 6)(2y - 3)$
Un **polinomio primo** es un polinomio que no se puede factorizar.	$x^2 + 5x + 9$ es un polinomio primo.
La **factorización por sustitución**, ocurre cuando una variable se sustituye por otra variable o expresión.	Factoriza $a^6 - 2a^3 - 3$. $a^6 - 2a^3 - 3 = (a^3)^2 - 2a^3 - 3$ $= u^2 - 2u - 3$ Sustituye u por a^3. $= (u - 3)(u + 1)$ $= (a^3 - 3)(a^3 + 1)$ Sustituye a^3 por u.
Sección 5.6	
Diferencia de dos cuadrados $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$	$x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x + 7)(x - 7)$
Trinomios cuadrados perfectos $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$	$d^2 + 8d + 16 = d^2 + 2(d)(4) + 4^2 = (d + 4)^2$ $4m^2 - 12m + 9 = (2m)^2 - 2(2m)(3) + 3^2 = (2m - 3)^2$
Suma de dos cubos $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$	$y^3 + 8 = y^3 + 2^3 = (y + 2)(y^2 - 2y + 4)$
Diferencia de dos cubos $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	$27z^3 - 64x^3 = (3z)^3 - (4x)^3 = (3z - 4x)(9z^2 + 12xz + 16x^2)$
Sección 5.7	
Para factorizar un polinomio **1.** Determina si todos los términos en el polinomio tienen un máximo factor común distinto a 1. Si es así, factoriza el MFC. **2.** Si el polinomio tiene dos términos, determina si es una diferencia de dos cuadrados, o una suma o diferencia de dos cubos. Si es así, factoriza usando la fórmula apropiada. (*Continúa*)	$2x^7 + 16x^6 + 24x^5 = 2x^5(x^2 + 8x + 12)$ $= 2x^5(x + 6)(x + 2)$ $36a^6 - 100a^4b^2 = 4a^4(9a^2 - 25b^2)$ $= 4a^4[(3a)^2 - (5b)^2]$ $= 4a^4(3a + 5b)(3a - 5b)$

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 5.7 (Continuación)	
3. Si el polinomio tiene tres términos, determina si es un trinomio cuadrado perfecto. Si es así, factoriza en concordancia. Si no lo es, factoriza el trinomio usando el método de prueba y error, agrupación o sustitución, como se explicó en la sección 5.5. **4.** Si el polinomio tiene más de tres términos, intenta factorizar por agrupación. Si esto no funciona, fíjate si tres de los términos son el cuadrado de un binomio. **5.** Como paso final, examina tu polinomio factorizado, para ver si algunos factores enunciados tienen un factor común y pueden factorizarse aún más. Si existe un factor común, factorízalo. **6.** Verifica la respuesta multiplicando los factores.	$125m^3 - 64 = (5m)^3 - 4^3$ $= (5m - 4)(25m^2 + 20m + 16)$
Sección 5.8	
Una **ecuación polinomial**, se forma cuando dos polinomios se igualan uno con otro.	$x^2 - 5x = 2x + 7$
Una **ecuación cuadrática**, es una ecuación polinomial de segundo grado en una variable. **Forma general de una ecuación cuadrática** $ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$ donde a, b y c son números reales.	$2x^2 - 6x + 11 = 0$ $x^2 - 4 = x + 2$ $x^2 - 3x + 5 = 0$ es una ecuación cuadrática en la forma general.
Propiedad del factor cero Para todo número real m y n, si $m \cdot n = 0$, entonces, ya sea $m = 0$ o $n = 0$, o tanto m como $n = 0$.	Resuelve $(x + 6)(x - 1) = 0$. $x + 6 = 0 \quad$ o $\quad x - 1 = 0$ $x = -6 \qquad x = 1$ Las soluciones son -6 y 1.
Para resolver una ecuación polinomial mediante la factorización **1.** Usa la propiedad de adición, para escribir el polinomio en orden decreciente de la variable, con un lado de la ecuación igual a 0. **2.** Combina cualquier término semejante y factoriza el polinomio. **3.** Iguala, cada factor *que contenga una variable*, a 0 y resuelve las ecuaciones resultantes. **4.** Verifica la solución en la ecuación *original*.	Resuelve $3x^2 + 13x - 4 = 2x$. $3x^2 + 11x - 4 = 0$ $(3x - 1)(x + 4) = 0$ $3x - 1 = 0 \quad$ o $\quad x + 4 = 0$ $x = \frac{1}{3} \quad$ o $\quad x = -4$ Una verificación muestra que $\frac{1}{3}$ y -4, son las soluciones.
Teorema de Pitágoras En un triángulo recto, si a y b representan las longitudes de los catetos y c representa la longitud de la hipotenusa, entonces $\text{cateto}^2 + \text{cateto}^2 = \text{hipotenusa}^2$ $a^2 + b^2 = c^2$  	Determina la longitud de la hipotenusa, en el siguiente triángulo recto.  $\text{cateto}^2 + \text{cateto}^2 = \text{hipotenusa}^2$ $6^2 + 8^2 = x^2$ $36 + 64 = x^2$ $100 = x^2$ $10 = x$ *Nota:* -10 no es una respuesta posible.

Capítulo 5 Ejercicios de repaso

[5.1] *Determina si cada expresión es un polinomio. Si la expresión es un polinomio,* **a)** *proporciona el nombre especial del polinomio, si tiene uno,* **b)** *escribe el polinomio en orden decreciente de la variable x, y* **c)** *proporciona el grado del polinomio.*

1. $3x^2 + 9$

2. $5x + 4x^3 - 7$

3. $8x - x^{-1} + 6$

4. $-3 - 10x^2y + 6xy^3 + 2x^4$

Realiza cada operación indicada.

5. $(x^2 - 5x + 8) + (2x + 6)$

6. $(7x^2 + 2x - 5) - (2x^2 - 9x - 1)$

7. $(2a - 3b - 2) - (-a + 5b - 9)$

8. $(4x^3 - 4x^2 - 2x) + (2x^3 + 4x^2 - 7x + 13)$

9. $(3x^2y + 6xy - 5y^2) - (4y^2 + 3xy)$

10. $(-8ab + 2b^2 - 3a) + (-b^2 + 5ab + a)$

11. Suma $x^2 - 3x + 12$ y $4x^2 + 10x - 9$.

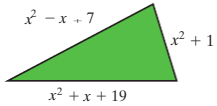
12. Resta $3a^2b - 2ab$ de $-7a^2b - ab$.

13. Determina $P(2)$ si $P(x) = 2x^2 - 3x + 19$.

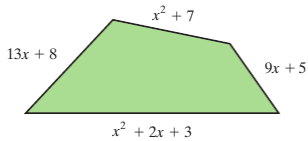
14. Determina $P(-3)$ si $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 10$.

Perímetro *En los ejercicios 15 y 16, determina una expresión polinomial para el perímetro de cada figura.*

15.

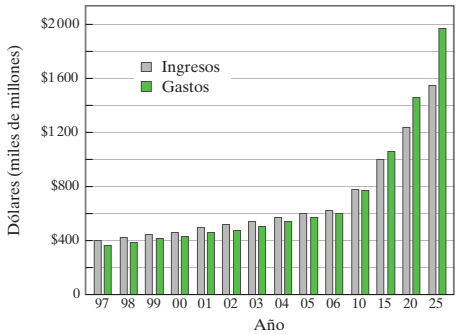


16.



Usa la siguiente gráfica, para trabajar los ejercicios 17 y 18. La gráfica muestra facturas y desembolsos de Seguridad Social en EUA, de 1997 a 2025.

Ingresos y gastos en Seguridad Social de EUA



Fuente: Administración de Seguridad Social

17. Ingresos en Seguridad Social de EUA La función $R(t) = 0.78t^2 + 20.28t + 385.0$, donde t es años desde 1997 y $0 \le t \le 28$, ofrece una aproximación de los ingresos de Seguridad Social estadounidense, $R(t)$, en miles de millones de dólares.

a) Con la función proporcionada, estima los ingresos en 2018.

b) Compara tu respuesta en el inciso **a)** con la gráfica. ¿La gráfica respalda tu respuesta?

18. Egresos de Seguridad Social de EUA La función $G(t) = 1.74t^2 + 7.32t + 383.91$, donde t es años desde 1997 y $0 \le t \le 28$, ofrece una aproximación de los egresos de Seguridad Social estadounidense, $G(t)$, en miles de millones de dólares.

a) Con la función proporcionada, estima los egresos en 2018.

b) Compara tu respuesta en el inciso **a)** con la gráfica. ¿La gráfica respalda tu respuesta?

[5.2] *Multiplica.*

19. $2x(3x^2 - 7x + 5)$

20. $-3xy^2(x^3 + xy^4 - 4y^5)$

21. $(3x - 5)(2x + 9)$

22. $(5a + 1)(10a - 3)$

23. $(x + 8y)^2$

24. $(a - 11b)^2$

25. $(2xy - 1)(5x + 4y)$

26. $(2pq - r)(3pq + 7r)$

27. $(2a + 9b)^2$

28. $(4x - 3y)^2$

29. $(7x + 5y)(7x - 5y)$

30. $(2a - 5b^2)(2a + 5b^2)$

31. $(4xy + 6)(4xy - 6)$

32. $(9a^2 - 2b^2)(9a^2 + 2b^2)$

33. $[(x + 3y) + 2]^2$

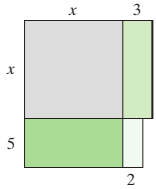
34. $[(2p - q) - 5]^2$

35. $(3x^2 + 4x - 6)(2x - 3)$

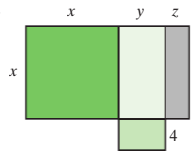
36. $(4x^3 + 6x - 2)(x + 3)$

Área *En los ejercicios 37 y 38, determina una expresión para el área total de cada figura.*

37.



38.



Para cada par de funciones, determina **a)** $(f \cdot g)(x)$ *y* **b)** $(f \cdot g)(x)$.

39. $f(x) = x + 1, g(x) = x - 3$

40. $f(x) = 2x - 4, g(x) = x^2 - 3$

41. $f(x) = x^2 + x - 3, g(x) = x - 2$

42. $f(x) = x^2 - 2, g(x) = x^2 + 2$

[5.3] *Divide.*

43. $\dfrac{4x^7y^5}{20xy^3}$

44. $\dfrac{3s^5t^8}{12s^5t^3}$

45. $\dfrac{45pq - 25q^2 - 15q}{5q}$

46. $\dfrac{7a^2 - 16a + 32}{4}$

47. $\dfrac{2x^3y^2 + 8x^2y^3 + 12xy^4}{8xy^3}$

48. $(8x^2 + 14x - 15) \div (2x + 5)$

49. $(2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 17x + 7) \div (2x + 1)$

50. $(4a^4 - 7a^2 - 5a + 4) \div (2a - 1)$

51. $(x^2 + x - 22) \div (x - 3)$

52. $(4x^3 + 12x^2 + x - 9) \div (2x + 3)$

Usa división sintética para obtener cada cociente.

53. $(3x^3 - 2x^2 + 10) \div (x - 3)$

54. $(2y^5 - 10y^3 + y - 2) \div (y + 1)$

55. $(x^5 - 18) \div (x - 2)$

56. $(2x^3 + x^2 + 5x - 3) \div \left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

Usa el Teorema del residuo y división sintética, para evaluar cada función polinomial en los valores indicados.

57. $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x - 7$
a) $P(2)$ **b)** $P(-3)$

58. $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 5x - 1$
a) $P(3)$ **b)** $P(-2)$

Usa el Teorema del residuo y división sintética, para determinar si el binomio dado es un factor de la función polinomial dada.

59. ¿$x + 3$ es un factor de $P(x) = 2x^3 + 9x^2 + 7x - 6$?

60. ¿$x - 2$ es un factor de $P(x) = 7x^3 - 15x^2 - 4x - 3$?

[5.4] *Factoriza el máximo factor común en cada expresión.*

61. $4x^2 + 8x + 32$

62. $15x^5 + 6x^4 - 12x^5y^3$

63. $10a^3b^3 - 14a^2b^6$

64. $24xy^4z^3 + 12x^2y^3z^2 - 30x^3y^2z$

Factoriza por agrupación.

65. $5x^2 - xy + 30xy - 6y^2$

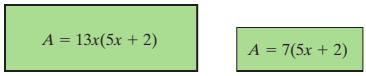
66. $12a^2 + 8ab + 15ab + 10b^2$

67. $(2x - 5)(2x + 1) - (2x - 5)(x - 8)$

68. $7x(3x - 7) + 3(3x - 7)^2$

Área *En los ejercicios 69 y 70, A representa el área de la figura. Determina una expresión, en forma factorizada, para la diferencia de las áreas de las figuras geométricas.*

69.

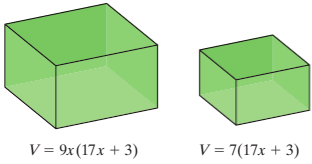


70.

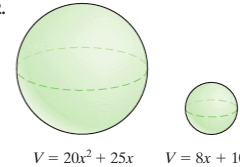


Volumen *En los ejercicios 71 y 72, V representa el volumen de la figura. Determina una expresión, en forma factorizada, para la diferencia de los volúmenes de las figuras geométricas.*

71.



72.



[5.5] *Factoriza cada trinomio.*

73. $x^2 + 9x + 18$

74. $x^2 + 3x - 10$

75. $x^2 - 3x - 28$

76. $x^2 - 10x + 16$

77. $-x^2 + 12x + 45$

78. $-x^2 + 13x - 12$

79. $2x^3 + 13x^2 + 6x$

80. $8x^4 + 10x^3 - 25x^2$

81. $4a^5 - 9a^4 + 5a^3$

82. $12y^5 + 61y^4 + 5y^3$

83. $x^2 - 15xy - 54y^2$

84. $6p^2 - 19pq + 10q^2$

85. $x^4 + 10x^2 + 21$

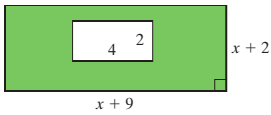
86. $x^4 + 2x^2 - 63$

87. $(x + 3)^2 + 10(x + 3) + 24$

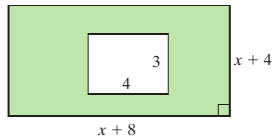
88. $(x - 4)^2 - (x - 4) - 20$

Área *En los ejercicios 89 y 90, determina una expresión, en forma factorizada, para el área de la región sombreada en cada figura.*

89.



90.



[5.6] *Usa una fórmula de factorización especial para factorizar lo siguiente.*

91. $x^2 - 36$

92. $x^2 - 121$

93. $x^4 - 81$

94. $x^4 - 16$

95. $4a^2 + 4a + 1$

96. $16y^2 - 24y + 9$

97. $(x + 2)^2 - 16$

98. $(3y - 1)^2 - 36$

99. $p^4 + 18p^2 + 81$

100. $m^4 - 20m^2 + 100$

101. $x^2 + 8x + 16 - y^2$

102. $a^2 + 6ab + 9b^2 - 36c^2$

103. $16x^2 + 8xy + y^2$

104. $36b^2 - 60bc + 25c^2$

105. $x^3 - 27$

106. $y^3 + 64z^3$

107. $125x^3 - 1$

108. $8a^3 + 27b^3$

109. $y^3 - 64z^3$

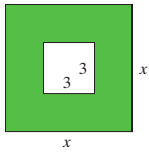
110. $(x - 2)^3 - 27$

111. $(x + 1)^3 - 8$

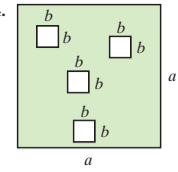
112. $(a + 4)^3 + 1$

Área *En los ejercicios 113 y 114, determina una expresión, en forma factorizada, para el área de la región sombreada en cada figura.*

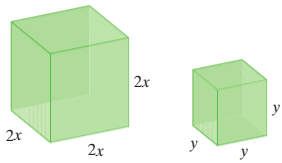
113.



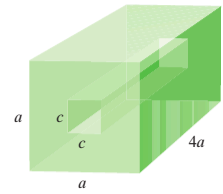
114.



115. Volumen Determina una expresión, en forma factorizada, para la diferencia en volúmenes de los dos cubos siguientes.



116. Volumen Determina una expresión, en forma factorizada, para el volumen de la región sombreada en la siguiente figura.



[5.4-5.7]

Factoriza completamente.

117. $x^2y^4 - 2xy^4 - 15y^4$

118. $5x^3 - 30x^2 + 40x$

119. $3x^3y^4 + 18x^2y^4 - 6x^2y^4 - 36xy^4$

120. $3y^5 - 75y$

121. $4x^3y + 32y$

122. $5x^4y + 20x^3y + 20x^2y$

123. $6x^3 - 21x^2 - 12x$

124. $x^2 + 10x + 25 - z^2$

125. $5x^3 + 40y^3$

126. $x^2(x + 6) + 3x(x + 6) - 4(x + 6)$

127. $4(2x + 3)^2 - 12(2x + 3) + 5$

128. $4x^4 + 4x^2 - 3$

129. $(x + 1)x^2 - (x + 1)x - 2(x + 1)$

130. $9ax - 3bx + 21ay - 7by$

131. $6p^2q^2 - 5pq - 6$

132. $9x^4 - 12x^2 + 4$

133. $16y^2 - (x^2 + 4x + 4)$

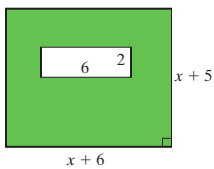
134. $6(2a + 3)^2 - 7(2a + 3) - 3$

135. $6x^4y^5 + 9x^3y^5 - 27x^2y^5$

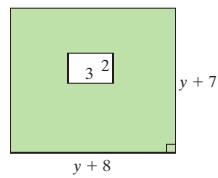
136. $x^3 - \frac{8}{27}y^6$

Área *En los ejercicios 137-142, determina una expresión, en forma factorizada, para el área de la región sombreada en cada figura.*

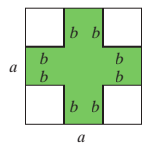
137.



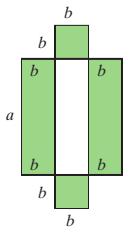
138.



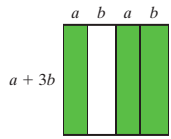
139.



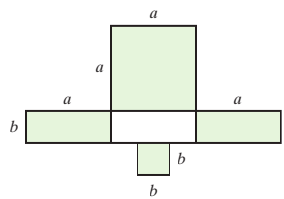
140.



141.



142.



[5.8] *Resuelve.*

143. $(x-2)(4x+1)=0$

144. $(2x+5)(3x+10)=0$

145. $4x^2=8x$

146. $12x^2+16x=0$

147. $x^2+7x+12=0$

148. $a^2+a-30=0$

149. $x^2=8x-7$

150. $c^3-6c^2+8c=0$

151. $5x^2=80$

152. $x(x+3)=2(x+4)-2$

153. $12d^2=13d+4$

154. $20p^2-6=7p$

Usa factorización para determinar las intersecciones con el eje de las x, de la gráfica correspondiente a cada ecuación.

155. $y=2x^2-6x-36$

156. $y=20x^2-49x+30$

Escribe una ecuación, cuya gráfica tenga las intersecciones con el eje de las x en los valores dados.

157. -4 y 6

158. $-\frac{5}{2}$ y $-\frac{1}{6}$

En los ejercicios 159-163, responde la pregunta.

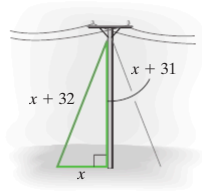
159. Alfombrado El área de la alfombra rectangular de Federico, es de 108 pies cuadrados. Determina la longitud y el ancho de la alfombra, si la longitud es 3 pies mayor que el ancho.

160. Señal triangular La base de una gran señal triangular, es 5 pies más que el doble de la altura. Determina la base y la altura, si el área del triángulo es de 26 pies cuadrados.

161. Cuadrado Un cuadrado tiene un lado 4 pulgadas más largo que el lado de un segundo cuadrado. Si el área del cuadrado grande es de 49 pulgadas cuadradas, determina la longitud de un lado de cada cuadrado.

162. Velocidad Un cohete se proyecta hacia arriba, desde la parte de arriba de un edificio de 144 pies de alto, con una velocidad de 128 pies por segundo. La distancia del cohete desde el suelo, s, en cualquier momento, t, en segundos, está dada por la fórmula $s(t)=-16t^2+128t+144$. Determina el tiempo que el cohete tardará en golpear el suelo.

163. Poste telefónico Dos cables de sujeción están prendidos a un poste telefónico para ayudar a estabilizarlo. Un cable se prende al suelo a x pies de la base del poste. La altura del poste es $x+31$ y la longitud del cable es $x+32$. Determina x.



Capítulo 5 Examen de práctica

1. a) Proporciona el nombre específico del siguiente polinomio:

$$-4x^2+3x-6x^4$$

b) Escribe el polinomio en potencias decrecientes de la variable x.

c) Indica el grado del polinomio.

d) ¿Cuál es el coeficiente principal del polinomio?

Realiza cada operación.

2. $(7x^2y-5y^2+4x)-(3x^2y+9y^2-6y)$

3. $2x^3y^2(-4x^5y+12x^3y^2-6x)$

4. $(2a-3b)(5a+b)$

5. $(2x^2+3xy-6y^2)(2x+y)$

6. $(12x^6-15x^2y+21)\div 3x^2$

7. $(2x^2-7x+9)\div(2x+3)$

8. Usa división sintética para obtener el cociente.
$(3x^4-12x^3-60x+1)\div(x-5)$

9. Usa el Teorema del residuo y división sintética, para evaluar la función polinomial en el valor indicado.

$$P(x)=2x^3-7x^2+4x-5;\ P(3)$$

Factoriza completamente.

10. $12x^3y+10x^2y^4-14xy^3$

11. x^3-2x^2-3x

12. $2a^2+4ab+3ab+6b^2$

13. $2b^4+5b^2-18$

14. $4(x-5)^2+20(x-5)$

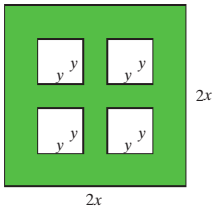
15. $(x+4)^2+2(x+4)-3$

16. $27p^3q^6-8q^6$

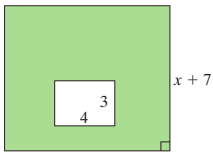
17. Si $f(x)=3x-4$ y $g(x)=x-5$, determina:
a) $(f\cdot g)(x)$ y **b)** $(f\cdot g)(2)$

Área *En los ejercicios 18 y 19, determina una expresión, en forma factorizada, para el área de la región sombreada.*

18.



19.



Resuelve.

20. $7x^2 + 25x - 12 = 0$

21. $x^3 + 3x^2 - 10x = 0$

22. Usa la factorización para determinar las intersecciones con el eje de las x de la gráfica de la ecuación $y = 8x^2 + 10x - 3$.

23. Determina una ecuación, cuya gráfica tenga intersecciones con el eje de las x en 2 y 7.

24. **Área** El área de un triángulo es 22 metros cuadrados. Si la base del triángulo es de 3 metros mayor que 2 veces la altura, determina la base y la altura del triángulo.

25. **Pelota de béisbol** Una pelota de béisbol se proyecta hacia arriba desde la parte de arriba de un edificio de 448 pies de alto, con una velocidad inicial de 48 pies por segundo. La distancia, s, de la pelota desde el suelo en cualquier momento, t, en segundos, está dada por la ecuación $s(t) = -16t^2 + 48t + 448$. Determina el tiempo en que la pelota de béisbol tardará en golpear el suelo.

Examen de repaso acumulativo

Resuelve la siguiente evaluación y verifica tus respuestas con las proporcionadas al final del libro. Revisa cualquier pregunta que hayas respondido de manera incorrecta. Después de la respuesta, se indica la sección donde se cubrió el material.

1. Determina $A \cup B$ para $A = \{2, 4, 6, 8\}$ y $B = \{3, 5, 6, 8\}$.

2. Ilustra $\{x \mid x \leq -5\}$ en una recta numérica real.

3. Divide $\left|\frac{3}{8}\right| \div (-4)$.

4. Evalúa $(-3)^3 - 2^2 - (-2)^2 + (9 - 8)^2$.

5. Simplifica $\left(\frac{2r^4s^5}{r^2}\right)^3$.

6. Resuelve $4(2x - 2) - 3(x + 7) = -4$.

7. Resuelve $k = 2(d + e)$

8. **Paisajismo** Carlos, un arquitecto paisajista, quiere cercar dos áreas iguales, como se ilustra en la figura. Si ambas áreas son cuadrados y la longitud total del cercado usado es de 91 metros, determina las dimensiones de cada cuadrado.



9. **Elaboración de copias** César tiene un manuscrito. Él necesita sacar 6 copias antes de enviarlo a su editor en Boston. La primera copia cuesta 15 centavos la página, y cada copia adicional cuesta 5 centavos por página. Si la cuenta total, antes de impuestos es de $248, ¿cuántas páginas hay en el manuscrito?

10. **Promedio de examen** Las primeras cuatro calificaciones de los exámenes de Tadeo son 68, 72, 90 y 86. ¿Qué rango de calificaciones, en su quinto examen, resultará en un promedio mayor que o igual que 70, y menos que 80?

11. ¿(4, 1) es una solución a la ecuación $3x + 2y = 13$?

12. Escribe la ecuación $2 = 6x - 3y$ en la forma general.

13. Determina la pendiente de la recta que pasa a través de los puntos (8, −4) y (−1, −2).

14. Si $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x + 16$, determina $f(-4)$.

15. Grafica la desigualdad $2x - y \leq 6$.

16. Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y = 4$$
$$\frac{2}{3}x - y = \frac{8}{3}$$

17. Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$x - 2y = 2$$
$$2x + 3y = 11$$
$$-y + 4z = 7$$

18. Evalúa el determinante.

$$\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

19. Divide $(2x^3 - 9x + 15) \div (x - 6)$.

20. Factoriza $64x^3 - 27y^3$.

6.1 Dominios de funciones racionales, y multiplicación y división de expresiones racionales

1. **Determinación de los dominios de funciones racionales**
2. **Simplificación de expresiones racionales**
3. **Multiplicación de expresiones racionales**
4. **División de expresiones racionales**

Comprende el Álgebra

Para entender las expresiones racionales y las funciones racionales, debes tener una comprensión profunda de las técnicas de factorización discutidas en el capítulo 5.

1 Determinación de los dominios de funciones racionales

Expresión racional

Una **expresión racional**, es una expresión de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son polinomios, y $q \neq 0$.

Ejemplos de expresiones racionales

$$\frac{2}{x}, \quad \frac{t+3}{t}, \quad \frac{p^2+4p}{p-6}, \quad \frac{a}{a^2-4}$$

Observa que el denominador de una expresión racional no puede ser igual a 0, porque la barra de fracción es un símbolo de división y la división entre 0 es indefinida. Por ejemplo:

- En la expresión $\frac{2}{x}$, $x \neq 0$.
- En la expresión $\frac{t+3}{t}$, $t \neq 0$.
- En la expresión $\frac{p^2+4p}{p-6}$, $p-6 \neq 0$ o $p \neq 6$.
- En la expresión $\frac{3x+5}{2x-1}$, $2x-1 \neq 0$ o $x \neq \frac{1}{2}$.
- En la expresión $\frac{a}{a^2-4}$, $a^2-4 \neq 0$ o $a \neq 2$ y $a \neq -2$.

Siempre que se escriba una expresión racional, se supondrá que se excluye cualquier valor que vuelva al denominador 0. Por ejemplo, si escribes $\frac{5}{x-3}$, *se supone que* $x \neq 3$, *aun cuando no se especifique por escrito.*

En el capítulo 3, se presentaron las funciones y en el capítulo 5, se discutieron las funciones polinomiales. A continuación se presentan las funciones racionales.

Función racional

Una **función racional** es una función de la forma $y = f(x) = \frac{p}{q}$, donde p y q son polinomios, y $q \neq 0$.

Comprende el Álgebra

La notación $y = f(x)$, significa que la ecuación define una función en la que x es la variable independiente y y es la variable dependiente. Observa que $f(x)$ *no* significa f por x.

Ejemplos de funciones racionales

$$f(x) = \frac{4}{x} \qquad y = \frac{x^2+2}{x+3} \qquad T(a) = \frac{a+9}{a^2-4} \qquad h(x) = \frac{7x-8}{2x+1}$$

Recuerda, del capítulo 3, que el *dominio* de una función es el conjunto de valores que pueden usarse para sustituir la variable independiente, por lo general x, en la función. Recuerda también, del capítulo 5, que el dominio de una función polinomial es el conjunto de todos los números reales. Dado que no se puede dividir entre 0, se tiene la siguiente definición.

Dominio de una función racional

El **dominio de una función racional** $y = f(x) = \frac{p}{q}$, es el conjunto de todos los números reales para los que el denominador, q, *no* es igual a 0.

Por ejemplo:

- Para la función $f(x) = \frac{2}{x}$, el dominio es $\{x|x \neq 0\}$.
- Para la función $f(t) = \frac{t+3}{t}$, el dominio es $\{t|t \neq 0\}$.
- Para la función $g(p) = \frac{p^2 + 4p}{p-6}$, el dominio es $\{p|p \neq 6\}$.
- Para la función $f(x) = \frac{3x+5}{2x-1}$, el dominio es $\left\{x \,|\, x \neq \frac{1}{2}\right\}$.
- Para la función $h(a) = \frac{a}{a^2-4}$, el dominio es $\{a|a \neq 2 \text{ y } a \neq -2\}$.

EJEMPLO 1 Determina el dominio de las siguientes funciones racionales.

a) $f(x) = \frac{x+7}{x-3}$ **b)** $f(x) = \frac{3x-4}{5x-1}$

c) $f(x) = \frac{x-3}{x^2+2x-15}$ **d)** $f(x) = \frac{x}{x^2+8}$

Solución

a) El dominio de la función racional, es el conjunto de todos los números reales x, para los que el denominador, $x-3$, es distinto de 0.

$$x - 3 \neq 0$$
$$x \neq 3$$

Por tanto, el dominio es $\{x \,|\, x \neq 3\}$

b) El dominio de la función racional, es el conjunto de todos los números reales x, para los que el denominador, $5x-1$, es distinto de 0.

$$5x - 1 \neq 0$$
$$5x \neq 1$$
$$x \neq \frac{1}{5}$$

Por tanto, el dominio es $\left\{x \,|\, x \neq \frac{1}{5}\right\}$.

c) El dominio es el conjunto de todos los números reales x, para los que el denominador, $x^2 + 2x - 15$, es distinto de 0. Primero, reescribe el denominador en forma factorizada:

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2+2x-15}$$
$$= \frac{x-3}{(x+5)(x-3)} \quad \text{Factoriza el denominador de } f(x).$$

Aunque la función racional tiene un factor de $(x-3)$ común, tanto al numerador como al denominador, un valor de $x = 3$ conduciría a una función indefinida. Por tanto, x no puede ser -5 o 3. El dominio se escribe:

$$\{x \,|\, x \neq -5 \text{ y } x \neq 3\}$$

d) El dominio es todos los números reales x, para los que el denominador, $x^2 + 8$, es distinto de 0. Dado que $x^2 + 8$ siempre es positivo, el denominador nunca puede ser igual a 0, y el dominio es todos los números reales. El dominio se escribe:

$$\{x \,|\, x \text{ es un número real}\}$$

Ahora resuelve el ejercicio 19

USA TU CALCULADORA GRAFICADORA

Experimentar con una calculadora graficadora, te dará alguna idea de la gran variedad de gráficas de funciones racionales. Por ejemplo, la **Figura 6.1**, muestra la gráfica de $f(x) = \dfrac{x+1}{x-6}$ del ejemplo **1 a)** en la TI-84 Plus. El dominio de $f(x)$ es $\{x|x \neq 6\}$. Observa que no hay punto sobre la gráfica que corresponda a $x = 6$.

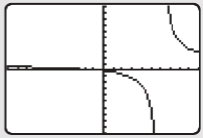


FIGURA 6.1

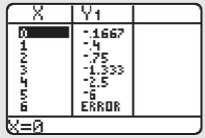


FIGURA 6.2

Otra forma de explorar los dominios de las funciones racionales, es usar la funcionalidad TABLE. La **Figura 6.2** muestra los pares ordenados de la función. Observa que, cuando $x = 6$, el valor de y en pantalla, es ERROR. Esto se debe a que $f(6)$ está indefinido, de modo que $x = 6$ se excluye del dominio de $f(x)$.

2 Simplificación de expresiones racionales

Una expresión racional, se **simplifica** cuando el numerador y el denominador no tienen factores comunes distintos a 1. La fracción $\dfrac{6}{9}$ no está simplificada, porque 6 y 9 contienen ambos el factor común 3. Cuando el 3 se factoriza, la fracción simplificada es $\dfrac{2}{3}$.

$\frac{6}{9}$ no es una fracción simplificada $\longrightarrow$ $\dfrac{6}{9} = \dfrac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot 2}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot 3} = \dfrac{2}{3}$ $\longleftarrow$ $\frac{2}{3}$ es una fracción simplificada

La expresión racional $\dfrac{ab - b^2}{2b}$ no está simplificada, porque tanto el numerador como el denominador, tienen un factor común, b. Para simplificar esta expresión, factoriza b de cada término en el numerador; luego divídelo.

$$\frac{ab - b^2}{2b} = \frac{b(a-b)}{2\cancel{b}} = \frac{a-b}{2}$$

En consecuencia, $\dfrac{ab - b^2}{2b}$ se convierte en $\dfrac{a-b}{2}$ cuando se simplifica.

Para simplificar expresiones racionales

1. Factoriza, tanto el numerador como el denominador, de forma tan completa como sea posible.
2. Divide, el numerador y el denominador, entre cualquier factor común.

EJEMPLO 2 Simplifica. **a)** $\dfrac{x^2 + 5x + 4}{x + 4}$ **b)** $\dfrac{3x^3 - 3x^2}{x^3 - x}$

Solución

a)
$$\frac{x^2 + 5x + 4}{x + 4}$$
$$= \frac{(x+4)(x+1)}{x+4} \quad \text{Factoriza el numerador.}$$
$$= \frac{\cancel{(x+4)}(x+1)}{\cancel{x+4}} \quad \text{Divide el factor común.}$$
$$= x + 1$$

b) $\dfrac{3x^3 - 3x^2}{x^3 - x}$

$= \dfrac{3x^2(x-1)}{x(x^2-1)}$ Factoriza el MFC de numerador y denominador.

$= \dfrac{3x^2(x-1)}{x(x+1)(x-1)}$ Factoriza $x^2 - 1$ como la diferencia de dos cuadrados.

$= \dfrac{3x^2(x-1)}{x(x+1)(x-1)}$ Divide los factores comunes.

$= \dfrac{3x}{x+1}$

Ahora resuelve el ejercicio 27

Comprende el Álgebra

Cuando un factor en el numerador tenga términos que son *opuestos* de un factor en el denominador, estos dos factores tienen una razón de -1. Por ejemplo:

$$\frac{3x-2}{2-3x} = \frac{3x-2}{-1(-2+3x)} = \frac{(3x-2)}{-1(3x-2)} = \frac{1}{-1} = -1$$

Cuando los términos en un numerador difieren solamente en el signo de los términos en un denominador, puedes factorizar -1, ya sea del numerador o del denominador. Por ejemplo,

$$-2x + 3 = -1(2x - 3) = -(2x - 3)$$
$$6 - 5x = -1(-6 + 5x) = -(5x - 6)$$
$$-3x^2 + 8x - 6 = -1(3x^2 - 8x + 6) = -(3x^2 - 8x + 6)$$

EJEMPLO 3 Simplifica $\dfrac{27x^3 - 8}{2 - 3x}$.

Solución

$\dfrac{27x^3 - 8}{2 - 3x} = \dfrac{(3x)^3 - (2)^3}{2 - 3x}$ Escribe el numerador como una diferencia de dos cubos.

$= \dfrac{(3x-2)(9x^2 + 6x + 4)}{2 - 3x}$ Factoriza; recuerda que: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$= \dfrac{(3x-2)(9x^2 + 6x + 4)}{-1(3x-2)}$ Factoriza -1 del denominador y divide factores comunes.

$= \dfrac{9x^2 + 6x + 4}{-1}$

$= -(9x^2 + 6x + 4)$ o $-9x^2 - 6x - 4$

Ahora resuelve el ejercicio 33

CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

INCORRECTO $\dfrac{x^2 + 6}{x}$ INCORRECTO $\dfrac{x + 8}{4}$

Recuerda que solamente puedes dividir *factores* comunes. Por tanto, las expresiones $\dfrac{x^2 + 6}{x}$ y $\dfrac{x + 8}{4}$ no se pueden simplificar. Sólo cuando las expresiones se *multiplican*, éstas pueden ser factores. Ninguna de las expresiones anteriores puede simplificarse de su forma original.

CORRECTO $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x + 2$

INCORRECTO $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

3 Multiplicación de expresiones racionales

Ahora que sabes cómo simplificar expresiones racionales, se puede abordar la multiplicación de expresiones racionales.

Para multiplicar expresiones racionales

Para multiplicar expresiones racionales, usa la siguiente regla:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d},\quad b\neq 0,\ d\neq 0$$

Para multiplicar expresiones racionales, sigue estos pasos:

1. Factoriza todos los numeradores y denominadores tanto como sea posible.
2. Divide cualquier factor común.
3. Multiplica usando la regla anterior.
4. Simplifica la respuesta cuando sea posible.

Si todos los factores comunes se factorizaron en el paso 2, tu respuesta en el paso 4 debería estar en forma simplificada.

EJEMPLO 4 Multiplica.

a) $\dfrac{x-5}{6x}\cdot\dfrac{x^2-2x}{x^2-7x+10}$ **b)** $\dfrac{15x-12}{4x^2-9}\cdot\dfrac{2x-3}{4-5x}$

Solución

a) $\dfrac{x-5}{6x}\cdot\dfrac{x^2-2x}{x^2-7x+10}=\dfrac{x-5}{6x}\cdot\dfrac{x(x-2)}{(x-2)(x-5)}$ Factoriza; divide los factores comunes.

$$=\frac{1}{6}$$

b) $\dfrac{15x-12}{4x^2-9}\cdot\dfrac{2x-3}{4-5x}=\dfrac{3(5x-4)}{(2x+3)(2x-3)}\cdot\dfrac{2x-3}{4-5x}$ Factoriza.

$$=\frac{3(5x-4)}{(2x+3)(2x-3)}\cdot\frac{2x-3}{-1(5x-4)}$$ Factoriza -1 de $4-5x$. Divide los factores comunes.

$$=\frac{3}{2x+3}\cdot(-1)=-\frac{3}{2x+3}$$

Ahora resuelve el ejercicio 53

EJEMPLO 5 Multiplica $\dfrac{x^2-y^2}{x+y}\cdot\dfrac{x+4y}{2x^2-xy-y^2}$.

Solución

$$\frac{x^2-y^2}{x+y}\cdot\frac{x+4y}{2x^2-xy-y^2}=\frac{(x+y)(x-y)}{x+y}\cdot\frac{x+4y}{(2x+y)(x-y)}$$ Factoriza; divide los factores comunes.

$$=\frac{x+4y}{2x+y}$$

Ahora resuelve el ejercicio 55

EJEMPLO 6 Multiplica $\dfrac{ab - ac + bd - cd}{ab + ac + bd + cd} \cdot \dfrac{b^2 + bc + bd + cd}{b^2 + bd - bc - cd}$.

Solución Factoriza, tanto numeradores como denominadores, por agrupación. Luego, divide los factores comunes.

$$\frac{ab - ac + bd - cd}{ab + ac + bd + cd} \cdot \frac{b^2 + bc + bd + cd}{b^2 + bd - bc - cd}$$

$$= \frac{a(b - c) + d(b - c)}{a(b + c) + d(b + c)} \cdot \frac{b(b + c) + d(b + c)}{b(b + d) - c(b + d)}$$ Factoriza por agrupación.

$$= \frac{(b - c)(a + d)}{(b + c)(a + d)} \cdot \frac{(b + c)(b + d)}{(b + d)(b - c)}$$ Factoriza por agrupación (continuación).

$$= \frac{\cancel{(b - c)}\,\cancel{(a + d)}}{\cancel{(b + c)}\,\cancel{(a + d)}} \cdot \frac{\cancel{(b + c)}\,\cancel{(b + d)}}{\cancel{(b + d)}\,\cancel{(b - c)}} = 1$$ Divide los factores comunes.

Ahora resuelve el ejercicio 77

4 División de expresiones racionales

A continuación, se discute la división de expresiones racionales.

Para dividir expresiones racionales

Para dividir expresiones racionales, usa la siguiente regla:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}, \quad b \neq 0,\ c \neq 0,\ d \neq 0$$

Para dividir expresiones racionales, multiplica la primera expresión racional, por el recíproco de la segunda expresión racional.

EJEMPLO 7 Divide $\dfrac{18x^4}{5y^3} \div \dfrac{3x^5}{25y}$.

Solución

$$\frac{18x^4}{5y^3} \div \frac{3x^5}{25y} = \frac{18x^4}{5y^3} \cdot \frac{25y}{3x^5}$$ Multiplica por el recíproco del divisor.

$$= \frac{\overset{6}{\cancel{18}}\,\cancel{x^4}}{5\,\cancel{y^3}_{y^2}} \cdot \frac{\overset{5}{\cancel{25}}\,\cancel{y}}{\cancel{3}\,\cancel{x^5}_{x}}$$ Divide los factores comunes.

$$= \frac{6 \cdot 5}{y^2 x} = \frac{30}{xy^2}$$

Ahora resuelve el ejercicio 51

En el ejemplo 7, todos los numeradores y denominadores eran monomios. Cuando los numeradores o denominadores son binomios o trinomios, se les factoriza, si es posible, en orden para dividir los factores comunes. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 8.

EJEMPLO 8 Divide.

a) $\dfrac{x^2 - 25}{x + 7} \div \dfrac{x - 5}{x + 7}$ **b)** $\dfrac{3x^2 + 14x + 8}{7x^2 + 25x - 12} \div \dfrac{6x^2 + 13x + 6}{15 - 35x}$

Solución

a) $\dfrac{x^2 - 25}{x + 7} \div \dfrac{x - 5}{x + 7} = \dfrac{x^2 - 25}{x + 7} \cdot \dfrac{x + 7}{x - 5}$ Multiplica por el recíproco del divisor.

$$= \frac{(x + 5)\,\cancel{(x - 5)}}{\cancel{x + 7}} \cdot \frac{\cancel{x + 7}}{\cancel{x - 5}}$$ Factoriza; divide los factores comunes.

$$= x + 5$$

b)
$$\frac{3x^2 + 14x + 8}{7x^2 + 25x - 12} \div \frac{6x^2 + 13x + 6}{15 - 35x}$$
$$= \frac{3x^2 + 14x + 8}{7x^2 + 25x - 12} \cdot \frac{15 - 35x}{6x^2 + 13x + 6}$$ Multiplica por el recíproco del divisor.
$$= \frac{(3x + 2)(x + 4)}{(7x - 3)(x + 4)} \cdot \frac{5(3 - 7x)}{(3x + 2)(2x + 3)}$$ Factoriza. Divide los factores comunes.
$$= \frac{1}{7x - 3} \cdot \frac{5(-1)(7x - 3)}{2x + 3}$$ Factoriza -1 de $3 - 7x$.
$$= -\frac{5}{2x + 3}$$

Ahora resuelve el ejercicio 59

EJEMPLO 9 Divide $\dfrac{x^4 - y^4}{x - y} \div \dfrac{x^2 + xy}{x^2 - 2xy + y^2}$.

Solución
$$\frac{x^4 - y^4}{x - y} \div \frac{x^2 + xy}{x^2 - 2xy + y^2}$$
$$= \frac{x^4 - y^4}{x - y} \cdot \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 + xy}$$ Multiplica por el recíproco del divisor.
$$= \frac{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)}{x - y} \cdot \frac{(x - y)(x - y)}{x(x + y)}$$ Factoriza.
$$= \frac{(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)}{x - y} \cdot \frac{(x - y)(x - y)}{x(x + y)}$$ Factoriza aún más; divide los factores comunes.
$$= \frac{(x^2 + y^2)(x - y)^2}{x}$$

Ahora resuelve el ejercicio 69

SUGERENCIA ÚTIL

Consejo de estudio
A lo largo de este capítulo, necesitarás factorizar polinomios. Es importante que entiendas las técnicas de factorización abordadas en el capítulo 5.

6.1 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

multiplicar dividir sumar función dominio racional rango simplificar

1. Una expresión _____ es de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son polinomios, y $q \neq 0$.
2. Una _____ racional es de la forma $y = f(x) = \frac{p}{q}$, donde p y q son polinomios, y $q \neq 0$.
3. El _____ de una función racional es el conjunto de todos los números reales, para los que el denominador *no* es igual a 0.
4. Para _____ una expresión racional, primero factoriza el numerador y el denominador, y luego divide cualquier factor común.
5. Para _____ dos expresiones racionales, primero factoriza todos los numeradores y denominadores, y divide cualquier factor común.
6. Para _____ dos expresiones racionales, multiplica la primera expresión racional por el recíproco de la segunda expresión racional.

Practica tus habilidades

Determina los valores que se excluyen en las siguientes expresiones.

7. $\dfrac{x+3}{x-4}$ **8.** $\dfrac{t-2}{t+5}$ **9.** $\dfrac{2x+1}{3x-4}$ **10.** $\dfrac{4x-3}{7x+5}$ **11.** $\dfrac{4}{2x^2-15x+25}$

12. $\dfrac{3x+5}{5x^2-x-4}$ **13.** $\dfrac{x^2+81}{x^2-81}$ **14.** $\dfrac{x+2}{x^2-64}$ **15.** $\dfrac{x-3}{x^2+12}$ **16.** $\dfrac{x^2-36}{x^2+36}$

Determina el dominio de cada función.

17. $f(x)=\dfrac{x-4}{x-5}$ **18.** $f(t)=\dfrac{t+7}{t+3}$ **19.** $s(t)=\dfrac{t+5}{3t^2-11t-4}$

20. $h(r)=\dfrac{2r-7}{2r^2+7r-15}$ **21.** $f(a)=\dfrac{a^2+3a+2}{a^2+4a+3}$ **22.** $f(b)=\dfrac{b^2+8b}{b^2-64}$

23. $g(x)=\dfrac{x^2-x+8}{x^2+4}$ **24.** $h(x)=\dfrac{x^3-64x}{x^2+81}$ **25.** $f(x)=\dfrac{x+7}{x^3+3x^2-4x-12}$

26. $f(x)=\dfrac{x-3}{x^3-2x^2-9x+18}$

Simplifica cada expresión racional.

27. $\dfrac{x^2+10x}{2x^2-5x}$ **28.** $\dfrac{3y^2-4y}{y^2+8y}$ **29.** $\dfrac{15-6x}{14x-35}$

30. $\dfrac{15x-10}{8-12x}$ **31.** $\dfrac{a^2-3a-10}{a^2+5a+6}$ **32.** $\dfrac{b^2+5b-14}{b^2+4b-12}$

33. $\dfrac{p^2-2p-24}{6-p}$ **34.** $\dfrac{3q^2+8q-35}{7-3q}$ **35.** $\dfrac{16x^2+34x-15}{18x^2+37x-20}$

36. $\dfrac{6x^2+13x-63}{12x^2-13x-35}$ **37.** $\dfrac{x^2+3xy-18y^2}{x^2+5xy-6y^2}$ **38.** $\dfrac{y^2-10yz+24z^2}{y^2-5yz+4z^2}$

39. $\dfrac{9x^2-49}{6x^2-29x+35}$ **40.** $\dfrac{4x^2-9}{2x^2-x-3}$ **41.** $\dfrac{-12x^2-14x+10}{-8x^2-8x+6}$

42. $\dfrac{-18y^2+39y+15}{-36y^2+120y-75}$ **43.** $\dfrac{6y^2-17y-14}{49-4y^2}$ **44.** $\dfrac{10z^2+11z-6}{4-25z^2}$

45. $\dfrac{a^2+7a-ab-7b}{a^2-ab+5a-5b}$ **46.** $\dfrac{xy-yw+xz-zw}{xy+yw+xz+zw}$ **47.** $\dfrac{x^2-x-12}{x^3+27}$

48. $\dfrac{x^2-16}{x^3-64}$

Multiplica o divide como se indica. Simplifica todas las respuestas.

49. $\dfrac{3x}{5y^2}\cdot\dfrac{y}{9}$ **50.** $\dfrac{5a^2}{7b^2}\cdot\dfrac{b}{15a}$ **51.** $\dfrac{18x^2y^3}{25p^2}\div\dfrac{27x^2y}{15p}$

52. $\dfrac{10m^4}{49x^5y^7}\div\dfrac{25m^5}{21x^{12}y^5}$ **53.** $\dfrac{2x^2-2xy}{3xy+3y^2}\cdot\dfrac{9xy^2+9y^3}{4xy-4x^2}$ **54.** $\dfrac{5v^2+5vw}{7vw-7w^2}\cdot\dfrac{21w^2-21vw}{10v^3+10v^2w}$

55. $\dfrac{x^2+3x-10}{4x}\cdot\dfrac{x^2-3x}{x^2-5x+6}$ **56.** $\dfrac{9y}{y^2+4y-21}\cdot\dfrac{y^2+y-12}{3y+12}$

57. $\dfrac{r^2+10r+21}{r+7}\div\dfrac{r^2-5r-24}{r^3}$ **58.** $\dfrac{s^3}{2s^2-11s-21}\div\dfrac{s^2-7s}{2s^2-3s-9}$

59. $\dfrac{x^2+12x+35}{x^2+4x-5} \div \dfrac{x^2+3x-28}{7x-7}$

60. $\dfrac{x+1}{x^2-17x+30} \div \dfrac{8x+8}{x^2+7x-18}$

61. $\dfrac{a-b}{9a+9b} \div \dfrac{a^2-b^2}{a^2+2a+1}$

62. $\dfrac{p^2-q^2}{p^2+2pq+q^2} \div \dfrac{5p-5q}{p^2-2pq+q^2}$

63. $\dfrac{3x^2-x-4}{4x^2+5x+1} \cdot \dfrac{2x^2-5x-12}{6x^2+x-12}$

64. $\dfrac{6x^3-x^2-x}{2x^2+x-1} \cdot \dfrac{x^2-1}{x^3-2x^2+x}$

65. $\dfrac{x+2}{x^3-8} \cdot \dfrac{(x-2)^2}{x^2+4}$

66. $\dfrac{(a-b)^3}{a^3-b^3} \cdot \dfrac{a^2-b^2}{(a-b)^2}$

67. $\dfrac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2} \div \dfrac{(x+y)^2}{(x-y)^2}$

68. $\dfrac{(x^2-y^2)^2}{(x^2-y^2)^3} \div \dfrac{x^2+y^2}{x^4-y^4}$

69. $\dfrac{2x^4+4x^2}{6x^2+14x+4} \div \dfrac{x^2+2}{3x^2+x}$

70. $\dfrac{2x^3-7x^2+3x}{x^2+2x-3} \cdot \dfrac{x^2+3x}{(x-3)^2}$

71. $\dfrac{8a^3-1}{4a^2+2a+1} \div \dfrac{a^2-2a+1}{(a-1)^2}$

72. $\dfrac{r^2-16}{r^3-64} \div \dfrac{r^2+8r+16}{r^2+4r+16}$

73. $\dfrac{2a^2-17a+21}{2a^2-13a+15} \div \dfrac{3a-21}{35-7a}$

74. $\dfrac{12b^2+13b-35}{6b^2-13b-63} \div \dfrac{30-24b}{10b-45}$

75. $\dfrac{-8x^2+18}{-36x^2+100} \cdot \dfrac{3x^2+17x+20}{2x^2+5x-12}$

76. $\dfrac{-48x^2-114x+15}{32x^2-52x+6} \cdot \dfrac{4x^2-9}{4x^2-25}$

77. $\dfrac{ac-ad+bc-bd}{ac+ad+bc+bd} \cdot \dfrac{pc+pd-qc-qd}{pc-pd+qc-qd}$

78. $\dfrac{2p^2+2pq-pq^2-q^3}{p^3+p^2+pq^2+q^2} \div \dfrac{p^3+p+p^2q+q}{p^3+p+p^2+1}$

Resolución de problemas

Determina el polinomio que se debe colocar en el área sombreada, para formar un enunciado verdadero.

79. $\dfrac{\qquad}{x^2+2x-15} = \dfrac{1}{x-3}$ **80.** $\dfrac{\qquad}{3x+2} = x-3$ **81.** $\dfrac{y^2-y-20}{\qquad} = \dfrac{y+4}{y+1}$ **82.** $\dfrac{\qquad}{6p^2+p-15} = \dfrac{2p-1}{2p-3}$

Determina el polinomio que se debe colocar en el área sombreada, para formar un enunciado verdadero.

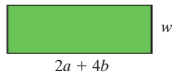
83. $\dfrac{x^2-x-12}{x^2+2x-3} \cdot \dfrac{\qquad}{x^2-2x-8} = 1$

84. $\dfrac{x^2-4}{(x+2)^2} \cdot \dfrac{2x^2+x-6}{\qquad} = \dfrac{x-2}{2x+5}$

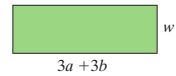
85. $\dfrac{x^2-9}{2x^2+3x-2} \div \dfrac{2x^2-9x+9}{\qquad} = \dfrac{x+3}{2x-1}$

86. $\dfrac{4r^2-r-18}{\qquad} \div \dfrac{4r^3-9r^2}{6r^2-9r+3} = \dfrac{3(r-1)}{r^2}$

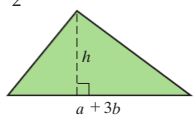
87. Área Considera el siguiente rectángulo. Su área es $3a^2+7ab+2b^2$ y su longitud es $2a+4b$. Determina su ancho, w, en términos de a y b, al dividir su área entre su longitud.



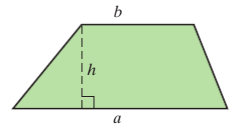
88. Área Considera el siguiente rectángulo. Su área es $a^2+2ab+b^2$ y su longitud es $3a+3b$. Determina su ancho, w, en términos de a y b, al dividir su área entre su longitud.



89. Área Considera el siguiente triángulo. Si su área es $a^2+4ab+3b^2$ y su base es $a+3b$, determina su altura h. Usa área $= \frac{1}{2}$(base)(altura).



90. Área Considera el siguiente trapezoide. Si su área es $a^2+2ab+b^2$, determina su altura, h. Usa área $= \frac{1}{2}h(a+b)$.



Problemas de desafío

Realiza cada operación indicada.

91. $\left(\dfrac{2x^2 - 3x - 14}{2x^2 - 9x + 7} \div \dfrac{6x^2 + x - 15}{3x^2 + 2x - 5}\right) \cdot \dfrac{6x^2 - 7x - 3}{2x^2 - x - 3}$

92. $\left(\dfrac{a^2 - b^2}{2a^2 - 3ab + b^2} \cdot \dfrac{2a^2 - 7ab + 3b^2}{a^2 + ab}\right) \div \dfrac{ab - 3b^2}{a^2 + 2ab + b^2}$

93. $\dfrac{5x^2(x-1) - 3x(x-1) - 2(x-1)}{10x^2(x-1) + 9x(x-1) + 2(x-1)} \cdot \dfrac{2x+1}{x+3}$

94. $\dfrac{x^2(3x-y) - 5x(3x-y) - 24(3x-y)}{x^2(3x-y) - 9x(3x-y) + 8(3x-y)} \cdot \dfrac{x-1}{x+3}$

95. $\dfrac{(x-p)^n}{x^{-2}} \div \dfrac{(x-p)^{2n}}{x^{-6}}$

96. $\dfrac{x^{-3}}{(a-b)^r} \div \dfrac{x^{-5}}{(a-b)^{r+2}}$

Simplifica.

97. $\dfrac{x^{5y} + 3x^{4y}}{3x^{3y} + x^{4y}}$

98. $\dfrac{m^{2x} - m^x - 2}{m^{2x} - 4}$

Para los ejercicios 99-102,

a) *Determina el dominio de la función.*

b) *Elabora la gráfica de la función de forma conectada.*

99. $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ **100.** $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ **101.** $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$ **102.** $f(x) = \dfrac{x-2}{x-2}$

103. Considera la función racional $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

a) Determina el dominio de la función.

b) Completa la siguiente tabla para la función.

x	-10	-1	-0.5	-0.1	-0.01	0.01	0.1	0.5	1	10
y										

c) Dibuja la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Considera lo que ocurre a la función, conforme x se acerca cada vez más a 0, tiende a 0 desde ambos lados, izquierdo y derecho.

d) ¿Podría esta fracción tener valor de 0? Explica tu respuesta.

Ejercicios conceptuales y de redacción

104. Construye una expresión racional, que sea indefinida en $x = 4$ y $x = -5$. Explica cómo determinaste tu respuesta.

105. Construye una expresión racional, que sea indefinida en $x = 2$ y $x = -3$. Explica cómo determinaste tu respuesta.

106. Considera la función racional $g(x) = \dfrac{2}{x+3}$. Explica por qué esta función nunca puede ser igual a 0.

107. Considera la función racional $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Explica por qué esta función nunca puede ser igual a 0.

108. Considera la función $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2 - 81}$. ¿Para qué valor de x, si alguno, esta función **a)** será igual a 0? **b)** será indefinida? Explica.

109. Considera la función racional $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2 - 36}$. ¿Para qué valor de x, si alguno, esta función **a)** será igual a 0? **b)** será indefinida. Explica.

110. Proporciona una función que sea indefinida en $x = -4$ y $x = -2$ y que tenga un valor de 0 en $x = 5$. Explica cómo determinaste tu respuesta.

111. Proporciona una función que sea indefinida en $x = 3$ y $x = -1$ y que tenga un valor de 0 en $x = 2$. Explica cómo determinaste tu respuesta.

Actividad grupal

112. Considera la función racional $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

a) En equipo, determinen el dominio de esta función.

b) Cada miembro del grupo completará individualmente la siguiente tabla para la función.

x	-2	-1	0	1	1.9	1.99	2.01	2.1	3	4	5	6
y												

c) Comparen sus respuestas con el inciso **b)** y lleguen a un acuerdo sobre los valores correctos de la tabla.

d) En equipo, dibujen la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$. ¿La función está definida cuando $x = 2$?

e) ¿Podría esta función llegar a tener un valor de 0? Si es así, ¿para qué valor(es) de a, es $f(a) = 0$?

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **113.** Resuelve $6(x - 2) + 6y = 12x$ para y.

[2.5] **114.** Resuelve $4 + \dfrac{4x}{3} < 6$ y proporciona la respuesta en notación de intervalo.

[2.6] **115.** Resuelve $\left|\dfrac{2x - 4}{12}\right| = 5$.

[3.2] **116.** Sea $f(x) = |6 - 3x| - 2$. Determina $f(1.3)$.

[4.1] **117.** Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$3x + 4y = 2$$
$$2x + 5y = -1$$

[5.6] **118.** Factoriza $9x^2 + 6xy + y^2 - 4$.

6.2 Suma y resta de expresiones racionales

1. **Suma y resta de expresiones con un denominador común**
2. **Determinación del mínimo común denominador (MCD)**
3. **Suma y resta de expresiones con diferentes denominadores**
4. **Estudio de una aplicación de expresiones racionales**

1 Suma y resta de expresiones con un denominador común

Cuando sumas o restas dos expresiones racionales con un denominador común, se debe sumar o restar los numeradores, manteniendo el denominador común.

Para sumar o restar expresiones racionales con un denominador común

Para sumar o restar expresiones racionales, usa las siguientes reglas.

SUMA

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}, \quad c \neq 0$$

RESTA

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c}, \quad c \neq 0$$

Para sumar o restar expresiones racionales con un denominador común,

1. Suma o resta las expresiones, usando las reglas dadas anteriormente.
2. Si es posible, simplifica la expresión.

EJEMPLO 1 Suma.

a) $\dfrac{x + 5}{2x - 3} + \dfrac{x + 4}{2x - 3}$

b) $\dfrac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 + x - 12} + \dfrac{x^2 + 16x - 7}{x^2 + x - 12}$

Solución

a) Dado que los denominadores son iguales, suma los numeradores y conserva el denominador común.

$$\frac{x + 5}{2x - 3} + \frac{x + 4}{2x - 3} = \frac{(x + 5) + (x + 4)}{2x - 3}$$ Suma los numeradores.

$$= \frac{x + 5 + x + 4}{2x - 3}$$ Quita los paréntesis.

$$= \frac{2x + 9}{2x - 3}$$ Reduce los términos semejantes.

b) Dado que los denominadores son iguales, suma los numeradores y conserva el denominador común.

$$\frac{2x^2-5x+3}{x^2+x-12}+\frac{x^2+16x-7}{x^2+x-12}=\frac{(2x^2-5x+3)+(x^2+16x-7)}{x^2+x-12}$$ Suma los numeradores.

$$=\frac{2x^2-5x+3+x^2+16x-7}{x^2+x-12}$$ Quita los paréntesis.

$$=\frac{3x^2+11x-4}{x^2+x-12}$$ Reduce los términos semejantes.

$$=\frac{(x+4)(3x-1)}{(x+4)(x-3)}$$ Factoriza; divide los factores comunes.

$$=\frac{3x-1}{x-3}$$

Ahora resuelve el ejercicio 11

CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

¿Cómo simplificarías este problema?

$$\frac{4x}{x-2}-\frac{2x+1}{x-2}$$

CORRECTO

$$\frac{4x}{x-2}-\frac{2x+1}{x-2}=\frac{4x-(2x+1)}{x-2}=\frac{4x-2x-1}{x-2}=\frac{2x-1}{x-2}$$

INCORRECTO

$$\frac{4x}{x-2}-\frac{2x+1}{x-2}=\frac{4x-2x+1}{x-2}=\frac{2x+1}{x-2}$$

El procedimiento en el lado derecho es incorrecto, porque *todo el numerador*, $2x+1$, debe restarse de $4x$. En vez de ello, sólo se restó $2x$. Observa, que se *debe cambiar el signo de cada término (no sólo el del primer término) en el numerador de la fracción que se está restando.* Observa, que $-(2x+1)=-2x-1$, por la propiedad distributiva.

EJEMPLO 2

Resta $\dfrac{10x^2-7x-40}{2x^2+x-28}-\dfrac{4x^2+4x-5}{2x^2+x-28}$.

Solución Dado que los denominadores son iguales, resta los numeradores y conserva el denominador común.

$$\frac{10x^2-7x-40}{2x^2+x-28}-\frac{4x^2+4x-5}{2x^2+x-28}=\frac{(10x^2-7x-40)-(4x^2+4x-5)}{2x^2+x-28}$$ Resta los numeradores.

$$=\frac{10x^2-7x-40-4x^2-4x+5}{2x^2+x-28}$$ Quita los paréntesis.

$$=\frac{6x^2-11x-35}{2x^2+x-28}$$ Reduce los términos semejantes.

$$=\frac{(2x-7)(3x+5)}{(2x-7)(x+4)}$$ Factoriza; divide los factores comunes.

$$=\frac{3x+5}{x+4}$$

Ahora resuelve el ejercicio 15

Comprende el Álgebra

Cuando restes expresiones racionales, asegúrate de restar todo el numerador de la expresión racional que se está restando. Como se ve en el ejemplo 2, la propiedad distributiva se usa para cambiar el signo de cada término a restar.

2 Determinación del mínimo común denominador (MCD)

Comprende el Álgebra

Un número *primo* es un número natural mayor que 1, que sólo tiene dos divisores: él mismo y 1. Los primeros 10 números primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 y 29.

Para sumar o restar dos fracciones con diferentes denominadores, primero obtén el mínimo común denominador (MCD). La obtención de un MCD puede involucrar la escritura de números como un producto de números primos. Por ejemplo, los números 36 y 48 pueden escribirse como:

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$$
$$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3$$

Quizás sea necesario escribir los coeficientes numéricos como productos de números primos para determinar el MCD.

Para determinar el mínimo común denominador (MCD) de expresiones racionales

1. Escribe cada coeficiente no primo (distinto de 1) de los monomios que aparezcan en los denominadores como producto de números primos
2. Factoriza cada denominador completamente. Cualquier factor que ocurre más de una vez, debe expresarse como potencias. Por ejemplo, $(x + 5)(x + 5)$ debe expresarse como $(x + 5)^2$.
3. Enlista todos los diferentes factores (distintos de 1) que aparezcan en cualquiera de los denominadores. Cuando el mismo factor aparezca en más de un denominador, escribe el factor con la potencia más alta que aparezca.
4. El mínimo común denominador, es el producto de todos los factores obtenidos en el paso 3.

EJEMPLO 3 Determina el MCD de cada expresión.

a) $\frac{3}{5x} - \frac{2}{x^2}$

b) $\frac{1}{18x^3y} + \frac{5}{27x^2y^3}$

c) $\frac{3}{x} - \frac{2y}{x + 5}$

d) $\frac{7}{x^2(x + 1)} + \frac{3z}{x(x + 1)^3}$

Solución

a) Los factores que aparecen en los denominadores, son 5 y x. Enlista cada factor con su potencia más alta. El MCD es el producto de estos factores.

Potencia más alta de 5 — Potencia más alta de x

$$\text{MCD} = 5^1 \cdot x^2 = 5x^2$$

b) Los coeficientes numéricos, escritos como productos de números primos, son $18 = 2 \cdot 3^2$ y $27 = 3^3$. Los factores variables son x y y. Usando la potencia más alta de los factores, se obtiene el MCD.

Potencia más alta de 3 — Potencia más alta de x
Potencia más alta de 2 — Potencia más alta de y

$$\text{MCD} = 2^1 \cdot 3^3 \cdot x^3 \cdot y^3 = 54x^3y^3$$

c) Los factores son x y $x + 5$. Observa que, la x en el segundo denominador, $x + 5$, no es un factor de dicho denominador, pues la operación es adición en lugar de multiplicación.

$$\text{MCD} = x(x + 5)$$

d) Los factores son x y $x + 1$. La potencia más alta de x es 2, y la potencia más alta de $x + 1$ es 3.

$$\text{MCD} = x^2(x + 1)^3$$

Ahora resuelve el ejercicio 29

En ocasiones, es necesario factorizar todos los denominadores para obtener el MCD. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Determina el MCD de cada expresión.

a) $\dfrac{3}{2x^2 - 4x} + \dfrac{8x}{x^2 - 4x + 4}$ **b)** $\dfrac{4x}{x^2 - x - 12} - \dfrac{6x^2}{x^2 - 7x + 12}$

Solución

a) Factoriza ambos denominadores.

$$\frac{3}{2x^2 - 4x} + \frac{8x}{x^2 - 4x + 4} = \frac{3}{2x(x - 2)} + \frac{8x}{(x - 2)^2}$$

Los factores son 2, x y $x - 2$. Multiplica los factores elevados a la potencia más alta, que aparezcan para cada factor.

$$\text{MCD} = 2 \cdot x \cdot (x - 2)^2 = 2x(x - 2)^2$$

b) Factoriza ambos denominadores.

$$\frac{4x}{x^2 - x - 12} - \frac{6x^2}{x^2 - 7x + 12} = \frac{4x}{(x + 3)(x - 4)} - \frac{6x^2}{(x - 3)(x - 4)}$$

$$\text{MCD} = (x + 3)(x - 4)(x - 3)$$

Observa que, aunque $x - 4$ es un factor común de cada denominador, la potencia más alta del factor, que aparece en cualquier denominador, es 1.

Ahora resuelve el ejercicio 31

3 Suma y resta de expresiones con diferentes denominadores

A continuación, se presenta el procedimiento utilizado para sumar o restar expresiones racionales con diferentes denominadores.

Para sumar o restar expresiones racionales con diferentes denominadores

1. Determina el mínimo común denominador (MCD).
2. Reescribe cada fracción, como una fracción equivalente con el MCD. Esto se hace al multiplicar, tanto el numerador como el denominador, de cada fracción por cualquier factor necesario para obtener el MCD.
3. Deja el denominador en forma factorizada, pero multiplica el numerador.
4. Suma o resta los numeradores, manteniendo el MCD.
5. Cuando sea posible, reduce la fracción mediante factorización del numerador.

EJEMPLO 5 Suma. **a)** $\dfrac{2}{x} + \dfrac{9}{y}$ **b)** $\dfrac{5}{4a^2} + \dfrac{3}{14ab^3}$

Solución

a) Primero determina el MCD.

$$\text{MCD} = xy$$

Ahora escribe cada fracción con el MCD. Hazlo multiplicando, *tanto* el numerador *como* el denominador, de cada fracción por cualquier factor necesario para obtener el MCD.

En este problema, la primera fracción debe multiplicarse por $\dfrac{y}{y}$, y la segunda fracción debe multiplicarse por $\dfrac{x}{x}$.

$$\frac{2}{x} + \frac{9}{y} = \frac{y}{y} \cdot \frac{2}{x} + \frac{9}{y} \cdot \frac{x}{x} = \frac{2y}{xy} + \frac{9x}{xy}$$

Comprende el Álgebra

Cuando multipliques el numerador y el denominador de una expresión racional por el mismo factor, se está multiplicando por 1. Por tanto, se obtiene una expresión racional equivalente, pero el *valor* de la expresión racional no cambia. En el ejemplo 5, **a)**,

$\frac{2}{x}$ es equivalente a $\frac{2y}{xy}$

y

$\frac{9}{y}$ es equivalente a $\frac{9x}{xy}$

Ahora, suma los numeradores, manteniendo el MCD.

$$\frac{2y}{xy} + \frac{9x}{xy} = \frac{2y + 9x}{xy} \quad \text{o} \quad \frac{9x + 2y}{xy}$$

Por tanto, $\frac{2}{x} + \frac{9}{y} = \frac{9x + 2y}{xy}$.

b) El MCD de 4 y 14, es 28. El MCD de las dos fracciones, es $28a^2b^3$. Primero, escribe cada fracción con el denominador $28a^2b^3$. Para hacerlo, multiplica la primera fracción por $\frac{7b^3}{7b^3}$ y la segunda fracción por $\frac{2a}{2a}$.

$$\frac{5}{4a^2} + \frac{3}{14ab^3} = \frac{7b^3}{7b^3} \cdot \frac{5}{4a^2} + \frac{3}{14ab^3} \cdot \frac{2a}{2a}$$ Multiplica para obtener el MCD.

$$= \frac{35b^3}{28a^2b^3} + \frac{6a}{28a^2b^3}$$

$$= \frac{35b^3 + 6a}{28a^2b^3}$$ Suma los numeradores.

Ahora resuelve el ejercicio 37

EJEMPLO 6 $\frac{x + 5}{x - 7} - \frac{x + 2}{x - 3}$.

Solución El MCD es $(x - 7)(x - 3)$. Escribe cada expresión racional con el denominador $(x - 7)(x - 3)$.

$$\frac{x + 5}{x - 7} - \frac{x + 2}{x - 3} = \frac{x - 3}{x - 3} \cdot \frac{x + 5}{x - 7} - \frac{x + 2}{x - 3} \cdot \frac{x - 7}{x - 7}$$ Multiplica para obtener el MCD.

$$= \frac{(x - 3)(x + 5)}{(x - 3)(x - 7)} - \frac{(x + 2)(x - 7)}{(x - 3)(x - 7)}$$

$$= \frac{x^2 + 2x - 15}{(x - 3)(x - 7)} - \frac{x^2 - 5x - 14}{(x - 3)(x - 7)}$$ Multiplica los binomios en los numeradores.

$$= \frac{(x^2 + 2x - 15) - (x^2 - 5x - 14)}{(x - 3)(x - 7)}$$ Resta los numeradores.

$$= \frac{x^2 + 2x - 15 - x^2 + 5x + 14}{(x - 3)(x - 7)}$$ Quita los paréntesis.

$$= \frac{7x - 1}{(x - 3)(x - 7)}$$ Reduce los términos semejantes.

Ahora resuelve el ejercicio 45

EJEMPLO 7 Suma $\frac{2}{x - 3} + \frac{x + 5}{3 - x}$.

Solución Observa que cada denominador es el opuesto, o inverso aditivo, del otro. Puedes multiplicar numerador y denominador de cualquiera de las fracciones por -1, para obtener el MCD.

Comprende el Álgebra

Cuando dos expresiones racionales tienen denominadores que son mutuamente *opuestos*, el MCD puede obtenerse al multiplicar el numerador y el denominador de alguna expresión racional por -1.

$$\frac{2}{x - 3} + \frac{x + 5}{3 - x} = \frac{2}{x - 3} + \frac{-1}{-1} \cdot \frac{(x + 5)}{(3 - x)}$$ Multiplica para obtener el MCD.

$$= \frac{2}{x - 3} + \frac{-x - 5}{x - 3}$$ Propiedad distributiva.

$$= \frac{2 - x - 5}{x - 3}$$ Suma los numeradores.

$$= \frac{-x - 3}{x - 3}$$ Reduce los términos semejantes.

Puesto que no hay factores comunes en el numerador y el denominador, $\frac{-x - 3}{x - 3}$ no se puede simplificar más.

Ahora resuelve el ejercicio 49

EJEMPLO 8 Resta $\dfrac{3x+4}{2x^2-5x-12} - \dfrac{2x-3}{5x^2-18x-8}$.

Solución Factoriza el denominador de cada expresión.

$$\frac{3x+4}{2x^2-5x-12} - \frac{2x-3}{5x^2-18x-8} = \frac{3x+4}{(2x+3)(x-4)} - \frac{2x-3}{(5x+2)(x-4)}$$

El MCD es $(2x+3)(x-4)(5x+2)$.

$$\frac{3x+4}{(2x+3)(x-4)} - \frac{2x-3}{(5x+2)(x-4)}$$

$$= \frac{5x+2}{5x+2}\cdot\frac{3x+4}{(2x+3)(x-4)} - \frac{2x-3}{(5x+2)(x-4)}\cdot\frac{2x+3}{2x+3}$$ Multiplica para obtener el MCD.

$$= \frac{15x^2+26x+8}{(5x+2)(2x+3)(x-4)} - \frac{4x^2-9}{(5x+2)(2x+3)(x-4)}$$ Multiplica los numeradores.

$$= \frac{15x^2+26x+8-(4x^2-9)}{(5x+2)(2x+3)(x-4)}$$ Resta los numeradores.

$$= \frac{15x^2+26x+8-4x^2+9}{(5x+2)(2x+3)(x-4)}$$ Propiedad distributiva.

$$= \frac{11x^2+26x+17}{(5x+2)(2x+3)(x-4)}$$ Reduce los términos semejantes.

Ahora resuelve el ejercicio 57

EJEMPLO 9 Realiza las operaciones indicadas.

$$\frac{x-1}{x-2} - \frac{x+1}{x+2} + \frac{x-6}{x^2-4}$$

Solución Primero, factoriza x^2-4. El MCD de las tres fracciones es $(x+2)(x-2)$.

$$\frac{x-1}{x-2} - \frac{x+1}{x+2} + \frac{x-6}{x^2-4}$$

$$= \frac{x-1}{x-2} - \frac{x+1}{x+2} + \frac{x-6}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{x+2}{x+2}\cdot\frac{x-1}{x-2} - \frac{x+1}{x+2}\cdot\frac{x-2}{x-2} + \frac{x-6}{(x+2)(x-2)}$$ Multiplica para obtener el MCD.

$$= \frac{x^2+x-2}{(x+2)(x-2)} - \frac{x^2-x-2}{(x+2)(x-2)} + \frac{x-6}{(x+2)(x-2)}$$ Multiplica los numeradores.

$$= \frac{x^2+x-2-(x^2-x-2)+(x-6)}{(x+2)(x-2)}$$ Resta y suma los numeradores.

$$= \frac{x^2+x-2-x^2+x+2+x-6}{(x+2)(x-2)}$$ Propiedad distributiva.

$$= \frac{3x-6}{(x+2)(x-2)}$$ Reduce los términos semejantes.

$$= \frac{3(x-2)}{(x+2)(x-2)}$$ Factoriza; divide los factores comunes.

$$= \frac{3}{x+2}$$

Ahora resuelve el ejercicio 65

SUGERENCIA ÚTIL

Consejo de estudio

Ahora que se discutieron las operaciones de suma, resta, multiplicación y división, de expresiones racionales, se resumirán los procedimientos.

Para sumar o restar expresiones racionales, obtén el MCD. Expresa cada fracción con el MCD. Luego suma o resta los numeradores y escribe este resultado sobre el MCD.

Para multiplicar expresiones racionales, factoriza cada expresión completamente, divide los factores comunes, multiplica los numeradores y multiplica los denominadores.

Para dividir expresiones racionales, multiplica la primera expresión racional (o superior), por el recíproco de la segunda expresión racional (o inferior). Luego, factoriza cada expresión completamente, divide los factores comunes, multiplica los numeradores y multiplica los denominadores.

4 Estudio de una aplicación de expresiones racionales

En economía, se estudian los conceptos de ingreso, costo y ganancia. Si $R(x)$ es una función de ingreso y $C(x)$ es una función de costo, entonces la función de ganancia, $P(x)$ es

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

donde x es el número de artículos fabricados y vendidos por una compañía.

EJEMPLO 10 **Go-Carts** La compañía Sattler Go-Cart, construye y vende go-carts. Supón que $R(x) = \dfrac{6x - 7}{x + 2}$ y $C(x) = \dfrac{4x - 13}{x + 3}$ donde x es el número de go-carts vendidos cada semana. Determina la función ganancia.

Solución Entiende y Traduce Para determinar la función de ganancia, resta la función de costo de la función ingreso.

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$P(x) = \frac{6x - 7}{x + 2} - \frac{4x - 13}{x + 3}$$

El MCD es $(x + 2)(x + 3)$.



Realiza

$$= \frac{x + 3}{x + 3} \cdot \frac{6x - 7}{x + 2} - \frac{4x - 13}{x + 3} \cdot \frac{x + 2}{x + 2}$$ Multiplica para obtener el MCD.

$$= \frac{6x^2 + 11x - 21}{(x + 3)(x + 2)} - \frac{4x^2 - 5x - 26}{(x + 3)(x + 2)}$$ Multiplica los numeradores.

$$= \frac{(6x^2 + 11x - 21) - (4x^2 - 5x - 26)}{(x + 3)(x + 2)}$$ Resta los numeradores.

$$= \frac{6x^2 + 11x - 21 - 4x^2 + 5x + 26}{(x + 3)(x + 2)}$$ Propiedad distributiva.

$$= \frac{2x^2 + 16x + 5}{(x + 3)(x + 2)}$$ Reduce los términos semejantes.

Responde La función de ganancia es $P(x) = \dfrac{2x^2 + 16x + 5}{(x + 3)(x + 2)}$.

Ahora resuelve el ejercicio 77

6.2 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

$15(x+1)^2$ mínimo opuestos $5(x+1)$ más alta más baja

1. Para sumar o restar dos expresiones racionales con diferentes denominadores, primero obtén el _____ común denominador.
2. El mínimo común denominador de $\frac{3}{5(x+1)^2}$ y $\frac{1}{15(x+1)}$ es _____.
3. El MCD de expresiones racionales, contendrá la potencia _____ de los factores comunes que se encuentren en los denominadores de las expresiones racionales.
4. Cuando dos expresiones racionales tengan denominadores que son mutuamente _____, el MCD puede obtenerse al multiplicar tanto el numerador como el denominador de cualquier expresión racional por -1.

Practica tus habilidades

Suma o resta.

5. $\frac{5x-6}{x-8}+\frac{2x-5}{x-8}$
6. $\frac{3x+2}{2x+1}+\frac{5x-7}{2x+1}$
7. $\frac{3x-1}{x+3}+\frac{x+13}{x+3}$
8. $\frac{2x-7}{x-5}+\frac{x-8}{x-5}$
9. $\frac{3x+1}{2x-1}-\frac{7x-1}{2x-1}$
10. $\frac{5x+3}{3x+2}-\frac{20x+13}{3x+2}$
11. $\frac{7x-8}{x^2+2x-15}+\frac{5-6x}{x^2+2x-15}$
12. $\frac{-4x+6}{x^2+x-6}+\frac{5x-3}{x^2+x-6}$
13. $\frac{8a-3}{3a^2+2a-5}-\frac{5a-8}{3a^2+2a-5}$
14. $\frac{7b-3}{4b^2-12b-7}-\frac{5b-4}{4b^2-12b-7}$
15. $\frac{x^2-2}{x^2+6x-7}-\frac{-4x+19}{x^2+6x-7}$
16. $\frac{3k^2-7k-2}{2k^2+3k-5}-\frac{k^2-2k-5}{2k^2+3k-5}$
17. $\frac{3x^2-x}{2x^2-x-21}+\frac{2x-8}{2x^2-x-21}-\frac{x^2-2x+27}{2x^2-x-21}$
18. $\frac{2x^2+9x-15}{2x^2-13x+20}-\frac{3x+10}{2x^2-13x+20}-\frac{3x-5}{2x^2-13x+20}$

Determina el mínimo común denominador.

19. $\frac{7}{6a^2}+\frac{3}{4a}$
20. $\frac{9}{10b}-\frac{6}{25b^3}$
21. $\frac{2}{3a^4b^2}+\frac{7}{2a^3b^5}$
22. $\frac{2}{15c^2d}-\frac{5}{9c^2d^3}$
23. $\frac{x-1}{x}-\frac{x}{x+3}$
24. $\frac{y+7}{y-7}+\frac{3y-4}{y}$
25. $\frac{4x}{x+3}+\frac{6}{x+9}$
26. $\frac{1}{x-1}-\frac{x}{x-3}$
27. $\frac{p+7}{p-2}+\frac{p}{(p+7)(p-2)}$
28. $\frac{4}{(r-7)(r+2)}-\frac{r+8}{r-7}$
29. $\frac{7}{6x^3(x-3)}-\frac{11}{15x(x-3)^2}$
30. $\frac{15}{14x(2x+7)^2}+\frac{13}{10x^2(2x+7)}$
31. $\frac{a-2}{a^2-5a-24}+\frac{3}{a^2+11a+24}$
32. $\frac{3x-5}{6x^2+13xy+6y^2}+\frac{3}{3x^2+5xy+2y^2}$
33. $\frac{x}{2x^2-7x+3}+\frac{x-7}{4x^2+4x-3}-\frac{x^2+1}{2x^2-3x-9}$
34. $\frac{3}{x^2+3x-4}-\frac{4}{4x^2+5x-9}+\frac{x+2}{4x^2+25x+36}$

Suma o resta.

35. $\frac{3}{2x}+\frac{5}{x}$
36. $\frac{5}{7}+\frac{2}{7x}$
37. $\frac{3}{8x^4y}+\frac{1}{5x^2y^3}$

38. $\frac{5}{6xy^2} - \frac{3}{20x^3y}$

39. $\frac{5}{k} + \frac{8}{k+2}$

40. $\frac{3}{d} + \frac{7}{d-3}$

41. $\frac{7}{6x+3} - \frac{4}{10x+5}$

42. $\frac{11}{15x-10} - \frac{7}{12x-8}$

43. $\frac{7}{c-4} - \frac{5}{c-3}$

44. $\frac{8}{d-7} - \frac{3}{d+1}$

45. $\frac{4x}{x-4} + \frac{x+3}{x+1}$

46. $\frac{y+2}{y+3} + \frac{5y}{y+4}$

47. $\frac{7x}{x-8} + \frac{3x}{8-x}$

48. $\frac{5y}{3y-2} - \frac{7y}{2-3y}$

49. $\frac{a}{a-b} - \frac{a}{b-a}$

50. $\frac{3x}{x-5} - \frac{8x}{5-x}$

51. $\frac{x+3}{x+5} - \frac{x+2}{x+7}$

52. $\frac{x+5}{x-3} - \frac{x-2}{x+7}$

53. $\frac{2x^2-5x-3}{x^2-9} - \frac{2}{x+3}$

54. $\frac{6y^2-5y-6}{y^2-4} - \frac{y}{y-2}$

55. $\frac{4c^2-3c-7}{c^2+2c+1} - \frac{c}{c+1}$

56. $\frac{3d^2-3}{d^2-2d+1} - \frac{d}{d-1}$

57. $\frac{x}{x^2+2x-8} + \frac{x+1}{x^2-3x+2}$

58. $\frac{5z}{z^2+3z-10} + \frac{z+1}{z^2+z-6}$

59. $\frac{5x}{x^2-9x+8} - \frac{3(x+2)}{x^2-6x-16}$

60. $\frac{3a+2}{4a+1} - \frac{3a+6}{4a^2+9a+2}$

61. $\frac{11}{2p^2+7p-9} + \frac{4p-7}{2p^2-7p-72}$

62. $\frac{7}{3q^2+q-4} + \frac{9q+2}{3q^2-2q-8}$

63. $\frac{9p+34}{3p^2+8p+4} - \frac{70}{3p^2+14p+8}$

64. $\frac{25x-111}{5x^2+48x+27} + \frac{36}{5x^2+18x+9}$

65. $\frac{2r}{r-4} - \frac{2r}{r+4} + \frac{64}{r^2-16}$

66. $\frac{54}{s^2-9} - \frac{3s}{s+3} + \frac{3s}{s-3}$

67. $\frac{x}{x+7} - \frac{2x+1}{x-3} + \frac{3x^2+26x-35}{x^2+4x-21}$

68. $\frac{x}{3x+4} + \frac{3x+2}{x-5} - \frac{7x^2+24x+28}{3x^2-11x-20}$

69. $\frac{13x-31}{x^2-5x+6} - \frac{5}{x-2} + 1$

70. $\frac{x}{x^2-10x+24} - \frac{3}{x-6} + 1$

71. $\frac{3}{5p+6} + \frac{10p^2+14p+12}{5p^2-4p-12} - \frac{4}{p-2}$

72. $\frac{12p^2-29p+9}{8p^2-18p+7} + \frac{2}{4p-7} + \frac{2}{2p-1}$

73. $\frac{2}{2x+3y} - \frac{4x^2-6xy+9y^2}{8x^3+27y^3}$

74. $\frac{4}{4x-5y} - \frac{3x^2+2y^2}{64x^3-125y^3}$

Resolución de problemas

Para los ejercicios 75-76, recuerda que $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

75. Si $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ y $g(x) = \frac{x}{x+4}$, determina

a) el dominio de $f(x)$.

b) el dominio de $g(x)$.

c) $(f+g)(x)$.

d) el dominio de $(f+g)(x)$.

76. Si $f(x) = \frac{x+1}{x^2-9}$ y $g(x) = \frac{x}{x-3}$, determina

a) el dominio de $f(x)$.

b) el dominio de $g(x)$.

c) $(f+g)(x)$.

d) el dominio de $(f+g)(x)$.

Ganancia *En los ejercicios 77-80, determina la función de ganancia, P(x). (Consulta el ejemplo 10.)*

77. $R(x) = \frac{4x-5}{x+1}$ y $C(x) = \frac{2x-7}{x+2}$

78. $R(x) = \frac{5x-2}{x+2}$ y $C(x) = \frac{3x-}{x+}$

79. $R(x) = \dfrac{8x - 3}{x + 2}$ y $C(x) = \dfrac{5x - 8}{x + 3}$

80. $R(x) = \dfrac{7x - 10}{x + 3}$ y $C(x) = \dfrac{5x - 8}{x + 4}$

En los ejercicios 81-84, usa $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ y $g(x) = \dfrac{2}{x^2 + x - 6}$. *Determina lo siguiente.*

81. $(f + g)(x)$

82. $(f - g)(x)$

83. $(f \cdot g)(x)$

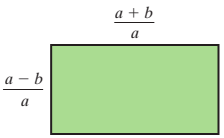
84. $(f/g)(x)$

85. Demuestra que $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$.

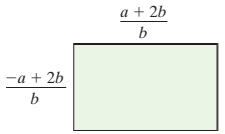
86. Demuestra que $x^{-1} + y^{-1} = \dfrac{x + y}{xy}$.

Área y perímetro *Considera los siguientes rectángulos. Determina* ***a)*** *el perímetro y* ***b)*** *el área.*

87.



88.



Determina el polinomio que se debe colocar en el área sombreada, para formar un enunciado verdadero.

89. $\dfrac{5x^2 - 6}{x^2 - x - 1} - \square = \dfrac{-2x^2 + 6x - 12}{x^2 - x - 1}$

90. $\dfrac{r^2 - 6}{r^2 - 5r + 6} - \square = \dfrac{1}{r - 2}$

Realiza las operaciones indicadas.

91. $\left(3 + \dfrac{1}{x + 3}\right)\left(\dfrac{x + 3}{x - 2}\right)$

92. $\left(\dfrac{3}{r + 1} - \dfrac{4}{r - 2}\right)\left(\dfrac{r - 2}{r + 10}\right)$

93. $\left(\dfrac{5}{a - 5} - \dfrac{2}{a + 3}\right) \div (3a + 25)$

94. $\left(\dfrac{x^2 + 4x - 5}{2x^2 + x - 3} \cdot \dfrac{2x + 3}{x + 1}\right) - \dfrac{2}{x + 2}$

95. $\left(\dfrac{x + 5}{x - 3} - x\right) \div \dfrac{1}{x - 3}$

96. $\left(\dfrac{x + 5}{x^2 - 25} + \dfrac{1}{x + 5}\right)\left(\dfrac{2x^2 - 13x + 15}{4x^2 - 6x}\right)$

97. El promedio ponderado de dos valores, a y b, está dado por $a\left(\dfrac{x}{n}\right) + b\left(\dfrac{n - x}{n}\right)$, donde $\dfrac{x}{n}$ es el peso dado a a, y $\dfrac{n - x}{n}$ es el peso dado a b.

a) Expresa esta suma como una sola fracción.

b) En el examen a, recibiste una calificación de 60; y en el examen b, recibiste una calificación de 92. Si el examen a cuenta $\dfrac{2}{5}$ de tu calificación final, y el examen b cuenta $\dfrac{3}{5}$, determina tu promedio ponderado.

98. Demuestra que $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-1} + \left(\dfrac{y}{x}\right)^{-1} + (xy)^{-1} = \dfrac{x^2 + y^2 + 1}{xy}$.

En los ejercicios 99 y 100, realiza la operación indicada.

99. $(a - b)^{-1} + (a - b)^{-2}$ **100.** $\left(\dfrac{a - b}{a}\right)^{-1} - \left(\dfrac{a + b}{a}\right)^{-1}$

Ejercicios conceptuales y de redacción

En los ejercicios 101 y 102, ***a)*** *explica por qué la resta no es correcta, y* ***b)*** *muestra la resta correcta.*

101. $\dfrac{x^2 - 4x}{(x+3)(x-2)} - \dfrac{x^2 + x - 2}{(x+3)(x-2)} \neq \dfrac{x^2 - 4x - x^2 + x - 2}{(x+3)(x-2)}$

102. $\dfrac{x - 5}{(x+4)(x-3)} - \dfrac{x^2 - 6x + 5}{(x+4)(x-3)} \neq \dfrac{x - 5 - x^2 - 6x + 5}{(x+4)(x-3)}$

103. Cuando dos expresiones racionales se suman o restan, ¿deben factorizarse los numeradores de las expresiones que se suman o restan? Explica.

104. ¿Son equivalentes las fracciones $\frac{x-3}{4-x}$ y $-\frac{x-3}{x-4}$? Explica.

105. ¿Son equivalentes las fracciones $\frac{8-x}{3-x}$ y $\frac{x-8}{x-3}$? Explica.

106. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones racionales, ¿$(f+g)(x)$ siempre será una función racional?

Problemas de desafío

107. Expresa cada suma como una sola fracción.

a) $1+\frac{1}{x}$

b) $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$

c) $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}$

d) $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^n}$

108. Si $f(x)=\frac{1}{x}$. Determin $f(a+h)-f(a)$.

109. Si $g(x)=\frac{1}{x+1}$. Determin $g(a+h)-g(a)$.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.4] **110. Llenado de cajas de pasta** Una máquina llena cajas de pasta a una razón de 80 por minuto. Luego la máquina se alenta y llena cajas a una razón de 60 por minuto. Si la suma de los dos periodos de tiempo es 14 minutos, y el número de cajas llenadas a una razón alta es el mismo que el número llenado con una razón más baja, determina **a)** cuánto tiempo se usa la máquina a una razón rápida, **y b)** el número total de cajas llenadas durante el periodo de 14 minutos.



[2.6] **111.** Resuelve en términos de x y proporciona la solución en notación de conjunto.

$$|x-3|-6<-1$$

[3.4] **112.** Determina la pendiente de la recta que pasa a través de los puntos $(-2, 3)$ y $(7, -3)$.

[4.5] **113.** Evalúa el determinante $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$.

[5.3] **114.** Divide $\frac{6x^2-5x+6}{2x+3}$.

[5.8] **115.** Resuelve $3p^2=22p-7$.

6.3 Fracciones complejas

1. Reconocimiento de fracciones complejas
2. Simplificación de fracciones complejas, mediante la multiplicación del mínimo común denominador
3. Simplificación de fracciones complejas, mediante la simplificación del numerador y del denominador

1 Reconocimiento de fracciones complejas

Fracción compleja

Una **fracción compleja** es una fracción que tiene una expresión racional en su numerador, en su denominador o en ambos.

Ejemplos de fracciones complejas

$$\frac{\frac{2}{3}}{5},\quad \frac{\frac{x+1}{x}}{4x},\quad \frac{\frac{x}{y}}{x+1},\quad \frac{\frac{a+b}{a}}{\frac{a-b}{b}},\quad \frac{9+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+\frac{8}{x}}$$

La expresión que está arriba de la **línea de fracción principal**, es el numerador; y la expresión que está abajo de la línea de fracción principal, es el denominador de la fracción compleja.

$$\frac{\dfrac{a+b}{a}}{\dfrac{a-b}{b}}$$

$\frac{a+b}{a}$: numerador de la fracción compleja

línea de fracción principal

$\frac{a-b}{b}$: denominador de la fracción compleja

Simplificar una fracción compleja significa escribir la expresión sin una fracción en su numerador y su denominador. Se explicarán dos métodos que pueden usarse para simplificar fracciones complejas: multiplicación por el mínimo común denominador (MCD), y simplificación del numerador y del denominador.

2 Simplificación de fracciones complejas, mediante la multiplicación del mínimo común denominador

Para simplificar una fracción compleja, mediante la multiplicación del mínimo común denominador

1. Determina el mínimo común denominador de todas las fracciones que aparezcan dentro de la fracción compleja. Este es, el MCD de la fracción compleja.
2. Multiplica el numerador y el denominador de la fracción compleja por el MCD de la fracción compleja que encontraste en el paso 1.
3. Simplifica cuando sea posible.

En el paso 2, estás multiplicando la fracción compleja por $\frac{\text{MCD}}{\text{MCD}}$, lo que es equivalente a multiplicar la fracción por 1.

EJEMPLO 1 Simplifica $\dfrac{1-\frac{4}{x}}{1-\frac{16}{x^2}}$.

Solución Los denominadores en la fracción compleja son x y x^2. Por tanto, el MCD de la fracción compleja es x^2. Multiplica el numerador y el denominador de la fracción compleja por x^2.

$$\frac{1-\frac{4}{x}}{1-\frac{16}{x^2}} = \frac{x^2\left(1-\frac{4}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{16}{x^2}\right)}$$ Multiplica el numerador y el denominador por x^2.

$$= \frac{x^2\cdot 1 - x^2\cdot\frac{4}{x}}{x^2\cdot 1 - x^2\cdot\frac{16}{x^2}}$$ Propiedad distributiva.

$$= \frac{x^2-4x}{x^2-16}$$ Simplifica.

$$= \frac{x(x-4)}{(x+4)(x-4)}$$ Factoriza y simplifica.

$$= \frac{x}{x+4}$$

Ahora resuelve el ejercicio 11

EJEMPLO 2 Simplifica $\dfrac{1+\frac{10x}{x+1}}{\frac{11x+1}{x-1}}$.

Solución El MCD de la fracción compleja es $(x+1)(x-1)$. Multiplica el numerador y el denominador por $(x+1)(x-1)$.

$$\frac{1+\frac{10x}{x+1}}{\frac{11x+1}{x-1}} = \frac{(x+1)(x-1)\cdot\left(1+\frac{10x}{x+1}\right)}{(x+1)(x-1)\cdot\left(\frac{11x+1}{x-1}\right)}$$

Multiplica el numerador y el denominador por el MCD $(x+1)(x-1)$.

$$= \frac{(x+1)(x-1)\cdot 1 + (x+1)(x-1)\cdot\frac{10x}{x+1}}{(x+1)(x-1)\cdot\left(\frac{11x+1}{x-1}\right)}$$

Propiedad distributiva aplicada en el numerador.

$$= \frac{(x+1)(x-1)+10x(x-1)}{(x+1)(11x+1)}$$

$$= \frac{x^2-1+10x^2-10x}{11x^2+12x+1}$$

$$= \frac{11x^2-10x-1}{11x^2+12x+1}$$

$$= \frac{(11x+1)(x-1)}{(11x+1)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}$$

Factoriza y simplifica.

Ahora resuelve el ejercicio 27

EJEMPLO 3 Simplifica $\dfrac{a^{-1}+ab^{-2}}{ab^{-2}-a^{-2}b^{-1}}$.

Solución Primero reescribe cada expresión sin exponentes negativos.

$$\frac{a^{-1}+ab^{-2}}{ab^{-2}-a^{-2}b^{-1}} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}}{\frac{a}{b^2}-\frac{1}{a^2b}}$$

$$= \frac{a^2b^2\left(\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}\right)}{a^2b^2\left(\frac{a}{b^2}-\frac{1}{a^2b}\right)}$$

Multiplica el numerador y el denominador por a^2b^2, el MCD de la fracción compleja.

$$= \frac{a^2b^2\left(\frac{1}{a}\right)+a^2b^2\left(\frac{a}{b^2}\right)}{a^2b^2\left(\frac{a}{b^2}\right)-a^2b^2\left(\frac{1}{a^2b}\right)}$$

Propiedad distributiva.

$$= \frac{ab^2+a^3}{a^3-b}$$

Ahora resuelve el ejercicio 45

En el ejemplo 3, aunque se podría factorizar una a de ambos términos en el numerador de la respuesta, ésta no se podría simplificar más al dividir factores comunes. Por ello, la respuesta se deja en la forma dada.

3 Simplificación de fracciones complejas, mediante la simplificación del numerador y del denominador

Ahora se discutirá un segundo método que puede usarse para simplificar fracciones complejas.

Para simplificar una fracción compleja, mediante la simplificación del numerador y del denominador

1. Suma o resta, según se requiera, para obtener una expresión racional en el numerador.
2. Suma o resta, según se requiera, para obtener una expresión racional en el denominador.
3. Multiplica el numerador de la fracción compleja, por el recíproco del denominador.
4. Simplifica cuando sea posible.

El ejemplo 4, mostrará cómo se puede simplificar el ejemplo 1 mediante este segundo método.

EJEMPLO 4 Simplifica $\dfrac{1-\dfrac{4}{x}}{1-\dfrac{16}{x^2}}$.

Solución El paso 1, es restar las fracciones en el numerador para obtener una fracción en el numerador.

$$1-\frac{4}{x}=\frac{x}{x}\cdot 1-\frac{4}{x}$$
$$=\frac{x}{x}-\frac{4}{x}=\frac{x-4}{x}$$ Este es el numerador.

El paso 2, es restar las fracciones en el denominador para obtener una fracción en el denominador.

$$1-\frac{16}{x^2}=\frac{x^2}{x^2}\cdot 1-\frac{16}{x^2}$$
$$=\frac{x^2}{x^2}-\frac{16}{x^2}=\frac{x^2-16}{x^2}$$ Este es el denominador.

Ahora, la fracción compleja se puede reescribir de la siguiente manera.

$$\frac{1-\dfrac{4}{x}}{1-\dfrac{16}{x^2}}=\frac{\dfrac{x-4}{x}}{\dfrac{x^2-16}{x^2}}$$

Comprende el Álgebra

Una fracción compleja de la forma

$$\frac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}}$$

puede simplificarse al multiplicar el numerador por el *recíproco* del denominador de la siguiente manera:

$$\frac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}}=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

El paso 3, es multiplicar el numerador de la fracción compleja, por el recíproco del denominador.

$$\frac{\dfrac{x-4}{x}}{\dfrac{x^2-16}{x^2}}=\frac{x-4}{x}\cdot\frac{x^2}{x^2-16}$$
$$=\frac{\cancel{x-4}}{\cancel{x}}\cdot\frac{\overset{x}{\cancel{x^2}}}{(x+4)\cancel{(x-4)}}$$ Factoriza y simplifica.
$$=\frac{x}{x+4}$$

Observa que, esta es la misma expresión obtenida en el ejemplo 1.

Ahora resuelve el ejercicio 13

SUGERENCIA ÚTIL

Algunos estudiantes prefieren usar el segundo método, cuando la fracción compleja consiste de una sola fracción dividida entre una sola fracción, tal como

$$\frac{\dfrac{x+3}{18}}{\dfrac{x-8}{6}}$$

Para fracciones más complejas, muchos estudiantes prefieren el primer método, porque no tienen que sumar fracciones.

6.3 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

numerador denominador compleja recíproco opuesto

1. Una fracción _____ es una fracción que tiene una expresión racional en su numerador o en su denominador, o en ambos.
2. La expresión que está arriba de la línea de fracción principal, es el _____ de la fracción compleja.
3. La expresión que está abajo de la línea de fracción principal, es el _____ de la fracción compleja.
4. Una fracción compleja, de la forma $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$, puede simplificarse al multiplicar el numerador por el _____ del denominador.

Practica tus habilidades

Simplifica.

5. $\dfrac{\frac{15a}{b^2}}{\frac{b^3}{5}}$

6. $\dfrac{\frac{6x}{y^2}}{\frac{3y}{5}}$

7. $\dfrac{\frac{25x}{16yz^3}}{\frac{15x^4}{28yz^5}}$

8. $\dfrac{\frac{21a^5}{10b^6c}}{\frac{14a^2}{15b^3c}}$

9. $\dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}$

10. $\dfrac{7-\frac{2}{x}}{\frac{5}{x}}$

11. $\dfrac{1+\frac{3}{x}}{3-\frac{4}{x}}$

12. $\dfrac{3-\frac{1}{y}}{2-\frac{1}{y}}$

13. $\dfrac{\frac{2}{a}+\frac{1}{2a}}{a+\frac{a}{2}}$

14. $\dfrac{\frac{7b}{2}-b}{\frac{1}{b}+\frac{11}{2b}}$

15. $\dfrac{1-\frac{3}{k}}{\frac{3}{k}-\frac{9}{k^2}}$

16. $\dfrac{\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{1}{x}}$

17. $\dfrac{\frac{1}{b}-a}{b-\frac{1}{a}}$

18. $\dfrac{x-\frac{4}{y}}{\frac{4}{x}-y}$

19. $\dfrac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{x+y}{x}}$

20. $\dfrac{\frac{p-q}{p}}{\frac{p}{q}-\frac{q}{p}}$

21. $\dfrac{\frac{u}{v}-1}{1-\frac{u}{v}}$

22. $\dfrac{7-\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}-7}$

23. $\dfrac{\frac{x}{3}-\frac{3}{x}}{\frac{x}{3}-2+\frac{3}{x}}$

24. $\dfrac{\frac{y}{4}+2+\frac{4}{y}}{\frac{y}{4}-\frac{4}{y}}$

25. $\dfrac{1+\frac{y+9}{y}}{\frac{4y}{9}-\frac{9}{y}}$

26. $\dfrac{\frac{x}{4}-\frac{1}{x}}{1+\frac{x+4}{x}}$

27. $\dfrac{1+\frac{x}{x+1}}{\frac{2x+1}{x-1}}$

28. $\dfrac{\frac{3x+1}{x-1}}{1+\frac{2x}{x+1}}$

29. $\dfrac{\frac{4}{x+2}-2}{\frac{4}{x-2}+2}$

30. $\dfrac{\frac{2}{x-1}+2}{\frac{2}{x+1}-2}$

31. $\dfrac{\frac{5}{5-x}+\frac{6}{x-5}}{\frac{3}{x}+\frac{2}{x-5}}$

32. $\dfrac{\frac{3}{7-x}-\frac{5}{x-7}}{\frac{2}{x}-\frac{3}{x-7}}$

33. $\dfrac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x^2}}$

34. $\dfrac{\frac{1}{p^2}}{\frac{2}{p^2}-\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}}$

35. $\dfrac{\frac{a+3}{a-3}+\frac{a-3}{a+3}}{\frac{a-3}{a+3}-\frac{a+3}{a-3}}$

36. $\dfrac{\frac{a-2}{a+2}-\frac{a+2}{a-2}}{\frac{a-2}{a+2}+\frac{a+2}{a-2}}$

37. $\dfrac{\dfrac{2}{x^2+x-20}+\dfrac{3}{x^2-6x+8}}{\dfrac{2}{x^2+3x-10}+\dfrac{3}{x^2+2x-24}}$

38. $\dfrac{\dfrac{1}{x^2+5x+4}+\dfrac{2}{x^2+2x-8}}{\dfrac{2}{x^2-x-2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}}$

Simplifica.

39. $\dfrac{a^{-1}+1}{a^{-1}-1}$

40. $\dfrac{b^{-1}-2}{b^{-1}+2}$

41. $\dfrac{\dfrac{2}{xy}}{x^{-1}-y^{-1}}$

42. $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{\dfrac{5}{ab}}$

43. $\dfrac{a^{-1}-a^{-2}}{1-a^{-2}}$

44. $\dfrac{b^{-2}+b^{-1}}{b^{-2}-1}$

45. $\dfrac{b^{-2}-a^{-2}}{b^{-2}+2a^{-1}b^{-1}+a^{-2}}$

46. $\dfrac{y^{-2}+3x^{-1}y^{-1}+2x^{-2}}{y^{-2}-x^{-2}}$

47. $\dfrac{14-j^{-1}-3j^{-2}}{16-18j^{-1}+5j^{-2}}$

48. $\dfrac{18k^{-2}+97k^{-1}+72}{18k^{-2}+25k^{-1}+8}$

49. $(a^{-1}+b^{-1})^{-1}$

50. $(a^{-2}+b)^{-1}$

51. $\dfrac{\dfrac{2}{xy}-\dfrac{8}{y}+\dfrac{5}{x}}{3x^{-1}-4y^{-2}}$

52. $\dfrac{4m^{-1}+3n^{-1}+(2mn)^{-1}}{\dfrac{5}{m}+\dfrac{7}{n}}$

Resolución de problemas

Área *Para los ejercicios 53-56, se proporcionan el área y el ancho de cada rectángulo. Determina la longitud, l, al dividir el área, A, entre el ancho, w.*

53. $A=\dfrac{x^2+12x+35}{x+3}$ $w=\dfrac{x^2+6x+5}{x^2+5x+6}$ l

54. $A=\dfrac{x^2+10x+16}{x+4}$ $(x>1)$ $w=\dfrac{x^2+11x+24}{x^2+3x-4}$ l

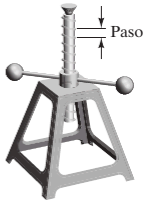
55. $A=\dfrac{x^2+11x+28}{x+5}$ $(x>1)$ $w=\dfrac{x^2+8x+7}{x^2+4x-5}$ l

56. $A=\dfrac{x^2+17x+72}{x+3}$ $(x>2)$ $w=\dfrac{x^2+11x+18}{x^2+x-6}$ l

57. Gato automotriz La eficiencia de un gato, E, está dada por la fórmula:

$$E=\frac{\frac{1}{2}h}{h+\frac{1}{2}}$$

donde h está determinada por el paso de la rosca del gato.



Determina la eficiencia de un gato, cuyos valores de h son:

a) $\frac{2}{5}$ **b)** $\frac{1}{3}$

58. Óptica Una fórmula que se usa en el estudio de la óptica, es:

$$f=(p^{-1}+q^{-1})^{-1}$$

donde p es la distancia del objeto desde una lente, q es la distancia de la imagen desde la lente, y f es la longitud focal de la lente. Expresa el lado derecho de la fórmula, sin exponentes negativos.



59. Resistores Si dos resistores, con resistencias R_1 y R_2, se conectan en paralelo, su resistencia combinada, R_T, puede determinarse a partir de la fórmula:

$$R_T=\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}$$

Simplifica el lado derecho de la fórmula.

60. Resistores Si tres resistores, con resistencias R_1, R_2 y R_3, se conectan en paralelo, su resistencia combinada, R_T, puede determinarse a partir de la fórmula:

$$R_T=\frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}}$$

Simplifica el lado derecho de esta fórmula.

61. Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$, determina $f(f(a))$.

62. Si $f(x) = \dfrac{2}{x+2}$, determina $f(f(a))$.

Problemas de desafío

Para cada función, determina $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

63. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

64. $f(x) = \dfrac{5}{x}$

65. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

66. $f(x) = \dfrac{6}{x-1}$

67. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

68. $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$

Simplifica.

69. $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}$

70. $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x+1}}}$

71. $\dfrac{1}{2a+\dfrac{1}{2a+\dfrac{1}{2a}}}$

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.4] **72.** Evalúa $\dfrac{\left|-\frac{3}{9}\right| - \left(-\frac{5}{9}\right) \cdot \left|-\frac{3}{8}\right|}{|-5-(-3)|}$.

[2.5] **73.** Resuelve $\dfrac{3}{5} < \dfrac{-x-5}{3} < 6$ y proporciona la solución en notación de intervalo.

[2.6] **74.** Resuelve $|x-1| = |2x-4|$.

[3.5] **75.** Determina si las dos rectas representadas, mediante las siguientes ecuaciones, son paralelas, perpendiculares o ninguna de los anteriores.

$$6x + 2y = 5$$
$$4x - 9 = -2y$$

6.4 Resolución de ecuaciones racionales

1. Resolución de ecuaciones racionales
2. Verificación de soluciones
3. Resolución de proporciones
4. Resolución de problemas con funciones racionales
5. Resolución de problemas aplicados usando expresiones racionales
6. Despeje de una variable en una fórmula con expresiones racionales

1 Resolución de ecuaciones racionales

Una **ecuación racional** es una ecuación que contiene al menos una expresión racional.

Para resolver ecuaciones racionales

1. Determina el MCD de todas las expresiones racionales en la ecuación.
2. Multiplica *ambos* lados de la ecuación, por el MCD. Esto resultará en que cada término de la ecuación sea multiplicado por el MCD. Esto eliminará todas las fracciones de la ecuación.
3. Remueve cualquier paréntesis y reduce los términos semejantes en cada lado de la ecuación.
4. Resuelve la ecuación usando las propiedades discutidas en secciones anteriores.
5. Verifica la solución en la ecuación *original*.

En el paso 2, multiplica ambos lados de la ecuación por el MCD para eliminar las fracciones de la ecuación.

EJEMPLO 1 Resuelve $\dfrac{5}{6}x + \dfrac{3}{2} = \dfrac{2x+1}{3}$.

Solución Multiplica ambos lados de la ecuación por el MCD, 6. Después usa la propiedad distributiva para eliminar las fracciones de la ecuación.

$$6\left(\frac{5}{6}x + \frac{3}{2}\right) = 6\left(\frac{2x+1}{3}\right)$$ Multiplica ambos lados por el MCD, 6.

$$6\left(\frac{5}{6}x\right) + \overset{3}{\cancel{6}}\left(\frac{3}{2}\right) = \overset{2}{\cancel{6}}\left(\frac{2x+1}{\cancel{3}}\right)$$ Propiedad distributiva.

$$5x + 9 = 4x + 2$$ Simplifica.

$$x + 9 = 2$$ Resta $4x$ de ambos lados.

$$x = -7$$ Resta 9 de ambos lados.

Una verificación mostrará que -7 es la solución.

Ahora resuelve el ejercicio 15

2 Verificación de soluciones

Cuando resuelves una ecuación racional con una variable en cualquier denominador, es posible producir un valor que hace a un denominador 0. Dado que la división entre 0 es indefinida, el valor que hace a un denominador 0 no es una solución, y se llama **solución aparente** (*straneous solution*). *Siempre que resuelvas una ecuación racional con una variable en cualquier denominador, debes verificar el(los) valor(es) obtenido(s) en la ecuación original.*

EJEMPLO 2 Resuelve $4 - \frac{3}{x} = \frac{5}{2}$.

Solución El MCD es $2x$.

$$4 - \frac{3}{x} = \frac{5}{2}$$

$$2x\left(4 - \frac{3}{x}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)2x$$ Multiplica ambos lados por el MCD, $2x$.

$$2x(4) - 2x\left(\frac{3}{\cancel{x}}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)2x$$ Propiedad distributiva.

$$8x - 6 = 5x$$

$$3x - 6 = 0$$ Resta $5x$ de ambos lados.

$$3x = 6$$ Suma 6 a ambos lados.

$$x = 2$$ Divide ambos lados entre 3.

Verifica

$$4 - \frac{3}{x} = \frac{5}{2}$$

$$4 - \frac{3}{2} \stackrel{?}{=} \frac{5}{2}$$ Sustituye 2 por x.

$$\frac{8}{2} - \frac{3}{2} \stackrel{?}{=} \frac{5}{2}$$ Reescribe 4 como $\frac{8}{2}$.

$$\frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$ Verdadero

Dado que $x = 2$ es válido en la ecuación original, entonces es una solución.

Ahora resuelve el ejercicio 23

Comprende el Álgebra

Recuerda, de la sección 5.8, los pasos para resolver una ecuación *cuadrática*.

1. Escribe el polinomio en orden decreciente, con un lado de la ecuación igualado a 0.
2. Factoriza el polinomio.
3. Iguala, cada factor que contenga una variable, a 0 y resuelve las ecuaciones resultantes.
4. Verifica las soluciones en la ecuación *original*.

EJEMPLO 3 Resuelve $x + 1 = \frac{6}{x}$.

Solución

$$x(x+1) = x\left(\frac{6}{x}\right)$$ Multiplica ambos lados por el MCD, x.

$$x^2 + x = 6$$ Propiedad distributiva.

La ecuación resultante, es una ecuación cuadrática. Resta 6 de ambos lados y luego factoriza el polinomio.

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0$$

A continuación, se usa la propiedad del factor cero. Iguala a 0 cada factor y resuelve en términos de x.

$$x + 3 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$
$$x = -3 \qquad x = 2$$

Las verificaciones mostrarán que, tanto -3 como 2, son soluciones de la ecuación.

Ahora resuelve el ejercicio 31

EJEMPLO 4 Resuelve $\dfrac{3x}{x^2 - 4} + \dfrac{1}{x - 2} = \dfrac{2}{x + 2}$.

Solución Primero factoriza el denominador $x^2 - 4$, luego determina el MCD.

$$\frac{3x}{(x + 2)(x - 2)} + \frac{1}{x - 2} = \frac{2}{x + 2}$$

El MCD es $(x + 2)(x - 2)$. Multiplica ambos lados de la ecuación por el MCD y, después, usa la propiedad distributiva. Este proceso eliminará las fracciones de la ecuación.

$$(x + 2)(x - 2) \cdot \left[\frac{3x}{(x + 2)(x - 2)} + \frac{1}{x - 2}\right] = \frac{2}{x + 2} \cdot (x + 2)(x - 2)$$

$$\cancel{(x + 2)(x - 2)} \cdot \frac{3x}{\cancel{(x + 2)(x - 2)}} + (x + 2)\cancel{(x - 2)} \cdot \frac{1}{\cancel{x - 2}} = \frac{2}{\cancel{x + 2}} \cdot \cancel{(x + 2)}(x - 2)$$

$$3x + (x + 2) = 2(x - 2)$$
$$4x + 2 = 2x - 4$$
$$2x + 2 = -4$$
$$2x = -6$$
$$x = -3$$

Una verificación mostrará que -3, es la solución.

Ahora resuelve el ejercicio 39

EJEMPLO 5 Resuelve $\dfrac{22}{2p^2 - 9p - 5} - \dfrac{3}{2p + 1} = \dfrac{2}{p - 5}$.

Solución Factoriza el denominador y después determina el MCD.

$$\frac{22}{(2p + 1)(p - 5)} - \frac{3}{2p + 1} = \frac{2}{p - 5}$$

Multiplica ambos lados de la ecuación por el MCD, $(2p + 1)(p - 5)$.

$$\cancel{(2p + 1)(p - 5)} \cdot \frac{22}{\cancel{(2p + 1)(p - 5)}} - \cancel{(2p + 1)(p - 5)} \cdot \frac{3}{\cancel{2p + 1}} = \frac{2}{\cancel{p - 5}} \cdot \cancel{(2p + 1)(p - 5)}$$

$$22 - 3(p - 5) = 2(2p + 1)$$
$$22 - 3p + 15 = 4p + 2$$
$$37 - 3p = 4p + 2$$
$$35 = 7p$$
$$5 = p$$

Comprende el Álgebra

Siempre que resuelvas una ecuación racional con una variable en un denominador, debes comprobar en la ecuación original el(los) valor(es) obtenido(s). En el ejemplo 5, el valor $p = 5$ es una *solución aparente*.

La solución parece ser 5. Sin embargo, dado que una variable aparece en un denominador, debes verificar esta solución.

Verifica
$$\frac{22}{2p^2 - 9p - 5} - \frac{3}{2p + 1} = \frac{2}{p - 5}$$
$$\frac{22}{2(5)^2 - 9(5) - 5} - \frac{3}{2(5) + 1} \stackrel{?}{=} \frac{2}{5 - 5} \qquad \text{Sustituye 5 por } p.$$
$$\text{Indefinido} \longrightarrow \quad \frac{22}{0} - \frac{3}{11} = \frac{2}{0} \quad \longleftarrow \text{Indefinido}$$

Dado que 5 hace a un denominador 0 y la división entre 0 es indefinida, 5 es una solución aparente. En consecuencia, debes escribir "sin solución" como tu respuesta.

Ahora resuelve el ejercicio 43

SUGERENCIA ÚTIL

Recuerda que, siempre que resuelves una ecuación donde una variable aparece en cualquier denominador, debes verificar cualquier solución aparente, para asegurarte de que no es una solución aparente. Si una solución aparente hace 0 a algún denominador, entonces es una solución aparente y no una solución verdadera para la ecuación.

3 Resolución de proporciones

Proporción

Una **proporción** es una ecuación de la forma $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$.

Comprende el Álgebra

Recuerda que las proporciones son ecuaciones racionales. Por tanto, siempre que resuelvas una proporción que contenga una variable en algún denominador, debes hacer una verificación para asegurarte de que el(los) valor(es) que obtengas, no es(son) una solución aparente.

Las proporciones son ecuaciones racionales y, por tanto, pueden resolverse al multiplicar ambos lados de la ecuación por el MCD. Las proporciones también se pueden resolver mediante **multiplicación cruzada** de la manera siguiente:

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ entonces } ad = bc, b \neq 0, d \neq 0$$

Las proporciones se usan cuando se trabaja con figuras semejantes.

Figuras semejantes

Las **figuras semejantes** son figuras cuyos ángulos correspondientes son iguales, y cuyos lados correspondientes están en proporción.

La **Figura 6.3** ilustra dos conjuntos de figuras semejantes.

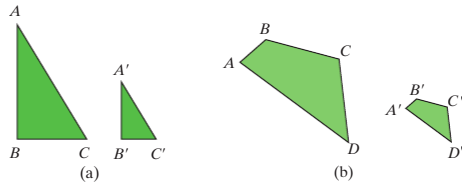


FIGURA 6.3

En la **Figura 6.3a**, la razón de la longitud del lado AB, a la longitud del lado BC, es la misma que la razón de la longitud del lado $A'B'$, a la longitud del lado $B'C'$. Es decir,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

En un par de figuras semejantes, si la longitud de un lado es desconocida, con frecuencia puede determinarse usando proporciones.

EJEMPLO 6 **Triángulos** semejantes Los triángulos ABC y $A'B'C'$, en la **Figura 6.4** de la siguiente página, son figuras semejantes. Determina la longitud de los lados AB y $B'C'$.

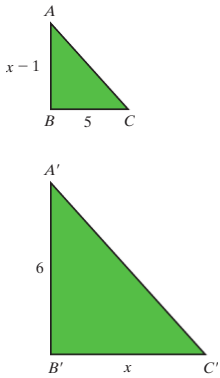


FIGURA 6.4

Solución Puedes establecer una proporción y después resolver en términos de x. Así, puedes determinar las longitudes.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

$$\frac{x-1}{5} = \frac{6}{x}$$

$$5x \cdot \frac{x-1}{5} = \frac{6}{x} \cdot 5x \qquad \text{Multiplica ambos lados por el MCD, } 5x.$$

$$x(x-1) = 6 \cdot 5$$

$$x^2 - x = 30$$

$$x^2 - x - 30 = 0$$

$$(x-6)(x+5) = 0 \qquad \text{Factoriza el trinomio.}$$

$$x - 6 = 0 \quad \text{o} \quad x + 5 = 0$$

$$x = 6 \qquad x = -5$$

Dado que la longitud del lado de un triángulo, no puede ser un número negativo, -5 no es una respuesta posible. Al sustituir 6 por x, se ve que la longitud del lado $B'C'$ es 6, y la longitud del lado AB es $6 - 1$ o 5.

Verifica

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

$$\frac{5}{5} \stackrel{?}{=} \frac{6}{6}$$

$$1 = 1 \qquad \text{Verdadero}$$

Ahora resuelve el ejercicio 49

La respuesta al ejemplo 6, también se podría haber obtenido usando la multiplicación cruzada. Ahora intenta resolver el ejemplo 6 usando la multiplicación cruzada.

EJEMPLO 7 Resuelve $\dfrac{x^2}{x-3} = \dfrac{9}{x-3}$.

Solución Esta ecuación es una proporción. Esta ecuación se resolverá al multiplicar ambos lados de la ecuación por el MCD, $x - 3$.

$$(x-3) \cdot \frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{x-3} \cdot (x-3)$$

$$x^2 = 9$$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$(x+3)(x-3) = 0 \qquad \text{Factoriza la diferencia de dos cuadrados.}$$

$$x + 3 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0$$

$$x = -3 \qquad x = 3$$

Verifica

$x = -3$

$$\frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{x-3}$$

$$\frac{(-3)^2}{-3-3} \stackrel{?}{=} \frac{9}{-3-3}$$

$$\frac{9}{-6} \stackrel{?}{=} \frac{9}{-6}$$

$$-\frac{3}{2} = -\frac{3}{2} \qquad \text{Verdadero}$$

$x = 3$

$$\frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{x-3}$$

$$\frac{3^2}{3-3} \stackrel{?}{=} \frac{9}{3-3}$$

$$\frac{9}{0} \stackrel{?}{=} \frac{9}{0} \longleftarrow \text{Indefinido}$$

Puesto que $x = 3$ resulta en un denominador de 0, 3 *no* es una solución a la ecuación. Es una solución aparente. La única solución a la ecuación es -3.

Ahora resuelve el ejercicio 45

En el ejemplo 7, ¿qué obtendrías si comienzas con una multiplicación cruzada? Inténtalo y averígualo.

4 Resolución de problemas con funciones racionales

EJEMPLO 8 Considera la función $f(x) = x - \frac{2}{x}$. Determina todos los números reales a, para los que $f(a) = 1$.

Solución Dado que $f(a) = a - \frac{2}{a}$, se necesita determinar todos los valores, para los que $a - \frac{2}{a} = 1, a \neq 0$. Comienza por multiplicar ambos lados de la ecuación por a, el MCD.

$$a - \frac{2}{a} = 1$$
$$a \cdot \left(a - \frac{2}{a}\right) = a \cdot 1$$
$$a^2 - 2 = a$$
$$a^2 - a - 2 = 0$$
$$(a - 2)(a + 1) = 0$$
$$a - 2 = 0 \quad \text{o} \quad a + 1 = 0$$
$$a = 2 \qquad\qquad a = -1$$

Verifica

$$f(x) = x - \frac{2}{x}$$
$$f(2) = 2 - \frac{2}{2} = 2 - 1 = 1$$
$$f(-1) = -1 - \frac{2}{(-1)} = -1 + 2 = 1$$

Ahora resuelve el ejercicio 55

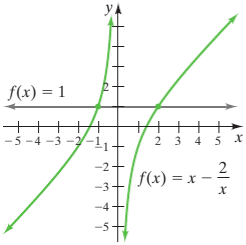


FIGURA 6.5

En la **Figura 6.5**, se ilustra la gráfica de $f(x) = x - \frac{2}{x}$, para mostrar las respuestas obtenidas en el ejemplo 8. Observa que, cuando $x = -1$ o $x = 2$, $f(x) = 1$.

5 Resolución de problemas aplicados usando expresiones racionales

Ahora observa una aplicación de las ecuaciones racionales.

EJEMPLO 9 **Resistencia total** En electrónica, la resistencia total, R_T, de resistores conectados en un circuito en paralelo, se determina mediante la fórmula

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

donde $R_1, R_2, R_3, \ldots, R_n$, son las resistencias de los resistores individuales (medidos en ohms) en el circuito. Determina la resistencia total si dos resistores, uno de 100 ohms y el otro de 300 ohms, están conectados en un circuito en paralelo. Observa la **Figura 6.6**.

Solución Dado que sólo hay dos resistencias, usa la fórmula:

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Sea $R_1 = 100$ ohms y $R_2 = 300$ ohms; entonces:

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{100} + \frac{1}{300}$$

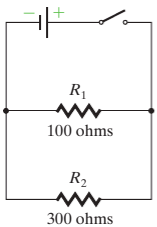


FIGURA 6.6

Multiplica ambos lados de la ecuación por el MCD, $300R_T$.

$$300R_T \cdot \frac{1}{R_T} = 300R_T\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{300}\right)$$

$$300\,\cancel{R_T} \cdot \frac{1}{\cancel{R_T}} = \overset{3}{\cancel{300}}\,R_T\left(\frac{1}{\cancel{100}}\right) + 300\,R_T\left(\frac{1}{300}\right)$$

$$300 = 3R_T + R_T$$

$$300 = 4R_T$$

$$R_T = \frac{300}{4} = 75$$

En consecuencia, la resistencia total del circuito en paralelo es 75 ohms.

Ahora resuelve el ejercicio 91

6 Despeje de una variable en una fórmula con expresiones racionales

Si al resolver una fórmula en términos de una variable, la variable aparece en más de un término, es posible que necesites factorizar para despejar la variable. Esto se mostrará en los ejemplos 10, 11 y 12.

EJEMPLO 10 **Óptica** Una fórmula usada en el estudio de la óptica es

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f},$$

donde

p es la distancia de un objeto desde una lente o un espejo,
q es la distancia de la imagen desde la lente o espejo, y
f es la longitud focal de la lente o espejo.

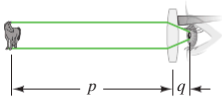


FIGURA 6.7

Para una persona que usa gafas, q es la distancia desde la lente a la retina (observa la **Figura 6.7**). Resuelve esta fórmula en términos de f.

Solución La meta, es despejar la variable f. Comienza por multiplicar ambos lados de la ecuación, por el mínimo común denominador, pqf, para eliminar fracciones.

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

$$pqf\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = pqf\left(\frac{1}{f}\right) \quad \text{Multiplica ambos lados por el MCD, } pqf.$$

$$p\,qf\left(\frac{1}{p}\right) + p\,q\,f\left(\frac{1}{q}\right) = pq\,f\left(\frac{1}{f}\right) \quad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$qf + pf = pq \quad \text{Simplifica.}$$

$$f(q + p) = pq \quad \text{Factoriza } f.$$

$$\frac{f(q+p)}{q+p} = \frac{pq}{q+p} \quad \text{Divide ambos lados entre } q + p.$$

$$f = \frac{pq}{q+p} \quad \text{o} \quad f = \frac{pq}{p+q}$$



Ahora resuelve el ejercicio 69

EJEMPLO 11 **Banca** Una fórmula usada en la banca es $A = P + Prt$, donde A representa el monto que debe pagarse al banco, cuando P **dólares se piden prestados a tasa de interés simple,** r, por el tiempo, t, en años. Resuelve esta ecuación en términos de P.

Solución Dado que los dos términos que contienen P están en el lado derecho de la ecuación, factoriza P de ambos términos.

$$A = P + Prt \qquad P \text{ está en ambos términos.}$$

$$A = P(1 + rt) \qquad \text{Factoriza } P.$$

$$\frac{A}{1 + rt} = \frac{P(1 + rt)}{1 + rt} \qquad \text{Divide ambos lados entre } 1 + rt \text{ para despejar a } P.$$

$$\frac{A}{1 + rt} = P$$

Por tanto, $P = \dfrac{A}{1 + rt}$.

Ahora resuelve el ejercicio 77

EJEMPLO 12 **Física** Una fórmula usada para palancas en física, es $d = \dfrac{fl}{f + w}$. Resuelve esta fórmula en términos de f.

Solución Comienza por multiplicar, ambos lados de la fórmula por $f + w$, para eliminar las fracciones. Luego, reescribe la expresión con todos los términos que contengan f, en un lado del signo de igualdad; y todos los términos que no contenga f, en el otro lado del signo de igualdad.

$$d = \frac{fl}{f + w}$$

$$d(f + w) = \frac{fl}{(f + w)}(f + w) \qquad \text{Multiplica por } f + w \text{ para eliminar fracciones.}$$

$$d(f + w) = fl$$

$$df + dw = fl \qquad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$df - df + dw = fl - df \qquad \text{Aísla los términos que contengan } f \text{ en el lado derecho de la ecuación.}$$

$$dw = fl - df$$

$$dw = f(l - d) \qquad \text{Factoriza } f.$$

$$\frac{dw}{l - d} = \frac{f(l - d)}{l - d} \qquad \text{Despeja f al dividir ambos lados entre } l - d.$$

$$\frac{dw}{l - d} = f$$

En consecuencia, $f = \dfrac{dw}{l - d}$.

Ahora resuelve el ejercicio 79

Comprende el Álgebra

A veces, cuando se resuelve una fórmula en términos de una variable, la variable aparece en dos o más términos que no están del mismo lado de la ecuación. Cuando esto pasa, junta todos los términos que tengan la variable del mismo lado de la ecuación. Luego, factoriza la variable que estás tratando de despejar.

CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

Cuando resuelvas ecuaciones que contengan fracciones, recuerda multiplicar ambos lados de una *ecuación* por el MCD para eliminar las fracciones de la ecuación. Si *sumas o restas expresiones racionales*, escribe las fracciones con el MCD, y después suma o resta los numeradores *conservando el denominador común*.

Por ejemplo, considera el siguiente problema de adición:

$$\frac{x}{x + 7} + \frac{3}{x + 7}$$

CORRECTO

$$\frac{x}{x + 7} + \frac{3}{x + 7} = \frac{x + 3}{x + 7}$$

INCORRECTO

$$\frac{x}{x + 7} + \frac{3}{x + 7} = (x + 7)\left(\frac{x}{x + 7} + \frac{3}{x + 7}\right)$$

$$= x + 3$$

6.4 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

proporción	racional	extraña	semejantes	común
multiplicación cruzada	no	factorizar		

1. Para eliminar expresiones racionales de una ecuación, multiplica ambos lados de la ecuación por el mínimo _____ denominador.
2. Siempre que resuelvas una ecuación _____ con una variable en algún denominador, debes verificar en la ecuación original el(los) valor(es) obtenido(s).
3. Cuando resuelves una ecuación racional con una variable en algún denominador, un valor obtenido que haga un denominador 0 se llama solución _____.
4. Una _____ es una ecuación de la forma $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, b \neq 0, d \neq 0$.
5. Las proporciones pueden resolverse usando _____ de la manera siguiente:

   Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad = bc, b \neq 0, d \neq 0$.
6. Las figuras cuyos ángulos correspondientes son iguales y cuyos lados correspondientes están en proporción, se llaman figuras _____.
7. Si, al resolver una fórmula en términos de una variable, la variable aparece en dos o más términos que no están del mismo lado de la ecuación, quizás necesites _____ para despejar la variable.
8. Si el único valor que obtienes al resolver una ecuación racional, es una solución aparente, entonces la ecuación _____ tiene solución.

Practica tus habilidades

Resuelve cada ecuación y comprueba tu solución.

9. $\frac{15}{x} = 3$

10. $\frac{12}{x} = 4$

11. $\frac{1}{3} = \frac{w+7}{6}$

12. $\frac{1}{4} = \frac{z+2}{12}$

13. $\frac{6x+7}{5} = \frac{2x+9}{3}$

14. $\frac{a+2}{7} = \frac{a-3}{2}$

15. $\frac{3x}{8} + \frac{1}{4} = \frac{2x-3}{8}$

16. $\frac{3x}{10} + \frac{2}{5} = \frac{4x-3}{5}$

17. $\frac{z}{3} - \frac{3z}{4} = -\frac{5z}{12}$

18. $\frac{w}{2} + \frac{2w}{3} = \frac{7w}{6}$

19. $\frac{3}{4} - x = 2x$

20. $\frac{5}{8} + x = 3x$

21. $\frac{2}{3}x + 5 = \frac{3}{4}$

22. $\frac{5}{6}x - 4 = \frac{3}{5}$

23. $\frac{2}{r} + \frac{5}{3r} = 1$

24. $3 + \frac{2}{x} = \frac{1}{4}$

25. $\frac{x-2}{x-5} = \frac{3}{x-5}$

26. $\frac{2x+9}{x+3} = \frac{3}{x+3}$

27. $\frac{m+1}{m+10} = \frac{m-2}{m+4}$

28. $\frac{x-3}{x+1} = \frac{x-6}{x+5}$

29. $x - \frac{4}{3x} = -\frac{1}{3}$

30. $x - \frac{1}{2} = \frac{3}{x}$

31. $x + \frac{6}{x} = -7$

32. $b - \frac{8}{b} = -7$

33. $\frac{2k+1}{k-2} - \frac{15}{k} = 2$

34. $\frac{15}{x} + \frac{9x-7}{x+2} = 9$

35. $\frac{a}{a-4} = \frac{2}{a-4} + \frac{8}{a^2-4a}$

36. $\frac{b}{b-8} = \frac{12}{b-8} - \frac{32}{b^2-8b}$

37. $\frac{3x-9}{x-7} = \frac{12}{x-7}$

38. $\frac{5x+12}{x+9} = -\frac{33}{x+9}$

39. $\frac{8}{x^2-9} = \frac{2}{x-3} - \frac{4}{x+3}$

40. $\frac{6}{x+3} + \frac{5}{x+4} = \frac{12x+31}{x^2+7x+12}$

41. $\frac{v}{v+5} - \frac{30}{v^2+5v} = \frac{1}{v+5}$

42. $\frac{2w}{w-3} = \frac{3}{w^2-3w} + \frac{5}{w-3}$

43. $\frac{3}{u+1} = \frac{6}{u^2+4u+3} - \frac{5}{u+3}$

44. $\frac{2}{w-5} = \frac{22}{2w^2-9w-5} - \frac{3}{2w+1}$

45. $\frac{x^2}{x-5} = \frac{25}{x-5}$

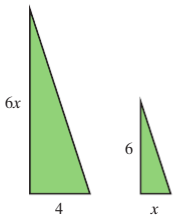
46. $\frac{x^2}{x-9} = \frac{81}{x-9}$

47. $\frac{5}{x^2+4x+3} + \frac{2}{x^2+x-6} = \frac{3}{x^2-x-2}$

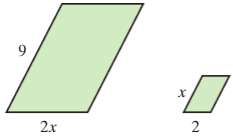
48. $\frac{2}{x^2+2x-8} - \frac{1}{x^2+9x+20} = \frac{4}{x^2+3x-10}$

Figuras semejantes *Para cada par de figuras semejantes, determina la longitud de los dos lados desconocidos (es decir, aquellos dos lados cuyas longitudes involucran la variable x).*

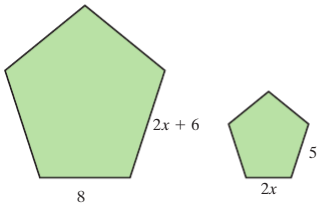
49.



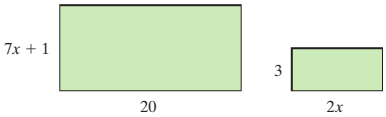
50.



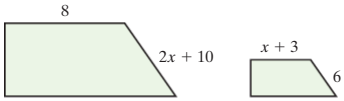
51.



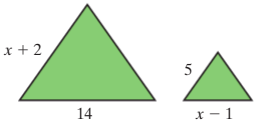
52.



53.



54.



Para cada función racional dada, determina todos los valores a para los cuales f(a) tiene el valor indicado.

55. $f(x) = x - \frac{3}{x}, f(a) = 2$

56. $f(x) = 3x - \frac{5}{x}, f(a) = -14$

57. $f(x) = \frac{x-2}{x+5}, f(a) = \frac{3}{5}$

58. $f(x) = \frac{x+3}{x+5}, f(a) = \frac{4}{7}$

59. $f(x) = \frac{6}{x} + \frac{6}{2x}, f(a) = 6$

60. $f(x) = \frac{4}{x} - \frac{3}{2x}, f(a) = 4$

Resuelve cada fórmula para la variable indicada.

61. $t = \frac{d}{r}$, para r (matemáticas)

62. $r = \frac{d}{t}$, para t (matemáticas)

63. $r = \frac{i}{pt}$, para t (matemáticas)

64. $t = \frac{i}{pr}$, para p (matemáticas)

65. $d = \frac{fl}{f+w}$, para w (física)

66. $I = \frac{nE}{R+nr}$, para r (ingeniería)

67. $A = \frac{1}{2}h(a+b)$, para a (matemáticas)

68. $A = \frac{1}{2}h(a+b)$, para b (matemáticas)

69. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$, para q (óptica)

70. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$, para p (óptica)

71. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{P_2}{P_1}$, para P_1 (química)

72. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{P_2}{P_1}$, para V_2 (química)

73. $\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, para R_T (electrónica)

74. $\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, para R_1

75. $at_2 - at_1 + v_1 = v_2$, para a (física)

76. $2P_1 - 2P_2 - P_1P_c = P_2P_c$, para P_c (economía)

77. $a_n = a_1 + nd - d$, para d (matemáticas)

78. $S_n - S_nr = a_1 - a_1r^n$, para S_n (matemáticas)

79. $\dfrac{P_1V_1}{T_1} = \dfrac{P_2V_2}{T_2}$, para T_1 (física)

80. $\dfrac{P_1V_1}{T_1} = \dfrac{P_2V_2}{T_2}$, para T_2 (física)

Simplifica cada expresión en ***a)*** *y resuelve cada ecuación en* ***b)****.*

81. a) $\dfrac{1}{x+3} + \dfrac{2}{x+1}$

b) $\dfrac{1}{x+3} + \dfrac{2}{x+1} = 0$

82. a) $\dfrac{4}{x+3} + \dfrac{5}{2x+6} + \dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{4}{x+3} + \dfrac{5}{2x+6} = \dfrac{1}{2}$

83. a) $\dfrac{b+3}{b} - \dfrac{b+4}{b+5} - \dfrac{15}{b^2+5b}$

b) $\dfrac{b+3}{b} - \dfrac{b+4}{b+5} = \dfrac{15}{b^2+5b}$

84. a) $\dfrac{4x+3}{x^2+11x+30} - \dfrac{3}{x+6} + \dfrac{2}{x+5}$

b) $\dfrac{4x+3}{x^2+11x+30} - \dfrac{3}{x+6} = \dfrac{2}{x+5}$

Resolución de problemas

85. Velocidad promedio La velocidad promedio de un objeto, durante un intervalo de tiempo específico, se define como el cambio en distancia recorrida por el objeto, dividido entre el cambio en tiempo, o:

$$v = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$$

a) Al conducir su automóvil, Gilberto observa las siguientes distancias y tiempos: $d_1 = 100$ millas, $d_2 = 400$ millas, $t_1 = 2$ horas y $t_2 = 6$ horas. Determina la velocidad promedio.

b) Resuelve la fórmula en términos de d_2.

86. Aceleración promedio La aceleración promedio de un objeto, durante un intervalo de tiempo específico, se define como el cambio en velocidad del objeto, dividido entre el cambio en tiempo, o:

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$



a) Al conducir su automóvil, Jael observa las siguientes velocidades y tiempos: $v_1 = 35$ millas por hora, $v_2 = 60$ millas por hora, $t_1 = 0.5$ horas y $t_2 = 1.0$ hora. Determina la aceleración promedio. Las unidades serán millas por hora por hora, o mi/h^2.

b) Resuelve esta fórmula en términos de v_2.

87. Razón de cambio promedio La razón de cambio promedio de una función, A, para una función $f(x)$, puede determinarse usando la fórmula:

$$A = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Para la función $f(x) = x^2 - 9$, determina la razón de cambio promedio de la función de $x_1 = 0$ a $x_2 = 3$.

88. Razón de cambio promedio Consulta el ejercicio 87. Para la función $f(x) = \sqrt{x+4}$, determina la razón de cambio promedio de la función, de $x_1 = -4$ a $x_2 = 0$.

89. Inversión libre de impuestos La fórmula $T_a = \dfrac{T_f}{1-f}$ puede usarse para determinar el rendimiento gravable equivalente, T_a, de una inversión libre de impuestos, T_f. En esta fórmula, f es la categoría de impuesto sobre la renta federal del individuo. Roberto está en la categoría fiscal de 28%.

a) Determina el rendimiento gravable, equivalente de una inversión libre de impuestos de 9% para Roberto.

b) Resuelve esta ecuación para T_f.

c) Determina el rendimiento libre de impuestos, equivalente para una inversión gravable de 12% para Roberto.

90. Inversión libre de impuestos Consulta el ejercicio 89. Karime está en la categoría fiscal de 25%.

a) Determina el rendimiento gravable, equivalente de una inversión libre de impuestos de 6% para Karime.

b) Determina el rendimiento libre de impuestos, equivalente para una inversión gravable de 10% para Karime.

Consulta el ejemplo 9 para los ejercicios 91-94.

91. Resistencia total ¿Cuál es la resistencia total en el circuito, si resistores de 200 ohms y 600 ohms se conectan en paralelo?

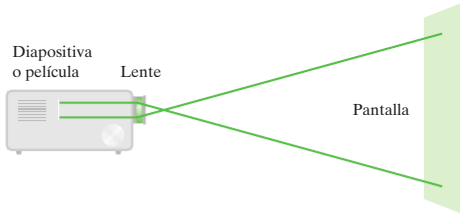
92. Resistencia total ¿Cuál es la resistencia total en el circuito, si resistores de 300 ohms, 500 ohms y 3000 ohms se conectan en paralelo?

93. Resistencia Dos resistores de resistencia idéntica se conectarán en paralelo. ¿Cuál debe ser la resistencia de cada resistor, si el circuito debe tener una resistencia total de 375 ohms?

94. Resistencia Tres resistores de resistencia idéntica se conectarán en paralelo. ¿Cuál debe ser la resistencia de cada resistor, si el circuito debe tener una resistencia total de 700 ohms?

Consulta el ejemplo 10 para los ejercicios 95 y 96.

95. Longitud focal En un proyector de diapositivas o películas, la película actúa como el objeto cuya imagen se proyecta sobre una pantalla. Si una lente de 100 mm de longitud focal (o 0.10 metros) debe proyectar una imagen sobre una pantalla a 7.5 metros de distancia, ¿qué tan lejos de la lente debe estar la película?



96. Espejo curvo Un anillo de diamante se coloca a 20.0 cm de un espejo cóncavo (curvado hacia adentro) cuya longitud focal es de 15.0 cm. Determina la posición de la imagen (o la *distancia de la imagen*).

Problemas de desafío

97. Periodo sinódico de Mercurio El periodo sinódico de Mercurio, es el tiempo que dicho planeta necesita para llevarle una vuelta de ventaja a la Tierra en sus órbitas alrededor del Sol. Si los periodos orbitales (en días terrestres) de los dos planetas son P_m y P_e, se verá que Mercurio se mueve en promedio a $1/P_{\text{m}}$ de una revolución por día, mientras que la tierra se mueve a $1/P_e$. La ganancia diaria de Mercurio sobre la Tierra es $(1/P_m) - (1/P_e)$ de una revolución, de modo que el tiempo para que Mercurio aventaje una revolución completa sobre la Tierra, el periodo sinódico, s, puede determinarse mediante la fórmula:

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{P_m} - \frac{1}{P_e}$$

Si P_e es 365 días y Pm es 88 días, determina el periodo sinódico, s, en días terrestres.



98. Periodo sinódico de Venus Consulta el ejercicio 97. El periodo orbital de Venus, P_v, es de aproximadamente 225 días. Usa la fórmula:

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{P_v} - \frac{1}{P_e}$$

para determinar el periodo sinódico, s, de Venus.



Venus

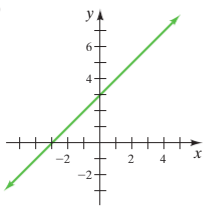
Ejercicios conceptuales y de redacción

99. ¿Qué restricciones deben agregarse al enunciado "si $ac = bc$, entonces $a = b$"? Explica.

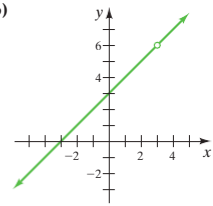
100. En la siguiente página, hay dos gráficas. Una es la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$, y la otra es la gráfica de

$g(x) = x + 3$. Determina cuál gráfica es $f(x)$ y cuál gráfica es $g(x)$. Explica cómo determinaste tu respuesta.

a)



b)



101. Construye una ecuación que no pueda tener como soluciones a 4 o −2. Explica cómo determinaste tu respuesta.

102. Construye una ecuación que contenga la suma de dos expresiones racionales en la variable x, cuya solución sea el conjunto de *números reales*. Explica cómo determinaste tu respuesta.

103. Construye una ecuación en la variable x, que contenga la suma de dos expresiones racionales, cuya solución sea el conjunto de los números reales excepto 0. Explica cómo determinaste tu respuesta.

Actividad grupal

104. Longitud focal Consulta el ejemplo 10. Una lente con 80 mm de longitud focal se usa para enfocar una imagen de una pieza de silicio (un sensor) en una cámara digital. La distancia máxima permitida entre la lente y el sensor es de 120 mm.

a) Miembro 1 del equipo: determina qué tan adelante del sensor debe estar la lente, si el objeto que debe fotografiarse está a 10.0 metros de distancia.

b) Miembro 2 del equipo: repite el inciso **a)** para una distancia de 3 metros.

c) Miembro 3 del equipo: repite el inciso **a)** para una distancia de 1 metro.

d) Individualmente, determinen la distancia más cercana a la que un objeto podría fotografiarse con claridad.

e) Comparen sus respuestas para ver si parecen razonables y consistentes.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.5] **105.** Resuelve la desigualdad $-1 \leq 5 - 2x < 7$.

[3.4] **106.** Determina la pendiente y la intersección con el eje de las y, de la gráfica de la ecuación $3(y - 4) = -(x - 2)$.

[5.1] **107.** Simplifica $3x^2y - 4xy + 2y^2 - (3xy + 6y^2 + 9x)$.

[5.8] **108. Paisajismo** El jardín de Jessica, está rodeado por un sendero con un ancho uniforme. El jardín y el sendero en conjunto cubren una área de 320 pies cuadrados. Si las dimensiones del jardín son 12 pies por 16 pies, determina el ancho del sendero.

EXAMEN DE MITAD DE CAPÍTULO: SECCIONES 6.1-6.4

Para descubrir qué tan bien entiendes el material del capítulo hasta este punto, resuelve esta breve evaluación. Las repuestas, y la sección donde el material se discutió inicialmente, se proporcionan en la parte final del libro. Revisa cualquier pregunta que respondas de manera incorrecta.

1. Determina el dominio de $h(x) = \dfrac{2x + 13}{x^3 - 25x}$.

2. Simplifica la expresión racional $\dfrac{x^2 + 9x + 20}{2x^2 + 5x - 12}$.

Multiplica o divide según se indica.

3. $\dfrac{11a + 11b}{3} \div \dfrac{a^3 + b^3}{15b}$

4. $\dfrac{x^2 + 4x - 21}{x^2 - 5x - 6} \cdot \dfrac{x^2 - 2x - 24}{x^2 + 11x + 28}$

5. $\dfrac{4a^2 + 4a + 1}{4a^2 + 6a - 2a - 3} \div \dfrac{2a^2 - 17a - 9}{(2a + 3)^2}$

6. Rectángulo El área de un rectángulo es $12a^2 + 13ab + 3b^2$. Si la longitud es $18a + 6b$, determina una expresión para el ancho al dividir el área entre la longitud.

7. Determina el mínimo común denominador para

$$\frac{x^2 - 5x - 7}{x^2 - x - 30} + \frac{3x^2 + 19}{x^2 - 4x - 12}.$$

Suma o resta. Simplifica todas las respuestas.

8. $\dfrac{5x}{x - 5} - \dfrac{25}{x - 5}$

9. $\dfrac{10}{3x^2y} + \dfrac{a}{6xy^3}$

10. $\dfrac{4}{2x^2 + 5x - 12} - \dfrac{3}{x^2 - 16}$

(*Continúa*)

Simplifica cada fracción compleja.

11. $\dfrac{9+\dfrac{a}{b}}{\dfrac{3-c}{b}}$ **12.** $\dfrac{\dfrac{5}{x}-\dfrac{8}{x^2}}{6-\dfrac{1}{x}}$ **13.** $\dfrac{y^{-2}+7y^{-1}}{7y^{-3}+y^{-4}}$

14. ¿Qué es una *solución aparente*? Explica bajo qué condiciones debes verificar la ocurrencia de soluciones extrañas.

Resuelve cada ecuación y comprueba tus soluciones.

15. $\dfrac{3x-1}{7}=\dfrac{-x+9}{2}$

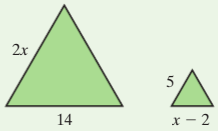
16. $\dfrac{m-7}{m-11}=\dfrac{4}{m-11}$

17. $x=1+\dfrac{12}{x}$

18. Resuelve $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$ en términos de a.

19. Resuelve $x=\dfrac{4}{1-r}$ en términos de r.

20. Triángulos Los dos triángulos son triángulos semejantes. Determina las longitudes de los dos lados desconocidos que involucran a la variable x.



6.5 Ecuaciones racionales: aplicaciones y resolución de problemas

1. **Resolución de problemas de trabajo**
2. **Resolución de problemas numéricos**
3. **Resolución de problemas de movimiento**

En esta sección, estudiarás más aplicaciones, comenzando con problemas de trabajo.

1 Resolución de problemas de trabajo

Los problemas donde dos o más personas o máquinas trabajan juntos para completar cierta tarea, se conocen como *problemas de trabajo*. Para resolver problemas de trabajo, se usa el hecho resumido en el siguiente diagrama:

$$\left(\begin{array}{c}\text{parte de la tarea}\\ \text{hecha por la primera}\\ \text{persona o máquina}\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}\text{parte de la tarea}\\ \text{hecha por la segunda}\\ \text{persona o máquina}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}1\\ \text{(una tarea}\\ \text{completada)}\end{array}\right)$$

Para determinar la parte de la tarea realizada por cada persona o máquina, se usa la fórmula:

$$\text{rapidez de trabajo}\cdot\text{tiempo trabajado}=\text{parte de la tarea completada}$$

Para determinar la rapidez de trabajo, considera los siguientes ejemplos.

Comprende el Álgebra

En general, si una persona (o máquina) puede completar una labor en x unidades de tiempo, la rapidez es $\frac{1}{x}$ de la tarea por unidad de tiempo.

- Si Danilo puede hacer una tarea por sí mismo en 5 horas, su rapidez es $\frac{1}{5}$ de la tarea por hora.
- Si Clementina puede hacer una tarea por sí misma en 4 horas, su rapidez es $\frac{1}{4}$ de la tarea por hora.
- De igual manera, si Bernardo puede hacer una tarea por sí mismo en x horas, su rapidez es $\frac{1}{x}$ de la tarea por hora.

EJEMPLO 1 **Paleado de un camino** Después de una nevada, Beto tarda 3 horas en palear el camino. Tere tarda 5 horas en palear el mismo camino. Si Beto y Tere trabajan juntos, ¿cuánto tardarán en palear el camino?

Solución Entiende Se requiere encontrar el número de horas que tardan Beto y Tere en palear el camino si trabajan juntos. Sea x = el número de horas para que Beto y Tere paleen el camino trabajando juntos.

Trabajador	Rapidez de trabajo	Tiempo trabajado	Parte de la tarea completada
Beto	$\frac{1}{3}$	x	$\frac{x}{3}$
Tere	$\frac{1}{5}$	x	$\frac{x}{5}$

Traduce

$$\begin{pmatrix}\text{parte del camino paleado}\\ \text{por Beto en } x \text{ horas}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{parte del camino paleado}\\ \text{por Tere en x horas}\end{pmatrix} = 1 \text{ (camino entero paleado)}$$

$$\frac{x}{3} \qquad + \qquad \frac{x}{5} \qquad = 1$$

Realiza Multiplica ambos lados de la ecuación por el MCD, 15. Luego resuelve para x, el número de horas.

$$15\left(\frac{x}{3} + \frac{x}{5}\right) = 15 \cdot 1 \quad \text{Multiplica por el MCD, 15.}$$

$$15\left(\frac{x}{3}\right) + 15\left(\frac{x}{5}\right) = 15 \quad \text{Propiedad distributiva}$$

$$5x + 3x = 15$$

$$8x = 15$$

$$x = \frac{15}{8}$$



Responde Beto y Tere pueden palear juntos el camino en $\frac{15}{8}$ horas, o 1.876 horas. Esta respuesta es razonable, porque este tiempo es menos de que lo que tarda cada uno de ellos en palear el camino por sí mismos.

Ahora resuelve el ejercicio 9

EJEMPLO 2 **Llenar una bañera** Jaime abre el grifo de su bañera, pero olvida cerrar el drenaje. El grifo puede llenar la bañera en 10 minutos y el drenaje puede vaciar la bañera en 18 minutos. Si el grifo está abierto y el drenaje permanece abierto, ¿cuánto tardará la bañera en llenarse?

Solución Entiende Conforme el agua del grifo llena la bañera, el agua que sale por el drenaje vacía la bañera. Por tanto, grifo y drenaje trabajan uno contra el otro. Sea x = tiempo necesario para llenar la bañera.

	Rapidez de trabajo	Tiempo trabajado	Parte de la bañera llenada o vaciada
Grifo llenando la bañera	$\frac{1}{10}$	x	$\frac{x}{10}$
Drenaje vaciando bañera	$\frac{1}{18}$	x	$\frac{x}{18}$

Traduce Dado que el grifo y el drenaje trabajan uno contra el otro, se *restará* la parte del agua que se vacía, de la parte del agua que se agrega a la bañera.

$$\begin{pmatrix}\text{parte de la bañera}\\ \text{llenada en } x \text{ minutos}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{parte de la bañera}\\ \text{vaciada en } x \text{ minutos}\end{pmatrix} = 1 \text{ (bañera totalmente llena)}$$

$$\frac{x}{10} \qquad - \qquad \frac{x}{18} \qquad = 1$$

Realiza Puedes eliminar las fracciones al multiplicar ambos lados de la ecuación por el MCD, 90.

$$90\left(\frac{x}{10} - \frac{x}{18}\right) = 90(1)$$

$$90\left(\frac{x}{10}\right) - 90\left(\frac{x}{18}\right) = 90$$

$$9x - 5x = 90$$

$$4x = 90$$

$$x = 22.5$$

Responde La bañera se llenará en 22.5 minutos.

Ahora resuelve el ejercicio 19

EJEMPLO 3 **Granja de fresas** Santiago y Martín trabajan en una granja de fresas orgánicas. Cuando trabajan juntos, pueden revisar las plantas de fresa en 24 minutos. Cuando Santiago revisa las plantas de fresa él solo, tarda 36 minutos. ¿Cuánto tardará Martín en revisar las plantas de fresa él solo?



Solución Entiende Sea x = tiempo que Martín tarda en revisar las plantas él solo. Se sabe que, cuando ambos trabajan juntos, pueden revisar las plantas en 24 minutos. Esta información se organiza en la siguiente tabla.

Trabajador	Rapidez de trabajo	Tiempo trabajado	Parte de las plantas revisadas
Santiago	$\frac{1}{36}$	24	$\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$
Martín	$\frac{1}{x}$	24	$\frac{24}{x}$

Traduce $\left(\begin{array}{c}\text{parte de las plantas}\\ \text{revisadas por Santiago}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{parte de las plantas}\\ \text{revisadas por Martín}\end{array}\right) = 1$ (granja completa revisada)

$$\frac{2}{3} + \frac{24}{x} = 1$$

Realiza
$$3x\left(\frac{2}{3} + \frac{24}{x}\right) = 3x \cdot 1 \quad \text{Multiplica ambos lados por el MCD, } 3x.$$
$$2x + 72 = 3x$$
$$72 = x$$

Responde Martín puede revisar las plantas él solo en 72 minutos.

Ahora resuelve el ejercicio 23

Observa que, en el ejemplo 3, se usó $\frac{2}{3}$ en lugar de $\frac{24}{36}$, para la parte de las plantas revisadas por Santiago. Siempre usa fracciones simplificadas cuando establezcas y resuelvas las ecuaciones.

2 Resolución de problemas numéricos

Ahora se considerará un **problema numérico**, donde debes determinar un número relacionado con otro o más números.

EJEMPLO 4 **Problema numérico** Un número es el doble de otro número. La suma de los recíprocos de los dos números es $\frac{3}{10}$. Determina los números.

Solución Entiende Sea x = primer número desconocido. Entonces $2x$ = doble del primer número desconocido. Los recíprocos de estos dos números son $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{2x}$, respectivamente. La suma de estos dos recíprocos es $\frac{3}{10}$.

Traduce
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{3}{10}$$
$$10x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x}\right) = 10x\left(\frac{3}{10}\right) \quad \text{Multiplica ambos lados por el MCD, } 10x.$$
$$10x\left(\frac{1}{x}\right) + 10x\left(\frac{1}{2x}\right) = 10x\left(\frac{3}{10}\right) \quad \text{Propiedad distributiva.}$$
$$10 + 5 = 3x$$
$$15 = 3x$$
$$5 = x$$

Responde El primer número desconocido es 5, y el segundo número desconocido es el doble de 5, o 10. Una verificación mostrará que la suma de los recíprocos de $\frac{1}{5} + \frac{1}{10}$, es $\frac{3}{10}$.

Ahora resuelve el ejercicio 31

Comprende el Álgebra

La fórmula de distancia, por lo general, se escribe como:

$$\text{distancia} = \text{rapidez} \cdot \text{tiempo}$$

Sin embargo, en ocasiones es conveniente resolver la fórmula en términos del *tiempo*:

$$\frac{\text{distancia}}{\text{rapidez}} = \frac{\text{rapidez} \cdot \text{tiempo}}{\text{rapidez}}$$

$$\frac{\text{distancia}}{\text{rapidez}} = \text{tiempo}$$

o $$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{rapidez}}$$

3 Resolución de problemas de movimiento

El último tipo de problemas que se estudiarán, son los **problemas de movimiento**. Recuerda que distancia = rapidez · tiempo. En ocasiones, es conveniente resolver en términos del tiempo cuando se resuelven problemas de movimiento.

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{rapidez}}$$

EJEMPLO 5 **Volar un aeroplano** Sally traza su plan de prevuelo y descubre que hay un viento de 20 millas por hora que se mueve de este a oeste, en la altitud que ella planea volar. Si ella viaja al oeste (con el viento), podrá recorrer 400 millas en la misma cantidad de tiempo que le tomaría recorrer 300 millas si vuela hacia el este (contra el viento). Observa la **Figura 6.8.** Si supones que, de no ser por el viento, el avión volaría con la misma rapidez al este o al oeste, determina la rapidez del avión en aire quieto.

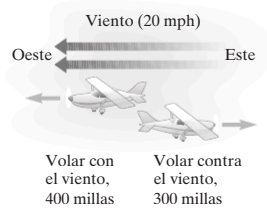


FIGURA 6.8

Solución Entiende Sea x = rapidez del avión en aire quieto. Construye una tabla para auxiliarte a responder la pregunta.

Avión	Distancia	Rapidez	Tiempo
Contra el viento	300	$x - 20$	$\frac{300}{x - 20}$
Con el viento	400	$x + 20$	$\frac{400}{x + 20}$

Traduce Dado que los tiempos son iguales, establece y resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{300}{x - 20} = \frac{400}{x + 20}$$

Realiza

$$\begin{aligned} 300(x + 20) &= 400(x - 20) \quad \text{Multiplicación cruzada.} \\ 300x + 6\,000 &= 400x - 8\,000 \\ 6\,000 &= 100x - 8\,000 \\ 14\,000 &= 100x \\ 140 &= x \end{aligned}$$

Responde La rapidez del avión en aire quieto es de 140 millas por hora.

Ahora resuelve el ejercicio 41

EJEMPLO 6 **Paseo en tabla de surf de remo** Gabriel rema en su tabla de surf de remo desde la orilla, y luego da la vuelta y regresa a la orilla. Cuando rema contra la corriente, al salir de la orilla, rema a 2 millas por hora. Cuando rema con la corriente, de regreso a la orilla, rema a 3 millas por hora. A Gabriel le toma $\frac{1}{4}$ horas más remar desde la orilla que remar de vuelta a la orilla. ¿Qué tan lejos de la orilla llega Gabriel?

Solución Entiende En este problema, los tiempos de salida y de regreso no son iguales. Tarda $\frac{1}{4}$ hora más remar para alejarse de la orilla que remar de vuelta. Por tanto, para hacer los tiempos iguales, puedes sumar $\frac{1}{4}$ hora al tiempo de remar de regreso (o restar $\frac{1}{4}$ hora al tiempo para remar de salida). Sea x = la distancia que Gabriel rema fuera de la orilla.



Remar	Distancia	Rapidez	Tiempo
De salida	x	2	$\frac{x}{2}$
De regreso	x	3	$\frac{x}{3}$

Traduce $\text{tiempo de regreso} + \frac{1}{4}\text{ hora} = \text{tiempo de salida}$

$$\frac{x}{3} + \frac{1}{4} = \frac{x}{2}$$

Realiza $12\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{4}\right) = 12 \cdot \frac{x}{2}$ Multiplica por el MCD, 12.

$12\left(\frac{x}{3}\right) + 12\left(\frac{1}{4}\right) = 12\left(\frac{x}{2}\right)$ Propiedad distributiva.

$$4x + 3 = 6x$$
$$3 = 2x$$
$$1.5 = x$$

Responde En consecuencia, Gabriel rema 1.5 millas desde la orilla.

Ahora resuelve el ejercicio 53

EJEMPLO 7 **Patinaje** Al patinar, Jana hace calentamiento con una rapidez baja durante 1 milla y luego aumenta su rapidez y recorre 11 millas. La rapidez alta de Jana es el doble de su rapidez durante el calentamiento. Si el tiempo total que Jana emplea patinando es de 1 hora y 15 minutos, determina su rapidez durante el calentamiento y su rapidez alta.

Solución Entiende y Traduce

Sea r = rapidez durante el calentamiento de Jana.

Entonces $2r$ = rapidez alta de Jana.



	Distancia	Rapidez	Tiempo
Calentamiento	1	r	$\frac{1}{r}$
Rapidez alta	11	$2r$	$\frac{11}{2r}$

Observa que 15 minutos $= \frac{1}{4}$ hora. En consecuencia, 1 hora y 15 minutos es $1 + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ horas. Por tanto, el tiempo total que Jana emplea patinando es de $\frac{5}{4}$ horas, y se escribe

$$\text{Tiempo de calentamiento} + \text{Tiempo con rapidez alta} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{1}{r} + \frac{11}{2r} = \frac{5}{4}$$

Realiza Comienza por multiplicar ambos lados de esta ecuación por el MCD, $4r$.

$$4r\left(\frac{1}{r} + \frac{11}{2r}\right) = 4r\left(\frac{5}{4}\right)$$
$$4r\left(\frac{1}{r}\right) + 4r\left(\frac{11}{2r}\right) = 4r\left(\frac{5}{4}\right)$$
$$4 + 22 = 5r$$
$$26 = 5r$$
$$5.2 = r$$

Responde En consecuencia, Jana realiza un calentamiento con una rapidez de 5.2 millas por hora y luego patina con una rapidez alta de 2(5.2) o 10.4 millas por hora.

Ahora resuelve el ejercicio 59

SUGERENCIA ÚTIL

Observa, en el ejemplo 7, que se pidió encontrar dos rapideces: la rapidez durante el calentamiento de Jana y su rapidez alta. Al resolver la ecuación, solamente se encontró la rapidez durante el calentamiento. Tienes que multiplicar la rapidez durante el calentamiento por 2, para obtener la rapidez alta de Jana. *Cuando trabajes con problemas escritos, debes leer el problema cuidadosamente y asegurarte de responder todas las preguntas que se te plantean.*

6.5 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

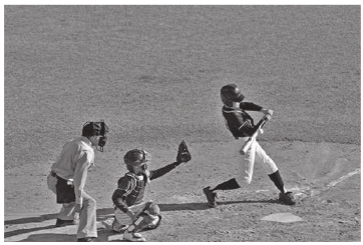
$\frac{\text{rapidez}}{\text{distancia}}$ $\frac{\text{distancia}}{\text{rapidez}}$ $\frac{1}{x}$ de trabajo tiempo rapidez distancia

1. Los problemas donde dos o más personas o máquinas trabajan juntas para completar cierta tarea, se conocen como problemas _____.
2. En general, si una persona o máquina puede completar una labor en x unidades de tiempo, la razón es _____.
3. Para determinar la parte de la tarea realizada por cada persona o máquina, se usa la fórmula: _____ de trabajo · tiempo trabajado = parte de tarea completada.
4. Si resuelves la fórmula de distancia en términos del tiempo, obtienes tiempo = _____.

Resolución de problemas

Los ejercicios 5-28 involucran problemas de trabajo. Consulta los ejemplos 1-3. Cuando sea necesario, redondea las respuestas a la centésima más cercana.

5. **Campos de béisbol** A Ricardo Sánchez le toma 2 horas preparar un campo de béisbol de ligas pequeñas. A Lázaro Ortíz le toma 6 horas preparar el mismo campo. ¿Cuánto tardarán Ricardo y Lázaro, trabajando juntos, en preparar un campo de béisbol de ligas pequeñas?



6. **Retirar hierbajos** Valeria puede retirar hierbajos de una fila de patatas en 70 minutos. Su amigo, Javier, puede retirar los mismos hierbajos en 30 minutos. ¿Cuánto tardarán los dos, trabajando juntos, en retirar los hierbajos de esta fila de patatas?
7. **Lavado de una alfombra** Javier puede lavar la alfombra de la planta principal del hotel Sheraton en 3 horas. Tomás puede lavar la misma alfombra en 6 horas. Si ambos trabajan juntos, ¿cuánto tardarán en lavar la alfombra?
8. **Impresión de cheques** En Merck Corporation, una computadora tarda 3 horas en imprimir los cheques para sus empleados, y una segunda computadora tarda 7 horas en completar la misma tarea. ¿Cuánto tardarán las dos computadoras, trabajando juntas, en completar la tarea?
9. **Arar un campo** Adriana puede arar un campo en 4 horas. Sergio puede arar el mismo campo en 6 horas. ¿Cuánto tardarán ambos, trabajando juntos, en arar el campo?
10. **Trabajo en un restaurante** Al final del día, en el restaurante Happy Burger, deben rellenarse los saleros y pimenteros, las botellas de catsup y mostaza, y los dispensadores de palillos. Esta labor le requiere a Jimena 25 minutos, cuando trabaja sola. Esta labor le requiere a Mauricio 35 minutos, cuando trabajo solo. ¿Cuánto tardarán Jimena y Mauricio, trabajando juntos, en hacer esta labor?
11. **Bombeo de agua** El departamento contra incendios de Jamestown, usa tres bombas para remover agua de los sótanos inundados. Las tres bombas pueden remover toda el agua de un sótano inundado en 6 horas, 5 horas y 4 horas, respectivamente. Si las tres bombas trabajan en conjunto, ¿cuánto tardarán en vaciar el sótano?

12. **Parquímetros** Las monedas en los parquímetros de la ciudad de Potosí, son recolectadas al final del día. Cuando cada uno de los trabajadores las recolectan por separado, Benito puede hacer el trabajo en 2 horas, Denisse puede hacer el trabajo en 2.5 horas y Jorge puede hacer el trabajo en 3 horas. ¿Cuánto tardarán en completar el trabajo si Benito, Denisse y Jorge trabajan juntos?



13. **Personal de un campo de béisbol** Julio, Margarita y Josefina, trabajan como personal de campo en un parque de béisbol de las grandes ligas. Julio puede limpiar el campo en 20 minutos, Margarita puede limpiar el campo en 15 minutos y Josefina puede limpiar el campo en 10 minutos. ¿Cuánto tardarán en limpiar el cuadro si todos ellos trabajan en conjunto?

14. **Entrega de periódicos** Ana, Cristina y Nicolás entregan periódicos en Benbrook, Texas. Ana puede entregar la edición dominical en 2.5 horas, Cristina puede entregar la edición dominical en 3.5 horas y Nicolás puede entregar la edición dominical en 4 horas. ¿Cuánto tardarán en entregar la edición dominical si trabajan en conjunto?

15. **Tratamiento de agua** En una planta para tratamiento de agua, una válvula de entrada puede llenar un gran tanque de agua en 20 horas y una válvula de descarga puede vaciar el tanque en 25 horas. Si el tanque está vacío y están abiertas tanto la válvula de entrada como la de descarga, ¿cuánto tardará en llenarse el tanque?

16. **Tanque de leche** En una planta de lácteos, un tanque de leche puede llenarse en 6 horas (usando la válvula de entrada). Usando la válvula de descarga, el tanque puede vaciarse en 8 horas. Si ambas válvulas están abiertas y la leche se bombea en el tanque, ¿cuánto tardará en llenarse el tanque?

17. **Almacenamiento de granos** En la compañía agrícola Olson, un tornillo sinfín de entrada puede llenar un gran depósito de granos en 25 minutos. Un tornillo sinfín de salida puede vaciar el mismo depósito en 30 minutos. Si el depósito está vacío y ambos tornillos sinfín están en operación, ¿cuánto tardará el depósito en llenarse?

18. **Almacenamiento de fertilizante** La compañía de fertilizantes Supersweet, fabrica fertilizante de nitrogenado líquido y lo almacena en un gran tanque. Una tubería de admisión puede llenar el tanque en 5 horas y una tubería de descarga puede drenar el tanque en 7 horas. Si el tanque está vacío y ambas tuberías comienzan a operar al mismo tiempo, ¿cuánto tardará en llenarse en tanque?

19. **Llenado de una tina de lavado** Cuando sólo está abierta la válvula de agua fría, una tina de lavado se llenará en 8 minutos. Cuando sólo está abierta la válvula de agua caliente, la tina de lavado se llenará en 12 minutos. Cuando el drenaje de la tina está abierto, la drenará por completo en 7 minutos. Si están abiertas ambas válvulas y también el drenaje, ¿cuánto tardará en llenarse la tina de lavado?

20. **Irrigación de cultivos** Un gran tanque se usa en la granja de Jed para irrigar los cultivos. El tanque tiene dos tuberías de admisión y una tubería de descarga. Las dos tuberías de admisión pueden llenar el tanque en 8 y 12 horas, respectivamente. La tubería de descarga puede vaciar el tanque en 15 horas. Si el tanque está vacío, ¿cuánto tardará en llenarse el tanque, cuando las tres válvulas están abiertas?



21. **Recolección de basura** Alex recolecta basura de los contenedores afuera de cada departamento, en un complejo de departamentos, y los lleva a un tiradero. Cuando él trabaja solo, Alex puede completar su tarea en 120 minutos. Cuando su hermano Marco le ayuda, juntos completan la tarea en 72 minutos. ¿Cuánto tardaría Marco en completar el trabajo él solo?

22. **Cavar una zanja** Arturo y Selena trabajan para General Telephone. Juntos tardan 2.4 horas en cavar una zanja donde se tiende un cable. Si Arturo puede cavar la zanja él solo en 3.2 horas, ¿cuánto tardaría Selena en cavar la zanja ella sola?

23. **Tanque de medusas** Óscar y Sergio trabajan juntos en el Acuario Monterey. Óscar tarda 50 minutos en limpiar los tanques de medusas. Dado que Sergio es nuevo en el puesto, él tarda más tiempo en realizar la misma tarea. cuando trabajan juntos pueden realizar la tarea en 30 minutos. ¿Cuánto tarda Sergio en hacer la tarea él solo?

24. **Sección de jirafas** Néstor y Jorge trabajan en el zoológico y deben limpiar la sección de las jirafas. Cuando trabajan solos, Néstor tarda el doble de tiempo que Jorge en completar esta tarea. Cuando trabajan juntos, pueden completar la tarea en 10 horas. ¿Cuánto tarda Jorge en completar esta tarea cuando trabaja solo?



25. Techar una casa Gustavo requiere 15 horas para poner un nuevo techo en una casa. Su aprendiz, Ana, puede techar la casa ella sola en 20 horas. Después de trabajar solo en un techo durante 6 horas, Gustavo sale hacia otro trabajo. Ana retoma el trabajo y lo completa. ¿Cuánto tarda Anna en completar el trabajo?

26. Llenado de un tanque Para llenar un buque petrolero, se usan dos tuberías. Cuando la tubería grande se usa sola, tarda 60 horas en llenar el buque petrolero. Cuando la tubería pequeña se usa sola, tarda 80 horas en llenar el buque. La tubería grande comienza a llenar el buque. Después de 20 horas se cierra la tubería grande y se abre la tubería pequeña. ¿Qué tiempo adicional tardará en llenarse por completo el buque petrolero, usando solamente la tubería pequeña?

27. Poda de césped Cuando usa solamente una podadora montable, Bruno puede podar su césped en 3 horas. Cuando usa solamente su podadora de empuje, Bruno puede podar su césped en 4 horas. Bruno comienza a podar su césped con su podadora montable, pero se descompone después de 2 horas. ¿Cuánto tardará Bruno en terminar de podar su césped con su podadora de empuje?



28. Viaje al trabajo Miguel tarda 25 minutos en conducir su automóvil hacia el trabajo. Miguel tarda 45 minutos en ir en bicicleta hacia el trabajo. Un día, Miguel carga su bicicleta en la cajuela de su automóvil y conduce hacia el trabajo durante 15 minutos. Después estaciona su automóvil, descarga la bicicleta y comienza a pedalear el resto del camino hacia el trabajo. ¿Cuánto tardará Miguel en pedalear el resto del camino hacia el trabajo?

Los ejercicios 29-40 involucran problemas numéricos. Consulta el ejemplo 4.

29. ¿Qué número multiplicado por el numerador y sumado al denominador de la fracción $\frac{2}{5}$ produce la fracción resultante $\frac{3}{4}$?

30. ¿Qué número sumado al numerador y multiplicado por el denominador de la fracción $\frac{4}{5}$ produce la fracción resultante $\frac{1}{15}$?

31. Un número es tres veces otro número. La suma de sus recíprocos es $\frac{2}{3}$. Determina los dos números.

32. Un número es cuatro veces otro número. La suma de sus recíprocos es $\frac{5}{12}$. Determina los dos números.

33. La suma de los recíprocos de dos enteros pares consecutivos es $\frac{5}{12}$. Determina los dos enteros.

34. La suma de los recíprocos de dos enteros consecutivos es $\frac{11}{30}$. Determina los dos enteros.

35. Cuando 3 se suma al doble del recíproco de un número, la suma es $\frac{31}{10}$. Determina el número.

36. Cuando tres veces el recíproco de un número se resta de 10, la diferencia es $\frac{47}{5}$. Determina el número.

37. Si tres veces un número se suma al doble del recíproco del número, la respuesta es 5. Determina el(los) número(s).

38. La suma de cinco veces un número y 14 es igual a 3 veces el recíproco del número. Determina el(los) número(s).

39. La suma del recíproco de un número y 1 es igual a 12 veces el recíproco del cuadrado del número. Determina el(los) número(s).

40. Si tres veces el recíproco de un número se resta del doble del recíproco del cuadrado del número, la diferencia es -1. Determina el(los) número(s).

Los ejercicios 41-64 involucran problemas de movimiento. Consulta los ejemplos 5-7. Cuando sea necesario, redondea las respuestas a la centésima más cercana.

41. Góndola Angelo opera una góndola en Venecia, Italia. Cuando Angelo rema su góndola en agua quieta, viaja a 3 mph. Cuando Angelo rema su góndola en el Gran Canal, puede recorrer 2.8 millas cuando rema con la corriente, en la misma cantidad de tiempo en la que puede recorrer 2 millas cuando rema contra la corriente. Determina la rapidez de la corriente.



42. Bote de remos Karla puede remar su bote en agua quieta con una rapidez de 7 mph. Cuando Karla lleva su bote al río Sinsinawa, tarda la misma cantidad de tiempo en recorrer 20 millas a favor de la corriente, que 8 millas en contra de la corriente. Determina la rapidez de la corriente del río.

43. Pasillo móvil El pasillo móvil en el aeropuerto internacional O'Hare de Chicago, se mueve con una rapidez de 2.0 pies por segundo. Al caminar en el pasillo móvil,

Nadia camina 120 pies en el mismo tiempo que tarda en caminar 72 pies sin el pasillo móvil. ¿Qué tan rápido camina Nadia?

44. Pasillo móvil El pasillo móvil en el aeropuerto internacional de Philadelphia, se mueve con una rapidez de 1.8 pies por segundo. Al caminar en el pasillo móvil, Javier camina 300 pies en el mismo tiempo que tarda en caminar 192 pies sin el pasillo móvil. ¿Qué tan rápido camina Javier?

45. Aeronave ultraligera La aeronave ultraligera de Anabel, tiene una rapidez en aire quieto de 60 millas por hora. Un día Anabel vuela 25 millas con el viento, en la misma cantidad de tiempo que vuela 15 millas contra el viento. Determina la rapidez del viento.



46. Avión Nadia vuela su avión cuando la rapidez del viento es de 30 millas por hora. Nadia puede recorrer 320 millas cuando vuela con el viento, en la misma cantidad de tiempo que puede recorrer 200 millas cuando vuela contra el viento. Determina la rapidez del avión de Nadia en aire quieto.

47. Conducir hasta La Florida Cristal vive en Bangor, Maine, y su amiga Denisse vive en Sioux City, Iowa. Las dos conducen hacia Dade City, Florida, para el invierno. El viaje es de 1 600 millas para Cristal y de 1 500 millas para Denisse. Si Cristal conduce 5 millas por hora más rápido que Denisse, y si las dos tardan la misma cantidad de tiempo en completar el viaje, determina la razón de movimiento para Cristal y para Denisse.

48. Excursión en un parque Ruth y Jerónimo van de excursión al parque Memorial en Houston, Texas. Ruth trota, mientras que Jerónimo pasea en patines. Jerónimo patina 3 millas por hora más rápido de lo que Ruth trota. Cuando Jerónimo patinó 5.7 millas, Ruth trotó 3.3 millas. Determina la rapidez de trote de Ruth.

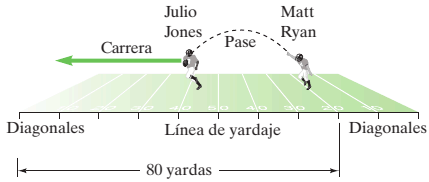
49. Carrera de patinetas Tamara y su hermana Noelia, entran a una carrera de patinetas. Las hermanas parten al mismo tiempo y Tamara viaja a una rapidez de 10 millas por hora, mientras que Noelia viaja a una rapidez de 8 millas por hora. Si Noelia tarda $\frac{1}{4}$ hora más en recorrer la misma distancia que Tamara, determina la distancia de la carrera.



Consulta el ejercicio 49.

50. De viaje Un tren y un automóvil parten, al mismo tiempo, de la estación de tren en Pasadena, California y se dirigen a la feria estatal en Sacramento. El automóvil promedia 50 millas por hora y el tren promedia 70 millas por hora. Si el tren llega a la feria 2 horas antes que el automóvil, determina la distancia desde la estación del tren hasta la feria estatal.

51. Pase de fútbol Los Halcones de Atlanta tienen el balón en su propia yarda 20. Matt Ryan lanza el balón a Julio Jones, quien lo atrapa y corre hacia las diagonales para anotar un touchdown. Supón que el balón, cuando se lanza, viaja a 12 yardas por segundo y que, después de que Julio atrapa el balón, corre a 5 yardas por segundo hacia las diagonales. Si la jugada, desde el momento en que Matt lanza el balón, hasta el momento en que Julio llega a las diagonales, tarda 12.5 segundos, ¿qué tan lejos, desde donde Matt lanzó el balón, la atrapó Julio? Supón que toda la jugada se desarrolló en el centro del campo.



52. Perfil de manejo Un día, Samanta condujo desde Front Royal, Virginia, hasta Asherville, Carolina del Norte, una distancia de 492 millas. Durante parte del viaje, ella condujo a una rapidez fija de 50 millas por hora, pero en algunas áreas, ella condujo a una rapidez fija de 35 millas por hora. Si el tiempo total del viaje fue de 11.13 horas, ¿cuánto recorrió en cada rapidez?

53. De viaje Un automóvil y un tren parten, al mismo tiempo, de Union Station, en Washington, D.C., hacia Rochester, Nueva York, a 390 millas de distancia. Si la rapidez del automóvil promedia el doble de la rapidez del tren, y el automóvil llega 6.5 horas antes que el tren, determina la rapidez del automóvil y la rapidez del tren.

54. Paseo a caballo Cada mañana, Diana monta en su caballo, *Beauty*, para dar un paseo por Pfeiffer Beach, en Big Sur, California. Por lo general, ella corre en *Beauty* durante 5.4 millas, luego camina en *Beauty* 2.3 millas.

Su rapidez cuando corre es 4.2 veces su rapidez que cuando camina. Si su paseo total dura 1.5 horas, determina la rapidez a la que camina *Beauty*.



55. De paseo Dos amigos conducen desde Dallas hacia El Paso, a una distancia de 600 millas. Andrea viaja por la autopista y llega al mismo destino 2 horas antes que Carla, quien toma una ruta diferente. Si la rapidez promedio del automóvil de Andrea fue 10 millas por hora más rápido que el automóvil de Carla, determina la rapidez promedio de cada automóvil.

56. Carrera de botes de vela En una carrera de 30 millas para botes de vela, el bote ganador, el *Buccaneer*, termina 10 minutos antes que el bote del segundo lugar, el *Raven*. Si la rapidez promedio del *Buccaneer* fue 2 millas por hora más rápido que la del *Raven*, determina la rapidez promedio de cada bote.

57. Viaje en helicóptero Katia contrata un viaje en helicóptero hacia lo alto del monte Cook Glacier en Nueva Zelandia. El vuelo cubrió una distancia de 60 kilómetros. Katia permaneció en lo alto del glaciar $\frac{1}{2}$ hora. Después ella voló hacia la ciudad de Te Anu, a 140 kilómetros de distancia. El helicóptero promedió 20 kilómetros por hora más rápido de ida a Te Anu, que en el vuelo hacia lo alto del glaciar. El tiempo total involucrado en el viaje fue de 2 horas. Determina la rapidez promedio del helicóptero al ir hacia el glaciar.



58. Puente de suspensión El puente de suspensión Capilano, en Vancouver, Canadá, mide 450 pies de largo. Felipe y Hernán comenzaron a caminar a lo largo del puente al mismo tiempo. La rapidez de Hernán fue 2 pies por minuto más rápido que la de Felipe. Si Hernán terminó de caminar a lo largo del puente $2\frac{1}{2}$ minutos antes que Felipe, determina la rapidez promedio de Felipe, en pies por minuto.

59. Cadena de bicicleta rota Roberto viajó en su bicicleta 24 millas y después la cadena de su bicicleta se rompió. Roberto caminó con la bicicleta 2 millas hasta una tienda de bicicletas para reparar la cadena. La rapidez de viaje de Roberto fue 4 veces su rapidez al caminar. Si el tiempo total que Roberto empleó en pedalear y caminar fue de 2 horas, determina su rapidez al caminar y su rapidez al pedalear.

60. Tráfico pesado Rodolfo conduce para visitar a su hermana. Al principio, encuentra tráfico pesado durante 5 millas antes de que el tráfico fluya y pueda conducir durante 135 millas con una rapidez mayor. Su rapidez después de que el tráfico fluye, es 3 veces su rapidez mientras conduce en tráfico. Si el tiempo total que Rodolfo pasa conduciendo es de 2 horas, determina su rapidez mientras está en el tráfico y su rapidez después de que el tráfico fluye.

61. Lanzamiento de cohetes Dos cohetes se lanzarán al mismo tiempo desde los cuarteles de la NASA en Houston, Texas, y se encontrarán en una estación espacial a muchas millas de la Tierra. El primer cohete viajará a 20 000 millas por hora y el segundo cohete viajará a 18 000 millas por hora. Si el primer cohete tiene programado llegar a la estación espacial 0.6 horas antes que el segundo cohete, ¿qué tan lejos está la estación espacial de los cuarteles de la NASA?



62. Botes de vela Dos botes de vela, el *Serendipity* y el *Zerwilliker*, parten desde el mismo punto y al mismo tiempo en el lago Michigan, y se dirigen hacia el mismo restaurante en el lago. El *Serendipity* viaja a un promedio de 5.2 millas por hora y el *Zerwilliker* viaja a un promedio de 4.6 millas por hora. Si el *Serendipity* llega al restaurante 0.4 horas antes que el *Zerwilliker*, determina la distancia desde su punto de partida y el restaurante.

63. Parque Nacional Yellowstone Felipe recorre 11 millas en su bicicleta de montaña dentro del Parque Nacional Yellowstone. Después, Felipe se detiene durante una hora en Mud Volcano y luego monta en su bicicleta 15 millas más, con una rapidez que era del doble de su rapidez original. Si todo el viaje, incluida su hora de descanso, tardó 6 horas, determina la rapidez original de Felipe y su máxima rapidez.

64. Vías inclinadas Un paseo hacia la punta del monte Pilatus, cerca de Lucerna, Suiza, involucra viajar en una vía inclinada hacia lo alto de la montaña, pasar tiempo en la cima, y después bajar por el lado opuesto

de la montaña, en un teleférico. La distancia recorrida hacia lo alto de la montaña es de 7.5 kilómetros, y la distancia recorrida para bajar la montaña es de 8.7 kilómetros. La rapidez de bajada de la montaña es 1.2 veces la rapidez de subida. Si los Rodríguez permanecen en la cima de la montaña durante 3 horas y el tiempo total de su paseo fue de 9 horas, determina la rapidez de la vía inclinada.

Ejercicios conceptuales y de redacción

65. Construye tu propio problema escrito y determina su solución.

66. Construye tu propio problema de movimiento y determina su solución.

67. Construye tu propio problema numérico y determina su solución.

Problemas de desafío

68. Un oficial que vuela una aeronave de la patrulla de caminos de California determina que un automóvil, 10 millas adelante de él, viaja a 90 millas por hora.

a) Si la aeronave viaja a 150 millas por hora, ¿cuántos minutos tardará la aeronave en alcanzar al automóvil?

b) ¿Cuánto habrá recorrido el automóvil en el tiempo que la aeronave tarda en alcanzarlo?

c) Si el piloto quiere alcanzar al automóvil exactamente en 8 minutos, ¿qué tan rápido debe volar la aeronave?

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.5] **69.** Simplifica $\dfrac{(3x^4y^{-3})^{-2}}{(2x^{-1}y^6)^3}$.

[1.6] **70.** Expresa 9 260 000 000 en notación científica.

[2.3] **71. Salario semanal** Sandy recibe un sueldo semanal de \$240, más 12% de comisión por el volumen total en dólares de todas las ventas que realiza. ¿Cuál debe ser su volumen de ventas, en dólares, en una semana, para ganar \$540?

[3.1] **72.** Grafica $y = |x| - 2$. Usa los siguientes valores para x: $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ y 4.

[5.4] **73.** Factoriza $2a^4 - 2a^3 - 5a^2 + 5a$.

6.6 Variación

1. Resolución de problemas de variación directa
2. Resolución de problemas de variación inversa
3. Resolución de problemas de variación conjunta
4. Resolución de problemas de variación compuesta

Las **ecuaciones de variación** abordan el cambio de una cantidad en relación con otra cantidad o cantidades. En esta sección, se discutirán tres tipos de variación: *directa*, *inversa* y *conjunta*.

1 Resolución de problemas de variación directa

La **variación directa** involucra dos variables que aumentan juntas o disminuyen juntas. Por ejemplo, considera un automóvil que viaja a 80 millas por hora en una autopista interestatal. El automóvil recorre

- 80 millas en 1 hora,
- 160 millas en 2 horas,
- 240 millas en 3 horas, etcétera.

Conforme el *tiempo* aumenta, la *distancia* también aumenta.

La fórmula que se usa para calcular la distancia recorrida es:

$$\text{distancia} = \text{rapidez} \cdot \text{tiempo}$$

Puesto que la rapidez en los ejemplos anteriores es constante, la fórmula puede escribirse:

$$d = 80t$$

Se dice que la distancia *varía directamente* con el tiempo, o que la distancia es *directamente proporcional* al tiempo.

Comprende el Álgebra

La variación directa involucra dos variables que aumentan juntas o disminuyen juntas.

Los enunciados verbales:

- y varía directamente con x, y
- y es directamente proporcional a x, se representan por la ecuación de variación directa $y = kx$.

Variación directa

Si una variable y varía directamente con una variable x, entonces:

$$y = kx$$

donde k es la **constante de proporcionalidad** o la **constante de variación**.

La gráfica de $y = kx$, $k > 0$, siempre es una recta que pasa a través del origen (observa la **Figura 6.9**). La pendiente de la recta depende del valor de k.

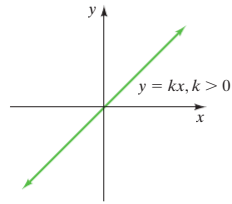


FIGURA 6.9

EJEMPLO 1 **Perímetro** El perímetro de un cuadrado, P, es directamente proporcional a, o varía directamente como, la longitud de un lado del cuadrado, s. Escribe la ecuación para el perímetro de un cuadrado si la constante de proporcionalidad, k, es 4.

Solución El enunciado, *P es directamente proporcional a s*, se puede representar con la ecuación:

$$P = ks$$

Dado que la constante de proporcionalidad, k, es 4, se escribe:

$$P = 4s$$

Ahora resuelve el ejercicio 21

EJEMPLO 2 **Administración de un medicamento** La cantidad, a, del medicamento teofilina que se administra a un paciente, es directamente proporcional a la masa del paciente, m, en kilogramos.

a) Escribe la ecuación de variación.

b) Si a un niño cuya masa es de 30 kg se le administran 150 mg, determina la constante de proporcionalidad.

c) ¿Cuánto medicamento debe administrársele a un paciente cuya masa es de 62 kg?

Solución

a) Se dice que las dos cantidades son directamente proporcionales. Por tanto, se configura una ecuación de variación directa.

$$a = km$$

b) Entiende y Traduce Para determinar el valor de la constante de proporcionalidad, sustituye los valores dados para la cantidad y la masa. Luego resuelve en términos de k.

Realiza

$$\begin{aligned} a &= km \\ 150 &= k(30) \quad \text{Sustituye los valores dados.} \\ 5 &= k \end{aligned}$$

Responde En consecuencia, $k = 5$. Se deben administrar 5 miligramos del medicamento, por cada kilogramo de masa de una persona.

c) Entiende y Traduce Ahora que se conoce la constante de proporcionalidad, puedes usarla para determinar la cantidad de medicamento que se debe usar, en función de la masa de una persona. Construye la ecuación de variación y sustituye los valores de k y m.

Realiza
$$a = km$$
$$a = 5(62) \quad \text{Sustituye los valores dados.}$$
$$a = 310$$

Responde En consecuencia, se deben administrar 310 mg de teofilina, a una persona cuya masa es de 62 kg.

Ahora resuelve el ejercicio 45

EJEMPLO 3 y varía directamente como el cuadrado de x. Si y es 15 cuando x es 5, determina y cuando x es 10.

Solución Dado que y varía directamente como el *cuadrado* de x, comienza con la ecuación $y = kx^2$. Puesto que no se proporciona la constante de proporcionalidad, primero debes determinar k usando la información dada.

$$y = kx^2$$
$$15 = k(5)^2 \quad \text{Sustituye 15 por } y \text{ y 5 por } x.$$
$$15 = 25k \quad \text{Resuelve en términos de } k.$$
$$\frac{15}{25} = \frac{25k}{25}$$
$$0.6 = k$$

Ahora se puede reescribir la ecuación de variación usando k.

$$y = 0.6x^2$$

Entonces se puede determinar y cuando x es 10.

$$y = 0.6(10)^2 = 0.6(100) = 60$$

En consecuencia, cuando x es igual a 10, y es igual a 60.

Ahora resuelve el ejercicio 35

2 Resolución de problemas de variación inversa

La **variación inversa** involucra dos variables, en donde una variable aumenta conforme la otra disminuye y viceversa. Por ejemplo, considera viajar 120 millas en un automóvil. Si el automóvil viaja a:

- 30 millas por hora, el viaja dura 4 horas.
- 40 millas por hora, el viaje dura 3 horas.
- 60 millas por hora, el viaja dura 2 horas, etcétera.

Conforme la *rapidez* aumenta, el *tiempo* para viajar 120 millas disminuye.

La fórmula usada para calcular el tiempo, dada la distancia y la rapidez es:

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{rapidez}}$$

Dado que la distancia, en los ejemplos de la página anterior, es constante, la fórmula puede reescribirse:

$$\text{tiempo} = \frac{120}{\text{rapidez}}$$

Se dice que el tiempo *varía inversamente* con la rapidez, o que el tiempo es *inversamente proporcional* a la rapidez.

Variación inversa

Si una variable y varía inversamente con una variable x, entonces:

$$y = \frac{k}{x} \quad (\text{o } xy = k)$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

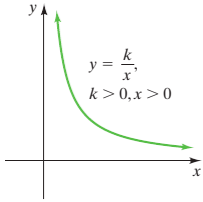


FIGURA 6.10

La gráfica de $y = \frac{k}{x}$, para $k > 0$ y $x > 0$, tendrá la forma ilustrada en la **Figura 6.10**. La gráfica de una ecuación de variación inversa no está definida en $x = 0$, porque 0 no está en el dominio de la función $y = \frac{k}{x}$.

Comprende el Álgebra

La variación inversa involucra dos variables, en donde una variable aumenta conforme la otra disminuye y viceversa.

Los enunciados verbales:

- y varía inversamente con x, y
- y es inversamente proporcional a x,

se representan mediante la ecuación de variación inversa:

$$y = \frac{k}{x}$$

EJEMPLO 4 **Hielo derretido** La cantidad de tiempo, t, que tarda un bloque de hielo en derretirse en agua, es inversamente proporcional a la temperatura del agua, T.

a) Escribe la ecuación de variación.

b) Si un bloque de hielo tarda 15 minutos en derretirse en agua a 60°F, determina la constante de proporcionalidad.

c) Determina cuánto tardará un bloque de hielo, del mismo tamaño, en derretirse en agua a 50°F.

Solución

a) Mientras más caliente sea la temperatura del agua, más corto será el tiempo para que el bloque de hielo se derrita. La variación inversa es:

$$t = \frac{k}{T}$$

b) Entiende y Traduce Para determinar la constante de proporcionalidad, sustituye los valores para la temperatura y el tiempo, y resuelve en términos de k.

Realiza
$$t = \frac{k}{T}$$
$$15 = \frac{k}{60} \quad \text{Sustituye los valores dados.}$$
$$900 = k$$

Responde La constante de proporcionalidad es 900.

c) Entiende y Traduce Ahora que conoces la constante de proporcionalidad, puedes usarla para determinar cuánto tardará el bloque de hielo, del mismo tamaño, en derretirse en agua a 50°F. Configura la proporción, sustituye los valores para k y T, y resuelve en términos de t.

Realiza
$$t = \frac{k}{T}$$
$$t = \frac{900}{50} \quad \text{Sustituye los valores dados.}$$
$$t = 18$$

Responde El bloque de hielo tardará 18 minutos en derretirse en agua a 50°F.

Ahora resuelve el ejercicio 49

EJEMPLO 5 **Iluminación** La iluminancia, I, de una fuente luminosa, varía inversamente con el cuadrado de la distancia, d, desde la fuente. Si supones que la iluminancia tiene un valor de 75 unidades a una distancia de 4 metros, determina la fórmula que expresa la relación entre la iluminancia y la distancia.



Solución Entiende y Traduce Dado que la iluminancia varía inversamente con el *cuadrado* de la distancia, la forma general de la ecuación es

$$I = \frac{k}{d^2}$$

Para determinar k, sustituye los valores dados para I y d.

Realiza
$$75 = \frac{k}{4^2} \quad \text{Sustituye los valores dados.}$$
$$75 = \frac{k}{16} \quad \text{Resuelve en términos de } k.$$
$$(75)(16) = k$$
$$1\,200 = k$$

Responde La fórmula es $I = \frac{1200}{d^2}$.

Ahora resuelve el ejercicio 53

3 Resolución de problemas de variación conjunta

La **variación conjunta** involucra una variable que varía directamente con el producto de dos o más variables.

Variación conjunta

Si y varía conjuntamente con x y z, entonces

$$y = kxz$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

EJEMPLO 6 **Área de un triángulo** El área, A, de un triángulo varía conjuntamente con su base, b, y altura, h. Si el área de un triángulo es de 48 pulgadas cuadradas, cuando su base es de 12 pulgadas y su altura es 8 pulgadas, determina el área de un triángulo cuya base es de 15 pulgadas y su altura es de 40 pulgadas.

Solución Entiende y Traduce Primero encuentra la ecuación de variación conjunta y después sustituye los valores conocidos, y resuelve en términos de k.

Realiza

$$A = kbh$$
$$48 = k(12)(8) \quad \text{Sustituye los valores dados.}$$
$$48 = k(96) \quad \text{Resuelve en términos de } k.$$
$$\frac{48}{96} = k$$
$$k = \frac{1}{2}$$

Ahora resuelve en términos del área desconocida, usando los valores dados.

$$A = kbh$$
$$= \frac{1}{2}(15)(40) \quad \text{Sustituye los valores dados.}$$
$$= 300$$

Responde El área del triángulo es de 300 pulgadas cuadradas.

Ahora resuelve el ejercicio 57

Resumen de ecuaciones de variación

DIRECTA	INVERSA	CONJUNTA
$y = kx$	$y = \frac{k}{x}$	$y = kxz$

4 Resolución de problemas de variación compuesta

En la **variación compuesta**, las variaciones directa e inversa ocurren entre tres o más variables al mismo tiempo.

EJEMPLO 7 **Pastelería** Los dueños de Perky Buns Bakery and Coffee Shop, descubren que sus ventas semanales de cupcakes, S, varían directamente con su presupuesto de publicidad, A, e inversamente con el precio de sus cupcakes, P. Cuando su presupuesto de publicidad es de \$400 y su precio es de \$1, venden 6200 cupcakes.

a) Escribe una ecuación de variación, que exprese S en términos de A y P. Incluye el valor de la constante.

b) Determina las ventas esperadas, si el presupuesto de publicidad es de \$600 y su precio es de \$1.20.



Solución

a) Entiende y Traduce Comienza con la ecuación

Realiza
$$S = \frac{kA}{P}$$
$$6\,200 = \frac{k(400)}{1} \quad \text{Sustituye los valores dados.}$$
$$6\,200 = 400k \quad \text{Resuelve en términos de } k.$$
$$15.5 = k$$

Responde Por tanto, la ecuación para las ventas de cupcakes es $S = \dfrac{15.5A}{P}$.

b) Entiende y Traduce Ahora que conoces la ecuación de variación compuesta, puedes usarla para determinar las ventas esperadas para los valores dados.

$$S = \frac{15.5A}{P}$$
$$= \frac{15.5(600)}{1.20} \quad \text{Sustituye los valores dados.}$$

Realiza
$$= 7750$$

Responde Los dueños esperarían vender 7 750 cupcakes.

Ahora resuelve el ejercicio 59

EJEMPLO 8 **Viga de construcción** La carga máxima, L, para una viga rectangular horizontal, varía conjuntamente con el ancho de la viga, w, y el cuadrado del grosor de la viga, t, e inversamente con la longitud de la viga, l. Una viga que mide 4 pulgadas de ancho, 2 pulgadas de grueso y 8 pies de largo, soportará una carga máxima de 750 libras.

a) Escribe una ecuación de variación que exprese L en términos de w, t y l.

b) Determina la constante de proporcionalidad, k, y úsala para reescribir la ecuación de variación.

c) Determina la carga máxima, para una viga que mide 3 pulgadas de ancho, 4 pulgadas de grueso y 12 pies de largo.

Solución

a) L varía conjuntamente con w y t^2, e inversamente con l. Por tanto, la ecuación de variación es

$$L = \frac{kwt^2}{l}$$

b) Para determinar k, sustituye $w = 4$, $t = 2$, $l = 8$, y $L = 750$, y después resuelve en términos de k:

$$L = \frac{kwt^2}{l}$$
$$750 = \frac{k(4)(2)^2}{8}$$
$$750 = 2k$$
$$375 = k$$

En consecuencia, la ecuación de variación puede reescribirse como:

$$L = \frac{375wt^2}{l}$$

c) Sustituye los valores $w = 3$, $t = 4$, y $l = 12$ en la ecuación de variación para evaluar L.

$$L = \frac{375wt^2}{l}$$
$$= \frac{375(3)(4)^2}{12}$$
$$= \frac{18\,000}{12} = 1\,500$$

En consecuencia, la viga tiene una carga máxima de 1500 libras.

Ahora resuelve el ejercicio 63

6.6 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

conjunta directa compuesta inversa constante $y = kx$ $y = \frac{k}{x}$

1. La variación _____ involucra dos variables que aumentan juntas o disminuyen juntas.
2. La variación _____ involucra dos variables, en donde una variable aumenta mientras la otra disminuye y viceversa.
3. La variación _____ involucra una variable que varía directamente con el producto de dos o más variables.
4. En la variación _____, las variaciones directa e inversa ocurren entre tres o más variables al mismo tiempo.
5. Cuando y varía directamente con x, se escribe $y = kx$, donde k es la _____ de proporcionalidad.
6. Si y varía inversamente con x, entonces la ecuación de variación es _____.

Practica tus habilidades

En los ejercicios 7-20, determina si la variación entre las cantidades indicadas es directa o inversa.

7. La rapidez de un atleta y el tiempo que tarda en correr una carrera de 10 kilómetros.



8. El tiempo que tarda una paleta de hielo en derretirse y la temperatura del aire.
9. La rapidez de un automóvil y la distancia recorrida en una hora.
10. El número de páginas que puede leer Toño, en un periodo de 2 horas, y su rapidez de lectura.
11. El radio de un círculo y su área.
12. El lado de un cubo y su volumen.
13. El radio de un globo y su volumen.
14. El diámetro de un círculo y su circunferencia.
15. El diámetro de una manguera y el volumen de agua que sale de la manguera.
16. La distancia entre dos ciudades en un mapa y la distancia real entre las dos ciudades.
17. El tiempo que tarda un cubo de hielo en derretirse en agua y la temperatura del agua.
18. La rapidez a la cual conduces a tu trabajo y el tiempo que tardas en llegar a tu trabajo.
19. La rapidez de una fotocopiadora y el tiempo que tarda en imprimir un reporte de 20 páginas.
20. El número de días que dura un muñeco de nieve y la temperatura diaria promedio.



Para los ejercicios 21-32, **a)** *escribe la ecuación de variación y* **b)** *determina la cantidad indicada.*

21. y varía directamente con x. Determina y cuando $x = 7$ y $k = 4$.
22. y es directamente proporcional a t. Determina y cuando $t = 8$ y $k = \frac{3}{4}$.
23. y es inversamente proporcional a x. Determina y cuando $x = 8$ y $k = 6$.
24. y varía inversamente con s. Determina y cuando $s = 12$ y $k = 3$.
25. C es directamente proporcional a n. Determina k cuando $C = 250$ y $n = 5$.
26. R varía directamente como n. Determina k cuando $R = 640$ y $n = 16$.

27. j varía inversamente con x. Determina k cuando $j = 10$ y $x = 5$.

28. D es inversamente proporcional a a. Determina k cuando $D = 7$ y $a = 4$.

29. I varía inversamente con el cuadrado de d. Determina k cuando $I = 15$ y $d = 2$.

30. q es inversamente proporcional al cuadrado de v. Determina k cuando $q = 16$ y $v = 3$.

31. A varía directamente con B, e inversamente con C. Determina A cuando $B = 12, C = 4$ y $k = 3$.

32. A varía conjuntamente con R_1 y R_2, e inversamente con el cuadrado de L. Determina A cuando $R_1 = 120, R_2 = 8, L = 5$ y $k = \frac{3}{2}$.

Para los ejercicios 33-42, **a)** *escribe la ecuación de variación y* **b)** *determina la cantidad indicada.*

33. y varía directamente con x. Si y es 24 cuando $x = 8$, determina y cuando x es 5.

34. Z varía directamente con W. Si Z es 7 cuando W es 28, determina Z cuando W es 140.

35. y varía directamente con el cuadrado de R. Si y es 5 cuando R es 5, determina y cuando R es 10.

36. P varía directamente con el cuadrado de Q. Si P es 32 cuando Q es 4, determina P cuando Q es 7.

37. S varía inversamente con G. Si S es 12 cuando G es 0.4, determina S cuando G es 5.

38. C varía inversamente con J. Si C es 7 cuando J es 0.7, determina C cuando J es 10.

39. T varía inversamente con el cuadrado de P. Si T es 4 cuando P es 5, determina T cuando P es 2.

40. R varía inversamente con el cuadrado de T. Si R es 3 cuando T es 6, determina R cuando T es 2.

41. F varía conjuntamente con M_1 y M_2, e inversamente con d. Si F es 20 cuando $M_1 = 5, M_2 = 10$ y $d = 0.2$, determina F cuando $M_1 = 10$, $M_2 = 20$ y $d = 0.4$.

42. F varía conjuntamente con q_1 y q_2, e inversamente con el cuadrado de d. Si F es 8 cuando $q_1 = 2, q_2 = 8$, y $d = 4$, determina F cuando $q_1 = 28, q_2 = 12$ y $d = 2$.

Para los ejercicios 43-66, resuelve el problema que involucra variación. Si es necesario, redondea tu respuesta a la centésima más cercana.

43. Ganancia La ganancia por vender tablas de surf, es directamente proporcional al número de tablas de surf vendidas. Cuando se venden 150 tablas de surf, la ganancia es $2542.50. Determina la ganancia cuando se venden 520 tablas de surf.



44. Ganancia La ganancia por vender estéreos, es directamente proporcional al número de estéreos vendidos. Cuando se venden 65 estéreos, la ganancia es $4056. Determina la ganancia cuando se venden 80 estéreos.

45. Antibiótico La dosis recomendada, d, del medicamento antibiótico vancomicina, es directamente proporcional al peso de una persona. Si a Fabio, cuyo peso es de 132 libras, le administran 2376 miligramos, determina la dosis recomendada para Alan, cuyo peso es de 172 libras.

46. Baloncesto El número de puntos que Marco anota en un partido de baloncesto, p, es directamente proporcional al número de minutos que juega, m. Si Marco anota 6 puntos en un partido en el que juega 15 minutos, ¿cuántos puntos anotaría en un partido en el que juegue 25 minutos?

47. Ley de Hooke La ley de Hooke afirma que la longitud que se estirará un resorte, S, varía directamente con la fuerza (o peso), F, atado al resorte. Si un resorte se estira 1.4 pulgadas cuando se le atan 20 libras, ¿cuánto se estirará cuando se le aten 15 libras?

48. Distancia Cuando un automóvil viaja con una rapidez constante, la distancia recorrida, d, es directamente proporcional al tiempo, t. Si un automóvil recorre 150 millas en 2.5 horas, ¿cuánto recorrerá el mismo automóvil en 4 horas?

49. Presión y volumen El volumen de un gas, V, varía inversamente con su presión, P. Si el volumen, V, es 800 centímetros cúbicos cuando la presión es 200 milímetros (mm) de mercurio, determina el volumen cuando la presión es 25 mm de mercurio.

50. Cuerdas de guitarra La frecuencia de una cuerda de guitarra que vibra, f, es inversamente proporcional a la longitud de la cuerda de la guitarra, l. Una cuerda de guitarra que mide 25 pulgadas de largo tiene una frecuencia de 260 vibraciones por segundo. Determina la frecuencia de una cuerda de guitarra que mide 20 pulgadas de largo.



51. Correr una carrera El tiempo, t, que tarda un corredor en cubrir una distancia específica es inversamente proporcional a la rapidez del corredor. Si Sofía corre con un promedio de 6 millas por hora, ella terminará una carrera en 2.6 horas. ¿Cuánto tardará Michelle, quien corre a 5 milla por hora, en terminar la misma carrera?

52. Circuito eléctrico La corriente, I, en un circuito eléctrico dado, varía inversamente con la resistencia, R, en el circuito. Un circuito dado con una resistencia de 8 ohms tiene una corriente de 15 amperes. Determina la corriente en el circuito, si la resistencia es de 12 ohms.

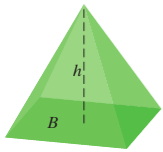
53. Intensidad de la luz La intensidad, i, de luz recibida en una fuente, varía inversamente con el cuadrado de la distancia, d, desde la fuente. Si la intensidad de la luz es de 20 pies-candelas a 15 pies, determina la intensidad de la luz a 10 pies.

54. Peso de un objeto El peso, w, de un objeto en la atmósfera de la Tierra, varía inversamente con el cuadrado de la distancia, d, entre el objeto y el centro de la Tierra. Una persona de 140 libras que está de pie sobre la Tierra, está a aproximadamente 4000 millas del centro de la Tierra. Determina el peso (o fuerza de atracción gravitacional) de esta persona a una distancia 100 millas sobre la superficie de la Tierra.

55. Distancia de frenado Supón que la distancia de frenado de una camioneta varía directamente con el cuadrado de la rapidez. Una camioneta que viaja a 40 millas por hora, puede detenerse en 60 pies. Si la camioneta viaja a 56 millas por hora, ¿cuál es su distancia de frenado?

56. Roca que cae Se deja caer una roca desde lo alto de un risco. La distancia que cae, en pies, es directamente proporcional al cuadrado del tiempo en segundos. Si la roca cae 4 pies en $\frac{1}{2}$ segundo, ¿cuánto caerá en 3 segundos?

57. Volumen de una pirámide El volumen, V, de una pirámide, varía conjuntamente con el área de su base, B, y su altura, h (observa la figura). Si el volumen de la pirámide es de 160 metros cúbicos cuando el área de su base es 48 metros cuadrados y su altura es 10 metros, determina el volumen de una pirámide cuando el área de su base es 42 metros cuadrados y su altura es 9 metros.



58. Interés simple Para una tasa de interés dado, el interés simple, i, varía conjuntamente con el principal, p y el tiempo, t. A una tasa de interés específica, el interés simple es de \$1050 para un préstamo de \$7000 durante 5 años. A la misma tasa de interés, determina el interés simple para un préstamo de \$6000 durante 4 años.

59. Equipo de matemáticas El tiempo, t, que tarda un equipo de matemáticas en completar un conjunto de problemas, es directamente proporcional al número de problemas en el conjunto, p, e inversamente proporcional al número de miembros en el equipo, m. Si un equipo de matemáticas con 3 miembros puede completar un conjunto de 18 problemas en 36 minutos, ¿cuánto tardaría un equipo de matemáticas con 5 miembros, en completar un conjunto de 35 problemas?



60. Resistencia eléctrica La resistencia eléctrica de un cable, R, varía directamente con su longitud, L, e inversamente con su área de sección transversal, A. Si la resistencia de un cable es de 0.2 ohms cuando la longitud es de 200 pies, y su área de sección transversal es de 0.05 pulgadas cuadradas, determina la resistencia de un cable cuya longitud es de 5000 pies, con una área de sección transversal de 0.01 pulgadas cuadradas.

61. Cilindro El volumen de un cilindro circular recto, V, varía conjuntamente con el cuadrado del radio, r, y la altura, h. Si un cilindro con 5 centímetros de radio y 8 centímetros de altura, tiene un volumen de 628.32 centímetros cúbicos, determina el volumen de un cilindro con 10 centímetros de radio y 5 centímetros de alto.

62. Consumo de watts El consumo de watts de un electrodoméstico, W, varía conjuntamente con el cuadrado de la corriente, I, y la resistencia, R. Si el consumo es de 3 watts, cuando la corriente es de 0.1 amperes y la resistencia es de 100 ohms, determina el consumo cuando la corriente es de 0.4 amperes y la resistencia es de 250 ohms.

63. Llamadas telefónicas El número de llamadas telefónicas entre dos ciudades durante un periodo de tiempo dado, N, varía conjuntamente con las poblaciones p_1 y p_2 de las dos ciudades, e inversamente con la distancia, d, entre ellas. Si se realizan 100000 llamadas entre dos ciudades separadas por 300 millas y las poblaciones de las ciudades son de 60000 y 200000, ¿cuántas llamadas se realizan entre dos ciudades con poblaciones de 125000 y 175000 que están separadas por 450 millas?

64. Recibo del agua En una región específica del país, el monto del recibo del agua de un consumidor, W, es directamente proporcional a la temperatura diaria promedio para el mes, T, el área de césped, A, y la raíz cuadrada de F, donde F es el tamaño de la familia, e inversamente proporcional al número de pulgadas de lluvia, R.

En un mes, la temperatura diaria promedio es de 78°F y el número de pulgadas de lluvia es de 5.6. Si la familia promedio de cuatro, que tiene 1000 pies cuadrados de césped, paga $68 por agua, estima el recibo del agua, en el mismo mes, para la familia promedio de seis, quienes tienen 1500 pies cuadrados de césped.

65. Intensidad de iluminación Un artículo en la revista *Outdoor and Travel Photography*, afirma: "si una superficie es iluminada por una fuente puntual de luz (un flash), la intensidad de iluminación producida es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa".

Si el sujeto que fotografías está a 4 pies del flash, y la iluminación sobre este sujeto es $\frac{1}{16}$ de la luz del flash, ¿cuál es la intensidad de iluminación sobre un objeto que está a 7 pies del flash?



66. Bola de tenis Cuando un jugador de tenis sirve la bola, el tiempo que la bola tarda en golpear el suelo en la caja de servicio, es inversamente proporcional a la rapidez a la que viaja la bola. Si Samuel sirve a 122 millas por hora, la bola tarda 0.21 segundos en golpear el suelo, después de golpear su raqueta. ¿Cuánto tardará la bola en golpear el suelo, si él sirve a 160 millas por hora?

Ejercicios conceptuales y de redacción

67. Supón que a varía directamente con b. Si b se duplica, ¿cómo afectará a a? Explica.

68. Supón que a varía directamente con b^2. Si b se duplica, ¿cómo afectará a a? Explica.

69. Supón que y varía inversamente con x. Si x se duplica, ¿cómo afectará a y? Explica.

70. Supón que y varía inversamente con a^2. Si a se duplica, ¿cómo afectará a y? Explica.

En los ejercicios 71-76, usa la fórmula $F = \frac{km_1m_2}{d^2}$.

71. Si m_1 se duplica, ¿cómo afectará a F?

72. Si m_2 se cuadruplica y d se duplica, ¿cómo afectará a F?

73. Si m_1 se duplica y m_2 se reduce a la mitad, ¿cómo afectará a F?

74. Si d se reduce a la mitad, ¿cómo afectará a F?

75. Si m_1 se reduce a la mitad y m_2 se cuadruplica, ¿cómo afectará a F?

76. Si m_1 se duplica, m_2 se cuadruplica y d se cuadruplica, ¿cómo afectará a F?

En los ejercicios 77 y 78, determina si la variación es de la forma $y = kx$ *o* $y = \frac{k}{x}$, *y determina* k.

77.

x	y
2	$\frac{5}{2}$
5	1
10	$\frac{1}{2}$
20	$\frac{1}{4}$

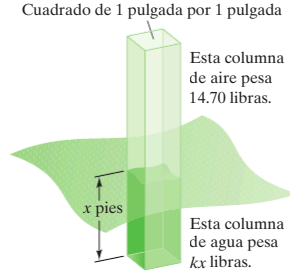
78.

x	y
6	2
9	3
15	5
27	9

Problemas de desafío

79. Presión sobre un objeto La presión, P, en libras por pulgada cuadrada (psi) sobre un objeto a x pies bajo el nivel del mar, es de 14.70 psi más el producto de una constante de proporcionalidad, k, y el número de pies, x, que el objeto esté bajo el nivel del mar (observa la figura). El valor de 14.70 representa el peso, en libras, de la columna de aire (desde el nivel del mar hasta lo alto de la atmósfera) que se encuentra sobre un cuadrado de océano de 1 pulgada por 1 pulgada. El valor de kx representa el peso, en libras, de una columna de agua de 1 pulgada por 1 pulgada por x pies.

(*Continúa*)



(*Continuación*)

a) Escribe una fórmula para la presión sobre un objeto a x pies bajo el nivel del mar.

b) Si la presión manométrica en una submarino a 60 pies de profundidad registra 40.5 psi, determina la constante k.

c) Un submarino se construye para soportar una presión de 160 psi. ¿Cuán profundo puede ir el submarino?

80. Fuerza de atracción Una de las leyes de Newton, afirma que la fuerza de atracción, F, entre dos masas, es directamente proporcional a las masas de los dos objetos, m_1 y m_2, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, d, entre las dos masas.

a) Escribe la fórmula que representa la ley de Newton.

b) ¿Qué le ocurre a la fuerza de atracción, si una masa se duplica, la otra masa se triplica y la distancia entre los objetos se reduce a la mitad?

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **81.** Resuelve la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^2 h$ para h.

[3.6] **82.** Sea $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = -5x + 1$. Determina $f(-4) \cdot g(-2)$.

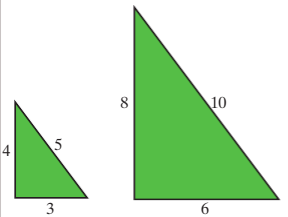
[5.2] **83.** Multiplica $(7x - 3)(-2x^2 - 4x + 5)$.

[5.7] **84.** Factoriza $(x + 1)^2 - (x + 1) - 6$.

Capítulo 6 Resumen

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 6.1	
Una **expresión racional** es una expresión de la forma $\frac{p}{q}$, donde p y q son polinomios y $q \neq 0$.	$\frac{7}{x}, \quad \frac{x^2 - 5}{x + 1}, \quad \frac{t^2 - t + 1}{3t^2 + 5t - 7}$
Una **función racional** es una función de la forma $y = f(x) = \frac{p}{q}$, donde p y q son polinomios y $q \neq 0$.	$y = \frac{x - 8}{x + 9}, \quad f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 1}{9x^2 - x + 3}$
El **dominio de una función racional** es el conjunto de números reales para los que el denominador no es igual a 0.	El dominio de $f(x) = \frac{x + 9}{x - 2}$ es $\{x \mid x \neq 2\}$.
Para simplificar expresiones racionales **1.** Factoriza completamente, tanto el numerador como el denominador. **2.** Divide el numerador y el denominador, entre cualquier factor común.	$\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$
Para multiplicar expresiones racionales Para multiplicar expresiones racionales, factoriza todos los numeradores y denominadores, y después usa la siguiente regla: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad b \neq 0, \quad d \neq 0$	$\frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x + 1}{2x - 1} = \frac{(x + 1)(2x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} \cdot \frac{x + 1}{2x - 1} = \frac{x + 1}{x - 1}$
Para dividir expresiones racionales: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0, \quad d \neq 0$	$\frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1} \div \frac{x + 3}{x} = \frac{(x + 3)(x + 1)}{x + 1} \cdot \frac{x}{x + 3} = x$
Sección 6.2	
Para sumar o restar expresiones racionales con un denominador común: **Suma** $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}, \quad c \neq 0$ **Resta** $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c}, \quad c \neq 0$	$\frac{x}{x^2 - 49} - \frac{7}{x^2 - 49} = \frac{x - 7}{x^2 - 49} = \frac{x - 7}{(x + 7)(x - 7)} = \frac{1}{x + 7}$

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 6.2 (Continuación)	
Para determinar el mínimo común denominador (MCD) de expresiones racionales 1. Escribe cada coeficiente no primo (distinto de 1), de los monomios que aparezcan en los denominadores como un producto de números primos. 2. Factoriza completamente cada denominador. 3. Enlista todos los diferentes factores que aparezcan en cualquier denominador. Cuando el mismo factor aparezca en más de un denominador, escribe el factor con la mayor potencia que aparezca. 4. El mínimo común denominador es el producto de todos los factores obtenidos en el paso 3.	El MCD de $\frac{7}{9x^2y} + \frac{17}{3xy^3}$ es $3 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot y^3 = 9x^2y^3$. El MCD de $\frac{1}{x^2 - 36} - \frac{4x + 3}{x^2 + 13x + 42}$ es $(x + 6)(x - 6)(x + 7)$. Observa que $x^2 - 36 = (x + 6)(x - 6)$ y $x^2 + 13x + 42 = (x + 6)(x + 7)$.
Para sumar o restar expresiones racionales con denominadores diferentes 1. Determina el MCD. 2. Reescribe cada fracción como una fracción equivalente con el MCD. 3. Deja el denominador en forma factorizada, pero multiplica el numerador. 4. Suma o resta los numeradores mientras conservas el MCD. 5. Cuando sea posible reducir la fracción mediante factorización del numerador, hazlo.	Suma $\frac{2a}{x^2y} + \frac{b}{xy^3}$. El MCD es x^2y^3. $\frac{2a}{x^2y} + \frac{b}{xy^3} = \frac{y^2}{y^2} \cdot \frac{2a}{x^2y} + \frac{b}{xy^3} \cdot \frac{x}{x}$ $= \frac{2ay^2}{x^2y^3} + \frac{bx}{x^2y^3}$ $= \frac{2ay^2 + bx}{x^2y^3}$
Sección 6.3	
Una **fracción compleja** es una fracción que tiene una expresión racional en su numerador, en su denominador o en ambos.	$\frac{\frac{2x}{x - 1}}{\frac{x^2}{x + 1}}, \quad \frac{7 - \frac{6}{y}}{\frac{1}{y^2} + \frac{8}{y^3}}$
Para simplificar una fracción compleja, mediante la multiplicación del mínimo común denominador 1. Determina el MCD de todas las fracciones que aparezcan dentro de la fracción compleja. 2. Multiplica el numerador y el denominador de la fracción compleja, por el MCD de la fracción compleja obtenida en el paso 1. 3. Simplifica cuando sea posible.	Simplifica $\frac{1 + \frac{1}{x}}{x}$. El MCD es x. $\frac{1 + \frac{1}{x}}{x} = \frac{x}{x} \cdot \frac{1 + \frac{1}{x}}{x} = \frac{x(1) + x\left(\frac{1}{x}\right)}{x(x)} = \frac{x + 1}{x^2}$
Para simplificar una fracción compleja por la simplificación de numerador y denominador 1. Suma o resta según se requiera para obtener una expresión racional en el numerador. 2. Suma o resta según se requiera para obtener una expresión racional en el denominador. 3. Multiplica el numerador de la fracción compleja por el recíproco del denominador. 4. Simplifica cuando sea posible.	Simplifica $\frac{1 + \frac{1}{x}}{x}$. $\frac{1 + \frac{1}{x}}{x} = \frac{\frac{x + 1}{x}}{x} = \frac{x + 1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x + 1}{x^2}$

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 6.4	
Para resolver ecuaciones racionales 1. Determina el MCD de todas las expresiones racionales en la ecuación. 2. Multiplica *ambos* lados de la ecuación por el MCD. 3. Retira cualquier paréntesis y combina términos semejantes en cada lado de la ecuación. 4. Resuelve la ecuación, usando las propiedades discutidas en secciones anteriores. 5. Verifica la solución en la ecuación *original*.	Resuelve $\frac{5}{x}+1=\frac{11}{x}$. Multiplica ambos lados por el MCD, x. $x\left(\frac{5}{x}+1\right)=x\left(\frac{11}{x}\right)$ $x\cdot\frac{5}{x}+x\cdot 1=x\cdot\frac{11}{x}$ $5+x=11$ $x=6$ La respuesta coincide.
Las **proporciones** son ecuaciones de la forma $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.	$\frac{2}{7}=\frac{9}{x}$ es una proporción.
Las **figuras semejantes** son figuras cuyos ángulos correspondientes son iguales, y cuyos lados correspondientes están en proporción.	 son figuras semejantes
Sección 6.5	
Aplicaciones **Problemas de trabajo:** Un problema de trabajo, es un problema donde dos o más máquinas, o personas, trabajan juntas para completar una tarea.	Carlos y Alberto plantan flores en un jardín. Carlos puede plantar un lote de flores en 30 minutos. Alberto puede plantar el mismo lote en 20 minutos. ¿Cuánto tardarán los dos, trabajando en conjunto, en plantar la bandeja de flores?
Problemas numéricos: Un problema numérico, es un problema donde un número se relaciona con otro número.	Cuando el recíproco de un número se resta de 5, el resultado es el recíproco del doble del número. Determina el número.
Problemas de movimiento: Un problema de movimiento, es un problema que involucra tiempo, rapidez y distancia.	Toño realiza un viaje en canoa a mediodía. Él puede remar a 5 millas por hora en agua quieta. ¿Qué tanto puede ir, corriente abajo, si la corriente es de 2 millas por hora y él baja y regresa en 4 horas?
Sección 6.6	
Variación directa Si una variable y varía directamente con una variable y, entonces $y=kx$, donde k es la constante de proporcionalidad.	$y=3x$
Variación inversa Si una variable y varía inversamente con una variable x, entonces $y=\frac{k}{x}\quad (\text{o } xy=k)$ donde k es la constante de proporcionalidad.	$y=\frac{3}{x}$

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 6.6 (Continuación)	
Variación conjunta Si y varía conjuntamente con x y z, entonces $y = kxz$ donde k es la constante de proporcionalidad.	$y = 3xz$

Capítulo 6 Ejercicios de repaso

[6.1] *Determina el valor o valores de la variable que debe excluirse en cada expresión racional.*

1. $\dfrac{2}{x-4}$ **2.** $\dfrac{x}{x+1}$ **3.** $\dfrac{-2x}{x^2+9}$

Determina el dominio de cada función racional.

4. $y = \dfrac{7}{(x-1)^2}$ **5.** $f(x) = \dfrac{x+6}{x^2}$ **6.** $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x^2+4x-12}$

Simplifica cada expresión.

7. $\dfrac{2x+6}{5x+15}$ **8.** $\dfrac{x^2-36}{x+6}$ **9.** $\dfrac{7-5x}{5x-7}$ **10.** $\dfrac{x^2+5x-6}{x^2+4x-12}$

11. $\dfrac{2x^2-6x+5x-15}{2x^2+7x+5}$ **12.** $\dfrac{a^3-8b^3}{a^2-4b^2}$ **13.** $\dfrac{27x^3+y^3}{9x^2-y^2}$ **14.** $\dfrac{2x^2+x-6}{x^3+8}$

[6.2] *Determina el mínimo común denominador de cada expresión.*

15. $\dfrac{x^2}{x-4} - \dfrac{3}{x}$ **16.** $\dfrac{3x+1}{x+2y} + \dfrac{7x-2y}{x^2-4y^2}$

17. $\dfrac{19x-5}{x^2+2x-35} + \dfrac{3x-2}{x^2-3x-10}$ **18.** $\dfrac{3}{(x+2)^2} - \dfrac{6(x+3)}{x^2-4} - \dfrac{4x}{x+3}$

[6.1, 6.2] *Realiza cada operación indicada.*

19. $\dfrac{10xy^2}{7z} \cdot \dfrac{14z^2}{15y}$ **20.** $\dfrac{x}{x-9} \cdot \dfrac{9-x}{6}$ **21.** $\dfrac{18x^2y^4}{xz^5} \div \dfrac{2x^2y^4}{x^4z^{10}}$

22. $\dfrac{11}{3x} + \dfrac{2}{x^2}$ **23.** $\dfrac{4x-4y}{x^2y} \cdot \dfrac{y^3}{16x}$ **24.** $\dfrac{4x^2-11x+4}{x-3} - \dfrac{x^2-4x+10}{x-3}$

25. $\dfrac{6}{xy} + \dfrac{3y}{5x^2}$ **26.** $\dfrac{x+2}{x-1} \cdot \dfrac{x^2+3x-4}{x^2+6x+8}$ **27.** $\dfrac{3x^2-7x+4}{3x^2-14x-5} - \dfrac{x^2+2x+9}{3x^2-14x-5}$

28. $5 + \dfrac{a+2}{a+1}$ **29.** $7 - \dfrac{b+1}{b-1}$ **30.** $\dfrac{a^2-b^2}{a+b} \cdot \dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^3+a^2b}$

31. $\dfrac{1}{a^2+8a+15} \div \dfrac{3}{a+5}$ **32.** $\dfrac{a+c}{c} - \dfrac{a-c}{a}$ **33.** $\dfrac{4x^2+8x-5}{2x+5} \cdot \dfrac{x+1}{4x^2-4x+1}$

34. $(a+b) \div \dfrac{a^2-2ab-3b^2}{a-3b}$ **35.** $\dfrac{x^2-3xy-10y^2}{6x} \div \dfrac{x+2y}{24x^2}$ **36.** $\dfrac{a+1}{2a} + \dfrac{3}{4a+8}$

37. $\dfrac{x-2}{x-5} - \dfrac{3}{x+5}$ **38.** $\dfrac{x+4}{x^2-4} - \dfrac{3}{x-2}$ **39.** $\dfrac{x+1}{x-3} \cdot \dfrac{x^2+2x-15}{x^2+7x+6}$

40. $\dfrac{2}{x^2-x-6} - \dfrac{3}{x^2-4}$ **41.** $\dfrac{4x^2-16y^2}{9} \div \dfrac{(x+2y)^2}{12}$ **42.** $\dfrac{a^2+5a+6}{a^2+4a+4} \cdot \dfrac{3a+6}{a^4+3a^3}$

43. $\dfrac{x+5}{x^2-15x+50}-\dfrac{x-2}{x^2-25}$

44. $\dfrac{x+2}{x^2-x-6}+\dfrac{x-3}{x^2-8x+15}$

45. $\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{2}{x-3}+\dfrac{6}{x^2-9}$

46. $\dfrac{a-4}{a-5}-\dfrac{3}{a+5}-\dfrac{10}{a^2-25}$

47. $\dfrac{x^3+64}{2x^2-32}\div\dfrac{x^2-4x+16}{2x+12}$

48. $\dfrac{a^2-b^4}{a^2+2ab^2+b^4}\div\dfrac{3a-3b^2}{a^2+3ab^2+2b^4}$

49. $\left(\dfrac{x^2-x-56}{x^2+14x+49}\cdot\dfrac{x^2+4x-21}{x^2-9x+8}\right)+\dfrac{3}{x^2+8x-9}$

50. $\left(\dfrac{x^2-8x+16}{2x^2-x-6}\cdot\dfrac{2x^2-7x-15}{x^2-2x-24}\right)\div\dfrac{x^2-9x+20}{x^2+2x-8}$

51. Si $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$ y $g(x)=\dfrac{x}{x+4}$, determina:

a) el dominio de $f(x)$.
b) el dominio de $g(x)$.
c) $(f+g)(x)$.
d) el dominio de $(f+g)(x)$.

52. Si Si $f(x)=\dfrac{x}{x^2-9}$ y $g(x)=\dfrac{x+4}{x-3}$, determina:

a) el dominio de $f(x)$.
b) el dominio de $g(x)$.
c) $(f+g)(x)$.
d) el dominio de $(f+g)(x)$.

[6.3] *Simplifica cada fracción compleja.*

53. $\dfrac{\dfrac{9a^2b}{2c}}{\dfrac{6ab^4}{4c^3}}$

54. $\dfrac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{y}}{\dfrac{x}{y}+y^2}$

55. $\dfrac{\dfrac{3}{y}-\dfrac{1}{y^2}}{7+\dfrac{1}{y^2}}$

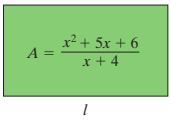
56. $\dfrac{a^{-1}+5}{a^{-1}+\dfrac{1}{a}}$

57. $\dfrac{x^{-2}+\dfrac{3}{x}}{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}}$

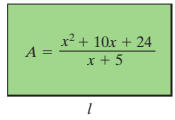
58. $\dfrac{\dfrac{1}{x^2-3x-18}+\dfrac{2}{x^2-2x-15}}{\dfrac{3}{x^2-11x+30}+\dfrac{1}{x^2-9x+20}}$

Área *En los ejercicios 59 y 60, se proporcionan el área y el ancho de cada rectángulo. Determina la longitud, l, al dividir el área, A, entre el ancho, w.*

59.



60.



[6.4] *En los ejercicios 61-70, resuelve cada ecuación.*

61. $\dfrac{3}{4}=\dfrac{12}{x}$

62. $\dfrac{x}{1.5}=\dfrac{x-4}{4.5}$

63. $\dfrac{3x+4}{5}=\dfrac{2x-8}{3}$

64. $\dfrac{x}{4.8}+\dfrac{x}{2}=1.7$

65. $\dfrac{2}{y}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{y}$

66. $\dfrac{2}{x+4}-\dfrac{3}{x-4}=\dfrac{-11}{x^2-16}$

67. $\dfrac{x}{x^2-9}+\dfrac{2}{x+3}=\dfrac{4}{x-3}$

68. $\dfrac{3}{p+1}+\dfrac{5}{p+3}=\dfrac{6}{p^2+4p+3}$

69. $\dfrac{x-3}{x-2}+\dfrac{x+1}{x+3}=\dfrac{2x^2+x+1}{x^2+x-6}$

70. $\dfrac{m}{m+5}-\dfrac{1}{m+5}=\dfrac{30}{m^2+5m}$

71. Resuelve $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$ para b.

72. Resuelve $z=\dfrac{x-\overline{x}}{s}$ para $\overline{x}$.

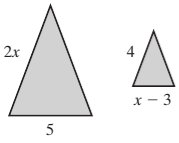
73. Resistores Tres resistores de 100, 200 y 600 ohms, se conectan en paralelo. Determina la resistencia total del circuito.

Usa la fórmula $\dfrac{1}{R_T}=\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}$.

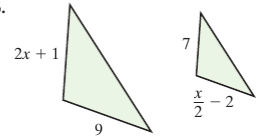
74. Longitud focal ¿Cuál es la longitud focal, f, de un espejo curvo, si la distancia del objeto, p, es 6 centímetros y la distancia de la imagen, q, es 3 centímetros? Usa la fórmula $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{f}$.

Triángulos *En los ejercicios 75 y 76, cada par de triángulos es similar. Determina las longitudes de los lados desconocidos.*

75.



76.



[6.5] *En los ejercicios 77-82, responde la pregunta planteada. Cuando sea necesario, redondea las respuestas a la centésima más cercana.*

77. Cosecha de ejotes Sandra puede cosechar una canasta de ejotes en 40 minutos, mientras que Jerónimo puede hacer la misma tarea en 30 minutos. ¿Cuánto tardarán en cosechar una canasta de ejotes si trabajan juntos?

78. Plantar un jardín Samuel y Francisco planean plantar un jardín de flores. Juntos, pueden plantar un jardín en 4.2 horas. Si Samuel puede plantar él solo el mismo jardín en 6 horas, ¿cuánto tardará Francisco en plantar el jardín él solo?

79. Fracciones ¿Qué número sumado al numerador y restado del denominador de la fracción $\frac{1}{11}$, hace que el resultado sea $\frac{1}{2}$?

80. Fracciones Cuando el recíproco del doble de un número se resta de 1, el resultado es el recíproco de tres veces el número. Determina el número.

81. Viaje en bote El bote de motor de Paula puede viajar a 15 millas por hora en agua quieta. Al viajar con la corriente de un río, el bote puede recorrer 20 millas en el mismo tiempo que tarda en recorrer 10 millas contra la corriente. Determina la rapidez de la corriente.



82. Volar un avión Un pequeño avión y un automóvil parten desde la misma posición, al mismo tiempo y se dirigen hacia la misma ciudad a 450 millas de distancia. La rapidez del avión es tres veces la rapidez del automóvil. El avión llega a la ciudad 6 horas antes que el automóvil. Determina la rapidez del automóvil y la rapidez del avión.

[6.6] *Determina cada cantidad indicada.*

83. x es directamente proporcional al cuadrado de y. Si $x = 45$ cuando $y = 3$, determina x cuando $y = 2$.

84. W es directamente proporcional al cuadrado de L e inversamente proporcional a A. Si $W = 4$ cuando $L = 2$ y $A = 10$, determina W cuando $L = 5$ y $A = 20$.

85. z es conjuntamente proporcional a x y y, e inversamente proporcional al cuadrado de r. Si $z = 12$ cuando $x = 20$, $y = 8$ y $r = 8$, determina z cuando $x = 10$, $y = 80$ y $r = 3$.

86. Recargo eléctrico La compañía eléctrica, Potomac, impone un recargo por alquiler de espacio, s, en las facturas eléctricas, el cual es directamente proporcional a la cantidad de energía utilizada, s. Si el recargo es de \$7.20 cuando se utilizan 3 600 kilowatt-horas, ¿cuál es el recargo cuando se utilizan 4 200 kilowatt-hora?

87. Caída libre La distancia, d, que un objeto cae en caída libre, es directamente proporcional al cuadrado del tiempo, t. Si una persona cae 16 pies en 1 segundo, ¿cuánto caerá la persona en 10 segundos? Desprecia la resistencia del viento.



88. Área El área, A, de un círculo, varía directamente con el cuadrado de su radio, r. Si el área es 78.5 cuando el radio es 5, determina el área cuando el radio es 8.

89. Cubo de hielo derritiéndose El tiempo, t, para que un cubo de hielo se derrita, es inversamente proporcional a la temperatura del agua en la que está. Si un cubo de hielo tarda 1.7 minutos en derretirse en agua a 70°F, ¿cuánto tardará un cubo de hielo, del mismo tamaño, en derretirse en agua a 50°F?

Capítulo 6 Examen de práctica

1. Determina los valores que se excluyen en la expresión:

$$\frac{x+4}{x^2+3x-28}$$

2. Determina el dominio de la función:

$$f(x)=\frac{x^2+7}{2x^2+7x-4}$$

Simplifica cada expresión.

3. $\dfrac{10x^7y^2+16x^2y+22x^3y^3}{2x^2y}$

4. $\dfrac{x^2-4xy-12y^2}{x^2+3xy+2y^2}$

En los ejercicios 5-14, realiza la operación indicada.

5. $\dfrac{3xy^4}{6x^2y^3}\cdot\dfrac{2x^2y^4}{x^5y^7}$

6. $\dfrac{x+1}{x^2-7x-8}\cdot\dfrac{x^2-x-56}{x^2+9x+14}$

7. $\dfrac{7a+14b}{a^2-4b^2}\div\dfrac{a^3+a^2b}{a^2-2ab}$

8. $\dfrac{x^3+y^3}{x+y}\div\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2}$

9. $\dfrac{5}{x+1}+\dfrac{2}{x^2}$

10. $\dfrac{x-1}{x^2-9}-\dfrac{x}{x^2-2x-3}$

11. $\dfrac{m}{12m^2+4mn-5n^2}+\dfrac{2m}{12m^2+28mn+15n^2}$

12. $\dfrac{x+1}{4x^2-4x+1}+\dfrac{3}{2x^2+5x-3}$

13. $\dfrac{x^3-8}{x^2+5x-14}\div\dfrac{x^2+2x+4}{x^2+10x+21}$

14. Si $f(x)=\dfrac{x-3}{x+5}$ y $g(x)=\dfrac{x}{2x+3}$, determina

a) $(f+g)(x)$.

b) el dominio de $(f+g)(x)$.

15. Área Si el área de un rectángulo es $\dfrac{x^2+11x+30}{x+2}$ y la longitud es $\dfrac{x^2+9x+18}{x+3}$, determina el ancho.

Para los ejercicios 16-18, simplifica.

16. $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{3}{y}}$

17. $\dfrac{\frac{a^2-b^2}{ab}}{\frac{a+b}{b^2}}$

18. $\dfrac{\frac{7}{x}-\frac{6}{x^2}}{4-\frac{1}{x}}$

Resuelve cada ecuación.

19. $\dfrac{x}{5}-\dfrac{x}{4}=-1$

20. $\dfrac{x}{x-8}+\dfrac{6}{x-2}=\dfrac{x^2}{x^2-10x+16}$

21. Resuelve $A=\dfrac{2b}{C-d}$ para C.

22. Consumo de watts El consumo de watts de un electrodoméstico, W, varía conjuntamente con el cuadrado de la corriente, I, y la resistencia, R. Si el consumo es 10 cuando la corriente es de 1 ampere y la resistencia es de 1 000 ohms, determina el consumo cuando la corriente es de 0.5 amperes y la resistencia es de 300 ohms.

23. R varía directamente con P e inversamente con el cuadrado de T. Si $R=30$ cuando $P=40$ y $T=2$, determina R cuando $P=50$ y $T=5$.

24. Lavado de ventanas Pablo puede lavar las ventanas de una casa en 10 horas. Su amiga, Nadia, puede lavar las mismas ventanas en 8 horas. ¿Cuánto tardarán si lavan juntos las ventanas de esta casa?

25. Patinaje Carmela y Lilia comenzaron a patinar al mismo tiempo desde el inicio de un sendero. Carmela promedia 8 millas por hora, mientras que Lilia promedia 5 millas por hora. Si Lilia tarda $\frac{1}{2}$ hora más que Carmela en llegar al final del sendero, ¿qué tan largo es el sendero?



Examen de repaso acumulativo

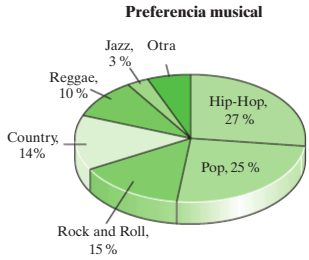
Resuelve la siguiente evaluación y verifica tus respuestas con las proporcionadas en la parte final del libro. Revisa cualquier pregunta que hayas respondido de manera incorrecta. Después de la respuesta, se indica la sección donde se cubrió el material.

1. Ilustra el conjunto $\left\{x \middle| -\frac{5}{3} < x \leq \frac{19}{4}\right\}$ sobre la recta numérica.

2. Evalúa $-3x^3 - 2x^2y + \frac{1}{2}xy^2$ cuando $x = 2$ y $y = \frac{1}{2}$.

3. Resuelve la ecuación $2(x + 1) = \frac{1}{2}(x - 5)$.

4. **Encuesta musical** Se encuestó a los estudiantes del Colegio Comunitario de Potosí, acerca de su tipo favorito de música. Los resultados se muestran en el siguiente diagrama.



a) ¿Qué porcentaje constituye la categoría "Otra"?

b) Si 5500 estudiantes completaron la encuesta, ¿cuántos indicaron que el hip-hop era su tipo de música favorita?

c) Si 5500 estudiantes completaron la encuesta, ¿cuántos indicaron que country era su tipo de música favorita?

5. Evalúa $4x^2 - 3y - 8$ cuando $x = 4$ y $y = -2$.

6. Simplifica $\left(\frac{6x^5y^6}{12x^4y^7}\right)^3$.

7. Resuelve $F = \frac{mv^2}{r}$ en términos de m.

8. **Interés simple** Amalia invirtió $3000 en un certificado de depósito durante 1 año. Cuando ella cobró el certificado, recibió $3180. ¿Cuál fue la tasa de interés simple?

9. **Reunión para un día de campo** Dana y Paula salen de sus casas a las 8 a.m. y planean reunirse para un día de campo en un punto intermedio. Si Dana viaja a 60 millas por hora y Paula viaja a 50 millas por hora, y ellas viven a 330 millas, una de la otra, ¿cuánto tardarán en reunirse para el día de campo?

10. Resuelve $\left|\frac{3x + 5}{3}\right| - 3 = 6$.

11. Elabora la gráfica de $y = x^2 - 2$.

12. Sea $f(x) = \sqrt{2x + 7}$. Evalúa $f(9)$.

13. Determina la pendiente de la recta que pasa a través de $(2, -4)$ y $(-5, -3)$.

14. Determina una ecuación de una recta que pasa a través de $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ y es paralela a la gráfica de $2x + 3y - 9 = 0$. Escribe la ecuación en forma general.

15. Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 10x - y &= 2 \\ 4x + 3y &= 11 \end{aligned}$$

16. Multiplica $(3x^2 - 5y)(3x^2 + 5y)$.

17. Factoriza $3x^2 - 30x + 75$.

18. Elabora la gráfica de $y = |x| + 2$. Usa los siguientes valores para x: $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ y 4.

19. Suma $\frac{7}{3x^2 + x - 4} + \frac{9x + 2}{3x^2 - 2x - 8}$.

20. Resuelve $\frac{3y - 2}{y + 1} = 4 - \frac{y + 2}{y - 1}$.

7 Raíces, radicales y números complejos

7.1 Raíces y radicales

7.2 Exponentes racionales

7.3 Simplificación de radicales

7.4 Suma, resta y multiplicación de radicales

Examen de mitad de capítulo: secciones 7.1-7.4

7.5 División de radicales

7.6 Resolución de ecuaciones radicales

7.7 Números complejos



Muchas fórmulas científicas, incluyendo varias aplicadas a situaciones de la vida real, contienen expresiones radicales. En el ejercicio 106 de la página 462, verás cómo se usa un radical para determinar la relación entre la rapidez del viento y la altura de las olas en ciertas áreas del océano.

Objetivos del capítulo

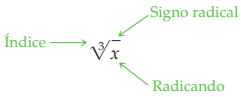
En este capítulo se explica cómo sumar, restar, multiplicar y dividir expresiones radicales. También se grafican funciones radicales, se resuelven ecuaciones radicales y se introducen los números imaginarios y los números complejos.

Asegúrate de entender los tres requisitos para simplificar expresiones radicales, que se estudian en la sección 7.5.

7.1 Raíces y radicales

1. Determinación de raíces cuadradas
2. Determinación de raíces cúbicas
3. Comprensión de las raíces impares y pares
4. Evaluación de radicales mediante el valor absoluto

En este capítulo, se extiende el concepto de radicales presentado en el capítulo 1. Un ejemplo de una **expresión radical** es $\sqrt[3]{x}$.



El símbolo $\sqrt{\ }$ se llama **signo radical** y se presenta en todas las expresiones radicales. La expresión que está abajo del signo radical, se llama **radicando**. El número directamente a la izquierda del signo radical, se llama **índice** e indica la "raíz" de la expresión.

1 Determinación de raíces cuadradas

Una **raíz cuadrada** es una expresión radical que tiene un índice de 2. El índice de una raíz cuadrada, por lo general, no se escribe. En consecuencia,

$$\sqrt{x} \text{ significa } \sqrt[2]{x}$$

Todo número real positivo tiene dos raíces cuadradas: una raíz cuadrada principal o positiva, y una raíz cuadrada negativa.

Comprende el Álgebra

Cuando se dice "raíz cuadrada" se hace referencia a una expresión radical con un índice de 2. Más aún, por lo general, no se escribe el índice 2. Por tanto, "*raíz cuadrada de x*" significa

$$\sqrt[2]{x}$$

pero se escribe

$$\sqrt{x}.$$

Raíces cuadradas

Para cualquier número real positivo a,

- La **raíz cuadrada principal** o **positiva** de a, que se escribe $\sqrt{a}$, es el número *positivo* b, tal que $b^2 = a$.
- La **raíz cuadrada negativa** de a, que se escribe $-\sqrt{a}$, es la *opuesta de la raíz cuadrada principal de a*.

Por ejemplo, el número real 25 tiene dos raíces cuadradas:

- La raíz cuadrada principal o positiva de 25, que se escribe $\sqrt{25}$, es 5, pues 5 es un número positivo, tal que $5^2 = 25$.
- La raíz cuadrada negativa de 25, que se escribe $-\sqrt{25}$, es -5, pues es la opuesta de la raíz cuadrada principal, 5. Además, observa que $(-5)^2 = (-5)(-5) = 25$.

En este libro, siempre que se usen las palabras "raíz cuadrada", se hará referencia a la raíz cuadrada principal o positiva. Si se te pide determinar la *raíz cuadrada* de 36, se te pide determinar la raíz cuadrada positiva de 36, $\sqrt{36}$, y tu respuesta será 6.

Cuando evalúes raíces cuadradas usando calculadora, si obtienes un número decimal, por lo general, puedes ver si el número decimal termina o se repite. En el capítulo 1, aprendiste que un número racional puede escribirse como un número decimal que es finito o periódico. Si un número decimal no termina y no se repite, entonces es un número irracional. La siguiente tabla brinda algunos ejemplos.

Radical	Resultado de calculadora	¿Finito, periódico o ninguno?	¿Racional o irracional?
$\sqrt{49}$	7	Finito	Racional
$\sqrt{0.01}$	.1	Finito	Racional
$\sqrt{\frac{25}{4}}$	2.5	Finito	Racional
$\sqrt{\frac{4}{9}}$	.6666666666	Periódico	Racional
$\sqrt{2}$	1.414213562	Ningun o	Irracional
$\sqrt{2.5}$	1.58113883	Ningun o	Irracional
$\sqrt{\frac{1}{2}}$	.7071067812	Ningun o	Irracional

A continuación, considera $\sqrt{-25}$. Dado que el cuadrado de cualquier número real siempre será mayor o igual que 0, no existe un número real que, cuando se eleve al cuadrado, sea igual a -25. Por esta razón $\sqrt{-25}$ *no es un número real*. Dado que el cuadrado de cualquier número real no puede ser negativo, *la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real*. Si evalúas $\sqrt{-25}$ en la mayoría de las calculadoras, obtendrás un mensaje de error. Más adelante en este capítulo, estudiarás números como $\sqrt{-25}$.

SUGERENCIA ÚTIL

No confundas $-\sqrt{36}$ con $\sqrt{-36}$. Puesto que $\sqrt{36} = 6$, $-\sqrt{36} = -6$. Sin embargo, $\sqrt{-36}$ no es un número real. La raíz cuadrada de un número negativo no es un número real.

$$\sqrt{36} = 6$$
$$-\sqrt{36} = -6$$
$\sqrt{-36}$ no es un número real.

La función raíz cuadrada Cuando grafiques funciones de raíz cuadrada, funciones de la forma $f(x) = \sqrt{x}$, siempre debes recordar que el radicando, x, no puede ser negativo. Por tanto, el dominio de $f(x) = \sqrt{x}$ es $\{x \mid x \geq 0\}$, o $[0, \infty)$ en notación de intervalo. Para graficar $f(x) = \sqrt{x}$ puedes seleccionar algunos valores convenientes de x y determinar los valores correspondientes de $f(x)$ o y, y luego trazar los pares ordenados, como se muestra en la **Figura 7.1.**

x	y
0	0
1	1
4	2
6	≈ 2.4
9	3

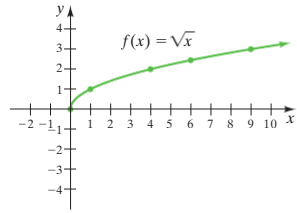


FIGURA 7.1

Dado que el valor de $f(x)$ nunca puede ser negativo, el rango de $f(x) = \sqrt{x}$ es $\{y \mid y \geq 0\}$, o $[0, \infty)$ en notación de intervalo.

EJEMPLO 1 Para cada función, determina el valor indicado.

a) $f(x) = \sqrt{3x + 7}$, $f(3)$ **b)** $g(t) = \sqrt{74 - t}$, $g(-7)$ **c)** $h(z) = \sqrt{2z - 15}$, $h(2)$

Solución

a) $f(3) = \sqrt{3(3) + 7}$ Sustituye 3 por x.

$= \sqrt{16} = 4$

En consecuencia, $f(3) = 4$.

b) $g(-7) = \sqrt{74 - (-7)}$ Sustituye -7 por t.

$= \sqrt{81} = 9$

En consecuencia, $g(-7) = 9$.

c) $h(2) = \sqrt{2(2) - 15}$ Sustituye 2 por z.

$= \sqrt{-11}$ No es un número real.

En consecuencia, $h(2)$ no es un número real.

Ahora resuelve el ejercicio 77

Comprende el Álgebra

Cuando se dice "raíz cúbica" se hace referencia a una expresión radical con un índice de 3. En consecuencia, "*raíz cúbica de x*" o "*raíz tercera de x*" significa: $\sqrt[3]{x}$

Ejemplos de expresiones radicales con índice mayor que 3, incluyen

"*raíz cuarta de x*", $\sqrt[4]{x}$,

"*raíz quinta de x*", $\sqrt[5]{x}$,

etcétera.

2 Determinación de raíces cúbicas

El índice de una raíz cúbica es 3. Las raíces cúbicas se presentaron en la sección 1.4. Quizás quieras revisar ese material ahora.

Raíz cúbica

La **raíz cúbica** de un número a, que se escribe $\sqrt[3]{a}$, es el número b, tal que $b^3 = a$.

Ejemplos

$\sqrt[3]{8} = 2$ ya que $2^3 = 8$

$\sqrt[3]{-27} = -3$ ya que $(-3)^3 = -27$

Para todo número real, sólo hay una raíz cúbica. La raíz cúbica de un número positivo es positiva y la raíz cúbica de un número negativo es negativa.

EJEMPLO 2 Para cada función, determina el valor indicado.

a) $f(x) = \sqrt[3]{5x - 3}, f(6)$ **b)** $g(w) = \sqrt[3]{9w - 1}, g(-7)$ **c)** $s(t) = \sqrt[3]{6 - 7t}, s(1)$

Solución

a) $f(6) = \sqrt[3]{5(6) - 3}$ Sustituye 6 por x.

$= \sqrt[3]{27} = 3$

b) $g(-7) = \sqrt[3]{9(-7) - 1}$ Sustituye -7 por w.

$= \sqrt[3]{-64} = -4$

c) $s(1) = \sqrt[3]{6 - 7(1)}$ Sustituye 1 por t.

$= \sqrt[3]{-1} = -1$

Ahora resuelve el ejercicio 83

La función raíz cúbica La **Figura 7.2**, muestra la gráfica de $y = \sqrt[3]{x}$. Para obtener esta gráfica, sustituye los valores para x y determina los valores correspondientes de $f(x)$ o y.

x	y
-8	-2
-1	-1
0	0
1	1
8	2

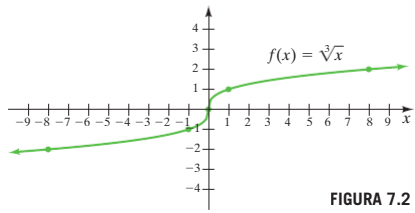


FIGURA 7.2

Observa que, tanto el dominio como el rango, son todos números reales, $\mathbb{R}$.

3 Comprensión de las raíces impares y pares

Hasta este punto, se han discutido las raíces cuadradas y cúbicas. Otras expresiones radicales tienen diferentes índices. Por ejemplo, en la expresión $\sqrt[5]{xy}$, (léase "la raíz quinta de xy") el índice es 5 y el radicando es xy.

Las expresiones radicales que tienen un índice par, como 2, 4, 6, ..., son **raíces pares**. Las raíces cuadradas son raíces pares, pues su índice es 2. Las expresiones radicales que tienen un índice impar, como 1, 3, 5, ..., son **raíces impares.**

Raíz par

La raíz *enésima* de a, $\sqrt[n]{a}$, donde n es un *índice par* y a es un número real no negativo, se llama **raíz par** y es el número real no negativo b, tal que $b^n = a$.

Ejemplos de raíces pares

$$\sqrt{9} = 3 \quad \text{ya que } 3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$
$$\sqrt[4]{16} = 2 \quad \text{ya que } 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$
$$\sqrt[6]{729} = 3 \quad \text{ya que } 3^6 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 729$$
$$\sqrt[4]{\frac{1}{256}} = \frac{1}{4} \quad \text{ya que } \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{256}$$

Cualquier número real, cuando se eleva a una potencia par, resulta en un número real positivo. Por tanto, *la raíz par de un número negativo, no es un número real*.

SUGERENCIA ÚTIL

Existe una importante diferencia entre $-\sqrt[4]{16}$ y $\sqrt[4]{-16}$. El número $-\sqrt[4]{16}$ es el opuesto de $\sqrt[4]{16}$. Puesto que $\sqrt[4]{16} = 2$, $-\sqrt[4]{16} = -2$. Sin embargo, $\sqrt[4]{-16}$ no es un número real, pues ningún número real, cuando se eleva a la cuarta potencia, es igual a -16.

$$-\sqrt[4]{16} = -\left(\sqrt[4]{16}\right) = -2$$
$\sqrt[4]{-16}$ no es un número real

Comprende el Álgebra

Cuando evalúas radicales que tienen un radicando negativo, debes recordar lo siguiente:

- Un radical con índice impar de un número negativo, es un número real negativo.
- Un radical con índice par de un número negativo, no es un número real.

Raíz impar

La raíz *enésima* de a, $\sqrt[n]{a}$, donde n es un *índice impar* y a es *cualquier número real*, se llama **raíz impar** y es el número real b, tal que $b^n = a$.

Ejemplos de raíces impares

$$\sqrt[3]{8} = 2 \quad \text{ya que } 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$
$$\sqrt[3]{-8} = -2 \quad \text{ya que } (-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$$
$$\sqrt[5]{243} = 3 \quad \text{ya que } 3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$$
$$\sqrt[5]{-243} = -3 \quad \text{ya que } (-3)^5 = (-3)(-3)(-3)(-3)(-3) = -243$$

Una raíz impar de un número positivo es un número positivo, y una raíz impar de un número negativo es un número negativo.

EJEMPLO 3 Indica si cada expresión radical es o no un número real. Si la expresión es un número real, determina su valor.

a) $\sqrt[4]{-81}$ **b)** $-\sqrt[4]{81}$ **c)** $\sqrt[5]{-32}$ **d)** $-\sqrt[5]{-32}$

Solución

a) No es un número real. Las raíces pares de números negativos no son números reales.

b) Número real, $-\sqrt[4]{81} = -\left(\sqrt[4]{81}\right) = -(3) = -3$

c) Número real, $\sqrt[5]{-32} = -2$ ya que $(-2)^5 = -32$

d) Número real, $-\sqrt[5]{-32} = -(-2) = 2$

Ahora resuelve el ejercicio 15

La **Tabla 7.1** resume la información sobre las raíces pares e impares.

Table 7.1

	n ES PAR	n ES IMPAR
$a > 0$	$\sqrt[n]{a}$ es un número real positivo.	$\sqrt[n]{a}$ es un número real negativo.
$a < 0$	$\sqrt[n]{a}$ no es un número real.	$\sqrt[n]{a}$ es un número real negativo.
$a = 0$	$\sqrt[n]{0} = 0$	$\sqrt[n]{0} = 0$

4 Evaluación de radicales mediante el valor absoluto

Quizás pienses que $\sqrt{a^2} = a$, pero esto no necesariamente es verdadero. A continuación, se evalúa $\sqrt{a^2}$ para $a = 2$ y $a = -2$. Verás que, cuando $a = -2$, $\sqrt{a^2} \neq a$.

$a = 2$: $\sqrt{a^2} = \sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$ Observa que $\sqrt{2^2} = 2$.

$a = -2$: $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$ Observa que $\sqrt{(-2)^2} \neq -2$.

Al examinar estos ejemplos, puedes razonar que $\sqrt{a^2}$ *siempre será un número real positivo* para cualquier número real distinto de cero a. Recuerda, de la sección 1.3, que el *valor absoluto* de cualquier número real a, o $|a|$, también es un número positivo para cualquier número distinto de cero. Estos hechos se usan para razonar que:

Radicales y valor absoluto

Para cualquier número real a,

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Esto indica que la raíz cuadrada principal de a^2, es el valor absoluto de a.

EJEMPLO 4 Usa el valor absoluto para evaluar.

a) $\sqrt{9^2}$ **b)** $\sqrt{0^2}$ **c)** $\sqrt{(-15.7)^2}$

Solución

a) $\sqrt{9^2} = |9| = 9$ **b)** $\sqrt{0^2} = |0| = 0$ **c)** $\sqrt{(-15.7)^2} = |-15.7| = 15.7$

Ahora resuelve el ejercicio 41

Cuando se simplifica una raíz cuadrada, si el radicando contiene una variable y no estás seguro de que el radicando sea positivo, entonces es necesario usar el símbolo de valor absoluto para llevar a cabo la simplificación.

EJEMPLO 5 Simplifica.

a) $\sqrt{(x+8)^2}$ **b)** $\sqrt{16x^2}$ **c)** $\sqrt{25y^6}$ **d)** $\sqrt{a^2 - 6a + 9}$

Solución Cada raíz cuadrada tiene un radicando que contiene una variable. Dado que no se conoce el valor de la variable, no se sabe si es positivo o negativo. Por tanto, debes usar signos de valor absoluto cuando simplifiques.

a) $\sqrt{(x+8)^2} = |x+8|$

b) Escribe $16x^2$ como $(4x)^2$, luego simplifica.

$$\sqrt{16x^2} = \sqrt{(4x)^2} = |4x$$

c) Escribe $25y^6$ como $(5y^3)^2$, luego simplifica.

$$\sqrt{25y^6} = \sqrt{(5y^3)^2} = |5y^3|$$

d) Observa que $a^2 - 6a + 9$ es un trinomio cuadrado perfecto. Escribe el trinomio como el cuadrado de un binomio, luego simplifica.

$$\sqrt{a^2 - 6a + 9} = \sqrt{(a-3)^2} = |a - 3|$$

Ahora resuelve el ejercicio 63

Si tienes una raíz cuadrada, cuyo radicando contenga un variable y se proporcionan las instrucciones "*asume que todas las variables representan valores positivos y el radicando no es negativo*", entonces, no es necesario usar el signo de valor absoluto cuando simplifiques.

EJEMPLO 6 Simplifica. Supón que todas las variables representan valores positivos y el radicando es no negativo.

a) $\sqrt{64x^2}$ **b)** $\sqrt{81p^4}$ **c)** $\sqrt{49x^6}$ **d)** $\sqrt{4x^2 - 12xy + 9y^2}$

Solución

a) $\sqrt{64x^2} = \sqrt{(8x)^2} = 8x$ Escribe $64x^2$ *como* $(8x)^2$.

b) $\sqrt{81p^4} = \sqrt{(9p^2)^2} = 9p^2$ Escribe $81p^4$ *como* $(9p^2)^2$.

c) $\sqrt{49x^6} = \sqrt{(7x^3)^2} = 7x^3$ Escribe $49x^6$ *como* $(7x^3)^2$.

d) $\sqrt{4x^2 - 12xy + 9y^2} = \sqrt{(2x - 3y)^2}$ Escribe $4x^2 - 12xy + 9y^2$ *como* $(2x - 3y)^2$.
$= 2x - 3y$

Ahora resuelve el ejercicio 67

Sólo debes preocuparte por usar signos de valor absoluto cuando trabajes raíces cuadradas y otras raíces pares. No necesitas usar signos de valor absoluto cuando el índice sea impar.

7.1 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

impar	índice	principal	cúbica	racional	radical
cuadrada	radicando	par	irracional	negativo	

1. El símbolo $\sqrt{\ }$ se llama signo _____.
2. En la expresión radical $\sqrt[3]{5}$ el 3 es el _____.
3. En la expresión radical $\sqrt[3]{5}$ el 5 es el _____.
4. Cuando se dice "raíz _____" se hace referencia a una expresión radical con un índice de 2.
5. Cuando se dice "raíz _____" se hace referencia a una expresión radical con un índice de 3.
6. La raíz cuadrada _____ de a, que se escribe $\sqrt{a}$, es el número positivo b tal que $b^2 = a$.
7. La raíz cuadrada _____ de a, que se escribe $-\sqrt{a}$, es el opuesto de la raíz cuadrada principal de a.
8. Un número _____ puede escribirse como un número decimal finito o decimal periódico.
9. La raíz _____ de un número negativo, no es un número real.
10. La raíz _____ de un número negativo, es un número negativo.

Practica tus habilidades

Evalúa cada expresión radical si es un número real. Si la expresión no es un número real, indícalo.

11. a) $\sqrt{25}$ **b)** $-\sqrt{25}$ **c)** $\sqrt{-25}$ **d)** $-\sqrt{-25}$

12. a) $\sqrt{64}$ **b)** $-\sqrt{64}$ **c)** $\sqrt{-64}$ **d)** $-\sqrt{-64}$

13. a) $\sqrt[3]{8}$ **b)** $-\sqrt[3]{8}$ **c)** $\sqrt[3]{-8}$ **d)** $-\sqrt[3]{-8}$

14. a) $\sqrt[3]{27}$ **b)** $-\sqrt[3]{27}$ **c)** $\sqrt[3]{-27}$ **d)** $-\sqrt[3]{-27}$

15. a) $\sqrt[4]{16}$ **b)** $\sqrt[4]{-16}$ **c)** $-\sqrt[4]{16}$ **d)** $-\sqrt[4]{-16}$

16. a) $\sqrt[4]{625}$ **b)** $-\sqrt[4]{625}$ **c)** $\sqrt[4]{-625}$ **d)** $-\sqrt[4]{-625}$

17. $\sqrt[3]{-1}$ **18.** $\sqrt[5]{-1}$ **19.** $\sqrt[4]{-1}$ **20.** $\sqrt[6]{-1}$

21. $\sqrt[3]{-64}$ **22.** $\sqrt[3]{-216}$ **23.** $\sqrt[5]{32}$ **24.** $\sqrt[6]{64}$

25. $\sqrt{\frac{25}{81}}$ **26.** $\sqrt{\frac{49}{100}}$ **27.** $\sqrt[3]{-\frac{8}{125}}$ **28.** $\sqrt[3]{-\frac{216}{1\,331}}$

29. $\sqrt{6.25}$ **30.** $\sqrt{10.24}$ **31.** $\sqrt[3]{1.728}$ **32.** $\sqrt[3]{15.625}$

Usa una calculadora para aproximar cada número irracional a la centésima más cercana. Si la expresión no es un número real, indícalo.

33. a) $\sqrt{3}$ **b)** $-\sqrt{7}$ **c)** $\sqrt{-13}$ **d)** $-\sqrt{-23}$

34. a) $\sqrt{-31}$ **b)** $-\sqrt{41}$ **c)** $-\sqrt{-53}$ **d)** $\sqrt{59}$

35. **a)** $\sqrt[3]{5}$ **b)** $-\sqrt[3]{11}$ **c)** $\sqrt[3]{-17}$ **d)** $-\sqrt[3]{-29}$

36. **a)** $\sqrt[3]{-37}$ **b)** $-\sqrt[3]{43}$ **c)** $-\sqrt[3]{-61}$ **d)** $\sqrt[3]{67}$

37. **a)** $\sqrt{17}$ **b)** $\sqrt{-17}$ **c)** $\sqrt[3]{17}$ **d)** $\sqrt[3]{-17}$

38. **a)** $\sqrt{-101}$ **b)** $-\sqrt{101}$ **c)** $\sqrt[3]{-101}$ **d)** $-\sqrt[3]{-101}$

Usa valor absoluto para evaluar.

39. $\sqrt{7^2}$ **40.** $\sqrt{3^2}$ **41.** $\sqrt{(-3)^2}$ **42.** $\sqrt{(-7)^2}$

43. $\sqrt{119^2}$ **44.** $\sqrt{(-119)^2}$ **45.** $\sqrt{(-2.78)^2}$ **46.** $\sqrt{(2.78)^2}$

47. $\sqrt{\left(-\frac{271}{311}\right)^2}$ **48.** $\sqrt{\left(\frac{217}{311}\right)^2}$ **49.** $\sqrt{\left(\frac{517}{711}\right)^2}$ **50.** $\sqrt{\left(-\frac{517}{711}\right)^2}$

Escribe como valor absoluto.

51. $\sqrt{(x-8)^2}$ **52.** $\sqrt{(a+10)^2}$ **53.** $\sqrt{(5x-11)^2}$ **54.** $\sqrt{(7a-11b)^2}$

55. $\sqrt{(3x^2-1)^2}$ **56.** $\sqrt{(7y^2-3y)^2}$ **57.** $\sqrt{(6a^3-5b^4)^2}$ **58.** $\sqrt{(9y^4-2z^3)^2}$

Usa valor absoluto para simplificar. Quizás necesites factorizar primero.

59. $\sqrt{x^{10}}$ **60.** $\sqrt{y^{22}}$ **61.** $\sqrt{w^{50}}$ **62.** $\sqrt{z^{70}}$

63. $\sqrt{a^2-8a+16}$ **64.** $\sqrt{x^2-12x+36}$ **65.** $\sqrt{9a^2+12ab+4b^2}$ **66.** $\sqrt{4x^2+20xy+25y^2}$

Simplifica. Asume que todas las variables representan valores positivos y que el radicando no es negativo.

67. $\sqrt{25a^2}$ **68.** $\sqrt{121x^6}$ **69.** $\sqrt{16c^6}$ **70.** $\sqrt{169d^{10}}$

71. $\sqrt{x^2+4x+4}$ **72.** $\sqrt{9a^2-6a+1}$ **73.** $\sqrt{4x^2+4xy+y^2}$ **74.** $\sqrt{16b^2-40bc+25c^2}$

Para cada función, determina el valor indicado. Usa una calculadora para aproximar cada número irracional a la centésima más cercana. Si la expresión no es un número real, indícalo.

75. $f(x)=\sqrt{5x-6}, f(2)$ **76.** $f(c)=\sqrt{7c+1}, f(5)$ **77.** $q(x)=\sqrt{76-3x}, q(4)$

78. $q(b)=\sqrt{9b+34}, q(-1)$ **79.** $f(x)=\sqrt{7x-20}, f(1)$ **80.** $g(x)=\sqrt{x^2-25}, g(-4)$

81. $g(x)=\sqrt{64-8x}, g(-3)$ **82.** $f(a)=\sqrt{14a-36}, f(4)$ **83.** $h(t)=\sqrt[3]{3t^2+5t-16}, h(1)$

84. $c(x)=\sqrt[3]{5x^2-8x-31}, c(2)$ **85.** $s(t)=\sqrt[4]{t^3-t^2+t+40}, s(-3)$ **86.** $t(x)=\sqrt[4]{2x^3-3x^2+6x}, t(2)$

Resolución de problemas

87. Determina $f(81)$ si $f(x)=x+\sqrt{x}+7$.

88. Determina $g(25)$ si $g(x)=x^2+\sqrt{x}-13$.

89. Determina $t(18)$ si $t(x)=\frac{x}{2}+\sqrt{2x}-4$.

90. Determina $m(36)$ si $m(x)=\frac{x}{3}+\sqrt{4x}+10$.

91. Determina $k(8)$ si $k(x)=x^2+\sqrt{\frac{x}{2}}-21$.

92. Determina $r(45)$ si $r(x)=\frac{x}{9}+\sqrt{\frac{x}{5}}+13$.

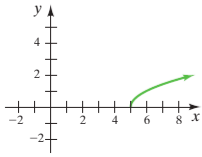
93. Selecciona un valor de x, para el cual $\sqrt{(2x+1)^2}\neq 2x+1$.

94. Selecciona un valor de x, para el cual $\sqrt{(5x-3)^2}\neq 5x-3$.

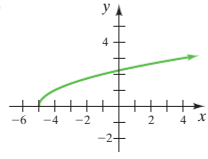
Al considerar los dominios de las funciones en los ejercicios del 95 al 98, relaciona cada función con su gráfica, etiquetadas de la **a)** *a la* **d)**.

95. $f(x)=\sqrt{x}$ **96.** $f(x)=\sqrt{x^2}$ **97.** $f(x)=\sqrt{x-5}$ **98.** $f(x)=\sqrt{x+5}$

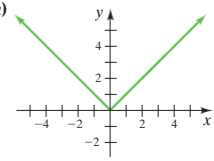
a)



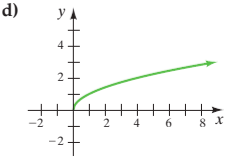
b)



c)



d)



99. Grafica $f(x)=\sqrt{x+1}$. **100.** Grafica $g(x)=-\sqrt{x}$. **101.** Grafica $g(x)=\sqrt{x}+1$. **102.** Grafica $f(x)=\sqrt{x-2}$.

103. Proporciona una función radical, cuyo dominio sea $\{x \mid x \geq 8\}$.

104. Proporciona una función radical, cuyo dominio sea $\{x \mid x \leq 5\}$.

105. Velocidad de un objeto La velocidad, V, de un objeto, en pies por segundo, después de que cae una distancia, h, en pies, puede determinarse mediante la fórmula $V = \sqrt{64.4h}$. Un martinete es una gran masa que se usa como martillo para clavar pilotes en tierra blanda, para sostener un edificio u otra estructura.



¿Con qué velocidad el martillo golpeará el pilote, si cae desde

a) 20 pies sobre la parte superior del pilote?

b) 40 pies sobre la parte superior del pilote?

106. Acción de ola Scripps Institution of Oceanography en La Jolla, California, desarrolló la fórmula para relacionar la rapidez del viento, u, en nudos, con la altura, H, en pies, de las olas que produce el viento en ciertas áreas del océano. Esta fórmula es:

$$u = \sqrt{\frac{H}{0.026}}$$



Si las olas producidas por una tormenta tienen una altura de 15 pies, ¿cuál es la rapidez del viento que produce las olas?

Ejercicios conceptuales y de redacción

107. Explica por qué $\sqrt{-81}$ no es un número real.

108. ¿Una expresión radical con un índice impar y un número real como el radicando, siempre será un número real? Explica tu respuesta.

109. ¿Una expresión radical con un índice par y un número real como el radicando, siempre será un número real? Explica tu respuesta.

110. a) ¿A qué es igual $\sqrt{a^2}$?

b) ¿A qué es igual $\sqrt{a^2}$ si se sabe que $a \geq 0$?

111. a) ¿A qué es igual $\sqrt{a^2}$ para $a = 1.3$.

b) ¿A qué es igual $\sqrt{a^2}$ para $a = -1.3$.

112. a) ¿A qué es igual $\sqrt{-x}$ para $x = -81$.

b) ¿A qué es igual $-\sqrt{-x}$ para $x = -81$.

c) ¿A qué es igual $-\sqrt{x}$ para $x = -81$.

113. ¿Para qué valores de x, $\sqrt{(x-1)^2} = x - 1$? Explica cómo determinaste tu respuesta.

114. ¿Para qué valores de x, $\sqrt{(x+3)^2} = x + 3$? Explica cómo determinaste tu respuesta.

115. ¿Para qué valores de x, $\sqrt{(2x-6)^2} = 2x - 6$? Explica cómo determinaste tu respuesta.

116. ¿Para qué valores de x, $\sqrt{(3x-8)^2} = 3x - 8$? Explica cómo determinaste tu respuesta.

117. a) ¿Para qué valores de a es $\sqrt{a^2} = |a|$?

b) ¿Para qué valores de a es $\sqrt{a^2} = a$?

c) ¿Para qué valores de a es $\sqrt[3]{a^3} = a$?

118. ¿Bajo qué circunstancias, la expresión $\sqrt[n]{x}$ no es un número real?

119. Explica por qué la expresión $\sqrt[n]{x^n}$ es un número real para cualquier número real x.

120. ¿Bajo qué circunstancias la expresión $\sqrt[n]{x^m}$ no es un número real?

121. Determina el dominio de $\dfrac{\sqrt{x+5}}{\sqrt[3]{x+5}}$. Explica cómo determinaste tu respuesta.

122. Determina el dominio de $\dfrac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[6]{x+1}}$. Explica cómo determinaste tu respuesta.

123. Si $f(x) = -\sqrt{x}$, ¿podría $f(x)$ ser

a) mayor que 0,

b) igual que 0,

c) menor que 0?

Explica tus respuestas.

124. Si $f(x) = \sqrt{x+5}$, ¿podría $f(x)$ ser

a) menor que 0,

b) igual que 0,

c) mayor que 0?

Explica tus respuestas.

Actividad grupal

En esta actividad determinarás las condiciones, bajo las cuales, ciertas propiedades de los radicales son verdaderas. Estas propiedades se estudiarán más adelante en este capítulo. Discute y responde estos ejercicios en equipo.

125. La propiedad $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, llamada *propiedad de multiplicación para radicales*, es verdadera para ciertos números reales a y b. Al sustituir valores para a y b, determina bajo qué condiciones esta propiedad es verdadera.

126. La propiedad $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, llamada *propiedad de división para radicales*, es verdadera para ciertos números reales a y b. Al sustituir valores para a y b, determina bajo qué condiciones esta propiedad es verdadera.

Ejercicios de repaso acumulativo

Factoriza.

[5.4] **127.** $9ax - 3bx + 12ay - 4by$

[5.5] **128.** $3x^3 - 18x^2 + 24x$

129. $8x^4 + 10x^2 - 3$

[5.6] **130.** $x^3 - \dfrac{8}{27}y^3$

7.2 Exponentes racionales

1. **Cambio de una expresión radical a una expresión exponencial**
2. **Simplificación de expresiones radicales**
3. **Aplicación de las reglas de exponentes a exponentes racionales y negativos**

1 Cambio de una expresión radical a una expresión exponencial

Hasta el momento no se han discutido las expresiones exponenciales con exponentes racionales, tales como $5^{1/3}$, $x^{3/4}$ y $-27^{-4/3}$. En esta sección se estudia la relación entre tales expresiones y las expresiones radicales.

Considera $x = 5^{1/3}$. Ahora eleva al cubo ambos lados de esta ecuación y simplifica usando las reglas de los exponentes.

$$x = 5^{1/3}$$
$$x^3 = (5^{1/3})^3 = 5^{(1/3)\cdot 3} = 5^1 = 5$$

En consecuencia, $5^{1/3}$ es un número cuyo cubo es 5. Recuerda que $\sqrt[3]{5}$ también es un número cuyo cubo es 5. Por tanto, se puede concluir que

$$5^{1/3} = \sqrt[3]{5}$$

La siguiente regla muestra que una expresión radical puede reescribirse como una expresión con un exponente racional.

Forma exponencial de $\sqrt[n]{a}$

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

Cuando a es no negativo, n puede ser cualquier índice.
Cuando a es negativo, n debe ser impar.

Para el resto de este capítulo, a menos que se indique de otro modo, asume que todas las variables en los radicandos representan números reales no negativos y que el radicando es no negativo. Esta suposición te permitirá escribir muchas respuestas sin signos de valor absoluto.

EJEMPLO 1 Escribe cada expresión en forma exponencial con exponentes racionales.

a) $\sqrt{5}$ **b)** $\sqrt[3]{7}$ **c)** $\sqrt[4]{11xy^3}$ **d)** $11\sqrt[4]{xy^3}$ **e)** $\sqrt[5]{\dfrac{7x}{11y}}$

Solución

a) $\sqrt{5} = \sqrt[2]{5} = 5^{1/2}$ **b)** $\sqrt[3]{7} = 7^{1/3}$ **c)** $\sqrt[4]{11xy^3} = (11xy^3)^{1/4}$

d) En la expresión $11\sqrt[4]{xy^3}$, observa que el 11 no es parte del radicando en la expresión radical original. Por tanto, el 11 no estará adentro de los paréntesis en la expresión exponencial.

$$11\sqrt[4]{xy^3} = 11(xy^3)^{1/4}$$

e) $\sqrt[5]{\dfrac{7x}{11y}} = \left(\dfrac{7x}{11y}\right)^{1/5}$

Ahora resuelve el ejercicio 19

Las expresiones exponenciales también se pueden convertir a expresiones radicales.

EJEMPLO 2 Escribe cada expresión en forma radical (sin exponentes racionales).

a) $9^{1/2}$ **b)** $(-8)^{1/3}$ **c)** $y^{1/4}$ **d)** $(10x^2y)^{1/7}$ **e)** $5rs^{1/2}$

Solución

a) $9^{1/2} = \sqrt{9} = 3$ **b)** $(-8)^{1/3} = \sqrt[3]{-8} = -2$ **c)** $y^{1/4} = \sqrt[4]{y}$

d) $(10x^2y)^{1/7} = \sqrt[7]{10x^2y}$ **e)** $5rs^{1/2} = 5r\sqrt{s}$

Ahora resuelve el ejercicio 31

SUGERENCIA ÚTIL

¿Cómo difieren las expresiones $-25^{1/2}$ y $(-25)^{1/2}$? Recuerda que $-x^m = -1 \cdot x^m$.

$$\text{En consecuencia, } -25^{1/2} = -1 \cdot 25^{1/2} = -1 \cdot \sqrt{25} = -1 \cdot 5 = -5.$$

Los paréntesis en la expresión $(-25)^{1/2}$ indican que el signo negativo se incluye en el radicando.

$$\text{En consecuencia, } (-25)^{1/2} = \sqrt{-25}, \text{ el cual no es un número real.}$$

2 Simplificación de expresiones radicales

La regla anterior se puede extender, de modo que los radicales de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ puedan escribirse como expresiones exponenciales. Considera $a^{2/3}$. Es posible escribir $a^{2/3}$ como $(a^{1/3})^2$ o $(a^2)^{1/3}$. Esto sugiere $a^{2/3} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^2 = \sqrt[3]{a^2}$.

Forma exponencial de $\sqrt[n]{a^m}$

Para cualquier número no negativo a, y enteros m y n,

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{m/n}$$

(Potencia; Índice)

Esta regla muestra la relación entre expresiones radicales y expresiones exponenciales con exponentes racionales.

Cuando cambias una expresión radical a una expresión exponencial:

La potencia del radicando se convierte en el numerador del exponente racional.

$$\sqrt[3]{x^4} = x^{4/3}$$

El índice del radical se convierte en el denominador del exponente racional.

Ejemplos

$$\sqrt{y^3} = y^{3/2} \qquad \sqrt[3]{z^2} = z^{2/3} \qquad \sqrt[5]{2^8} = 2^{8/5}$$
$$(\sqrt{p})^3 = p^{3/2} \qquad (\sqrt[4]{x})^3 = x^{3/4} \qquad (\sqrt[4]{7})^3 = 7^{3/4}$$

Por esta regla, para valores no negativos de la variable se puede escribir que

$$\sqrt{x^5} = (\sqrt{x})^5 \qquad (\sqrt[4]{p})^3 = \sqrt[4]{p^3}$$

EJEMPLO 3 Escribe cada expresión en forma exponencial con exponentes racionales y luego simplifica.

a) $\sqrt{x^6}$ **b)** $\sqrt[3]{y^{21}}$ **c)** $(\sqrt[4]{w})^{20}$ **d)** $(\sqrt[5]{z})^{35}$

Solución

a) $\sqrt{x^6} = \sqrt[2]{x^6} = x^{6/2} = x^3$ **b)** $\sqrt[3]{y^{21}} = y^{21/3} = y^7$

c) $(\sqrt[4]{w})^{20} = w^{20/4} = w^5$ **d)** $(\sqrt[5]{z})^{35} = z^{35/5} = z^7$

Ahora resuelve el ejercicio 43

Cuando cambias una expresión exponencial con un exponente racional a una expresión radical

El numerador del exponente se convierte en la potencia del radicando.

$$x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2}$$

El denominador del exponente se convierte en el índice del radical.

Ejemplos

$$x^{1/2} = \sqrt{x} \qquad 5^{1/3} = \sqrt[3]{5}$$
$$7^{2/3} = \sqrt[3]{7^2} \text{ o } (\sqrt[3]{7})^2 \qquad y^{3/10} = \sqrt[10]{y^3} \text{ o } (\sqrt[10]{y})^3$$
$$x^{9/5} = \sqrt[5]{x^9} \text{ o } (\sqrt[5]{x})^9 \qquad z^{10/3} = \sqrt[3]{z^{10}} \text{ o } (\sqrt[3]{z})^{10}$$

Observa que, puedes elegir, por ejemplo, escribir $6^{2/3}$ ya sea como $\sqrt[3]{6^2}$ o como $(\sqrt[3]{6})^2$.

EJEMPLO 4 Escribe cada expresión en forma radical (sin exponentes racionales).

a) $x^{2/5}$ **b)** $(3ab)^{5/4}$

Solución

a) $x^{2/5} = \sqrt[5]{x^2} \text{ o } (\sqrt[5]{x})^2$ **b)** $(3ab)^{5/4} = \sqrt[4]{(3ab)^5} \text{ o } (\sqrt[4]{3ab})^5$

Ahora resuelve el ejercicio 35

EJEMPLO 5 Simplifica.

a) $4^{3/2}$ **b)** $\sqrt[6]{(49)^3}$ **c)** $\sqrt[4]{(xy)^{20}}$ **d)** $(\sqrt[15]{z})^5$

Solución

a) En ocasiones, una expresión con un exponente racional puede simplificarse más fácilmente al escribir la expresión como un radical, como se ilustra a continuación.

$$\begin{aligned} 4^{3/2} &= (\sqrt{4})^3 && \text{Escribe como radical.} \\ &= (2)^3 \\ &= 8 \end{aligned}$$

b) En ocasiones, una expresión radical se puede simplificar más fácilmente al escribir la expresión con exponentes racionales, como se ilustra en los incisos del **b)** al **d)**.

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{(49)^3} &= 49^{3/6} && \text{Escribe con un exponente racional.} \\ &= 49^{1/2} && \text{Reduce el exponente.} \\ &= \sqrt{49} && \text{Escribe como radical.} \\ &= 7 && \text{Simplifica.} \end{aligned}$$

c) $\sqrt[4]{(xy)^{20}} = (xy)^{20/4} = (xy)^5$

d) $\left(\sqrt[15]{z}\right)^5 = z^{5/15} = z^{1/3}$ o $\sqrt[3]{z}$

Ahora resuelve el ejercicio 51

Ahora se considerará $\sqrt[5]{x^5}$. Escrito en la forma exponencial esto es $x^{5/5} = x^1 = x$. Esto conduce a la siguiente regla.

Forma exponencial de $\sqrt[n]{a^n}$

Para cualquier número real no negativo a:

$$\sqrt[n]{a^n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a^{n/n} = a$$

Si n es un índice par y a es un número real negativo, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ y no a. Por ejemplo, $\sqrt[6]{(-5)^6} = |-5| = 5$. *Dado que se supone, a menos que se indique de otro modo, que las variables en los radicandos representan números reales no negativos,* puedes escribir $\sqrt[6]{x^6} = x$, y no $|x|$. Esta suposición también permite escribir $\sqrt{x^2} = x$ y $\left(\sqrt[4]{z}\right)^4 = z$.

Ejemplos

$$\sqrt{3^2} = 3 \qquad \sqrt[4]{y^4} = y$$
$$\sqrt[6]{(xy)^6} = xy \qquad \left(\sqrt[5]{z}\right)^5 = z$$

3 Aplicación de las reglas de los exponentes a exponentes racionales y negativos

En la sección 1.5, se presentaron y discutieron las reglas de los exponentes, donde solamente se usaron exponentes que eran números enteros no negativos. Las reglas todavía se aplican cuando los exponentes son números racionales. Ahora se revisarán estas reglas.

Reglas de exponentes

Para todo número real a y b, y todo número racional m y n:

Regla del producto	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
Regla del cociente	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$
Regla del exponente negativo	$a^{-m} = \frac{1}{a^m}, \quad a \neq 0$
Regla del exponente cero	$a^0 = 1, \quad a \neq 0$
Elevar una potencia a otra potencia	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
Elevar un producto a una potencia	$(ab)^m = a^m b^m$
Elevar un cociente a una potencia	$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \quad b \neq 0$

Con estas reglas, ahora se trabajarán algunos problemas, en los cuales, los exponentes son números racionales.

EJEMPLO 6 Evalúa **a)** $8^{-2/3}$ **b)** $(-27)^{-5/3}$ **c)** $(-32)^{-6/5}$

Solución

a) Comienza por usar la regla del exponente negativo.

$$8^{-2/3} = \frac{1}{8^{2/3}} \qquad \text{Regla del exponente negativo.}$$
$$= \frac{1}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^2} \qquad \text{Escribe el denominador como radical.}$$
$$= \frac{1}{2^2} \qquad \text{Simplifica el denominador.}$$
$$= \frac{1}{4}$$

b) $(-27)^{-5/3} = \dfrac{1}{(-27)^{5/3}} = \dfrac{1}{(\sqrt[3]{-27})^5} = \dfrac{1}{(-3)^5} = -\dfrac{1}{243}$

c) $(-32)^{-6/5} = \dfrac{1}{(-32)^{6/5}} = \dfrac{1}{(\sqrt[5]{-32})^6} = \dfrac{1}{(-2)^6} = \dfrac{1}{64}$

Ahora resuelve el ejercicio 81

Observa que, el ejemplo 6 **a)** podría haberse evaluado del siguiente modo:

$$8^{-2/3} = \frac{1}{8^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}$$

Sin embargo, por lo general, es más sencillo evaluar la raíz antes de aplicar la potencia.

Considera la expresión $(-16)^{3/4}$. Esta puede reescribirse como $(\sqrt[4]{-16})^3$. Dado que $(\sqrt[4]{-16})^3$ no es un número real, la expresión $(-16)^{3/4}$ no es un número real.

En el capítulo 1, se indicó que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

Este hecho se utiliza en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 7 Evalúa.

a) $\left(\dfrac{9}{25}\right)^{-1/2}$ **b)** $\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-1/3}$

Solución

a) $\left(\dfrac{9}{25}\right)^{-1/2} = \left(\dfrac{25}{9}\right)^{1/2} = \sqrt{\dfrac{25}{9}} = \dfrac{5}{3}$ **b)** $\left(\dfrac{27}{8}\right)^{-1/3} = \left(\dfrac{8}{27}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{\dfrac{8}{27}} = \dfrac{2}{3}$

Ahora resuelve el ejercicio 83

EJEMPLO 8 Simplifica cada expresión y escribe la respuesta en forma exponencial sin exponentes negativos.

a) $a^{1/2} \cdot a^{-2/3}$ **b)** $(6x^2y^{-4})^{-1/2}$ **c)** $3.2x^{1/3}(2.4x^{1/2} + x^{-1/4})$ **d)** $\left(\dfrac{9x^{-4}z^{2/5}}{z^{-3/5}}\right)^{1/8}$

Solución

a) $a^{1/2} \cdot a^{-2/3} = a^{(1/2)-(2/3)}$ Regla del producto.

$= a^{-1/6}$ Determina el MCD y resta los exponentes.

$= \dfrac{1}{a^{1/6}}$ Regla del exponente negativo.

b) $(6x^2y^{-4})^{-1/2} = 6^{-1/2}x^{2(-1/2)}y^{-4(-1/2)}$ Eleva el producto a una potencia.

$= 6^{-1/2}x^{-1}y^2$ Multiplica los exponentes.

$= \dfrac{y^2}{6^{1/2}x}$ Regla del exponente negativo

c) Comienza usando la propiedad distributiva.

$3.2x^{1/3}(2.4x^{1/2} + x^{-1/4}) = (3.2x^{1/3})(2.4x^{1/2}) + (3.2x^{1/3})(x^{-1/4})$ Propiedad distributiva.

$= (3.2)(2.4)(x^{(1/3)+(1/2)}) + 3.2x^{(1/3)-(1/4)}$ Regla del producto.

$= 7.68x^{5/6} + 3.2x^{1/12}$

d) $\left(\dfrac{9x^{-4}z^{2/5}}{z^{-3/5}}\right)^{1/8} = (9x^{-4}z^{(2/5)-(-3/5)})^{1/8}$ Regla del cociente.

$= (9x^{-4}z)^{1/8}$ Resta los exponentes.

$= 9^{1/8}x^{-4(1/8)}z^{1/8}$ Eleva el producto a una potencia.

$= 9^{1/8}x^{-4/8}z^{1/8}$ Multiplica los exponentes

Comprende el Álgebra

Cuando usas las reglas de los exponentes, existen muchas formas diferentes de simplificar expresiones exponenciales. Mientras uses las reglas de manera adecuada, deberás llegar a la expresión simplificada correcta.

$$= 9^{1/8} x^{-1/2} z^{1/8}$$ Simplifica los exponentes.

$$= \frac{9^{1/8} z^{1/8}}{x^{1/2}}$$ Regla del exponente negativo.

Ahora resuelve el ejercicio 105

EJEMPLO 9 Simplifica.

a) $\sqrt[15]{(7y)^5}$ **b)** $\left(\sqrt[4]{a^2b^3c}\right)^{20}$ **d)** $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}$

Solución

a) $\sqrt[15]{(7y)^5} = (7y)^{5/15}$ Escribe con un exponente racional.

$= (7y)^{1/3}$ Simplifica el exponente.

$= \sqrt[3]{7y}$ Escribe como radical.

b) $\left(\sqrt[4]{a^2b^3c}\right)^{20} = (a^2b^3c)^{20/4}$ Escribe con un exponente racional.

$= (a^2b^3c)^5$

$= a^{10}b^{15}c^5$ Eleva el producto a una potencia.

c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[4]{x^{1/3}}$ Escribe $\sqrt[3]{x}$ como $x^{1/3}$.

$= (x^{1/3})^{1/4}$ Escribe con un exponente racional.

$= x^{1/12}$ Eleva el producto a una potencia.

$= \sqrt[12]{x}$ Escribe como radical.

Ahora resuelve el ejercicio 53

USA TU CALCULADORA

Cómo determinar raíces o expresiones con exponentes racionales en una calculadora científica o graficadora

Existen varias formas de evaluar una expresión como $845^{-3/5}$ en una calculadora.*

Calculador científica

Para evaluar $845^{-3/5}$, oprime:

Respuesta mostrada

845 y^x (3 $+/-$ ÷ 5) = 0.017534201

Calculadora graficadora

Para evaluar $845^{-3/5}$, oprime las siguientes teclas:

Respuesta mostrada

845 ∧ ((−) 3 ÷ 5) ENTER .0175342008

*Las teclas usadas varían de calculadora a calculadora. Para calculadoras con modo REAL y COMPLEX, los resultados que se muestran suponen que la calculadora está en modo REAL. Lee el manual de tu calculadora para aprender más acerca de cómo evaluar expresiones exponenciales.

EJEMPLO 10 Usa tu calculadora para aproximar cada expresión. Redondea la respuesta a la centésima más cercana.

a) $\sqrt[4]{17}$ **b)** $15^{2/3}$

Solución

a) Primero, reescribe la expresión radical como una expresión exponencial.

$$\sqrt[4]{17} = 17^{1/4}$$

A continuación, aproxima la expresión exponencial usando el procedimiento indicado en el recuadro anterior *Usa tu calculadora*.

Calculadora científica

17 y^x (1 ÷ 4) = 2.030543185

Calculadora graficadora

17 [∧] [(] 1 [÷] 4 [)] [ENTER] 2.030543185

Al redondear a la centésima más cercana, se tiene $\sqrt[4]{17} \approx 2.03$.

b) Para aproximar $15^{2/3}$ se usarán las siguientes teclas en una calculadora científica o graficadora.

Calculadora científica

15 [y^x] [(] 2 [÷] 3 [)] [=] 6.082201996

Calculadora graficadora

15 [∧] [(] 2 [÷] 3 [)] [ENTER] 6.082201996

Al redondear a la centésima más cercana, se tiene $15^{2/3} \approx 6.08$.

Ahora resuelve el ejercicio 117

7.2 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

multiplica denominador numerador suma índice potencia divide función

1. Cuando cambias una expresión radical, $\sqrt[n]{x^m}$, a una expresión exponencial, el exponente del radicando, m, se convierte en el _____ del exponente racional.
2. Cuando cambias una expresión radical, $\sqrt[n]{x^m}$, a una expresión exponencial, el índice del radical, n, se convierte en el _____ del exponente racional.
3. Cuando cambias una expresión exponencial con un exponente racional, $x^{m/n}$, a una expresión radical, el denominador, n, se convierte en el _____ del radical.
4. Cuando cambias una expresión exponencial con un exponente racional, $x^{m/n}$, a una expresión radical, el numerador, m, se convierte en la _____ del radicando.
5. Para simplificar la expresión $x^{2/3} \cdot x^{1/4}$, _____ los exponentes.
6. Para simplificar la expresión $(x^{2/3})^{1/4}$, _____ los exponentes.

Practica tus habilidades

Escribe cada expresión en forma exponencial. Asume que todas las variables representan números reales positivos.

7. $\sqrt{p}$
8. $\sqrt[3]{q}$
9. $\sqrt[3]{5}$
10. $\sqrt{5}$
11. $\sqrt[3]{r^2}$
12. $\sqrt[3]{b^2}$
13. $\sqrt[5]{b^3}$
14. $\sqrt[5]{a^4}$
15. $(\sqrt[3]{x})^2$
16. $(\sqrt[4]{y})^3$
17. $\sqrt[4]{5x^3}$
18. $5\sqrt[4]{x^3}$
19. $11\sqrt[3]{x^2}$
20. $\sqrt[3]{11x^2}$
21. $\sqrt[5]{2x-3}$
22. $\sqrt[6]{3x+5}$
23. $(\sqrt[3]{a+3})^2$
24. $(\sqrt[4]{b-7})^3$
25. $\sqrt[7]{\dfrac{3x^5}{2y^3}}$
26. $\sqrt[8]{\dfrac{2a^3}{7b^5}}$

Escribe cada expresión en forma radical. Asume que todas las variables representan números reales positivos.

27. $x^{1/2}$
28. $y^{1/3}$
29. $3^{1/4}$
30. $7^{1/5}$
31. $a^{2/3}$
32. $b^{3/4}$
33. $(17x)^{-1/2}$
34. $(23y)^{-1/3}$
35. $7a^{3/4}$
36. $5b^{7/8}$
37. $(2x-3y)^{2/3}$
38. $(5p+2q)^{3/4}$
39. $(7m^2-3n)^{-3/4}$
40. $(3s+4t^2)^{-2/3}$

Simplifica cada expresión radical al cambiar la expresión a forma exponencial. Escribe la respuesta en forma radical cuando sea adecuado. Asume que todas las variables representan números reales positivos.

41. $\sqrt{x^2}$ **42.** $\sqrt[3]{y^3}$ **43.** $\sqrt[3]{x^9}$ **44.** $\sqrt[4]{c^8}$

45. $\sqrt[6]{a^3}$ **46.** $\sqrt[8]{b^4}$ **47.** $\sqrt[8]{f^6}$ **48.** $\sqrt[6]{k^4}$

49. $\left(\sqrt{x}\right)^2$ **50.** $\left(\sqrt[3]{y}\right)^3$ **51.** $\left(\sqrt[3]{xy^2}\right)^{15}$ **52.** $\left(\sqrt[4]{a^4bc^3}\right)^{40}$

53. $\left(\sqrt[8]{xyz}\right)^4$ **54.** $\left(\sqrt[9]{a^2bc}\right)^3$ **55.** $\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^6$ **56.** $\left(\sqrt[4]{\frac{x}{y}}\right)^{12}$

57. $\sqrt{\sqrt{x}}$ **58.** $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$ **59.** $\sqrt{\sqrt[4]{y}}$ **60.** $\sqrt[3]{\sqrt[4]{b}}$

61. $\left(\sqrt{\frac{xy}{3z}}\right)^6$ **62.** $\left(\sqrt[3]{\frac{5a}{bc^2}}\right)^6$ **63.** $\sqrt{a^2b^4c^6}$ **64.** $\sqrt[3]{p^3q^6r^9}$

Evalúa, si es posible. Si la expresión no es un número real, indícalo.

65. $9^{1/2}$ **66.** $64^{1/3}$ **67.** $64^{2/3}$ **68.** $27^{2/3}$

69. $(-49)^{1/2}$ **70.** $(-64)^{1/4}$ **71.** $\left(\frac{25}{9}\right)^{1/2}$ **72.** $\left(\frac{100}{49}\right)^{1/2}$

73. $\left(\frac{1}{8}\right)^{1/3}$ **74.** $\left(\frac{1}{32}\right)^{1/5}$ **75.** $-81^{1/2}$ **76.** $-81^{1/4}$

77. $(-81)^{1/2}$ **78.** $(-81)^{1/4}$ **79.** $-64^{1/3}$ **80.** $(-64)^{1/3}$

81. $16^{-3/2}$ **82.** $64^{-2/3}$ **83.** $\left(\frac{64}{27}\right)^{-1/3}$ **84.** $-\left(\frac{25}{49}\right)^{-1/2}$

85. $(-81)^{3/4}$ **86.** $(-100)^{3/2}$ **87.** $121^{1/2} + 169^{1/2}$

88. $49^{1/2} + 36^{1/2}$ **89.** $343^{-1/3} + 16^{-1/2}$ **90.** $16^{-1/2} - 256^{-3/4}$

Simplifica. Escribe la respuesta en forma exponencial sin exponentes negativos. Asume que todas las variables representan números reales positivos.

91. $x^4 \cdot x^{1/2}$ **92.** $x^6 \cdot x^{1/2}$ **93.** $\frac{x^{1/2}}{x^{1/3}}$ **94.** $\frac{y^{7/8}}{y^{3/4}}$

95. $(x^{2/3})^{-1/5}$ **96.** $(x^{-4/5})^{1/3}$ **97.** $(9^{-1/3})^0$ **98.** $(5^0)^{-2/3}$

99. $\frac{5y^{-1/3}}{60y^{-2}}$ **100.** $\frac{14z^{-3/4}}{35z^{-3}}$ **101.** $(4x^{5/3})(3x^{-7/2})$ **102.** $(9x^{3/5})(2x^{-5/2})$

103. $\left(\frac{3}{24x}\right)^{1/3}$ **104.** $\left(\frac{54}{2x^4}\right)^{1/3}$ **105.** $\left(\frac{22x^{3/7}}{2x^{1/2}}\right)^2$ **106.** $\left(\frac{27z^{1/4}y^3}{3z^{1/4}}\right)^{1/2}$

107. $\left(\frac{a^4}{4a^{-2/5}}\right)^{-3}$ **108.** $\left(\frac{b^3}{5b^{-3/5}}\right)^{-2}$ **109.** $\left(\frac{x^{3/4}y^{-3}}{x^{1/2}\,y^2}\right)^4$ **110.** $\left(\frac{250a^{-3/4}b^5}{2a^{-2}b^2}\right)^{2/3}$

Multiplica. Asume que todas las variables representan números reales positivos.

111. $4z^{-1/2}(2z^4 - z^{1/2})$ **112.** $-9z^{3/2}(z^{3/2} - z^{-3/2})$ **113.** $5x^{-1}(x^{-4} + 4x^{-1/2})$

114. $-3a^{-4/9}(5a^{1/9} - a^2)$ **115.** $-6x^{5/3}(-2x^{1/2} + 3x^{1/3})$ **116.** $\frac{1}{2}x^{-2}(10x^{4/3} - 38x^{-1/2})$

Usa una calculadora para aproximar cada expresión. Redondea la respuesta a la centésima más cercana.

117. $\sqrt[4]{31}$ **118.** $\sqrt[5]{65}$ **119.** $\sqrt[5]{402.83}$ **120.** $\sqrt[4]{368.21}$

121. $27.5^{3/4}$ **122.** $38.2^{3/2}$ **123.** $1\,000^{-1/2}$ **124.** $13^{-5/4}$

Resolución de problemas

125. ¿Bajo qué condiciones $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$?

126. Al seleccionar valores para a y b, muestra que $(a^2 + b^2)^{1/2}$, *no es igual a* $a + b$.

127. Al seleccionar valores para a y b, muestra que $(a^{1/2}+b^{1/2})^2$, *no es igual a* $a+b$.

128. Al seleccionar valores para a y b, muestra que $(a^3+b^3)^{1/3}$, no es igual a $a+b$.

129. Al seleccionar valores para a y b, muestra que $(a^{1/3}+b^{1/3})^3$, no es igual a $a+b$.

130. Determina si $\sqrt[3]{\sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt[3]{x}}, x \geq 0$.

En los ejercicios del 131 al 136, usa una calculadora donde sea adecuado.

131. Crecimiento de bacterias La función $B(t) = 2^{10} \cdot 2^t$ aproxima el número de bacterias en un cierto cultivo después de t horas.

a) El número inicial de bacterias, se determina cuando $t = 0$. ¿Cuál es el número inicial de bacterias?

b) ¿Cuántas bacterias hay después de $\frac{1}{2}$ hora?

132. Datación con carbono Los científicos usan la datación con carbono para determinar la edad de fósiles, huesos y otros objetos. La fórmula que se usa en la datación



con carbono es $P = P_0 2^{-t/5600}$, donde P_0 representa la cantidad original de carbono 14 (C_{14}) presente y P representa la cantidad de C_{14} presente después de t años. Si 10 miligramos (mg) de C_{14} están presentes en un hueso animal recientemente excavado, ¿cuántos miligramos estarán presentes en 5000 años?

133. Tasa metabólica en reposo La tasa metabólica en reposo (TMR) de una persona, es el número de calorías que una persona quema en un día de reposo. La TMR de una persona se puede estimar usando la función $R(x) = 70x^{3/4}$, donde $R(x)$ se mide en calorías por día y x es la masa de la persona en kilogramos. Si Ken tiene una masa de 102 kg, estima su TMR a la caloría más cercana.

Fuente: www.bodybuilding.com

134. Tasa metabólica en reposo Si Martín tiene una masa de 82 kg, estima su tasa metabólica en reposo (consulta el ejercicio 133) a la caloría más cercana.

135. Determina el dominio de $f(x) = (x-7)^{1/2}(x+3)^{-1/2}$.

136. Determina el dominio de $f(x) = (x+4)^{1/2}(x-3)^{-1/2}$.

Determina el índice que se debe colocar en el área sombreada, para formar un enunciado verdadero.

137. $\sqrt[\square]{\sqrt[5]{\sqrt[3]{z}}} = z^{1/120}$

138. $\sqrt[\square]{\sqrt{\sqrt{x}}} = x^{1/24}$

Ejercicios conceptuales y de redacción

139. a) ¿Bajo qué condiciones $\sqrt[n]{a}$ es un número real?

b) Cuando $\sqrt[n]{a}$ es un número real, ¿cómo se puede expresar con exponentes racionales?

140. a) ¿Bajo qué condiciones $(\sqrt[n]{a})^m$ es un número real?

b) ¿Bajo qué condiciones $\sqrt[n]{a^m}$ es un número real?

c) Cuando $\sqrt[n]{a^m}$ es un número real, ¿cómo se puede expresar con exponentes racionales?

141. a) ¿Bajo qué condiciones $\sqrt[n]{a^n}$ es un número real?

b) Cuando n es par y $a \geq 0$, ¿a qué es igual $\sqrt[n]{a^n}$?

c) Cuando n es impar, ¿a qué es igual $\sqrt[n]{a^n}$?

d) Cuando n es par y a puede ser cualquier número real, ¿a qué es igual $\sqrt[n]{a^n}$?

142. a) Explica la diferencia entre $-16^{1/2}$ y $(-16)^{1/2}$.

b) Evalúa cada expresión en el inciso **a)**, si es posible.

143. a) ¿$(xy)^{1/2} = xy^{1/2}$? Explica.

b) ¿$(xy)^{-1/2} = \dfrac{x^{1/2}}{y^{-1/2}}$? Explica.

144. a) ¿$\sqrt[6]{(3y)^3} = (3y)^{6.8}$? Explica.

b) ¿$\sqrt{(ab)^4} = (ab)^2$? Explica.

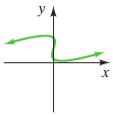
145. Evalúa $(3^{\sqrt{\pi}})^{\sqrt{\pi}}$. Explica cómo determinaste tu respuesta.

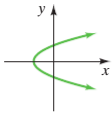
146. a) En tu calculadora, evalúa 3^{π}.

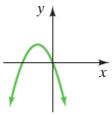
b) Explica por qué el valor del inciso **a)** tiene o no tiene sentido.

Ejercicios de repaso acumulativo

[3.2] **147.** Determina cuáles de las siguientes relaciones también son funciones.

a) 

b) 

c) 

[6.3] **148.** Simplifica $\dfrac{a^{-2} + ab^{-1}}{ab^{-2} - a^{-2}b^{-1}}$.

[6.4] **149.** Resuelve $\dfrac{3x - 2}{x + 4} = \dfrac{2x + 1}{3x - 2}$.

[6.5] **150. Vuelo de un avión** Amy puede volar su avión 500 millas contra el viento, en el mismo tiempo que le toma volar 560 millas con el viento. Si el viento sopla a 25 millas por hora, determina la rapidez del avión en aire quieto.



7.3 Simplificación de radicales

1 **Comprensión de las potencias perfectas**
2 **Simplificación de radicales usando la regla del producto para radicales**
3 **Simplificación de radicales usando la regla del cociente para radicales**

1 Comprensión de las potencias perfectas

En esta sección, se simplificarán expresiones radicales. Se inicia con una discusión de las potencias perfectas.

Potencia perfecta, cuadrado perfecto, cubo perfecto

- Una **potencia perfecta** es un número o expresión que puede escribirse como una expresión elevada a una potencia, la cual es un número entero no negativo mayor que 1.
- Un **cuadrado perfecto** es un número o expresión que puede escribirse como un cuadrado de una expresión. Un cuadrado perfecto es una *segunda* potencia perfecta.
- Un **cubo perfecto** es un número o expresión que puede escribirse como un cubo de una expresión. Un cubo perfecto es una *tercera* potencia perfecta.

A continuación se ilustran ejemplos de cuadrados perfectos.

Cuadrados perfectos	1,	4,	9,	16,	25,	36, . . .
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
Cuadrado de un número	1^2,	2^2,	3^2,	4^2,	5^2,	6^2, . . .

Las variables con exponentes también pueden ser cuadrados perfectos, como se ilustra a continuación.

Cuadrados perfectos	x^2,	x^4,	x^6,	x^8,	x^{10}, . . .
	↓	↓	↓	↓	↓	
Cuadrado de una expresión	$(x)^2$,	$(x^2)^2$,	$(x^3)^2$,	$(x^4)^2$,	$(x^5)^2$, . . .

Observa que, los exponentes en las variables de los cuadrados perfectos, son todos múltiplos de 2.

A continuación, se ilustran ejemplos de cubos perfectos.

Cubos perfectos	1,	8,	27,	64,	125,	216, . . .
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
Cubo de un número	1^3,	2^3,	3^3,	4^3,	5^3,	6^3, . . .

Cubos perfectos	x^3,	x^6,	x^9,	x^{12},	x^{15}, . . .
	↓	↓	↓	↓	↓	
Cubo de una expresión	$(x)^3$,	$(x^2)^3$,	$(x^3)^3$,	$(x^4)^3$,	$(x^5)^3$, . . .

Observa que, los exponentes de las variables de los cubos perfectos, son todos múltiplos de 3.

Cuando simplifiques radicales, busca potencias perfectas en el radicando. Por ejemplo, si vas a simplificar una raíz cuadrada, entonces estás interesado en determinar los cuadrados perfectos. Si vas a simplificar una raíz cúbica, entonces estás interesado en determinar los cubos perfectos. Si vas a simplificar una raíz cuarta, entonces estás interesado en determinar las cuartas potencias perfectas, etcétera.

Comprende el Álgebra

Una variable con un exponente es un(a):

- Cuadrado perfecto, si el exponente es divisible entre 2. Por ejemplo, x^2, x^4, x^6,... son cuadrados perfectos.
- Cubo perfecto si el exponente es divisible entre 3. Por ejemplo, x^3, x^6, x^9,... son cubos perfectos.
- Cuarta potencia perfecta si el exponente es divisible entre 4. Por ejemplo, x^4, x^8, x^{12},... son cuartas potencias perfectas.

Este patrón continúa para potencias perfectas superiores.

SUGERENCIA ÚTIL

Una forma rápida para determinar si un radicando x^m es una potencia perfecta para un índice, es determinar si el exponente m es divisible por el índice del radical. Por ejemplo, considera $\sqrt[5]{x^{20}}$. Dado que el exponente, 20, es divisible entre el índice, 5, x^{20} es una quinta potencia perfecta. Ahora considera $\sqrt[6]{x^{20}}$. Dado que el exponente, 20, no es divisible por el índice, 6, x^{20} no es una sexta potencia perfecta. Sin embargo, x^{18} y x^{24}, son ambos sextas potencias perfectas pues 6 divide, tanto a 18 como a 24.

Observa que, la raíz cuadrada de un cuadrado perfecto, se simplifica como una expresión sin un signo radical; la raíz cúbica de un cubo perfecto, se simplifica como una expresión sin un signo radical, etcétera.

Ejemplos

$$\sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6^{2/2} = 6$$
$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3^{3/3} = 3$$
$$\sqrt{x^6} = x^{6/2} = x^3$$
$$\sqrt[3]{z^{12}} = z^{12/3} = z^4$$
$$\sqrt[5]{n^{35}} = n^{35/5} = n^7$$

Recuerda que, cuando simplifiques radicales que involucren variables, se asume que las variables representan números reales no negativos. Esta suposición te permite simplificar radicales sin usar el valor absoluto. Ahora estás listo para estudiar la regla del producto para radicales.

2 Simplificación de radicales usando la regla del producto para radicales

Para presentar la **regla del producto para radicales,** observa que $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$. Además, $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$. Se ve que $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{4 \cdot 9}$. Este es un ejemplo de la regla del producto para radicales.

Regla del producto para radicales

Para números reales no negativos a y b:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \text{ y } \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

Ejemplos de la regla del producto para radicales

$$\sqrt{20} = \begin{cases} \sqrt{1} \cdot \sqrt{20} \\ \sqrt{2} \cdot \sqrt{10} \\ \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \end{cases}$$

$\sqrt{20}$ puede factorizarse en cualquiera de estas formas.

$$\sqrt[3]{20} = \begin{cases} \sqrt[3]{1} \cdot \sqrt[3]{20} \\ \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{10} \\ \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{5} \end{cases}$$

$\sqrt[3]{20}$ puede factorizarse en cualquiera de estas form

$$\sqrt{x^7} = \begin{cases} \sqrt{x} \cdot \sqrt{x^6} \\ \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x^5} \\ \sqrt{x^3} \cdot \sqrt{x^4} \end{cases}$$

$\sqrt{x^7}$ puede factorizarse en cualquiera de estas formas.

$$\sqrt[3]{x^7} = \begin{cases} \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x^6} \\ \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^5} \\ \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x^4} \end{cases}$$

$\sqrt[3]{x^7}$ puede factorizarse en cualquiera de estas forma

En la siguiente página, se proporciona un procedimiento general que se puede usar para simplificar radicales, usando la regla del producto.

Para simplificar radicales usando la regla del producto

1. Si el radicando contiene un coeficiente distinto de 1, si es posible, escríbelo como el producto de dos números, uno de los cuales es la máxima potencia perfecta del índice.
2. Escribe cada factor variable como el producto de dos factores, donde uno de los cuales es la máxima potencia perfecta de la variable del índice.
3. Usa la regla del producto para escribir la expresión radical como un producto de radicales. Coloca todas las potencias perfectas (números y variables) bajo el mismo radical.
4. Simplifica el radical que contenga las potencias perfectas.

Si vas a simplificar una raíz *cuadrada*, el radicando se escribirá como el producto del máximo *cuadrado perfecto* y otra expresión. Si vas a simplificar una raíz *cúbica*, escribirás el radicando como el producto del máximo *cubo perfecto* y otra expresión, etcétera.

EJEMPLO 1 Simplifica. **a)** $\sqrt{32}$ **b)** $\sqrt{60}$ **c)** $\sqrt[3]{54}$ **d)** $\sqrt[4]{96}$

Solución Los radicandos, en este ejemplo, no contienen variables. Se seguirá el paso 1 del procedimiento.

a) Dado que se evalúa una raíz cuadrada, busca el máximo cuadrado perfecto que divida a 32. El máximo cuadrado perfecto que divide, o que es un factor de, 32, es 16.

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16}\,\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

b) El máximo cuadrado perfecto, que es un factor de 60, es 4.

$$\sqrt{60} = \sqrt{4 \cdot 15} = \sqrt{4}\,\sqrt{15} = 2\sqrt{15}$$

c) El máximo cubo perfecto, que es un factor de 54, es 27.

$$\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27 \cdot 2} = \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$$

d) La máxima cuarta potencia perfecta, que es un factor de 96, es 16.

$$\sqrt[4]{96} = \sqrt[4]{16 \cdot 6} = \sqrt[4]{16}\sqrt[4]{6} = 2\sqrt[4]{6}$$

Ahora resuelve el ejercicio 21

Comprende el Álgebra

Para simplificar $\sqrt{20}$, escríbelo como $\sqrt{4} \cdot \sqrt{5}$, porque 4 es el máximo cuadrado perfecto que divide a 20:

$$\sqrt{20} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

De igual manera, para simplificar $\sqrt[3]{24}$, escríbelo como $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3}$, porque 8 es el máximo cubo perfecto que divide a 24:

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$$

SUGERENCIA ÚTIL

En el ejemplo 1 **a)**, si primero pensaste que 4 era el mayor cuadrado perfecto que divide a 32, podrías proceder de la siguiente manera:

$$\sqrt{32} = \sqrt{4 \cdot 8} = \sqrt{4}\,\sqrt{8} = 2\sqrt{8}$$
$$= 2\sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{4}\,\sqrt{2} = 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

Observa que, el resultado final es el mismo, pero debes realizar más pasos. Las listas de cuadrados y cubos perfectos de la página 472 te ayudarán a determinar el mayor cuadrado perfecto, o cubo perfecto, que sea un factor de un radicando.

Cuando el radicando es una potencia perfecta para el índice, el radical se puede simplificar al escribirlo en forma exponencial, como en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Simplifica. **a)** $\sqrt{x^{16}}$ **b)** $\sqrt[3]{y^{27}}$ **c)** $\sqrt[4]{z^{16}}$

Solución En cada parte, reescribe la expresión radical en forma exponencial y simplifica.

a) $\sqrt{x^{16}} = \sqrt[2]{x^{16}} = x^{16/2} = x^8$ **b)** $\sqrt[3]{y^{27}} = y^{27/3} = y^9$ **c)** $\sqrt[4]{z^{16}} = z^{16/4} = z^4$

Ahora resuelve el ejercicio 33

EJEMPLO 3 Simplifica. **a)** $\sqrt{x^9}$ **b)** $\sqrt[5]{x^{23}}$ **c)** $\sqrt[4]{y^{33}}$

Solución Puesto que los radicandos tienen coeficientes de 1, comienza con el paso 2 del procedimiento.

a) El máximo cuadrado perfecto menor o igual que x^9, es x^8.

$$\sqrt{x^9} = \sqrt{x^8 \cdot x} = \sqrt{x^8} \cdot \sqrt{x} = x^{8/2}\sqrt{x} = x^4\sqrt{x}$$

b) La máxima quinta potencia perfecta menor o igual que x^{23}, es x^{20}.

$$\sqrt[5]{x^{23}} = \sqrt[5]{x^{20} \cdot x^3} = \sqrt[5]{x^{20}}\sqrt[5]{x^3} = x^{20/5}\sqrt[5]{x^3} = x^4\sqrt[5]{x^3}$$

c) La máxima cuarta potencia perfecta menor o igual que y^{33}, es y^{32}.

$$\sqrt[4]{y^{33}} = \sqrt[4]{y^{32} \cdot y} = \sqrt[4]{y^{32}}\sqrt[4]{y} = y^{32/4}\sqrt[4]{y} = y^8\sqrt[4]{y}$$

Ahora resuelve el ejercicio 37

Si observas las respuestas del ejemplo 3, verás que el exponente de la variable en el radicando, siempre es menor que el índice. *Cuando un radical se simplifica, los exponentes de las variables en el radicando son menores que el índice.*

En el ejemplo 3 **b)**, se simplificó $\sqrt[5]{x^{23}}$. Si se divide 23, el exponente en el radicando, entre 5, el índice, se obtiene

$$\begin{array}{r} 4 \longleftarrow \text{Cociente} \\ 5\overline{)23} \\ \underline{20} \\ 3 \longleftarrow \text{Residuo} \end{array}$$

Observa que, $\sqrt[5]{x^{23}}$ se simplifica a $x^4\sqrt[5]{x^3}$ y

$$\text{Cociente} \longrightarrow x^4\sqrt[5]{x^3} \longleftarrow \text{Residuo}$$

Cuando simplificas un radical, si divides el exponente dentro del radical entre el índice, el cociente será el exponente de la variable afuera del signo radical y el residuo será el exponente de la variable dentro del signo radical. Ahora simplifica el ejemplo 3 **c)** usando esta técnica.

EJEMPLO 4 Simplifica. **a)** $\sqrt{x^{12}y^{17}}$ **b)** $\sqrt[4]{x^6y^{23}}$

Solución

a) x^{12} es un cuadrado perfecto. El máximo cuadrado perfecto que es factor de y^{17}, es y^{16}. Escribe y^{17} como $y^{16} \cdot y$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x^{12}y^{17}} &= \sqrt{x^{12} \cdot y^{16} \cdot y} = \sqrt{x^{12}y^{16}}\sqrt{y} \\ &= \sqrt{x^{12}}\sqrt{y^{16}}\sqrt{y} \\ &= x^6y^8\sqrt{y} \end{aligned}$$

b) Comienza por determinar la máxima cuarta potencia perfecta que sea factor de x^6 y y^{23}. Para un índice de 4, la máxima potencia perfecta, que es factor de x^6, es x^4. La máxima potencia perfecta, que es un factor de y^{23}, es y^{20}.

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x^6y^{23}} &= \sqrt[4]{x^4 \cdot x^2 \cdot y^{20} \cdot y^3} \\ &= \sqrt[4]{x^4y^{20} \cdot x^2y^3} \\ &= \sqrt[4]{x^4y^{20}}\sqrt[4]{x^2y^3} \\ &= xy^5\sqrt[4]{x^2y^3} \end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 51

Comprende el Álgebra

Con frecuencia, cuando se simplifica un radical, los pasos se realizan mentalmente. Por ejemplo, en el ejemplo 4 **a)**, no se muestra:

$$\sqrt{x^{12}} = x^{12/2} = x^6$$
$$\sqrt{y^{16}} = y^{16/2} = y^8$$

Con frecuencia, los pasos donde se cambia la expresión radical a forma exponencial, se realizan mentalmente y, dichos pasos, no se ilustran.

SUGERENCIA ÚTIL

En el ejemplo 4 **b)**, se mostró que $\sqrt[4]{x^6y^{23}} = xy^5\sqrt[4]{x^2y^3}$. También se puede simplificar este radical al dividir los exponentes de las variables en el radicando, 6 y 23, por el índice, 4. Observa la posición de los cocientes y los residuos.

6 ÷ 4 produce un cociente de 1 y un residuo de 2

$$\sqrt[4]{x^6y^{23}} = x^1y^5\sqrt[4]{x^2y^3}$$

23 ÷ 4 produce un cociente de 5 y un residuo de 3

EJEMPLO 5 Simplifica. **a)** $\sqrt{80x^5y^{12}z^3}$ **b)** $\sqrt[3]{54x^{17}y^{25}}$

Solución

a) El máximo cuadrado perfecto, que es un factor de 80, es 16. El máximo cuadrado perfecto, que es un factor de x^5, es x^4. La expresión y^{12}, es un cuadrado perfecto. El máximo cuadrado perfecto, que es un factor de z^3, es z^2. Coloca todos los cuadrados perfectos bajo el mismo radical y luego simplifica.

$$\begin{aligned}\sqrt{80x^5y^{12}z^3} &= \sqrt{16 \cdot 5 \cdot x^4 \cdot x \cdot y^{12} \cdot z^2 \cdot z} \\ &= \sqrt{16x^4y^{12}z^2 \cdot 5xz} \\ &= \sqrt{16x^4y^{12}z^2} \cdot \sqrt{5xz} \\ &= 4x^2y^6z\sqrt{5xz}\end{aligned}$$

b) El máximo cubo perfecto, que es un factor de 54, es 27. El máximo cubo perfecto, que es un factor de x^{17}, es x^{15}. El máximo cubo perfecto que es un factor de y^{25}, es y^{24}.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{54x^{17}y^{25}} &= \sqrt[3]{27 \cdot 2 \cdot x^{15} \cdot x^2 \cdot y^{24} \cdot y} \\ &= \sqrt[3]{27x^{15}y^{24} \cdot 2x^2y} \\ &= \sqrt[3]{27x^{15}y^{24}} \cdot \sqrt[3]{2x^2y} \\ &= 3x^5y^8\sqrt[3]{2x^2y}\end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 57

3 Simplificación de radicales usando la regla del cociente para radicales

A veces, en matemáticas se necesita simplificar un cociente de dos radicales. Para hacerlo, se usa la **regla del cociente para radicales**.

Regla del cociente para radicales

Para números reales no negativos a y b:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad \text{y} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad b \neq 0$$

Ejemplos de la regla del cociente para radicales

$$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} \qquad \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{18}{3}}$$

$$\sqrt{\frac{x^4}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^4}}{\sqrt{y^2}} \qquad \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{x^3}{x}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{z^9}{27}} = \frac{\sqrt[3]{z^9}}{\sqrt[3]{27}} \qquad \frac{\sqrt[3]{y^5}}{\sqrt[3]{y^2}} = \sqrt[3]{\frac{y^5}{y^2}}$$

Los ejemplos 6 y 7, ilustran cómo usar la regla del cociente para simplificar expresiones radicales.

EJEMPLO 6 Simplifica. **a)** $\dfrac{\sqrt{63}}{\sqrt{7}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[3]{128xy^4}}{\sqrt[3]{2xy}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt[3]{250x^7y^7}}{\sqrt[3]{2xy^{-2}}}$

Solución En cada parte, usa la regla del cociente para reescribir la expresión radical, como un sólo radical y luego simplifica.

a) $\dfrac{\sqrt{63}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\dfrac{63}{7}} = \sqrt{9} = 3$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{128xy^4}}{\sqrt[3]{2xy}} = \sqrt[3]{\dfrac{128xy^4}{2xy}} = \sqrt[3]{64y^3} = 4y$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{250x^7y^7}}{\sqrt[3]{2xy^{-2}}} = \sqrt[3]{\dfrac{250x^7y^7}{2xy^{-2}}} = \sqrt[3]{125x^6y^9} = 5x^2y^3$

Ahora resuelve el ejercicio 93

En la sección 7.1, cuando se presentaron los radicales, se indicó que $\sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{3}$ ya que $\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$. La regla del cociente puede ser útil al evaluar raíces cuadradas que contengan fracciones, como se ilustra en el ejemplo 7 **a)**.

EJEMPLO 7 Simplifica. **a)** $\sqrt{\dfrac{121}{25}}$ **b)** $\sqrt[3]{\dfrac{8x^4y}{27xy^{10}}}$ **c)** $\sqrt[4]{\dfrac{18xy^5}{3x^9y}}$

Solución En cada parte, de ser posible, primero simplifica el radicando. Luego usa la regla del cociente para escribir el radical, como un cociente de radicales.

a) $\sqrt{\dfrac{121}{25}} = \dfrac{\sqrt{121}}{\sqrt{25}} = \dfrac{11}{5}$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{8x^4y}{27xy^{10}}} = \sqrt[3]{\dfrac{8x^3}{27y^9}} = \dfrac{\sqrt[3]{8x^3}}{\sqrt[3]{27y^9}} = \dfrac{2x}{3y^3}$

c) $\sqrt[4]{\dfrac{18xy^5}{3x^9y}} = \sqrt[4]{\dfrac{6y^4}{x^8}} = \dfrac{\sqrt[4]{6y^4}}{\sqrt[4]{x^8}} = \dfrac{\sqrt[4]{y^4}\sqrt[4]{6}}{x^2} = \dfrac{y\sqrt[4]{6}}{x^2}$

Ahora resuelve el ejercicio 97

CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

Las siguientes simplificaciones son correctas, porque los números y las variables divididos no están dentro de las raíces cuadradas.

CORRECTO

$$\frac{6\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$$

CORRECTO

$$\frac{x\sqrt{2}}{x} = \sqrt{2}$$

Una expresión dentro de una raíz cuadrada, no se puede dividir entre una expresión que no está dentro de la raíz cuadrada.

CORRECTO

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$ No se puede simplificar más

$$\frac{\sqrt{x^3}}{x} = \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{x}}{x} = \frac{x\sqrt{x}}{x} = \sqrt{x}$$

INCORRECTO

$$\frac{\sqrt{2^1}}{2} = \sqrt{1} = 1$$

$$\frac{\sqrt{x^3}}{x} = \sqrt{x^2} = x$$

7.3 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

cociente cuadrado menores 3 cubo mayores 2 producto 4

1. Un _____ perfecto, es un número o expresión que puede escribirse como el cuadrado de una expresión.
2. Un _____ perfecto, es un número o expresión que puede escribirse como el cubo de una expresión.
3. Una variable con un exponente es un cubo perfecto, si el exponente es divisible entre _____.
4. Una variable con un exponente es un cuadrado perfecto, si el exponente es divisible entre _____.
5. Una variable con un exponente es una cuarta potencia perfecta, si el exponente es divisible entre _____.
6. Cuando un radical se simplifica, los exponentes de la variable en el radicando son _____ que el índice.
7. La regla del _____ para radicales afirma que, para números reales no negativos, $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.
8. La regla del _____ para radicales afirma que, para números reales no negativos, $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\, b \neq 0$.

Practica tus habilidades

Simplifica. Asume que todas las variables representan números reales positivos.

9. $\sqrt{64}$
10. $\sqrt{81}$
11. $\sqrt{24}$
12. $\sqrt{18}$
13. $\sqrt{50}$
14. $\sqrt{12}$
15. $\sqrt{32}$
16. $\sqrt{72}$
17. $\sqrt{75}$
18. $\sqrt{300}$
19. $\sqrt[3]{64}$
20. $\sqrt[4]{81}$
21. $\sqrt[3]{16}$
22. $\sqrt[3]{24}$
23. $\sqrt[3]{54}$
24. $\sqrt[3]{81}$
25. $\sqrt[3]{32}$
26. $\sqrt[3]{108}$
27. $\sqrt[4]{48}$
28. $\sqrt[4]{80}$
29. $\sqrt[4]{162}$
30. $\sqrt[4]{405}$
31. $-\sqrt[5]{64}$
32. $-\sqrt[5]{96}$
33. $\sqrt{x^{36}}$
34. $\sqrt{y^{64}}$
35. $\sqrt[3]{x^6}$
36. $\sqrt[5]{y^{20}}$
37. $\sqrt{a^5}$
38. $\sqrt{b^7}$
39. $5\sqrt{c^9}$
40. $7\sqrt{d^{25}}$
41. $8\sqrt[3]{z^{32}}$
42. $6\sqrt[3]{w^{38}}$
43. $\sqrt[4]{b^{23}}$
44. $\sqrt[4]{c^{29}}$
45. $\sqrt{18x^5}$
46. $\sqrt{24x^3}$
47. $\sqrt[3]{16a^5}$
48. $\sqrt[3]{54b^7}$
49. $\sqrt{18p^4q^7}$
50. $\sqrt{75a^7b^{11}}$
51. $\sqrt[3]{16a^6b^7}$
52. $\sqrt[3]{40c^8d^9}$
53. $\sqrt{99a^4b^5c}$
54. $-\sqrt{20x^6y^7z^{12}}$
55. $\sqrt{24x^{15}y^{20}z^{27}}$
56. $\sqrt{128ab^7c^{11}}$
57. $5\sqrt{98rs^2t^3u^5}$
58. $7\sqrt{96m^3n^4pq^7}$
59. $\sqrt[3]{375u^{13}v^{15}w^{20}}$
60. $\sqrt[3]{128a^{10}b^{11}c^{12}}$
61. $\sqrt[4]{32x^8y^9z^{19}}$
62. $\sqrt[4]{48x^{11}y^{21}}$
63. $\sqrt[5]{128a^{11}b^{13}c^{17}}$
64. $\sqrt[5]{486x^6y^{12}z^{24}}$

Simplifica. Asume que todas las variables representan números reales positivos.

65. $\sqrt{\frac{75}{3}}$
66. $\sqrt{\frac{242}{2}}$
67. $\sqrt{\frac{8}{50}}$
68. $\sqrt{\frac{27}{147}}$
69. $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$
70. $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$
71. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{48}}$
72. $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{60}}$
73. $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{3}}$
74. $\frac{\sqrt{84}}{\sqrt{7}}$
75. $\sqrt[3]{\frac{3}{24}}$
76. $\sqrt[3]{\frac{2}{54}}$
77. $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}}$
78. $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{32}}$
79. $\sqrt[4]{\frac{3}{48}}$
80. $\sqrt[4]{\frac{3}{243}}$

81. $\dfrac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{96}}$

82. $\dfrac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{64}}$

83. $\sqrt{\dfrac{x^2}{9}}$

84. $\sqrt{\dfrac{y^8}{144}}$

85. $\sqrt{\dfrac{16x^4}{25y^{10}}}$

86. $\sqrt{\dfrac{121w^6}{49z^{10}}}$

87. $\sqrt{\dfrac{25k^4m^8}{169n^6}}$

88. $\sqrt{\dfrac{49a^8b^{10}}{121c^{14}}}$

89. $\sqrt[3]{\dfrac{a^8b^{12}}{b^{-8}}}$

90. $\sqrt[3]{\dfrac{189x^5y^{13}}{7x^{-3}}}$

91. $\dfrac{\sqrt{5a^9b^7}}{\sqrt{125a^3b^7}}$

92. $\dfrac{\sqrt{72x^3y^5}}{\sqrt{8x^3y^7}}$

93. $\dfrac{\sqrt{48x^6y^9}}{\sqrt{6x^2y^6}}$

94. $\dfrac{\sqrt{300a^{10}b^{11}}}{\sqrt{2ab^4}}$

95. $\sqrt[3]{\dfrac{5xy}{8x^{13}}}$

96. $\sqrt[3]{\dfrac{64a^5b^{12}}{27a^{14}b^5}}$

97. $\sqrt[3]{\dfrac{25x^2y^9}{5x^8y^2}}$

98. $\sqrt[3]{\dfrac{54xy^4z^{17}}{18x^{13}z^4}}$

99. $\sqrt[4]{\dfrac{10x^4y}{81x^{-8}}}$

100. $\sqrt[4]{\dfrac{3a^6b^5}{16a^{-6}b^{13}}}$

Ejercicios conceptuales y de redacción

101. a) ¿Cómo obtienes los números que son cuadrados perfectos?

b) Indica los primeros seis cuadrados perfectos.

102. a) ¿Cómo obtienes los números que son cubos perfectos?

b) Indica los primeros seis números cubos perfectos.

103. Cuando se abordó la regla del producto, se afirmó que, para números reales no negativos a y b, $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. ¿Por qué es necesario especificar que, tanto a como b, son números reales no negativos?

104. Cuando se proporcionó la regla del cociente, se afirmó que, para números reales no negativos a y b, $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$. ¿Por qué es necesario afirmar que, tanto a como b, son números reales no negativos?

105. Comprueba que $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}$, al convertir $\sqrt{a \cdot b}$ a la forma exponencial.

106. ¿El producto de dos radicales siempre será un radical? Proporciona un ejemplo para respaldar tu respuesta.

107. ¿El cociente de dos radicales siempre será un radical? Proporciona un ejemplo para respaldar tu respuesta.

108. Comprueba que $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, al convertir $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ a la forma exponencial.

109. a) ¿$\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}}$ siempre será igual a 1?

b) Si tu respuesta al inciso **a)** fue no, ¿bajo qué condiciones $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}}$, es igual a 1?

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **110.** Resuelve la fórmula $F = \dfrac{9}{5}C + 32$ para C.

[2.6] **111.** Resuelve en términos de x: $\left|\dfrac{2x - 4}{5}\right| = 12$

[5.3] **112.** Divide $\dfrac{15x^{12} - 5x^9 + 20x^6}{5x^6}$.

[5.6] **113.** Factoriza $(x - 3)^3 + 8$.

7.4 Suma, resta y multiplicación de radicales

1 Suma y resta de radicales
2 Multiplicación de radicales

1 Suma y resta de radicales

Radicales semejantes y radicales no semejantes

- Radicales semejantes son los radicales que tienen el mismo radicando y el mismo índice.
- Radicales no semejantes son los radicales que difieren, ya sea en el radicando o en el índice.

Ejemplos de radicales semejantes	Ejemplos de radicales no semejantes	
$\sqrt{5},\quad 3\sqrt{5}$	$\sqrt{5},\quad \sqrt[3]{5}$	Difieren los índices.
$6\sqrt{7},\quad -2\sqrt{7}$	$\sqrt{6},\quad \sqrt{7}$	Difieren los radicandos.
$\sqrt{x},\quad 5\sqrt{x}$	$\sqrt{x},\quad \sqrt{2x}$	Difieren los radicandos.
$\sqrt[3]{2x},\quad -4\sqrt[3]{2x}$	$\sqrt{x},\quad \sqrt[3]{x}$	Difieren los índices.
$\sqrt[4]{x^2y^5},\quad -\sqrt[4]{x^2y^5}$	$\sqrt[3]{xy},\quad \sqrt[3]{x^2y}$	Difieren los radicandos.

Comprende el Álgebra

Los radicales semejantes se suman usando la propiedad distributiva, de la misma forma en que se suman términos semejantes. Por ejemplo, los términos semejantes $3x$ y $4x$, se suman del siguiente modo:

$$3x + 4x = (3 + 4)x = 7x$$

Los radicales semejantes $3\sqrt{2}$ y $4\sqrt{2}$, se suman del siguiente modo:

$$3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = (3 + 4)\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

La propiedad distributiva se usa para sumar o restar radicales semejantes, de la misma forma en que se suman o restan lo términos semejantes.

Ejemplos de sumas y restas de radicales semejantes

$$3\sqrt{6} + 2\sqrt{6} = (3 + 2)\sqrt{6} = 5\sqrt{6}$$
$$5\sqrt{x} - 7\sqrt{x} = (5 - 7)\sqrt{x} = -2\sqrt{x}$$
$$\sqrt[3]{4x^2} + 5\sqrt[3]{4x^2} = (1 + 5)\sqrt[3]{4x^2} = 6\sqrt[3]{4x^2}$$
$$4\sqrt{5x} - y\sqrt{5x} = (4 - y)\sqrt{5x}$$

EJEMPLO 1 Simplifica.

a) $5\sqrt{7} + 3\sqrt{7}$ **b)** $7\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x}$

c) $11\sqrt{x} + 8\sqrt{y} - 5\sqrt{x} - 12\sqrt{y}$ **d)** $(5 + 3\sqrt{7}) - (2 - 11\sqrt{7})$

Solución

a) $5\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = (5 + 3)\sqrt{7} = 8\sqrt{7}$

b) $7\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x} = 7\sqrt[3]{x} - 1\sqrt[3]{x} = (7 - 1)\sqrt[3]{x} = 6\sqrt[3]{x}$

c) $11\sqrt{x} + 8\sqrt{y} - 5\sqrt{x} - 12\sqrt{y} = 11\sqrt{x} - 5\sqrt{x} + 8\sqrt{y} - 12\sqrt{y}$ Junta los radicales semejantes.
$= (11 - 5)\sqrt{x} + (8 - 12)\sqrt{y}$
$= 6\sqrt{x} + (-4)\sqrt{y}$
$= 6\sqrt{x} - 4\sqrt{y}$

d) $(5 + 3\sqrt{7}) - (2 - 11\sqrt{7}) = 5 + 3\sqrt{7} - 2 + 11\sqrt{7}$ Quita los paréntesis.
$= 5 - 2 + 3\sqrt{7} + 11\sqrt{7}$ Junta los términos semejantes y los radicales semejantes.
$= 3 + 14\sqrt{7}$ Combina los términos semejantes; combina los radicales semejantes.

Ahora resuelve el ejercicio 15

A veces, es posible convertir radicales no semejantes en radicales semejantes, al simplificar uno o más de los radicales, como se estudia en la sección 7.3.

EJEMPLO 2 Simplifica $\sqrt{20} + \sqrt{45}$.

Solución Puesto que $\sqrt{20}$ y $\sqrt{45}$ no son radicales semejantes, no se pueden sumar en su forma actual. Sin embargo, $\sqrt{20}$ y $\sqrt{45}$ se pueden simplificar, cada uno, de la siguiente forma.

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4}\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$
$$\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9}\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

Por tanto,

$$\sqrt{20} + \sqrt{45} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = (2 + 3)\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$

Ahora resuelve el ejercicio 19

Para sumar o restar radicales

1. Simplifica cada expresión radical.
2. Combina los radicales semejantes (si los hubiese).

EJEMPLO 3 Simplifica.

a) $5\sqrt{24} + \sqrt{54}$ **b)** $2\sqrt{45} - \sqrt{80} + \sqrt{20}$ **c)** $\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{81} - 7\sqrt[3]{3}$

Solución

a) $5\sqrt{24} + \sqrt{54} = 5 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{6}$
$= 5 \cdot 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6}$
$= 10\sqrt{6} + 3\sqrt{6} = 13\sqrt{6}$

b) $2\sqrt{45} - \sqrt{80} + \sqrt{20} = 2 \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{5}$
$= 2 \cdot 3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$
$= 6\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

c) $\sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{81} - 7\sqrt[3]{3} = 3 + \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{3} - 7\sqrt[3]{3}$
$= 3 + 3\sqrt[3]{3} - 7\sqrt[3]{3} = 3 - 4\sqrt[3]{3}$

Ahora resuelve el ejercicio 23

EJEMPLO 4 Simplifica.

a) $\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2 y} + x\sqrt{y}$ **b)** $\sqrt[3]{x^{13} y^2} - \sqrt[3]{x^4 y^8}$

Solución

a) $\sqrt{x^2} - \sqrt{x^2 y} + x\sqrt{y} = x - \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y} + x\sqrt{y}$
$= x - x\sqrt{y} + x\sqrt{y}$
$= x$

b) $\sqrt[3]{x^{13} y^2} - \sqrt[3]{x^4 y^8} = \sqrt[3]{x^{12}} \cdot \sqrt[3]{xy^2} - \sqrt[3]{x^3 y^6} \cdot \sqrt[3]{xy^2}$
$= x^4 \sqrt[3]{xy^2} - xy^2 \sqrt[3]{xy^2}$

Ahora factoriza el factor común, $\sqrt[3]{xy^2}$.

$= (x^4 - xy^2)\sqrt[3]{xy^2}$

Ahora resuelve el ejercicio 35

SUGERENCIA ÚTIL

Las reglas del producto y del cociente, presentadas en la sección 7.3, indican que:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad \text{y} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

No existen propiedades similares para la suma y la resta. Para ilustrar esto, sea n una raíz cuadrada (índice 2), $a = 9$ y $b = 16$.

$$\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a + b}$$
$$\sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{9 + 16}$$
$$3 + 4 \neq \sqrt{25}$$
$$7 \neq 5$$

2 Multiplicación de radicales

Para multiplicar radicales, usa la regla del producto dada anteriormente. Después de multiplicar, con frecuencia puedes simplificar el nuevo radical (observa los ejemplos 5 y 6).

EJEMPLO 5 Multiplica y simplifica.

a) $\sqrt{6x^3}\,\sqrt{8x^6}$ **b)** $\sqrt[3]{2x}\,\sqrt[3]{4x^2}$ **c)** $\sqrt[4]{4x^{11}y}\,\sqrt[4]{16x^6y^{22}}$

Solución

a) $\sqrt{6x^3}\,\sqrt{8x^6} = \sqrt{6x^3 \cdot 8x^6}$ Regla del producto para radicales.

$= \sqrt{48x^9}$

$= \sqrt{16x^8}\sqrt{3x}$ $16x^8$ es un cuadrado perfecto.

$= 4x^4\sqrt{3x}$

b) $\sqrt[3]{2x}\,\sqrt[3]{4x^2} = \sqrt[3]{2x \cdot 4x^2}$ Regla del producto para radicales.

$= \sqrt[3]{8x^3}$ $8x^3$ es un cubo perfecto.

$= 2x$

c) $\sqrt[4]{4x^{11}y}\,\sqrt[4]{16x^6y^{22}} = \sqrt[4]{4x^{11}y \cdot 16x^6y^{22}}$ Regla del producto para radicales.

$= \sqrt[4]{64x^{17}y^{23}}$

$= \sqrt[4]{16x^{16}y^{20}}\,\sqrt[4]{4xy^3}$ Los factores de la máxima cuarta potencia perfecta son 16, x^{16} y y^{20}.

$= 2x^4y^5\sqrt[4]{4xy^3}$

Ahora resuelve el ejercicio 47

Como se mencionó anteriormente, cuando se simplifica un radical, los exponentes de las variables en el radicando, son menores que el índice.

EJEMPLO 6 Multiplica y simplifica. $\sqrt{6x}\left(\sqrt{10x} - \sqrt{3}\right)$.

Solución Se comienza usando la propiedad distributiva.

$$\begin{aligned}\sqrt{6x}\left(\sqrt{10x} - \sqrt{3}\right) &= \left(\sqrt{6x}\right)\left(\sqrt{10x}\right) - \left(\sqrt{6x}\right)\left(\sqrt{3}\right)\\ &= \sqrt{60x^2} - \sqrt{18x}\\ &= \sqrt{4x^2 \cdot 15} - \sqrt{9 \cdot 2x}\\ &= \sqrt{4x^2}\sqrt{15} - \sqrt{9}\sqrt{2x}\\ &= 2x\sqrt{15} - 3\sqrt{2x}\end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 55

A continuación, se multiplicarán expresiones radicales que involucran sumas o restas de radicales, como $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c} + \sqrt{d}\right)$. Se usará el método PIES, tal como se hizo cuando se multiplicaron dos binomios.

Comprende el Álgebra

Recuerda que PIES es un acrónimo para **P**rimeros, **I**nternos, **E**xternos, **S**egundos. El método PIES, se usa cuando se multiplican dos binomios de la forma siguiente:

P I E S
↓ ↓ ↓ ↓
$(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd$

El método PIES también se usa cuando se multiplican expresiones radicales, como $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c} + \sqrt{d}\right)$.

EJEMPLO 7 Multiplica $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} - y\right)$.

Solución Se multiplicará usando el método PIES.

P I E S
↓ ↓ ↓ ↓

$$\begin{aligned}&\left(\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}\right) + \left(-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}\right) + \left(\sqrt{x}\right)(-y) + \left(-\sqrt{y}\right)(-y)\\ &= \sqrt{x^2} - \sqrt{xy} - y\sqrt{x} + y\sqrt{y}\\ &= x - y\sqrt{x} - \sqrt{xy} + y\sqrt{y}\end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 57

EJEMPLO 8 Simplifica.

a) $\left(2\sqrt{6} - \sqrt{3}\right)^2$

b) $\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2y^2}\right)\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{8y}\right)$

Solución

a) $(2\sqrt{6} - \sqrt{3})^2 = (2\sqrt{6} - \sqrt{3})(2\sqrt{6} - \sqrt{3})$
Ahora multiplica usando el método PIES.

$$\begin{aligned}
&\overset{P}{(2\sqrt{6})(2\sqrt{6})} + \overset{I}{(-\sqrt{3})(2\sqrt{6})} + \overset{E}{(2\sqrt{6})(-\sqrt{3})} + \overset{S}{(-\sqrt{3})(-\sqrt{3})} \\
&= 4(6) - 2\sqrt{18} - 2\sqrt{18} + 3 \\
&= 24 - 2\sqrt{18} - 2\sqrt{18} + 3 \\
&= 27 - 4\sqrt{18} \\
&= 27 - 4\sqrt{9}\sqrt{2} \\
&= 27 - 12\sqrt{2}
\end{aligned}$$

b) Multiplica usando el método PIES.

$$\begin{aligned}
(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2y^2})(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{8y}) &= \overset{P}{(\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{x^2})} + \overset{I}{(-\sqrt[3]{2y^2})(\sqrt[3]{x^2})} + \overset{E}{(\sqrt[3]{x})(-\sqrt[3]{8y})} + \overset{S}{(-\sqrt[3]{2y^2})(-\sqrt[3]{8y})} \\
&= \sqrt[3]{x^3} - \sqrt[3]{2x^2y^2} - \sqrt[3]{8xy} + \sqrt[3]{16y^3} \\
&= \sqrt[3]{x^3} - \sqrt[3]{2x^2y^2} - \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{8y^3}\sqrt[3]{2} \\
&= x - \sqrt[3]{2x^2y^2} - 2\sqrt[3]{xy} + 2y\sqrt[3]{2}
\end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 95

EJEMPLO 9 Multiplica $(3 + \sqrt{6})(3 - \sqrt{6})$.

Solución Puedes multiplicar usando el método PIES.

$$\begin{aligned}
(3 + \sqrt{6})(3 - \sqrt{6}) &= \overset{P}{3(3)} + \overset{I}{(\sqrt{6})(3)} + \overset{E}{3(-\sqrt{6})} + \overset{S}{(\sqrt{6})(-\sqrt{6})}. \\
&= 9 \quad + \quad 3\sqrt{6} \quad - \quad 3\sqrt{6} \quad - \quad \sqrt{36} \\
&= 9 - \sqrt{36} \\
&= 9 - 6 = 3
\end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 61

Observa que, en el ejemplo 9, se multiplicó *la suma y la resta de las mismas dos expresiones radicales*. Recuerda, de la sección 5.6, que $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Si $a = 3$ y $b = \sqrt{6}$, entonces se puede multiplicar de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
(a + b)(a - b) &= a^2 - b^2 \\
(3 + \sqrt{6})(3 - \sqrt{6}) &= 3^2 - (\sqrt{6})^2 \\
&= 9 - 6 \\
&= 3
\end{aligned}$$

Cuando multiplicas la suma y la resta de las mismas dos expresiones radicales, puedes obtener la respuesta usando la diferencia de los cuadrados de las dos expresiones radicales.

EJEMPLO 10 Si $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ y $g(x) = \sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2}$, determina **a)** $(f \cdot g)(x)$ y **b)** $(f \cdot g)(6)$.

Solución

a) De la sección 3.6, se sabe que $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\
&= \sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2}) && \text{Sustituye los valores dados.} \\
&= \sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x^2} && \text{Propiedad distributiva.} \\
&= \sqrt[3]{x^6} + \sqrt[3]{x^4} && \text{Regla del producto para radicales.} \\
&= x^2 + x\sqrt[3]{x} && \text{Simplifica los radicales.}
\end{aligned}$$

b) Para calcular $(f \cdot g)(6)$, sustituye 6 en términos de x, en la repuesta obtenida en el inciso **a)**.

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x) &= x^2 + x\sqrt[3]{x} \\ (f \cdot g)(6) &= 6^2 + 6\sqrt[3]{6} \quad \text{Sustituye 6 en términos de } x \\ &= 36 + 6\sqrt[3]{6}\end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 73

Como se afirmó anteriormente en este capítulo, a menos que se indique de otra manera, se asume que, las expresiones variables en los radicandos, representan números reales no negativos. El ejemplo 11, se demuestra cómo deben usarse valores absolutos, en los casos cuando el radicando pueda representar cualquier número real.

EJEMPLO 11 Simplifica $f(x)$ si

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$ asumiendo que $x \geq -3$.

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$ asumiendo que x pueda ser cualquier número real.

Solución

a)
$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{x^2 + 6x + 9} \\ &= \sqrt{(x+3)^2} && x^2 + 6x + 9 \text{ se factorizó como } (x+3)^2. \\ &= x + 3 && \text{Dado que } x \geq -3,\ x + 3 \geq 0 \text{ y no se necesita el símbolo de valor absoluto.}\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{x^2 + 6x + 9} \\ &= \sqrt{(x+3)^2} && x^2 + 6x + 9 \text{ se factorizó como } (x+3)^2. \\ &= |x + 3| && \text{Dado que x puede ser cualquier número real, } x+3 \text{ puede ser negativo y se requiere usar del símbolo de valor absoluto.}\end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 99

7.4 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

conmutativa distributiva menores semejantes PIES primeros mayores no semejantes

1. Los radicales que tienen el mismo radicando e índice, son radicales _____.
2. Los radicales que difieren, ya sea en su radicando o en su índice, son radicales _____.
3. La propiedad _____ se usa para sumar o restar radicales semejantes, en la misma forma que se suman o restan los términos semejantes.
4. Cuando simplificas un radical, los exponentes de las variables en el radicando son _____ que el índice.
5. Cuando se multiplican expresiones radicales que involucran sumas o restas de radicales, como $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c} + \sqrt{d}\right)$, se usa el método _____.
6. PIES, es un acrónimo para _____, internos, externos, segundos.

Practica tus habilidades

En esta serie de ejercicios, asume que todas las variables representan números reales positivos.

Simplifica.

7. $5\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$

8. $2\sqrt{6} + 9\sqrt{6}$

9. $4\sqrt{3} - \sqrt{3}$

10. $4\sqrt{7} - \sqrt{7}$

11. $(11 - 3\sqrt{5}) - (4 + 6\sqrt{5})$

12. $(7 + 3\sqrt{6}) - (2 - 2\sqrt{6})$

13. $2\sqrt[4]{y} - 9\sqrt[4]{y}$

14. $6\sqrt[3]{7} - 8\sqrt[3]{7}$

15. $3\sqrt{5} - \sqrt[3]{x} + 6\sqrt{5} + 3\sqrt[3]{x}$

16. $5\sqrt{2x} - 2\sqrt[3]{5x} + 7\sqrt{2x} - 5\sqrt[3]{5x}$

17. $5\sqrt{x} - 8\sqrt{y} + 3\sqrt{x} + 2\sqrt{y} - \sqrt{x}$

18. $8\sqrt{a} + 4\sqrt[3]{b} + 7\sqrt{a} - 12\sqrt[3]{b}$

Simplifica.

19. $\sqrt{18} + \sqrt{50}$
20. $\sqrt{12} + \sqrt{27}$
21. $\sqrt{12x} + \sqrt{75x}$
22. $\sqrt{45y} + \sqrt{80y}$
23. $-4\sqrt{90} + 3\sqrt{40} + 2\sqrt{10}$
24. $5\sqrt{8} + 2\sqrt{50} - 3\sqrt{72}$
25. $\sqrt{75} - \sqrt{48} + \sqrt{32} - \sqrt{8}$
26. $\sqrt{125} + \sqrt{27} - \sqrt{20} - \sqrt{12}$
27. $3\sqrt{50a^2} - 3\sqrt{72a^2} - 8a\sqrt{18}$
28. $3\sqrt{27c^2} - 2\sqrt{108c^2} - \sqrt{48c^2}$
29. $\sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{32}$
30. $3\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54}$
31. $5\sqrt[3]{81} - 2\sqrt[3]{24}$
32. $7\sqrt[3]{40} - 4\sqrt[3]{135}$
33. $\sqrt{75x^3} - 2\sqrt{3x}$
34. $3\sqrt{45x^3} + \sqrt{5x}$
35. $\sqrt{500xy^2} + y\sqrt{320x}$
36. $5y\sqrt[4]{48x^5} - x\sqrt[4]{3x^5y^4}$
37. $\sqrt{4r^7s^5} + 3r^2\sqrt{r^3s^5} - 2rs\sqrt{r^5s^3}$
38. $x\sqrt[3]{27x^5y^2} - x^2\sqrt[3]{x^2y^2} + 4\sqrt[3]{x^8y^2}$

Simplifica.

39. $\sqrt{2}\sqrt{8}$
40. $\sqrt{3}\ \sqrt{27}$
41. $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}$
42. $\sqrt[3]{25}\sqrt[3]{5}$
43. $\sqrt[3]{4}\ \sqrt[3]{14}$
44. $\sqrt[3]{6}\sqrt[3]{45}$
45. $\sqrt{15k}\sqrt{21k}$
46. $\sqrt{35x}\sqrt{14x}$
47. $\sqrt{9m^3n^7}\ \sqrt{3mn^4}$
48. $\sqrt{6pq^3}\sqrt{15p^3q^2}$
49. $\sqrt[3]{4x^7y^4z}\ \sqrt[3]{6x^2y^{10}z^7}$
50. $\sqrt[3]{9p^4qr^{11}}\ \sqrt[3]{6p^6q^5r^2}$
51. $(\sqrt[3]{20xy^2})^2$
52. $(\sqrt[3]{12m^2n})^2$
53. $\sqrt{5}(\sqrt{5} - \sqrt{3})$
54. $\sqrt{3}(\sqrt{12} + \sqrt{8})$
55. $\sqrt[3]{y}(2\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{y^8})$
56. $\sqrt[3]{2z}(\sqrt[3]{4z^2} + z\sqrt[3]{2z})$
57. $(\sqrt{3} + 4)(\sqrt{3} + 5)$
58. $(1 + \sqrt{5})(8 + \sqrt{5})$
59. $(4\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$
60. $(5\sqrt{6} + 3)(4\sqrt{6} - 1)$
61. $(8 + \sqrt{5})(8 - \sqrt{5})$
62. $(9 - \sqrt{5})(9 + \sqrt{5})$
63. $(\sqrt{6} + x)(\sqrt{6} - x)$
64. $(\sqrt{x} + y)(\sqrt{x} - y)$
65. $(2 + \sqrt{5})^2$
66. $(\sqrt{3} + 7)^2$
67. $(2\sqrt{x} - 3)^2$
68. $(5\sqrt{y} - 7)^2$
69. $(2\sqrt{3x} - \sqrt{y})(3\sqrt{3x} + \sqrt{y})$
70. $(5\sqrt{2y} + 2\sqrt{3z})(\sqrt{2y} - \sqrt{3z})$
71. $(\sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{3x^2})(\sqrt[3]{4x^2} + \sqrt[3]{9x})$
72. $(\sqrt[3]{9x^2} + \sqrt[3]{2x})(\sqrt[3]{3x} - \sqrt[3]{4x^2})$

En los ejercicios 73-78, se proporcionan $f(x)$ y $g(x)$. Determina $(f \cdot g)(x)$.

73. $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{3}$
74. $f(x) = \sqrt{6x}, g(x) = \sqrt{6x} - \sqrt{10x}$
75. $f(x) = \sqrt[3]{x}, g(x) = \sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{x^4}$
76. $f(x) = \sqrt[3]{2x^2}, g(x) = \sqrt[3]{4x} + \sqrt[3]{32x^2}$
77. $f(x) = \sqrt[4]{3x}, g(x) = \sqrt[4]{27x^3} - \sqrt[4]{4x^{14}}$
78. $f(x) = \sqrt[4]{2x^3}, g(x) = \sqrt[4]{8x^5} - \sqrt[4]{5x^6}$

Simplifica. Estos ejercicios son una combinación de los tipos de ejercicios presentados anteriormente en esta serie de ejercicios.

79. $\sqrt{18}$
80. $\sqrt{300}$
81. $\sqrt{125} - \sqrt{20}$
82. $4\sqrt{7} + 2\sqrt{63} - 2\sqrt{28}$
83. $(3\sqrt{2} - 4)(\sqrt{2} + 5)$
84. $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{2} + \sqrt{20})$
85. $(\sqrt{11} - \sqrt{2})^2$
86. $(\sqrt{13} - \sqrt{7})^2$
87. $\sqrt{150}\sqrt{3}$
88. $\sqrt[4]{2}\ \sqrt[4]{40}$
89. $\sqrt[3]{x^9y^{11}z}$
90. $\sqrt[9]{128ab^{17}c^9}$
91. $\sqrt[6]{5x^5y}\sqrt[6]{15x^6y^{11}}$
92. $\sqrt[5]{14x^4y^2}\ \sqrt[5]{3x^4y^3}$
93. $2b\sqrt[4]{a^4b} + ab\sqrt[4]{16b}$
94. $2\sqrt[3]{24a^3y^4} + 4a\sqrt[3]{81y^4}$
95. $(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{y^2})$
96. $(\sqrt[3]{a} + 5)(\sqrt[3]{a^2} - 6)$
97. $\sqrt[3]{3ab^2}(\sqrt[3]{4a^4b^3} - \sqrt[3]{8a^5b^4})$
98. $\sqrt[4]{4s^2}(\sqrt[4]{2s^5t^6} + \sqrt[4]{5s^9t^2})$

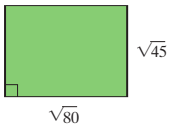
Simplifica lo siguiente. En los ejercicios 99-106, asume que la variable puede ser cualquier número real. Consulta el ejemplo 11.

99. $f(x) = \sqrt{x+2}\sqrt{x+2}, x \geq -2$
100. $g(x) = \sqrt{x-5}\sqrt{x-5}, x \geq 5$
101. $f(a) = \sqrt{(a-7)^2}, a \geq 7$
102. $g(b) = \sqrt{(b+8)^2}, b \geq -8$
103. $h(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$
104. $s(x) = \sqrt{x^2 - 10x + 25}$
105. $f(x) = \sqrt{9x^2 - 42x + 49}$
106. $g(x) = \sqrt{25x^2 + 20x + 4}$

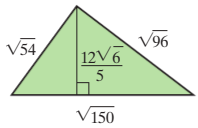
Resolución de problemas

Determina el perímetro y el área de las siguientes figuras. Escribe tus respuestas en forma radical simplificada. Consulta el Apéndice de Geometría para cualquier fórmula que necesites.

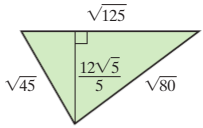
107.



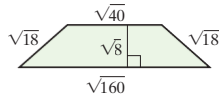
108.



109.



110.



111. Marcas de derrape Los oficiales de las fuerzas del orden, en ocasiones usan la fórmula $s = \sqrt{30FB}$ para determinar la rapidez de un automóvil, s, en millas por hora, a partir de las marcas de derrape de un automóvil. La F en la fórmula, representa el "factor camino", que se determina por la superficie del camino; y la B representa la distancia de frenado, en pies. La oficial Juárez investiga un accidente. Determina la rapidez del automóvil, si las marcas de derrape son de 80 pies de largo y **a)** el camino era asfalto seco, cuyo factor camino es de 0.85, **b)** el camino era de grava mojada, cuyo factor camino es de 0.52.



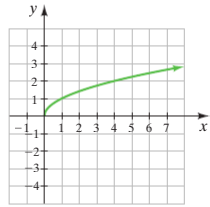
112. Agua a través de una manguera contra incendios La razón a la cual fluye el agua a través de una manguera contra incendios en particular, R, en galones por minuto, se puede aproximar mediante la fórmula $R = 28d^2\sqrt{P}$, donde d es el diámetro de la boquilla, en pulgadas, y P es la presión de la boquilla, en libras por pulgada cuadrada. Si una boquilla tiene un diámetro de 2.5 pulgadas y la presión de boquilla es de 80 libras por pulgada cuadrada, determina la razón de flujo.

113. Estatura de niñas La función $f(t) = 3\sqrt{t} + 19$ puede usarse para aproximar la estatura mediana, $f(t)$, en pulgadas, para niñas estadounidenses con edad t, en meses, donde $1 \leq t \leq 60$. Estima la estatura mediana de niñas en edades de **a)** 36 meses y **b)** 40 meses.



114. Desviación estándar En estadística, la desviación estándar de una población, σ, léase "sigma", es una medida de la dispersión de un conjunto de datos, en torno a la media de los datos. Una fórmula usada para determinar sigma, es $\sigma = \sqrt{npq}$, donde n representa el tamaño de la muestra, p representa el cambio porcentual en que algo específico ocurra, y q representa el cambio porcentual de que la cosa específica no ocurra. En una muestra de 600 personas que compran boletos de avión, el porcentaje que se presentó para su vuelo, p, fue de 0.93, y el porcentaje que no se presentó para su vuelo, q, fue de 0.07. Usa esta información para determinar σ.

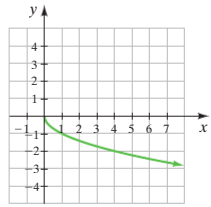
115. Se muestra la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$.



a) Si $g(x) = 2$, bosqueja la gráfica de $(f+g)(x)$.

b) ¿Qué efecto tiene sumar 2 a la gráfica de $f(x)$?

116. Se muestra la gráfica de $f(x) = -\sqrt{x}$.



a) Si $g(x) = 3$, bosqueja la gráfica de $(f+g)(x)$.

b) ¿Qué efecto tiene sumar 3 a la gráfica de $f(x)$?

117. Se indica que $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{x} - 2$.

a) Bosqueja la gráfica de $(f-g)(x)$.

b) ¿Cuál es el dominio de $(f-g)(x)$?

118. Se indica que $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = -\sqrt{x} - 3$.

a) Bosqueja la gráfica de $(f+g)(x)$.

b) ¿Cuál es el dominio de $(f+g)(x)$?

119. Elabora la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x^2}$.

120. Elabora la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x^2} - 4$.

Ejercicios conceptuales y de redacción

121. ¿$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$? Explica tu respuesta y proporciona un ejemplo que respalde tu respuesta.

122. Dado que $64+36=100$, ¿$\sqrt{64} + \sqrt{36} = \sqrt{100}$? Explica tu respuesta.

123. ¿La suma de dos radicales siempre será un radical? Proporciona un ejemplo que respalde tu respuesta.

124. ¿La resta de dos radicales siempre será un radical? Proporciona un ejemplo que respalde tu respuesta.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.2] **125.** ¿Qué es un número racional?

[1.3] **126.** ¿Qué es un número real?

127. ¿Qué es un número irracional?

128. ¿Cuál es la definición de $|a|$?

[2.2] **129.** Resuelve la fórmula $E = \frac{1}{2}mv^2$ en términos de m.

[2.5] **130.** Resuelve la desigualdad $-4 < 2x - 3 \le 7$ e indica la solución **a)** sobre la recta numérica; **b)** en notación de intervalo; **c)** en notación constructiva de conjuntos.

EXAMEN DE MITAD DE CAPÍTULO: SECCIONES 7.1-7.4

Para descubrir qué tan bien entiendes el material del capítulo hasta este punto, resuelve esta breve evaluación. Las respuestas, y la sección donde el material se discutió inicialmente, se proporcionan en la parte final del libro. Revisa cualquier pregunta que respondas de manera incorrecta.

Determina la raíz indicada.

1. $\sqrt{121}$ **2.** $\sqrt[3]{-\frac{27}{64}}$

Usa valor absoluto para evaluar.

3. $\sqrt{(-16.3)^2}$ **4.** $\sqrt{(3a^2 - 4b^3)^2}$

5. Determina $g(16)$ si $g(x) = \frac{x}{8} + \sqrt{4x} - 7$.

6. Escribe $\sqrt[5]{7a^4b^3}$ en forma exponencial.

7. Evalúa $-49^{1/2} + 81^{3/4}$.

Simplifica cada expresión.

8. $\left(\sqrt[4]{a^2b^3c}\right)^{20}$ **9.** $7x^{-5/2} \cdot 2x^{3/2}$

10. Multiplica $8x^{-2}(x^3 + 2x^{-1/2})$.

Simplifica cada radical.

11. $\sqrt{32x^4y^9}$ **12.** $\sqrt[6]{64a^{13}b^{23}c^{15}}$

13. $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{81}}$ **14.** $\frac{\sqrt{20x^5y^{12}}}{\sqrt{180x^{15}y^7}}$

Simplifica. Asume que todas las variables representan números reales positivos.

15. $2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} + 9\sqrt{x} + 15\sqrt{y}$

16. $2\sqrt{90x^2y} + 3x\sqrt{490y}$

17. $(x + \sqrt{5})(2x - 3\sqrt{5})$

18. $2\sqrt{3a}(\sqrt{27a^2} - 5\sqrt{4a})$

19. $3b\sqrt[4]{a^5b} + 2ab\sqrt[4]{16ab}$

20. Cuando simplifiques las siguientes raíces cuadradas, ¿en qué incisos la respuesta tiene un valor absoluto? Explica tu respuesta y simplifica los incisos **a)** y **b)**.

a) $\sqrt{(x-3)^2}$ **b)** $\sqrt{64x^2}, x \ge 0$

7.5 Racionalización de denominadores

1. **Racionalización de denominadores**
2. **Racionalización de un denominador usando el conjugado**
3. **¿Cuándo está simplificado un radical?**
4. **Uso de la racionalización del denominador en un problema de adición**
5. **División de expresiones radicales con diferentes índices**

En esta sección, se estudiarán los radicales y la operación de división. *A lo largo de esta sección, se asumirá que todas las variables representan números reales positivos.*

1 Racionalización de denominadores

Cuando el denominador de una fracción contiene radicales, se acostumbra reescribir la fracción como una fracción equivalente, en la cual, el denominador no tenga radicales. El proceso que se utilizará para reescribir la fracción, se conoce como **racionalización del denominador**. En esta sección, se usará la regla del cociente para radicales, presentada en la sección 7.3, para racionalizar denominadores.

Para racionalizar un denominador

Multiplica, tanto el numerador como el denominador de la fracción, por un radical que dará un radicando en el denominador, que es una potencia perfecta para el índice.

Cuando, tanto el numerador como el denominador, se multiplican por la misma expresión radical, en realidad se está multiplicando la fracción por 1, con lo cual, no se modifica su valor. Recuerda también que se asumirá que todas las variables en los radicandos representarán números reales no negativos.

EJEMPLO 1 Simplifica. **a)** $\frac{1}{\sqrt{5}}$ **b)** $\frac{x}{\sqrt{8}}$ **c)** $\frac{11}{\sqrt{2x}}$ **d)** $\frac{\sqrt[3]{16a^4}}{\sqrt[3]{b}}$

Solución Para simplificar cada expresión, debes racionalizar el denominador. Esto se hace al multiplicar, tanto el numerador como el denominador, por un radical, que haga que el denominador se convierta en una potencia perfecta para el índice dado.

a) $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\frac{x}{\sqrt{8}} = \frac{x}{\sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{16}} = \frac{x\sqrt{2}}{4}$

El inciso b) también se puede simplificar del siguiente modo:

$$\frac{x}{\sqrt{8}} = \frac{x}{\sqrt{4 \cdot 2}} = \frac{x}{2\sqrt{2}} = \frac{x}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{x\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{4}} = \frac{x\sqrt{2}}{2 \cdot 2} = \frac{x\sqrt{2}}{4}$$

c) En el radicando hay dos factores, 2 y x. Dado que 2^2, o 4, es un cuadrado perfecto y x^2 es un cuadrado perfecto, multiplica, tanto el numerador como el denominador, por $\sqrt{2x}$.

$$\begin{aligned} \frac{11}{\sqrt{2x}} &= \frac{11}{\sqrt{2x}} \cdot \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}} \\ &= \frac{11\sqrt{2x}}{\sqrt{4x^2}} \\ &= \frac{11\sqrt{2x}}{2x} \end{aligned}$$

d) No hay factores comunes en el numerador y en el denominador. Antes de racionalizar el denominador, se simplificará el numerador.

$$\frac{\sqrt[3]{16a^4}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{8a^3}\ \sqrt[3]{2a}}{\sqrt[3]{b}} \quad \text{Regla del producto para radicales.}$$

$$= \frac{2a\sqrt[3]{2a}}{\sqrt[3]{b}} \quad \text{Simplifica el numerador.}$$

Ahora racionaliza el denominador. Dado que el denominador es una raíz cúbica, es necesario producir un radicando que sea un cubo perfecto. Ya que el denominador contiene b y se quiere b^3, se necesitan dos factores más de b, o b^2. Por tanto, multiplica, tanto el numerador como el denominador, por $\sqrt[3]{b^2}$.

$$\begin{aligned} &= \frac{2a\sqrt[3]{2a}}{\sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b^2}} \\ &= \frac{2a\sqrt[3]{2ab^2}}{\sqrt[3]{b^3}} \\ &= \frac{2a\sqrt[3]{2ab^2}}{b} \end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 15

Comprende el Álgebra

Históricamente, los denominadores se racionalizaban de modo que fuera más sencillo obtener una aproximación decimal. En el ejemplo 1 **a)** se mostró que $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Aproximar $\frac{1}{\sqrt{5}}$ usando división larga, requiere dividir 1 por una aproximación de $\sqrt{5}$, tal como 2.236.

Sin embargo, aproximar $\frac{\sqrt{5}}{5}$, requiere de dividir 2.236 por 5, ¡una tarea mucho más sencilla!

EJEMPLO 2 Simplifica. **a)** $\sqrt{\frac{2}{3}}$ **b)** $\sqrt[3]{\frac{x}{2y^2}}$ **c)** $\sqrt[4]{\frac{32x^9y^6}{3z^2}}$

Solución En cada parte, se usará la regla del cociente para reescribir el radical como un cociente de dos radicales.

a) $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ **b)** $\sqrt[3]{\frac{x}{2y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2y^2}}$

En el inciso b), el denominador es $\sqrt[3]{2y^2}$. Tanto el numerador como el denominador, se multiplicarán por la raíz cúbica de una expresión que dará un denominador $\sqrt[3]{2^3y^3}$. Dado que $2 \cdot 2^2 = 2^3$ y $y^2 \cdot y = y^3$, multiplica, tanto el numerador como el denominador, por $\sqrt[3]{2^2y}$.

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2y^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2y}}{\sqrt[3]{2^2y}}$$
$$= \frac{\sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{4y}}{\sqrt[3]{2^3y^3}}$$
$$= \frac{\sqrt[3]{4xy}}{2y}$$

c) Después de usar la regla del cociente, simplifica el numerador.

$$\sqrt[4]{\frac{32x^9y^6}{3z^2}} = \frac{\sqrt[4]{32x^9y^6}}{\sqrt[4]{3z^2}}$$ Regla del cociente para radicales.

$$= \frac{\sqrt[4]{16x^8y^4}\,\sqrt[4]{2xy^2}}{\sqrt[4]{3z^2}}$$ Regla del producto para radicales.

$$= \frac{2x^2y\sqrt[4]{2xy^2}}{\sqrt[4]{3z^2}}$$ Simplifica el numerador.

Ahora racionaliza el denominador. Es necesario multiplicar, tanto el numerador como el denominador, por una raíz cuarta para producir un radicando que sea una cuarta potencia perfecta. Dado que el denominador contiene un factor de 3, se necesitan 3 factores más de 3, 3^3. Como hay dos factores de z, se necesitan 2 factores más de z, o z^2. En consecuencia, multiplica, tanto el numerador como el denominador, por $\sqrt[4]{3^3z^2}$.

$$= \frac{2x^2y\sqrt[4]{2xy^2}}{\sqrt[4]{3z^2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{3^3z^2}}{\sqrt[4]{3^3z^2}}$$
$$= \frac{2x^2y\sqrt[4]{2xy^2}\,\sqrt[4]{27z^2}}{\sqrt[4]{3z^2}\,\sqrt[4]{3^3z^2}}$$
$$= \frac{2x^2y\sqrt[4]{54xy^2z^2}}{\sqrt[4]{3^4z^4}}$$ Regla del producto para radicales.
$$= \frac{2x^2y\sqrt[4]{54xy^2z^2}}{3z}$$

Nota: no hay cuarta potencia perfecta que sea factor de 54, y cada exponente en el radicando es menor que el índice.

Ahora resuelve el ejercicio 53

2 Racionalización de un denominador usando el conjugado

El denominador de algunas fracciones, es una suma o diferencia que involucra radicales que no pueden simplificarse. Una de tales fracciones, es $\frac{13}{4 + \sqrt{3}}$ Para racionalizar el denominador de esta fracción, multiplica, tanto el numerador como el denominador, por $4 - \sqrt{3}$. Las expresiones$4 + \sqrt{3}$ y$4 - \sqrt{3}$ son **conjugados**, uno del otro. A continuación, se muestran otros ejemplos de conjugados.

Expresión radical	Conjugado
$9 + \sqrt{2}$	$9 - \sqrt{2}$
$8\sqrt{3} - \sqrt{5}$	$8\sqrt{3} + \sqrt{5}$
$\sqrt{x} + \sqrt{y}$	$\sqrt{x} - \sqrt{y}$
$-6a - \sqrt{b}$	$-6a + \sqrt{b}$

Cuando una expresión radical se multiplica por su conjugado usando el método PIES, el producto se simplifica a una expresión que no contiene raíces cuadradas. El siguiente ejemplo, muestra el producto de una expresión radical y su conjugado.

EJEMPLO 3 Multiplica $(6 + \sqrt{3})(6 - \sqrt{3})$.

Solución Multiplica usando el método PIES.

$$\begin{aligned}(6 + \sqrt{3})(6 - \sqrt{3}) &\overset{\text{P}\quad\text{I}\quad\text{E}\quad\text{S}}{=} 6(6) + 6(\sqrt{3}) + 6(-\sqrt{3}) + \sqrt{3}(-\sqrt{3}) \\ &= 36 + 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} - \sqrt{9} \\ &= 36 - \sqrt{9} \\ &= 36 - 3 \\ &= 33\end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 57

Comprende el Álgebra

En el capítulo 5, se estudió el producto:

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Observa, cómo la suma de los productos exterior e interior, $-ab + ab$, siempre es 0. Este mismo procedimiento se puede usar cuando se multiplica una expresión radical por su conjugado. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2}) &= 3^2-(\sqrt{2})^2 \\ &= 9 - 2 = 7\end{aligned}$$

En el ejemplo 3, se obtendría el mismo resultado usando la fórmula para el producto de la suma y la resta de los mismos dos términos. El producto resulta en la diferencia de dos cuadrados, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. En el ejemplo 3, si $a = 6$ y $b = \sqrt{3}$, entonces, usando la fórmula, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}(a + \quad b)(a - \quad b) &= a^2 - \quad b^2 \\ \downarrow \quad \downarrow \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ (6 + \sqrt{3})(6 - \sqrt{3}) &= 6^2 - (\sqrt{3})^2 \\ &= 36 - 3 \\ &= 33\end{aligned}$$

Para racionalizar el denominador usando el conjugado

Multiplica el numerador y el denominador por el conjugado del denominador. Simplifica usando la propiedad distributiva, PIES, o el producto especial $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

A continuación, se trabajará un ejemplo donde se racionaliza un denominador usando el conjugado.

EJEMPLO 4 Simplifica. **a)** $\dfrac{13}{4 + \sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{5}{\sqrt{3} - \sqrt{7}}$ **c)** $\dfrac{x + \sqrt{5}}{x - \sqrt{5}}$

Solución En cada parte, se racionaliza el denominador al multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.

a)
$$\begin{aligned}\frac{13}{4 + \sqrt{3}} &= \frac{13}{4 + \sqrt{3}} \cdot \frac{4 - \sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{13(4 - \sqrt{3})}{(4 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3})} \\ &= \frac{13(4 - \sqrt{3})}{16 - 3} \\ &= \frac{\overset{1}{\cancel{13}}(4 - \sqrt{3})}{\underset{1}{\cancel{13}}} \text{ o } 4 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\frac{5}{\sqrt{3} - \sqrt{7}} &= \frac{5}{\sqrt{3} - \sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{\sqrt{3} + \sqrt{7}} \\ &= \frac{5(\sqrt{3} + \sqrt{7})}{(\sqrt{3} - \sqrt{7})(\sqrt{3} + \sqrt{7})} \\ &= \frac{5(\sqrt{3} + \sqrt{7})}{3 - 7}\end{aligned}$$

$$= \frac{5(\sqrt{3} + \sqrt{7})}{-4}$$

$$= -\frac{5(\sqrt{3} + \sqrt{7})}{4}$$

c)
$$\frac{x + \sqrt{5}}{x - \sqrt{5}} = \frac{x + \sqrt{5}}{x - \sqrt{5}} \cdot \frac{x + \sqrt{5}}{x + \sqrt{5}}$$

$$= \frac{x^2 + x\sqrt{5} + x\sqrt{5} + \sqrt{25}}{x^2 - 5}$$

$$= \frac{x^2 + 2x\sqrt{5} + 5}{x^2 - 5}$$

Esta expresión está en su forma más simple.

Ahora resuelve el ejercicio 75

Ahora que ya se ilustró cómo racionalizar denominadores, se discutirán los criterios que debe satisfacer un radical para considerarse simplificado.

3 ¿Cuándo está simplificado un radical?

Después de simplificar una expresión radical, debes asegurarte de que está simplificado tanto como sea posible.

Una expresión radical está simplificada cuando se cumpla lo siguiente

1. Ninguna potencia perfecta es factor del radicando y todos los exponentes en el radicando son menores que el índice.
2. Ningún radicando contiene una fracción.
3. Ningún denominador contiene un radical.

EJEMPLO 5 Determina si las siguientes expresiones están simplificadas. Si no lo están, explica por qué. Simplifica las expresiones si no están simplificadas.

a) $\sqrt{48x^5}$ **b)** $\sqrt{\frac{1}{2}}$ **c)** $\frac{1}{\sqrt{6}}$

Solución

a) Esta expresión no está simplificada, porque 16 es un cuadrado perfecto factor de 48 y porque x^4 es un cuadrado perfecto factor de x^5. El radical se simplifica de la siguiente manera.

$$\sqrt{48x^5} = \sqrt{16x^4 \cdot 3x} = \sqrt{16x^4} \cdot \sqrt{3x} = 4x^2\sqrt{3x}$$

b) Esta expresión no está simplificada, porque el radicando contiene la fracción $\frac{1}{2}$. Se simplifica usando primero la regla del cociente y después se racionaliza el denominador de la siguiente manera.

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) Esta expresión no está simplificada, porque el denominador, $\sqrt{6}$, contiene un radical. Se simplifica al racionalizar el denominador de la siguiente manera.

$$\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Ahora resuelve el ejercicio 23

Comprende el Álgebra

Cuando un radicando esté escrito en forma simplificada, lo siguiente debe ser verdadero:

- El coeficiente del radicando no tiene factores de potencia perfectos.
- Los exponentes de las variables son todos menores que el índice del radical.

4 Uso de la racionalización del denominador en un problema de adición

Ahora se trabajará un problema de adición que requiere racionalizar el denominador. Este ejemplo utiliza los métodos discutidos en las secciones 7.3 y 7.4, para sumar y restar radicales.

EJEMPLO 6 Simplifica $4\sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{8}} + \sqrt{32}$.

Solución Comienza por racionalizar el denominador y por simplificar $\sqrt{32}$.

$$4\sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{8}} + \sqrt{32} = 4\sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \sqrt{16}\sqrt{2}$$ Racionaliza el denominador.

$$= 4\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{16}} + 4\sqrt{2}$$ Regla del producto.

$$= 4\sqrt{2} - \frac{3}{4}\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$$ Escribe $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{16}}$ como $\frac{3}{4}\sqrt{2}$.

$$= \left(4 - \frac{3}{4} + 4\right)\sqrt{2}$$ Simplifica.

$$= \left(\frac{29}{4}\right)\sqrt{2}$$

$$= \frac{29\sqrt{2}}{4}$$

Ahora resuelve el ejercicio 115

5 División de expresiones radicales con diferentes índices

Ahora se dividirán expresiones radicales, en las cuales, los radicales tienen diferentes índices. Para dividir tales problemas, escribe cada radical en forma exponencial. Luego, usa las reglas de los exponentes con los exponentes racionales, como se discutió en la sección 7.2, para simplificar la expresión. El ejemplo 7, ilustra este procedimiento.

EJEMPLO 7 Simplifica. **a)** $\frac{\sqrt[5]{(m+n)^7}}{\sqrt[3]{(m+n)^4}}$ **b)** $\frac{\sqrt[3]{a^5b^4}}{\sqrt{a^2b}}$

Solución Comienza por escribir el numerador y el denominador con exponentes racionales.

a) $\frac{\sqrt[5]{(m+n)^7}}{\sqrt[3]{(m+n)^4}} = \frac{(m+n)^{7/5}}{(m+n)^{4/3}}$ Escribe con exponentes racionales.

$$= (m+n)^{(7/5)-(4/3)}$$ Regla del cociente para exponentes.

$$= (m+n)^{1/15}$$

$$= \sqrt[15]{m+n}$$ Escribe como radical.

b) $\frac{\sqrt[3]{a^5b^4}}{\sqrt{a^2b}} = \frac{(a^5b^4)^{1/3}}{(a^2b)^{1/2}}$ Escribe con exponentes racionales.

$$= \frac{a^{5/3}b^{4/3}}{ab^{1/2}}$$ Eleva el producto a una potencia.

$$= a^{(5/3)-1}b^{(4/3)-(1/2)}$$ Regla del cociente para exponentes.

$$= a^{2/3}b^{5/6}$$

$$= a^{4/6}b^{5/6}$$ Escribe las fracciones con denominador 6.

$$= (a^4b^5)^{1/6}$$ Reescribe usando las leyes de los exponentes.

$$= \sqrt[6]{a^4b^5}$$ Escribe como radical.

Ahora resuelve el ejercicio 129

7.5 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

conjugado suma potencia producto racionalización radicando denominador numerador

1. El proceso que se usa para reescribir una fracción sin radicales en el denominador, se conoce como _____ del denominador.
2. Cuando se usa el método PIES en el producto $(a + b)(a - b)$, la _____ de los productos exterior e interior, siempre es 0.
3. Para racionalizar el denominador de una fracción que contiene una expresión radical, multiplica, tanto el numerador como el denominador de la fracción, por un radical que producirá un radicando en el denominador, que sea una _____ perfecta para el índice.
4. Para racionalizar el denominador usando el conjugado, multiplica el numerador y el denominador por el _____ del denominador.
5. La expresión $\sqrt{\frac{1}{2}}$, no se considera simplificada, pues el _____ contiene una fracción.
6. La expresión $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, no se considera simplificada, pues el _____ contiene un radical.

Practica tus habilidades

A lo largo de esta serie de ejercicios, asume que todas las variables representan números reales positivos y que todos los radicandos son no negativos.

Simplifica.

7. $\frac{1}{\sqrt{3}}$
8. $\frac{1}{\sqrt{7}}$
9. $\frac{4}{\sqrt{5}}$
10. $\frac{3}{\sqrt{7}}$
11. $\frac{6}{\sqrt{6}}$
12. $\frac{17}{\sqrt{17}}$
13. $\frac{5}{\sqrt{m}}$
14. $\frac{3}{\sqrt{k}}$
15. $\frac{p}{\sqrt{2}}$
16. $\frac{m}{\sqrt{13}}$
17. $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{t}}$
18. $\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{q}}$
19. $\frac{18p}{\sqrt{p}}$
20. $\frac{15x}{\sqrt{x}}$
21. $\sqrt{\frac{3}{x}}$
22. $\sqrt{\frac{x}{7}}$
23. $\sqrt{\frac{5m}{8}}$
24. $\sqrt{\frac{7n}{12}}$
25. $\sqrt{\frac{7x}{18}}$
26. $\sqrt{\frac{14z}{75}}$
27. $\sqrt{\frac{11x}{18y}}$
28. $\sqrt{\frac{13p}{45q}}$
29. $\sqrt{\frac{18x^4y^3}{2z^3}}$
30. $\sqrt{\frac{48x^6y^5}{3z^3}}$
31. $\sqrt{\frac{20y^4z^3}{3xy^{-4}}}$
32. $\sqrt{\frac{45q^3r^5}{2pq^{-3}}}$

Simplifica.

33. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
34. $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$
35. $\frac{2}{\sqrt[3]{a^2}}$
36. $\frac{8}{\sqrt[3]{y}}$
37. $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$
38. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$
39. $\frac{5}{\sqrt[4]{z^3}}$
40. $\frac{8}{\sqrt[4]{z}}$
41. $\frac{a}{\sqrt[4]{8}}$
42. $\frac{b}{\sqrt[4]{27}}$
43. $\frac{5m}{\sqrt[4]{2}}$
44. $\frac{2c}{\sqrt[4]{3}}$
45. $\sqrt[3]{\frac{10}{x^2}}$
46. $\sqrt[3]{\frac{6}{y}}$
47. $\sqrt[3]{\frac{1}{2x}}$
48. $\sqrt[3]{\frac{3}{2x^2}}$

49. $\sqrt[3]{\frac{5b}{9y}}$ **50.** $\sqrt[3]{\frac{7c}{9y^2}}$ **51.** $\sqrt[4]{\frac{5}{3x^3}}$ **52.** $\sqrt[4]{\frac{2x^3}{4y^2}}$

53. $\sqrt[3]{\frac{21x^7y^9}{4z}}$ **54.** $\sqrt[3]{\frac{15x^6y^7}{2z^2}}$ **55.** $\sqrt[4]{\frac{15z^5}{8xy^2z^{-3}}}$ **56.** $\sqrt[5]{\frac{21r^7}{8p^2q^3r^{-8}}}$

Multiplica.

57. $(4+\sqrt{5})(4-\sqrt{5})$ **58.** $(8+\sqrt{2})(8-\sqrt{2})$ **59.** $(2-\sqrt{10})(2+\sqrt{10})$

60. $(2+\sqrt{7})(2-\sqrt{7})$ **61.** $(\sqrt{11}-\sqrt{3})(\sqrt{11}+\sqrt{3})$ **62.** $(\sqrt{13}+\sqrt{7})(\sqrt{13}-\sqrt{7})$

63. $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ **64.** $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$

65. $(2\sqrt{x}-3\sqrt{y})(2\sqrt{x}+3\sqrt{y})$ **66.** $(5\sqrt{c}-4\sqrt{d})(5\sqrt{c}+4\sqrt{d})$

Simplifica mediante la racionalización del denominador.

67. $\frac{5}{\sqrt{3}+1}$ **68.** $\frac{7}{\sqrt{6}+2}$ **69.** $\frac{9}{\sqrt{7}+2}$

70. $\frac{4}{\sqrt{3}-1}$ **71.** $\frac{3}{5-\sqrt{7}}$ **72.** $\frac{11}{7+\sqrt{5}}$

73. $\frac{11}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ **74.** $\frac{13}{\sqrt{7}+\sqrt{11}}$ **75.** $\frac{3}{6+\sqrt{x}}$

76. $\frac{7}{2-\sqrt{y}}$ **77.** $\frac{\sqrt{11}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ **78.** $\frac{\sqrt{13}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

79. $\frac{\sqrt{7x}+\sqrt{3}}{\sqrt{7x}-\sqrt{3}}$ **80.** $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7y}}{\sqrt{5}-\sqrt{7y}}$ **81.** $\frac{x+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

82. $\frac{y+\sqrt{7}}{\sqrt{3}-\sqrt{7}}$ **83.** $\frac{4}{\sqrt{x+2}-3}$ **84.** $\frac{8}{\sqrt{y-3}+6}$

Simplifica. Estos ejercicios son una combinación de los tipos de ejercicios presentados anteriormente en esta serie de ejercicios.

85. $\frac{3}{\sqrt{6}}$ **86.** $\frac{25}{\sqrt{10}}$ **87.** $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ **88.** $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}$

89. $(\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{7}-\sqrt{6})$ **90.** $(\sqrt{6}-\sqrt{11})(\sqrt{6}+\sqrt{11})$ **91.** $\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$ **92.** $\sqrt[3]{\frac{9}{2}}$

93. $\sqrt{\frac{24x^3y^6}{5z}}$ **94.** $\sqrt{\frac{18a^4b^3}{7c}}$ **95.** $\frac{1}{\sqrt{a}+7}$ **96.** $\frac{5}{4-\sqrt{y}}$

97. $\frac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ **98.** $\frac{\sqrt{13}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$ **99.** $\sqrt[4]{\frac{3y^2}{2x}}$ **100.** $\sqrt[4]{\frac{2}{9x}}$

101. $\sqrt[3]{\frac{32y^{12}z^{10}}{2x}}$ **102.** $\sqrt[4]{\frac{2x^7y^{12}z^4}{3x^9}}$ **103.** $\frac{\sqrt{ar}}{\sqrt{a}-2\sqrt{r}}$ **104.** $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+6\sqrt{y}}$

105. $\frac{\sqrt[3]{6x}}{\sqrt[3]{5xy}}$ **106.** $\frac{\sqrt[3]{16m^2n}}{\sqrt[3]{2mn^2}}$ **107.** $\frac{5}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}}$ **108.** $\frac{9}{\sqrt{y+9}-\sqrt{y}}$

Simplifica.

109. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ **110.** $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{3}$ **111.** $\sqrt{5}-\frac{2}{\sqrt{5}}$ **112.** $\sqrt{7}-\frac{3}{\sqrt{7}}$

113. $\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{2}{\sqrt{6}}$ **114.** $\frac{\sqrt{10}}{5}-\frac{5}{\sqrt{10}}$ **115.** $5\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{8}}+\sqrt{50}$ **116.** $\sqrt{\frac{1}{2}}+7\sqrt{2}+\sqrt{18}$

117. $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{7}{\sqrt{2}}+\sqrt{18}$ **118.** $\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{5}{\sqrt{3}}+\sqrt{12}$ **119.** $\frac{5}{3}\sqrt{12}-\frac{4}{\sqrt{3}}+2\sqrt{48}$ **120.** $\frac{1}{2}\sqrt{18}-\frac{3}{\sqrt{2}}-9\sqrt{50}$

121. $\sqrt{\frac{3}{8}} + \sqrt{\frac{3}{2}}$

122. $\sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{5}{8}}$

123. $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}$

124. $\sqrt{\frac{3x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{3x}}$

125. $\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

126. $\frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{3}$

Simplifica.

127. $\frac{\sqrt[3]{r^2 s^4}}{\sqrt{rs}}$

128. $\frac{\sqrt{a^2 b^4}}{\sqrt[3]{ab^2}}$

129. $\frac{\sqrt[5]{x^4 y^6}}{\sqrt[3]{(xy)^2}}$

130. $\frac{\sqrt[6]{4m^8 n^4}}{\sqrt[4]{m^4 n^2}}$

131. $\frac{\sqrt{(a+b)^4}}{\sqrt[3]{a+b}}$

132. $\frac{\sqrt[3]{c+2}}{\sqrt[4]{(c+2)^3}}$

133. $\frac{\sqrt[5]{(a+2b)^4}}{\sqrt[3]{(a+2b)^2}}$

134. $\frac{\sqrt[6]{(r+3)^5}}{\sqrt[3]{(r+3)^5}}$

Resolución de problemas

135. Iluminación de una luz Bajo ciertas condiciones, la fórmula

$$d = \sqrt{\frac{72}{I}}$$

se usa para mostrar la relación entre la iluminación sobre un objeto, I, en lúmenes por metro; y la distancia, d, en metros, a la que el objeto está de la fuente luminosa. Si la iluminación sobre una persona de pie, cerca de una fuente luminosa, es de 5.3 lúmenes por metro, ¿qué tan lejos está la persona de la fuente luminosa?

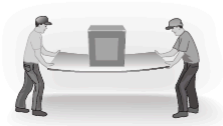


136. Resistencia de una tabla Cuando se aplica suficiente presión sobre una tabla de conglomerado, la tabla se rompe. Mientras más gruesa sea la tabla de conglomerado, mayor será la presión que se necesitará aplicar antes de que se rompa la tabla. La fórmula

$$T = \sqrt{\frac{0.05\,LB}{M}}$$

relaciona el grosor de una tabla de conglomerado específica, T, en pulgadas, la longitud de la tabla, L, en pulgadas, la carga de la tabla que producirá la ruptura, B, en libras, y el módulo de ruptura, M, en libras por pulgada cuadrada. El módulo de ruptura es una constante determinada por pruebas muestrales, sobre el tipo específico de tabla conglomerada.

Determina el grosor de una tabla de conglomerado de 36 pulgadas de largo, si el módulo de ruptura es de 2560 libras por pulgada cuadrada y la tabla se rompe cuando se aplican 800 libras.



137. Volumen de un acuario Un nuevo restaurante quiere tener un acuario esférico en su vestíbulo. El radio, r, en pulgadas, de un acuario esférico, puede determinarse mediante la fórmula

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

donde V es el volumen del acuario en pulgadas cúbicas. Determina el radio de un acuario esférico, cuyo volumen es de 7238.23 pulgadas cúbicas.

138. Volumen de bidones Se usan bidones cilíndricos para contener grandes cantidades de pintura, químicos industriales y otros líquidos. Se pueden fabricar bidones para contener diferentes volúmenes. El radio, r, en pulgadas, de un bidón cilíndrico, puede determinarse mediante la fórmula

$$r = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{V}{3\pi}}$$

donde V es el volumen del bidón en pulgadas cúbicas. Determina el radio de un bidón cilíndrico cuyo volumen es de 21714.69 pulgadas cúbicas.



139. Números consecutivos Si consideras el conjunto de números naturales consecutivos 1, 2, 3, 4, ..., n como la población, la desviación estándar, σ, que es una medida de la dispersión de los datos en torno a la media, se puede calcular mediante la fórmula

$$\sigma = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}}$$

donde n representa el número de números naturales en la población. Determina la desviación estándar para los primeros 100 números naturales consecutivos.

140. Desviación estándar Determina la desviación estándar de los primeros 200 números naturales consecutivos. Consulta el ejercicio 139.

Problemas de desafío

En cursos de matemáticas superiores, puede ser necesario racionalizar los numeradores de expresiones radicales. Racionaliza los numeradores de las siguientes expresiones. (Tus respuestas contendrán radicales en los denominadores.)

141. $\dfrac{5-\sqrt{5}}{6}$ **142.** $\dfrac{6\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x}$ **143.** $\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ **144.** $\dfrac{\sqrt{2(x+h)}-\sqrt{2x}}{h}$

Ejercicios conceptuales y de redacción

145. ¿Cuál es mayor, $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ o $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$? Explica.

146. ¿Cuál es mayor, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ o $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$? Explica.

147. ¿Cuál es mayor, $\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}$ o $2+\sqrt{3}$? (No uses calculadora.) Explica cómo determinaste tu respuesta.

148. ¿Cuál es mayor, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{75}$ o $\dfrac{2}{\sqrt{12}}+\sqrt{48}+2\sqrt{3}$? (No uses calculadora.) Explica cómo determinaste tu respuesta.

149. Considera las funciones $f(x)=x^{a/2}$ y $g(x)=x^{b/3}$.

a) Indica tres valores para a, que resultarán en que $x^{a/2}$ sea un cuadrado perfecto.

b) Indica tres valores para b, que resultarán en que $x^{b/3}$ sea un cubo perfecto.

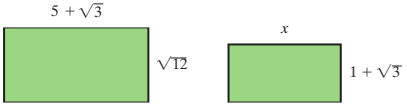
c) Si $x \geq 0$, determina $(f \cdot g)(x)$.

d) Si $x \geq 0$, determina $(f/g)(x)$.

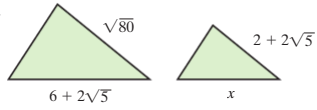
Actividad grupal

Figuras similares *Los siguientes dos ejercicios, reforzarán muchos de los conceptos presentados en este capítulo. Trabaja cada problema en equipo. Asegúrense de que cada miembro del equipo entienda cada paso para obtener la solución. Las figuras en cada ejercicio son similares. Para cada ejercicio, usa una proporción para determinar la longitud del lado x. Escribe la respuesta en forma radical con un denominador racionalizado.*

150.



151.



Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **152.** Resuelve la ecuación $A=\dfrac{1}{2}h(b_1+b_2)$ para b_2.

[2.4] **153. Vehículos en movimiento** Dos automóviles parten desde West Point al mismo tiempo y viajan en direcciones opuestas. Uno viaja 10 millas por hora más rápido que el otro. Si los dos automóviles están separados 270 millas después de 3 horas, determina la rapidez de cada automóvil.

[5.2] **154.** Multiplica $(x-2)(4x^2+9x-2)$.

[6.4] **155.** Resuelve $\dfrac{x}{2}-\dfrac{4}{x}=-\dfrac{7}{2}$.

7.6 Resolución de ecuaciones radicales

1. Resolución de ecuaciones que contienen un radical
2. Resolución de ecuaciones que contienen dos radicales
3. Resolución de ecuaciones que contienen dos términos radicales y un término no radical
4. Resolución de problemas aplicados usando ecuaciones radicales
5. Despeje de una variable en un radicando

1 Resolución de ecuaciones que contienen un radical

Ecuación radical

Una **ecuación radical** es una ecuación que contiene una variable en un radicando.

Ejemplos de ecuaciones radicales

$$\sqrt{x} = 5, \qquad \sqrt[3]{y+4} = 9, \qquad \sqrt{x-2} = 7 + \sqrt{x+8}$$

Para resolver ecuaciones radicales

1. Reescribe la ecuación, de modo que un radical que contenga una variable, esté por sí solo (despejado) en un lado de la ecuación.
2. Eleva cada lado de la ecuación a una potencia al índice del radical.
3. Reduce los términos semejantes.
4. Si la ecuación todavía contiene un término con una variable en un radicando, repite los pasos del 1 al 3.
5. Resuelve la ecuación resultante en términos de la variable.
6. Verifica todas las soluciones en la ecuación original para evitar soluciones extrañas.

Siempre que ambos lados de una ecuación se elevan a una potencia par, se corre el riesgo de introducir una solución aparente, o falsa. Por tanto, debes verificar los resultados en la ecuación original.

EJEMPLO 1 Resuelve.

a) $\sqrt{x} = 7$ **b)** $\sqrt{x} = -5$

Solución

a) El radical que contiene la variable, $\sqrt{x}$, ya está despejado. Eleva al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$\sqrt{x} = 7$$
$$(\sqrt{x})^2 = (7)^2$$
$$x = 49$$

Dado que ambos lados de la ecuación se elevaron a una potencia *par*, debes verificar el resultado, $x = 49$.

Verifica $\sqrt{x} = 7$

$\sqrt{49} \stackrel{?}{=} 7$

$7 = 7$ Verdadero

b) El radical que contiene la variable, $\sqrt{x}$, ya está despejado. Eleva al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$\sqrt{x} = -5$$
$$(\sqrt{x})^2 = (-5)^2$$
$$x = 25$$

Dado que ambos lados de la ecuación se elevaron a una potencia *par*, debes verificar el resultado, $x = 25$.

Verifica $\sqrt{x} = -5$

$\sqrt{25} \stackrel{?}{=} -5$

$5 = -5$ Falso

Comprende el Álgebra

Siempre que ambos lados de una ecuación se eleven a una potencia *par*, se corre el riesgo de introducir una solución aparente o falsa. Por tanto, debes verificar las respuestas. El ejemplo 1 **b)** muestra que, cuando ambos lados de la ecuación $\sqrt{x} = -5$ se elevan al cuadrado, se obtiene el resultado $x = 25$. Al verificar este resultado en la ecuación original puedes ver que 25 es una solución aparente.

La verificación muestra que 25 no es una solución. La respuesta al inciso **b)** es "sin solución". Observa que, en la ecuación original $\sqrt{x} = -5$, $\sqrt{x}$ representa un número positivo mientras que -5 es un número negativo.

Ahora resuelve el ejercicio 11

EJEMPLO 2 Resuelve.

a) $\sqrt{x-4} - 6 = 0$ **b)** $\sqrt[3]{x} + 10 = 8$ **c)** $\sqrt{x} + 3 = 0$

Solución El primer paso en cada parte, será despejar el término que contiene el radical.

a)
$$\begin{aligned} \sqrt{x-4} - 6 &= 0 \\ \sqrt{x-4} &= 6 && \text{Despeja el radical que contenga la variable.} \\ \left(\sqrt{x-4}\right)^2 &= 6^2 && \text{Eleva al cuadrado ambos lados.} \\ x - 4 &= 36 && \text{Resuelve para la variable.} \\ x &= 40 \end{aligned}$$

Una verificación mostrará que 40 es la solución.

b)
$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x} + 10 &= 8 \\ \sqrt[3]{x} &= -2 && \text{Despeja el radical que contenga la variable.} \\ \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 &= (-2)^3 && \text{Eleva al cubo ambos lados.} \\ x &= -8 \end{aligned}$$

Una verificación mostrará que -8 es la solución.

c)
$$\begin{aligned} \sqrt{x} + 3 &= 0 \\ \sqrt{x} &= -3 && \text{Despeja el radical que contenga la variable.} \\ \left(\sqrt{x}\right)^2 &= (-3)^2 && \text{Eleva al cuadrado ambos lados.} \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Verifica
$$\begin{aligned} \sqrt{x} + 3 &= 0 \\ \sqrt{9} + 3 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 3 + 3 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 6 &= 0 \quad \text{Falso} \end{aligned}$$

Una verificación muestra que 9 no es una solución. La respuesta al inciso **c)** es "sin solución". Probablemente te hayas dado cuenta de que no hay solución al problema, cuando obtienes la ecuación $\sqrt{x} = -3$, porque $\sqrt{x}$ no puede ser igual a un número real negativo.

Ahora resuelve el ejercicio 19

EJEMPLO 3 Resuelve $\sqrt{2x-3} = x - 3$.

Solución Dado que el radical ya está despejado, eleva al cuadrado ambos lados de la ecuación, lo que resulta en una ecuación cuadrática.

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{2x-3}\right)^2 &= (x-3)^2 \\ 2x - 3 &= (x-3)(x-3) \\ 2x - 3 &= x^2 - 6x + 9 \\ 0 &= x^2 - 8x + 12 \end{aligned}$$

Esta es una ecuación cuadrática. Ahora factoriza y usa la propiedad de factor cero para resolver la ecuación cuadrática.

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 12 &= 0 \\ (x-6)(x-2) &= 0 \\ x - 6 = 0 \quad \text{o} \quad & x - 2 = 0 \\ x = 6 \quad \text{o} \quad & x = 2 \end{aligned}$$

Verifica

$x = 6$	$x = 2$
$\sqrt{2x-3} = x-3$	$\sqrt{2x-3} = x-3$
$\sqrt{2(6)-3} \stackrel{?}{=} 6-3$	$\sqrt{2(2)-3} \stackrel{?}{=} 2-3$
$\sqrt{9} \stackrel{?}{=} 3$	$\sqrt{1} \stackrel{?}{=} -1$
$3 = 3$ Verdadero	$1 = -1$ Falso

Por tanto, 6 es una solución, pero 2 no es una solución a la ecuación. El 2 es una solución aparente, porque 2 satisface la ecuación $(\sqrt{2x-3})^2 = (x-3)^2$, mas no la ecuación original, $\sqrt{2x-3} = x-3$.

Ahora resuelve el ejercicio 39

USA TU CALCULADORA GRAFICADORA

Puedes usar una calculadora graficadora para resolver o comprobar ecuaciones radicales. En el ejemplo 3 se determinó que la solución a $\sqrt{2x-3} = x-3$ es 6. Al graficar ambas:

$$Y_1 = \sqrt{2x-3} \quad \text{y} \quad Y_2 = x-3$$

en una calculadora graficadora, puedes ver, a partir de la gráfica en la **Figura 7.3**, que las dos funciones parecen intersecar en $x = 6$.

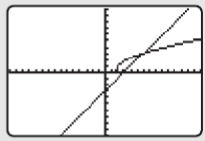


FIGURA 7.3

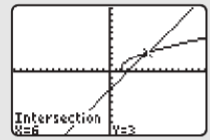


FIGURA 7.4

También se puede usar la función *intersect* para determinar las soluciones a ecuaciones radicales. La **Figura 7.4** muestra que las dos gráficas intersecan cuando $x = 6$ y $y = 3$.

EJEMPLO 4 Resuelve $x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$.

Solución Primero, despeja el término radical escribiendo el término radical por sí solo en un lado de la ecuación.

$$\begin{aligned} x - 2\sqrt{x} - 3 &= 0 \\ -2\sqrt{x} &= -x + 3 \\ 2\sqrt{x} &= x - 3 \end{aligned}$$

Ahora eleva al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$\begin{aligned} (2\sqrt{x})^2 &= (x-3)^2 \\ 4x &= x^2 - 6x + 9 \\ 0 &= x^2 - 10x + 9 \\ 0 &= (x-1)(x-9) \\ x - 1 = 0 \quad &\text{o} \quad x - 9 = 0 \\ x = 1 \quad &\quad x = 9 \end{aligned}$$

Verifica

$x = 1$	$x = 9$
$x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$	$x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$
$1 - 2\sqrt{1} - 3 \stackrel{?}{=} 0$	$9 - 2\sqrt{9} - 3 \stackrel{?}{=} 0$
$1 - 2(1) - 3 \stackrel{?}{=} 0$	$9 - 2(3) - 3 \stackrel{?}{=} 0$
$1 - 2 - 3 \stackrel{?}{=} 0$	$9 - 6 - 3 \stackrel{?}{=} 0$
$-4 = 0$ Falso	$3 - 3 \stackrel{?}{=} 0$
	$0 = 0$ Verdadero

La solución es 9. El valor 1 es una solución aparente.

Ahora resuelve el ejercicio 43

2 Resolución de ecuaciones que contienen dos radicales

Ahora se revisarán algunas ecuaciones que contienen dos radicales.

EJEMPLO 5 Resuelve $\sqrt{4x^2+8} = 2\sqrt{x^2+x-5}$.

Solución Dado que los dos radicales aparecen en diferentes lados de la ecuación, ambos lados de la ecuación se elevan al cuadrado.

$$\begin{aligned}
\sqrt{4x^2+8} &= 2\sqrt{x^2+x-5} \\
\left(\sqrt{4x^2+8}\right)^2 &= \left(2\sqrt{x^2+x-5}\right)^2 && \text{Eleva al cuadrado ambos lados.} \\
4x^2+8 &= 4\left(x^2+x-5\right) \\
4x^2+8 &= 4x^2+4x-20 && \text{Uso de la propiedad distributiva.} \\
8 &= 4x-20 && 4x^2 \text{ se restó de ambos lados.} \\
28 &= 4x \\
7 &= x
\end{aligned}$$

Una verificación mostrará que 7 es la solución.

Ahora resuelve el ejercicio 29

A veces, las ecuaciones se proporcionan con exponentes racionales en lugar de radicales. El ejemplo 6, ilustra una de dichas ecuaciones.

EJEMPLO 6 Para $f(x) = 3(x-2)^{1/3}$ y $g(x) = (17x-14)^{1/3}$, determina todos los valores de x para los cuales $f(x) = g(x)$.

Solución Iguala entre sí las dos funciones, y resuelve en términos de x.

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(x) \\
3(x-2)^{1/3} &= (17x-14)^{1/3} \\
\left[3(x-2)^{1/3}\right]^3 &= \left[(17x-14)^{1/3}\right]^3 && \text{Eleva al cubo ambos lados.} \\
3^3(x-2) &= 17x-14 \\
27(x-2) &= 17x-14 \\
27x-54 &= 17x-14 \\
10x-54 &= -14 \\
10x &= 40 \\
x &= 4
\end{aligned}$$

Una verificación mostrará que la solución es 4. Si sustituyes 4, tanto en $f(x)$ como en $g(x)$, descubrirás que ambas se simplifican como $3\sqrt[3]{2}$. Verifica esto ahora.

Ahora resuelve el ejercicio 67

Comprende el Álgebra

Las funciones, del ejemplo 6, también se podrían escribir usando radicales. Por ende, la pregunta también se podría responder al resolver la ecuación:

$$3\sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{17x-14}$$

3 Resolución de ecuaciones que contienen dos términos radicales y un término no radical

Cuando una ecuación radical contiene dos términos radicales y un tercer término no radical, en ocasiones, necesitarás elevar ambos lados de la ecuación dos veces a una potencia dada, para obtener la solución. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 7.

EJEMPLO 7 Resuelve $\sqrt{5x-1} - \sqrt{3x-2} = 1$.

Solución Debes despejar un término radical en un lado de la ecuación. Comienza por sumar $\sqrt{3x-2}$ a ambos lados de la ecuación, para despejar $\sqrt{5x-1}$. Luego, eleva al cuadrado ambos lados de la ecuación y reduce términos semejantes.

$$\begin{aligned}
\sqrt{5x-1} &= 1+\sqrt{3x-2} && \text{Despeja } \sqrt{5x-1}.\\
\left(\sqrt{5x-1}\right)^2 &= \left(1+\sqrt{3x-2}\right)^2 && \text{Eleva al cuadrado ambos lados.}\\
5x-1 &= \left(1+\sqrt{3x-2}\right)\left(1+\sqrt{3x-2}\right) && \text{Escribe como producto.}\\
5x-1 &= 1+\sqrt{3x-2}+\sqrt{3x-2}+\left(\sqrt{3x-2}\right)^2 && \text{Multiplica.}\\
5x-1 &= 1+2\sqrt{3x-2}+3x-2 && \text{Reduce términos semejantes; simplifica.}\\
5x-1 &= 3x-1+2\sqrt{3x-2} && \text{Reduce términos semejantes.}\\
2x &= 2\sqrt{3x-2} && \text{Despeja el término radical.}\\
x &= \sqrt{3x-2} && \text{Ambos lados se dividen por 2.}
\end{aligned}$$

Aquí se ha despejado el término radical restante. Ahora nuevamente eleva al cuadrado ambos lados de la ecuación y resuelve en términos de x.

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt{3x-2}\\
x^2 &= \left(\sqrt{3x-2}\right)^2 && \text{Eleva al cuadrado ambos lados.}\\
x^2 &= 3x-2\\
x^2-3x+2 &= 0\\
(x-2)(x-1) &= 0\\
x-2=0 \quad &\text{o} \quad x-1=0\\
x=2 \quad &\qquad x=1
\end{aligned}$$

Una verificación mostrará que, tanto 2 como 1, son soluciones de la ecuación.

Ahora resuelve el ejercicio 61

CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

En el capítulo 5, se afirmó que $(a+b)^2 \neq a^2+b^2$. Ten cuidado cuando eleves al cuadrado un binomio como $1+\sqrt{x}$.

CORRECTO

$$\begin{aligned}
\left(1+\sqrt{x}\right)^2 &= \left(1+\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)\\
&\quad\ \text{P}\quad\ \text{I}\quad\ \text{E}\quad\ \text{S}\\
&= 1+\sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x}\sqrt{x}\\
&= 1+2\sqrt{x}+x
\end{aligned}$$

INCORRECTO

$$\left(1+\sqrt{x}\right)^2 = 1^2+\left(\sqrt{x}\right)^2 = 1+x$$

EJEMPLO 8 Para $f(x)=\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-2}$, determina todos los valores de x, para los cuales $f(x)=1$.

Solución Sustituye 1 por $f(x)$. Esto da que:

$$1=\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-2}$$

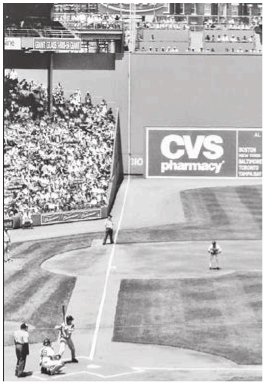
Dado que esta es la misma ecuación que se resolvió en el ejemplo 7, las respuestas son $x=2$ y $x=1$. Verifica por ti mismo que $f(2)=1$ y $f(1)=1$.

Ahora resuelve el ejercicio 121

4 Resolución de problemas aplicados usando ecuaciones radicales

Ahora se analizarán algunas de las muchas aplicaciones de los radicales.

EJEMPLO 9 **El monstruo verde** En el Fenway Park, donde juegan béisbol los Medias Rojas de Boston, la distancia desde la placa de home, por la línea de la tercera base, hasta el fondo de la pared en el jardín izquierdo, es de 310 pies. En el jardín izquierdo, al final de la línea de base, hay una pared verde perpendicular al terreno que mide 37 pies de alto. Esta pared verde se conoce comúnmente como *el monstruo verde* (observa la fotografía de la siguiente página). Determina la distancia desde la placa de home, hasta lo alto del monstruo verde a lo largo de la línea de tercera base.



Solución Entiende La **Figura 7.5** ilustra el problema. Se pide determinar la distancia desde la placa de home, hasta lo alto de la pared en el jardín izquierdo.

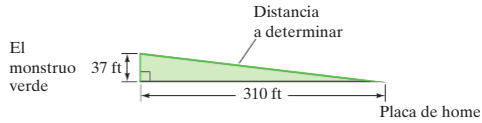


FIGURA 7.5

Traduce Para resolver el problema, usa el teorema de Pitágoras, el cual se estudió anteriormente: cateto^2 + cateto^2 = hipotenusa^2, o $a^2 + b^2 = c^2$.

$$310^2 + 37^2 = c^2 \qquad \text{Sustituye los valores conocidos.}$$

Realiza
$$96\,100 + 1\,369 = c^2$$
$$97\,469 = c^2$$
$$\sqrt{97\,469} = \sqrt{c^2} \qquad \text{Saca raíz cuadrada de ambos lados.}$$
$$\sqrt{97\,469} = c \qquad \text{*Ve nota al pie.}$$
$$312.20 \approx c$$

Responde La distancia desde la placa de home, hasta lo alto de la pared, es de aproximadamente 312.20 pies.

Ahora resuelve el ejercicio 99

EJEMPLO 10 **Periodo de un péndulo** El tiempo que tarda un péndulo en hacer una oscilación completa de ida y vuelta, se llama *periodo* del péndulo. Observa la **Figura 7.6.** El periodo de un péndulo, T, en segundos, puede determinarse mediante la fórmula $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$, donde L es la longitud del péndulo en pies. Determina el periodo de un péndulo, si su longitud es de 5 pies.



FIGURA 7.6

Solución Sustituye 5 por L en la fórmula. Usa una calculadora que tenga una tecla $\boxed{\pi}$ para aproximar π.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$$
$$\approx 2\pi\sqrt{\frac{5}{32}} \approx 2.48$$

En consecuencia, el periodo es de más o menos 2.48 segundos. Si tienes un reloj de péndulo con un péndulo de 5 pies, éste tardará aproximadamente 2.48 segundos en balancearse de ida y vuelta.

Ahora resuelve el ejercicio 105

5 Despeje de una variable en un radicando

Muchas fórmulas involucran radicales que contienen variables. En ocasiones, es necesario resolver para una variable que es parte de un radicando. Para hacerlo, sigue el mismo procedimiento general que se ha usado hasta el momento.

EJEMPLO 11 **Margen de error** Una fórmula en estadística, para determinar el margen de error, E, es $E = t\frac{s}{\sqrt{n}}$.

a) Determina E si $t = 2.064$, $s = 15$ y $n = 25$.
b) Resuelve esta ecuación en términos de n.

Solución

a) $E = t\frac{s}{\sqrt{n}} = 2.064\left(\frac{15}{\sqrt{25}}\right) = 2.064\left(\frac{15}{5}\right) = 6.192$

b) Primero elimina la fracción al multiplicar ambos lados de la ecuación por $\sqrt{n}$.

*$c^2 = 97\,469$ tiene dos soluciones: $c = \sqrt{97\,469}$ y $c = -\sqrt{97\,469}$ Como se busca resolver en términos de una longitud, la cual debe ser una cantidad positiva, se usa la raíz positiva.

$$E = t\frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$E\sqrt{n} = \left(t\frac{s}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{n} \qquad \text{Elimina la fracción.}$$

$$E\sqrt{n} = ts$$

$$\sqrt{n} = \frac{ts}{E} \qquad \text{Despeja el radical al dividir ambo lados por } \mathbf{E}.$$

$$(\sqrt{n})^2 = \left(\frac{ts}{E}\right)^2 \qquad \text{Eleva al cuadrado ambos lados.}$$

$$n = \left(\frac{ts}{E}\right)^2 \quad \text{o} \quad n = \frac{t^2s^2}{E^2}$$

Ahora resuelve el ejercicio 75

7.6 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

original radical despeja eleva eleva al cuadrado índice eleva al cubo extraña raíz radicando

1. Una ecuación _____ es una ecuación que contiene una variable en el radicando.
2. Siempre que ambos lados de una ecuación se elevan a una potencia par, se podría introducir una solución _____, o falsa.
3. Para determinar si el resultado de resolver una ecuación es una solución aparente, debes verificar el resultado en la ecuación _____.
4. Cuando resuelves una ecuación radical, reescribes la ecuación de modo que un radical que contenga una variable se _____.
5. Para eliminar un radical despejado de una ecuación, eleva cada lado de la ecuación al _____ del radical.
6. Para eliminar el radical en la ecuación $\sqrt{2x-5} = 7$, _____ ambos lados de la ecuación.
7. Para eliminar el radical en la ecuación $\sqrt[3]{x+1} = 2$, _____ ambos lados de la ecuación.
8. Para eliminar el radical en la ecuación $\sqrt[4]{x-1} = 3$, _____ ambos lados de la ecuación a la cuarta potencia.

Practica tus habilidades

Resuelve y comprueba tu(s) solución(es). Si la ecuación no tiene solución, indícalo.

9. **a)** $\sqrt{x} = 3$ **b)** $\sqrt[3]{x} = 3$ **c)** $\sqrt[4]{x} = 3$
10. **a)** $\sqrt{x} = 4$ **b)** $\sqrt[3]{x} = 4$ **c)** $\sqrt[4]{x} = 4$
11. **a)** $\sqrt{x} = -3$ **b)** $\sqrt[3]{x} = -3$ **c)** $\sqrt[4]{x} = -3$
12. **a)** $\sqrt{x} = -4$ **b)** $\sqrt[3]{x} = -4$ **c)** $\sqrt[4]{x} = -4$
13. **a)** $\sqrt{x} - 2 = 0$ **b)** $\sqrt{x} + 2 = 0$ **c)** $\sqrt[3]{x} - 2 = 0$ **d)** $\sqrt[3]{x} + 2 = 0$
14. **a)** $\sqrt{x} - 5 = 0$ **b)** $\sqrt{x} + 5 = 0$ **c)** $\sqrt[3]{x} - 5 = 0$ **d)** $\sqrt[3]{x} + 5 = 0$
15. $\sqrt{2x+3} = 5$
16. $\sqrt{3x-5} = 2$
17. $\sqrt[3]{7x-6} = 4$
18. $\sqrt[3]{2x+11} = 3$
19. $\sqrt[3]{3x} + 4 = 7$
20. $\sqrt{7x} - 9 = -2$
21. $5\sqrt[3]{7x-1} = 15$
22. $2\sqrt{4x+5} = 14$
23. $\sqrt[4]{x+10} = 3$
24. $\sqrt[4]{3x-2} = 2$
25. $\sqrt{x-1} + 3 = 8$
26. $\sqrt{x+3} + 4 = 5$
27. $\sqrt{3x-7} = \sqrt{x+5}$
28. $\sqrt{5x+4} = \sqrt{8x-5}$
29. $2\sqrt[3]{3d+1} = \sqrt[3]{5d-11}$
30. $\sqrt[3]{4k-19} = 3\sqrt[3]{2k+3}$
31. $\sqrt{2x-7} + 3 = 0$
32. $\sqrt{3x+4} + 10 = 0$

33. $\sqrt{m^2 + 6m - 4} = m$ **34.** $\sqrt{x^2 + 12x + 3} = -x$ **35.** $\sqrt{a^2 + 3a + 9} = a$

36. $\sqrt{x^2 + 3x + 12} = x$ **37.** $\sqrt{2x + 35} = x$ **38.** $\sqrt{6x + 55} = x$

39. $\sqrt{x + 1} = x + 1$ **40.** $\sqrt{3y - 9} = y - 3$ **41.** $\sqrt{2y + 5} + 5 - y = 0$

42. $\sqrt{8z + 25} - z - 2 = 0$ **43.** $\sqrt{x} + 6x = 1$ **44.** $3\sqrt{x} + 10x = 1$

45. $\sqrt[3]{4x^2 - 12x} = 3$ **46.** $\sqrt[3]{6y^2 - 13y} = 2$ **47.** $(4a + 5)^{1/2} - 3 = 0$

48. $(3b - 5)^{1/2} - 7 = 0$ **49.** $(2a - 7)^{1/2} + 4 = -7$ **50.** $(5b - 1)^{1/2} + 8 = 6$

51. $(2a + 9)^{1/2} - a + 12 = 9$ **52.** $(3b + 4)^{1/2} - b + 5 = 3$ **53.** $(5x + 7)^{1/4} = (9x + 1)^{1/4}$

54. $(5b + 3)^{1/4} = (2b + 17)^{1/4}$

Resuelve. Tendrás que elevar al cuadrado dos veces ambos lados de la ecuación, para eliminar todos los radicales.

55. $\sqrt{x} + 1 = \sqrt{x + 1}$ **56.** $\sqrt{x} - 1 = \sqrt{x - 1}$ **57.** $\sqrt{x + 2} = 3 - \sqrt{x}$

58. $\sqrt{x + 1} = 2 - \sqrt{x}$ **59.** $\sqrt{x + 3} = \sqrt{x} - 3$ **60.** $\sqrt{y} + 5 = \sqrt{y + 5}$

61. $\sqrt{x + 7} = 6 - \sqrt{x - 5}$ **62.** $\sqrt{b - 3} = 4 - \sqrt{b + 5}$ **63.** $\sqrt{4x - 3} = 2 + \sqrt{2x - 5}$

64. $\sqrt{3a + 1} = \sqrt{a - 4} + 3$ **65.** $\sqrt{y + 1} = \sqrt{y + 10} - 3$ **66.** $\sqrt{y + 1} = 2 + \sqrt{y - 7}$

Para cada par de funciones, determina todos los valores reales de x donde $f(x) = g(x)$.

67. $f(x) = \sqrt[3]{5x - 19}, g(x) = \sqrt[3]{6x - 23}$ **68.** $f(x) = \sqrt{2x + 3}, g(x) = \sqrt{x + 5}$

69. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}, g(x) = \sqrt{x - 2}$ **70.** $f(x) = \sqrt[3]{9x^2 + 5x + 1}, g(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 4x + 13}$

71. $f(x) = 2(8x + 24)^{1/3}, g(x) = 4(2x - 2)^{1/3}$ **72.** $f(x) = 2(3x - 1)^{1/3}, g(x) = 3(2x - 3)^{1/3}$

Resuelve cada fórmula en términos de la variable indicada.

73. $p = \sqrt{2v}$, para v **74.** $l = \sqrt{4r}$, para r **75.** $v = \sqrt{2gh}$, para g

76. $j = \sqrt{3km}$, para k **77.** $v = \sqrt{\frac{FR}{M}}$, para F **78.** $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$, para E

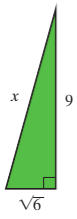
79. $x = \sqrt{\frac{m}{k}}\, V_0$, para m **80.** $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$, para L **81.** $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$, para A

82. $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$, para V

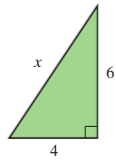
Resolución de problemas

Usa el teorema de Pitágoras para determinar la longitud del lado desconocido de cada triángulo. Escribe la respuesta como un radical en forma simplificada.

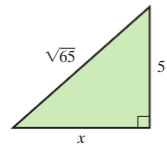
83.



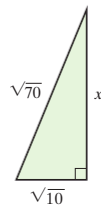
84.



85.



86.



Resuelve. Necesitarás elevar al cuadrado dos veces ambos lados de la ecuación.

87. $\sqrt{x+3} + \sqrt{x} = \sqrt{x+8}$

88. $\sqrt{2x} - \sqrt{x-4} = \sqrt{12-x}$

89. $\sqrt{4y+6} + \sqrt{y+5} = \sqrt{y+1}$

90. $\sqrt{r-1} - \sqrt{r+6} = \sqrt{r-9}$

91. $\sqrt{c+1} + \sqrt{c-2} = \sqrt{3c}$

92. $\sqrt{2b-2} + \sqrt{b-5} = \sqrt{4b}$

93. $\sqrt{a+2} - \sqrt{a-3} = \sqrt{a-6}$

94. $\sqrt{2t-1} + \sqrt{t-4} = \sqrt{3t+1}$

Resuelve. Necesitarás elevar al cuadrado dos veces ambos lados de la ecuación.

95. $\sqrt{2-\sqrt{x}} = \sqrt{x}$

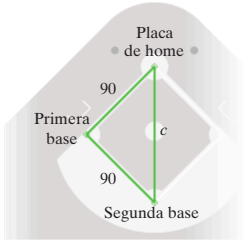
96. $\sqrt{6+\sqrt{x+4}} = \sqrt{2x-1}$

97. $\sqrt{2+\sqrt{x+1}} = \sqrt{7-x}$

98. $\sqrt{1+\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-6}$

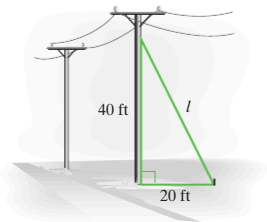
En los ejercicios 99-114, cuando sea apropiado, redondea las respuestas a la centésima más cercana.

99. Diamante de béisbol Un diamante de béisbol reglamentario, es un cuadrado con 90 pies entre bases. ¿Qué tan lejos de la placa de home está la segunda base?

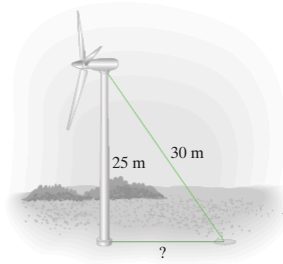


100. Diamante de béisbol de ligas pequeñas Un diamante de béisbol de ligas pequeñas, es un cuadrado con 60 pies entre bases (consulta el ejercicio 99). ¿Qué tan lejos de la placa de home está la segunda base?

101. Cable de un poste telefónico Un poste telefónico está en ángulo recto, o 90°, con el suelo, como se muestra en la figura. Determina la longitud del cable que se conecta al poste 40 pies arriba del suelo y que está anclado al suelo a 20 pies de la base del poste.



102. Cable de sujeción de una turbina de viento Un cable de sujeción conectado a un poste que sostiene una turbina de viento, tiene 30 metros de longitud y está unido al poste a una altura de 25 metros sobre el suelo (observa el diagrama). ¿Qué tan lejos de la base del poste estará anclado al suelo el cable de sujeción?



103. Jardín de flores Un jardín de flores rectangular, mide 25 metros por 32 metros. Determina la longitud de la diagonal para el jardín.



104. Diagonal de una caja La parte superior de una caja rectangular, mide 20 pulgadas por 32 pulgadas. Determina la longitud de la diagonal para la parte superior de la caja.

105. Periodo de un péndulo La fórmula para el periodo de un péndulo, en el sistema inglés, es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

donde T es el periodo en segundos, l es su longitud en pies y g es la aceleración de la gravedad. En la Tierra, la gravedad es de 32 ft/s^2. Cuando se usa en la Tierra, la fórmula se convierte en:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{32}}$$

a) Determina el periodo de un péndulo, cuya longitud es de 8 pies.

b) Si la longitud de un péndulo se duplica, ¿qué efecto tendrá esto sobre el periodo?

c) La gravedad en la Luna es 1/6 la de la Tierra. Si un péndulo tiene un periodo de 2 segundos en la Tierra, ¿cuál será el periodo del mismo péndulo en la Luna?

106. Flujo sanguíneo en una arteria La fórmula

$$r = \sqrt[4]{\frac{8\mu l}{\pi R}}$$

se usa para determinar el movimiento de la sangre, a través de las arterias. En la fórmula, R representa la resistencia al flujo sanguíneo, μ es la viscosidad de la sangre, l es la longitud de la arteria y r es el radio de la arteria. Resuelve esta ecuación en términos de R.

107. Días terrestres Para cualquier planeta en el sistema solar, su "año" es el tiempo que el planeta tarda en dar una vuelta completa alrededor del Sol. El número de días terrestres en un año de un planeta dado, N, se aproxima mediante la fórmula $N = 0.2\left(\sqrt{R}\right)^3$, donde R es la distancia media del planeta al Sol en millones de kilómetros.

a) Determina el número de días terrestres en el año del planeta Tierra, cuya distancia media al Sol es de 149.4 millones de kilómetros.

b) Determina el número de días terrestres en el año del planeta Mercurio, cuya distancia media al Sol es de 58 millones de kilómetros.

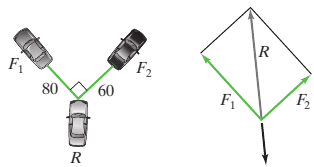
108. Radio de un aro de baloncesto Cuando se te proporciona el área de un círculo, su radio puede determinarse mediante la fórmula $r = \sqrt{A/\pi}$.



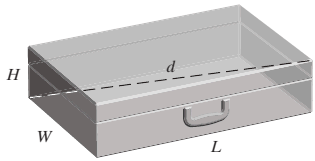
a) Determina el radio de un aro de baloncesto, si el área encerrada por el aro es de 254.47 pulgadas cuadradas.

b) Si el diámetro de un balón es de 9 pulgadas, ¿cuál es la mínima distancia posible entre el aro y el balón, cuando el centro del balón está en el centro del aro?

109. Fuerzas sobre un automóvil Cuando dos fuerzas, F_1 y F_2, jalan en ángulos rectos mutuamente como se ilustra a continuación, la resultante, o la fuerza efectiva, R, se puede determinar mediante la fórmula $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$. Dos automóviles intentan sacar a un tercer automóvil del fango, como se ilustra. Si el automóvil A ejerce una fuerza de 80 libras y el automóvil B ejerce una fuerza de 60 libras, determina la fuerza resultante sobre el automóvil atascado en el fango.



110. Diagonal de una maleta Una fórmula para la longitud de una diagonal, desde la esquina superior de una caja hasta la esquina inferior opuesta, es $d = \sqrt{L^2 + W^2 + H^2}$, donde L, W y H son largo, ancho y alto, respectivamente.



a) Determina la longitud de la diagonal de una maleta, con 22 pulgadas de largo, 15 pulgadas de ancho y 12 pulgadas de alto.

b) Si largo, ancho y alto, se duplican, ¿cómo cambiará la diagonal?

c) Resuelve la fórmula en términos de W.

111. Movimiento de una ola Una fórmula usada en el estudio de movimiento ondulatorio en agua poco profunda, es $c = \sqrt{gH}$, en la cual, c es la velocidad de la ola, H es la profundidad del agua y g es la aceleración debido a la gravedad. Determina la velocidad de ola, si la profundidad del agua es de 10 pies. (Usa $g = 32$ ft/s^2.)



112. Velocidad de escape La velocidad de escape, o la velocidad necesaria para que una nave espacial escape del campo gravitacional de un planeta, se determina mediante la fórmula $v_e = \sqrt{2gR}$, donde g es la aceleración de la gravedad del planeta y R es el radio del planeta. Determina la velocidad de escape para la Tierra, en metros por segundo, donde $g = 9.75$ metros por segundo al cuadrado, y $R = 6\,370\,000$ metros.

113. Objeto en caída La fórmula

$$t = \frac{\sqrt{19.6s}}{9.8}$$

se puede usar para determinar el tiempo t, en segundos, que un objeto ha caído, si tiene s metros de caída. Supón que se suelta un objeto desde un helicóptero y ha caído 100 metros. ¿Durante cuánto tiempo ha caído?

114. Rapidez del sonido Cuando el sonido viaja a través del aire (o cualquier gas), la velocidad de la onda sonora depende de la temperatura del aire (o gas). La velocidad, v, en metros por segundo, a temperatura ambiente, t, en grados Celsius, puede determinarse mediante la fórmula:

$$v = 331.3\sqrt{1 + \frac{t}{273}}$$

Determina la rapidez del sonido, en aire cuya temperatura es de 20°C (equivalente a 68°F).

Una fórmula que ya se mencionó, y que se estudiará con más detalle dentro de poco, es la fórmula cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

115. Determina x cuando $a = 1, b = 0, c = -4$.

116. Determina x cuando $a = 1, b = 1, c = -12$.

117. Determina x cuando $a = -1, b = 4, c = 5$.

118. Determina x cuando $a = 2, b = 5, c = -12$.

Dada $f(x)$, determina todos los valores de x, para los cuales $g(x)$ es el valor indicado.

119. $f(x) = \sqrt{x - 5}, f(x) = 5$

120. $f(x) = \sqrt[3]{2x + 3}, f(x) = 3$

121. $f(x) = \sqrt{3x^2 - 11} + 7, f(x) = 15$

122. $f(x) = 8 + \sqrt[3]{x^2 + 152}, f(x) = 14$

En los ejercicios 123 y 124, resuelve la ecuación.

123. $\sqrt{x^2 + 49} = \left(x^2 + 49\right)^{1/2}$

124. $\sqrt{x^2 - 16} = \left(x^2 - 16\right)^{1/2}$

Ejercicios conceptuales y de redacción

125. Considera la ecuación $\sqrt{x + 3} = -\sqrt{2x - 1}$. Explica por qué esta ecuación no puede tener solución real.

126. Considera la ecuación $-\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2}$. Al estudiar la ecuación, ¿puedes determinar su solución? Explica.

127. Considera la ecuación $\sqrt[3]{x^2} = -\sqrt[3]{x^2}$. Al estudiar la ecuación, ¿puedes determinar su solución? Explica.

128. Explica, sin resolver la ecuación, cómo puedes decir que $\sqrt{x - 3} + 4 = 0$ no tiene solución.

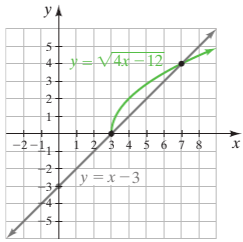
129. ¿La ecuación $\sqrt{x} = 5$ tiene una o dos soluciones? Explica.

130. ¿La ecuación $x^2 = 9$, tiene una o dos soluciones? Explica.

131. a) Considera la ecuación $\sqrt{4x - 12} = x - 3$. Si cada lado de la ecuación se iguala con y, se produce el siguiente sistema de ecuaciones:

$$y = \sqrt{4x - 12}$$
$$y = x - 3$$

En la siguiente figura, se ilustran las gráficas de las ecuaciones en el sistema.



A partir de las gráficas, determina los valores que parezcan ser soluciones de la ecuación $\sqrt{4x - 12} = x - 3$. Explica cómo determinaste tu respuesta.

b) Sustituye los valores determinados en el inciso **a)** en la ecuación original y determina si son las soluciones a la ecuación.

c) Resuelve algebraicamente la ecuación $\sqrt{4x - 12} = x - 3$ y observa si tu solución concuerda con los valores obtenidos en el inciso **a)**.

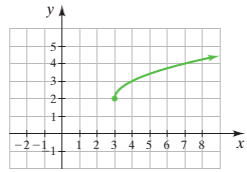
132. Si la gráfica de una función radical, $f(x)$, no interseca el eje x, entonces la ecuación $f(x) = 0$ no tiene soluciones reales. Explica por qué.

133. Supón que se proporciona una función racional $g(x)$. Si $g(4) = 0$, entonces la gráfica de $g(x)$ debe intersecar el eje x en 4. Explica por qué.

134. La gráfica de la ecuación $y = \sqrt{x - 3} + 2$ se ilustra en la siguiente figura.

a) ¿Cuál es el dominio de la función?

b) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $\sqrt{x - 3} + 2 = 0$ Menciona todas las soluciones. Explica cómo determinaste tu respuesta.



Problemas de desafío

Resuelve.

135. $\sqrt{\sqrt{x + 25} - \sqrt{x}} = 5$

136. $\sqrt{\sqrt{x + 9} + \sqrt{x}} = 3$

Resuelve cada ecuación en términos de n.

137. $z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ **138.** $z = \dfrac{p' - p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$

139. Intervalo de confianza En estadística, un "intervalo de confianza" es un rango de valores que es probable que contenga el valor verdadero de la población. Para un "intervalo de confianza de 95%", el límite inferior del rango, L_1, y el límite superior del rango, L_2, pueden determinarse mediante las siguientes fórmulas

$$L_1 = p - 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$L_2 = p + 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

donde p representa el porcentaje obtenido a partir de una muestra, y n es el tamaño de la muestra. Francisco, un estadista, toma una muestra de 36 familias y determina que, 60% de las entrevistadas, usan una máquina contestadora en su casa. Él puede estar 95% seguro de que el verdadero porcentaje de familias que usan una máquina contestadora en su hogar, está entre L_1 y L_2. Determina los valores de L_1 y L_2. Usa $p = 0.60$ y $n = 36$ en las fórmulas.

140. Media cuadrática La *media cuadrática* (o *raíz cuadrática media*, *RCM*) con frecuencia se usa en aplicaciones físicas. En sistemas de distribución de potencia, por ejemplo, voltajes y corrientes, por lo general, se refieren en términos de sus valores RCM. La media cuadrática de un conjunto de datos, se obtiene al elevar al cuadrado cada dato y al sumar los resultados (representados por Σx^2), después se divide el valor obtenido por el número de datos, n, y finalmente se toma la raíz cuadrada de este valor. La fórmula se puede expresar como:

$$\text{media cuadrática} = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}}$$

Determina la media cuadrática de los números 2, 4 y 10.

Actividad grupal

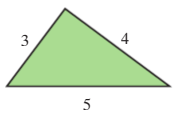
Discute y responde, en equipo, el ejercicio 141.

141. Fórmula de Herón El área de un triángulo es $A = \frac{1}{2}bh$. Si la altura no se conoce, pero sí se conocen las longitudes de los tres lados, se puede usar la fórmula de Herón para determinar el área, A. La fórmula de Herón es

$$A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

donde a, b y c, son las longitudes de los tres lados y

$$S = \frac{a+b+c}{2}$$

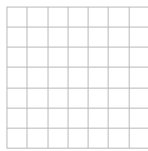


a) Que cada miembro del equipo use la fórmula de Herón para determinar el área de un triángulo, cuyos lados son 3 pulgadas, 4 pulgadas y 5 pulgadas.

b) Comparen sus respuestas para el inciso **a)**. Si algún miembro del equipo no obtuvo la respuesta correcta, asegúrense de identificar su error.

c) Cada miembro del equipo hará lo siguiente:

1. Dibuja un triángulo sobre la siguiente cuadrícula. Coloca cada vértice del triángulo en la intersección de dos líneas de la cuadrícula.



2. Mide, con una regla, la longitud de cada lado de tu triángulo.

3. Usa la fórmula de Herón para determinar el área de tu triángulo.

d) Comparen y discutan su trabajo del inciso **c)**.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **142.** Resuelve la fórmula $P_1P_2 - P_1P_3 = P_2P_3$ en términos de P_2.

[6.1] **143.** Simplifica $\dfrac{x(x-5) + x(x-2)}{2x-7}$.

Realiza cada operación indicada.

[6.1] **144.** $\dfrac{4a^2 - 9b^2}{4a^2 + 12ab + 9b^2} \cdot \dfrac{6a^2b}{8a^2b^2 - 12ab^3}$

145. $(t^2 - 2t - 15) \div \dfrac{t^2 - 9}{t^2 - 3t}$

[6.2] **146.** $\dfrac{2}{x+3} - \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{2x}{x^2-9}$

[6.4] **147.** Resuelve $2 + \dfrac{3x}{x-1} = \dfrac{8}{x-1}$.

7.7 Números complejos

1. Reconocimiento de un número complejo
2. Suma y resta de números complejos
3. Multiplicación de números complejos
4. División de números complejos
5. Determinación de potencias de *i*

1 Reconocimiento de un número complejo

En la sección 7.1, se mencionó que las raíces cuadradas de los números negativos, como $\sqrt{-4}$, no son números reales. Los números como $\sqrt{-4}$, se llaman **números imaginarios**. Aunque no pertenecen al conjunto de números reales, los números imaginarios sí existen y son muy útiles en matemáticas y en ciencias.

Todo número imaginario tiene $\sqrt{-1}$ como factor. A $\sqrt{-1}$, llamado la **unidad imaginaria**, se denota mediante la letra i.

Unidad imaginaria

$$i = \sqrt{-1}$$

Para escribir la raíz cuadrada de un número negativo en términos de i, usa la siguiente propiedad.

Raíz cuadrada de un número negativo

Para cualquier número real positivo n:

$$\sqrt{-n} = \sqrt{-1 \cdot n} = \sqrt{-1}\,\sqrt{n} = i\sqrt{n}$$

Por tanto, se puede escribir:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1 \cdot 4} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = i \cdot 2 = 2i$$
$$\sqrt{-9} = \sqrt{-1 \cdot 9} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{9} = i \cdot 3 = 3i$$
$$\sqrt{-7} = \sqrt{-1 \cdot 7} = \sqrt{-1}\sqrt{7} = i\sqrt{7}$$

En este libro, por lo general, se escribirá $i\sqrt{7}$, en lugar de $\sqrt{7}i$, para evitar confusión con $\sqrt{7i}$. Además, $3\sqrt{5}i$ se escribe como $3i\sqrt{5}$.

Ejemplos

$$\sqrt{-81} = 9i \qquad \sqrt{-6} = i\sqrt{6}$$
$$\sqrt{-49} = 7i \qquad \sqrt{-10} = i\sqrt{10}$$

El sistema de números reales es parte de un sistema numérico más grande, llamado *sistema de números complejos*. Ahora se estudiarán los **números complejos**.

Número complejo

Todo número de la forma

$$a + bi$$

donde a y b son números reales, e i es la unidad imaginaria, es un **número complejo**.

Todo número real y todo número imaginario, también son números complejos. Un número complejo tiene dos partes: una parte real, a, y una parte imaginaria, b.

Parte real: a + Parte imaginaria: bi

Si $b = 0$, el número complejo es un número real. Si $a = 0$, el número complejo es un **número imaginario puro**.

Ejemplos de números complejos

$3 + 2i$	$a = 3, \quad b = 2$	
$5 - i\sqrt{6}$	$a = 5, \quad b = -\sqrt{6}$	
4	$a = 4, \quad b = 0$	(número real, $b = 0$)
$8i$	$a = 0, \quad b = 8$	(número imaginario, $a = 0$)
$-i\sqrt{7}$	$a = 0, \quad b = -\sqrt{7}$	(número imaginario, $a = 0$)

Comprende el Álgebra

La raíz cuadrada de cualquier número negativo, es un número imaginario. Por ejemplo, $\sqrt{-25}$ es un número imaginario que se escribe:

$$\begin{aligned}\sqrt{-25} &= \sqrt{-1 \cdot 25} \\ &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{25} \\ &= i \cdot 5 = 5i\end{aligned}$$

$\sqrt{-3}$ es un número imaginario que se escribe como:

$$\begin{aligned}\sqrt{-3} &= \sqrt{-1 \cdot 3} \\ &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{3} \\ &= i\sqrt{3}\end{aligned}$$

$\sqrt{-50}$ es un número imaginario que se escribe como:

$$\begin{aligned}\sqrt{-50} &= \sqrt{-1 \cdot 25 \cdot 2} \\ &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} \\ &= i \cdot 5 \cdot \sqrt{2} \\ &= 5i\sqrt{2}\end{aligned}$$

Se afirmó que todos los números reales y números imaginarios, también son números complejos. En la **Figura 7.7**, se ilustra la relación entre los diversos conjuntos de números.

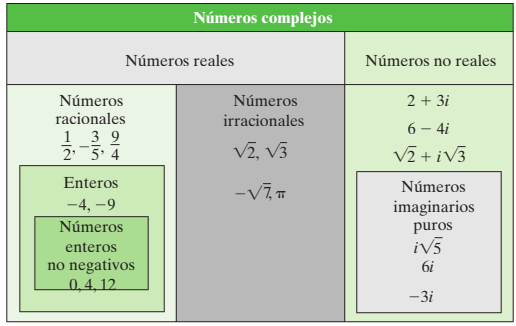


FIGURA 7.7

EJEMPLO 1 Escribe cada número complejo en la forma $a + bi$.

a) $7 + \sqrt{-36}$ **b)** $4 - \sqrt{-12}$ **c)** 19 **d)** $\sqrt{-50}$ **e)** $6 + \sqrt{10}$

Solución

a) $7 + \sqrt{-36} = 7 + \sqrt{-1}\,\sqrt{36}$
$= 7 + i6$ o $7 + 6i$

b) $4 - \sqrt{-12} = 4 - \sqrt{-1}\sqrt{12}$
$= 4 - \sqrt{-1}\,\sqrt{4}\,\sqrt{3}$
$= 4 - i(2)\sqrt{3}$ o $4 - 2i\sqrt{3}$

c) $19 = 19 + 0i$

d) $\sqrt{-50} = 0 + \sqrt{-50}$
$= 0 + \sqrt{-1}\,\sqrt{25}\,\sqrt{2}$
$= 0 + i(5)\sqrt{2}$ o $0 + 5i\sqrt{2}$

e) Tanto 6 como $\sqrt{10}$, son números reales. Escrito como número complejo, la respuesta es $\left(6 + \sqrt{10}\right) + 0i$.

Ahora resuelve el ejercicio 17

Los números complejos pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse. Para realizar estas operaciones, se usan las definiciones $i = \sqrt{-1}$ y $i^2 = -1$.

Definición de i^2

Si $i = \sqrt{-1}$, entonces:

$$i^2 = -1$$

2 Suma y resta de números complejos

Ahora se explica cómo sumar o restar números complejos.

Para sumar o restar números complejos

1. Cambia todos los números imaginarios a forma bi.
2. Suma (o resta) las partes reales de los números complejos.
3. Suma (o resta) las partes imaginarias de los números complejos.
4. Escribe la respuesta en la forma $a + bi$.

EJEMPLO 2 Suma $(5 - 3i) + (-7 + 6i) + 4i + 3$.

Solución

$$\begin{aligned}(5 - 3i) + (-7 + 6i) + 4i + 3 &= 5 - 3i - 7 + 6i + 4i + 3\\ &= 5 - 7 + 3 - 3i + 6i + 4i\\ &= 1 + 7i\end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 27

EJEMPLO 3 Resta $\left(8 - \sqrt{-27}\right) - \left(-3 + \sqrt{-48}\right)$.

Solución

$$\begin{aligned}\left(8 - \sqrt{-27}\right) - \left(-3 + \sqrt{-48}\right) &= \left(8 - \sqrt{-1}\,\sqrt{27}\right) - \left(-3 + \sqrt{-1}\,\sqrt{48}\right)\\ &= \left(8 - \sqrt{-1}\,\sqrt{9}\,\sqrt{3}\right) - \left(-3 + \sqrt{-1}\,\sqrt{16}\,\sqrt{3}\right)\\ &= \left(8 - 3i\sqrt{3}\right) - \left(-3 + 4i\sqrt{3}\right)\\ &= 8 - 3i\sqrt{3} + 3 - 4i\sqrt{3}\\ &= 8 + 3 - 3i\sqrt{3} - 4i\sqrt{3}\\ &= 11 - 7i\sqrt{3}\end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 33

3 Multiplicación de números complejos

Ahora se estudiará cómo multiplicar números complejos.

Para multiplicar números complejos

1. Cambia todos los números imaginarios a forma *bi*.
2. Multiplica los números complejos como multiplicarías polinomios.
3. Sustituye -1 para cada i^2.
4. Combina las partes reales y las partes imaginarias. Escribe la respuesta en forma $a + bi$.

EJEMPLO 4 Multiplica.

a) $5i(6 - 2i)$ **b)** $\sqrt{-9}\left(\sqrt{-3} + 8\right)$ **c)** $\left(2 - \sqrt{-18}\right)\left(\sqrt{-2} + 5\right)$

Solución

a) $5i(6 - 2i) = 5i(6) + 5i(-2i)$ Propiedad distributiva.

$= 30i - 10i^2$

$= 30i - 10(-1)$ Sustituye i^2 con -1.

$= 30i + 10$ o $10 + 30i$

b) $\sqrt{-9}\left(\sqrt{-3} + 8\right) = 3i\left(i\sqrt{3} + 8\right)$ Cambia los números imaginarios a forma *bi*.

$= 3i\left(i\sqrt{3}\right) + 3i(8)$ Propiedad distributiva.

$= 3i^2\sqrt{3} + 24i$

$= 3(-1)\sqrt{3} + 24i$ Sustituye i^2 con -1.

$= -3\sqrt{3} + 24i$

c) $\left(2 - \sqrt{-18}\right)\left(\sqrt{-2} + 5\right) = \left(2 - \sqrt{-1}\,\sqrt{18}\right)\left(\sqrt{-1}\,\sqrt{2} + 5\right)$

$= \left(2 - \sqrt{-1}\,\sqrt{9}\,\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{-1}\,\sqrt{2} + 5\right)$

$= \left(2 - 3i\sqrt{2}\right)\left(i\sqrt{2} + 5\right)$

Ahora usa el método PIES para multiplicar.

$$\begin{aligned}\left(2 - 3i\sqrt{2}\right)\left(i\sqrt{2} + 5\right) &= (2)\left(i\sqrt{2}\right) + \left(-3i\sqrt{2}\right)\left(i\sqrt{2}\right) + (2)(5) + \left(-3i\sqrt{2}\right)(5)\\ &= 2i\sqrt{2} - 3i^2(2) + 10 - 15i\sqrt{2}\\ &= 2i\sqrt{2} - 3(-1)(2) + 10 - 15i\sqrt{2}\\ &= 2i\sqrt{2} + 6 + 10 - 15i\sqrt{2}\\ &= 16 - 13i\sqrt{2}\end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 45

CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

¿Cuánto es $\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}$?

CORRECTO

$$\begin{aligned}\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9} &= 2i\cdot 3i\\ &= 6i^2\\ &= 6(-1)\\ &= -6\end{aligned}$$

INCORRECTO

$$\begin{aligned}\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9} &= \sqrt{(-4)(-9)}\\ &= \sqrt{36}\\ &= 6\end{aligned}$$

Recuerda que $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, solamente para números reales *no negativos* a y b.

4 División de números complejos

El **conjugado de un número complejo** $a + bi$, es $a - bi$. Por ejemplo:

Número complejo	Conjugado
$3 + 7i$	$3 - 7i$
$1 - i\sqrt{3}$	$1 + i\sqrt{3}$
$2i$ (o $0 + 2i$)	$-2i$ (o $0 - 2i$)

Cuando un número complejo se multiplica por su conjugado usando el método PIES, los productos interno y externo tienen una suma de 0, y el resultado es un número real. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}(5 + 3i)(5 - 3i) &= 25 + 15i - 15i - 9i^2\\ &= 25 - 9i^2\\ &= 25 - 9(-1)\\ &= 25 + 9 = 34\end{aligned}$$

Ahora se explica cómo dividir números complejos.

Para dividir números complejos

1. Cambiar todos los números imaginarios a forma bi.
2. Multiplica, tanto el numerador como el denominador, por el conjugado del denominador.
3. Escribe la respuesta en forma $a + bi$.

EJEMPLO 5 Divide $\dfrac{5 + 2i}{i}$.

Solución El denominador, i, cuando se escribe en forma $a + bi$, es $0 + i$. En consecuencia, el conjugado del denominador es $0 - i$, o $-i$. Tanto el numerador como el denominador, se multiplicarán por $-i$.

$$\begin{aligned}\frac{5 + 2i}{i} &= \frac{5 + 2i}{i}\cdot\frac{-i}{-i}\\ &= \frac{(5 + 2i)(-i)}{(i)(-i)}\\ &= \frac{-5i - 2i^2}{-i^2}\\ &= \frac{-5i - 2(-1)}{-(-1)}\\ &= \frac{-5i + 2}{1}\\ &= 2 - 5i\end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 59

EJEMPLO 6 Divide $\dfrac{3+2i}{4-i}$.

Solución Multiplica, tanto el numerador como el denominador, por $4+i$, el conjugado de $4-i$.

$$\frac{3+2i}{4-i}\cdot\frac{4+i}{4+i}=\frac{12+3i+8i+2i^2}{16-i^2}$$
$$=\frac{12+11i+2(-1)}{16-(-1)}$$
$$=\frac{10+11i}{17}=\frac{10}{17}+\frac{11}{17}i$$

Ahora resuelve el ejercicio 67

EJEMPLO 7 **Impedancia** Un concepto en el estudio de la electrónica, es la *impedancia*. La impedancia afecta la corriente en un circuito. La impedancia, Z, en un circuito se determina mediante la fórmula $Z=\dfrac{V}{I}$, donde V es voltaje, e I es corriente. Determina Z cuando $V=1.6-0.3i$ e $I=-0.2i$, donde $i=\sqrt{-1}$.

Solución $Z=\dfrac{V}{I}=\dfrac{1.6-0.3i}{-0.2i}$. Ahora multiplica el numerador y el denominador por el conjugado del denominador, $0.2i$.

$$Z=\frac{1.6-0.3i}{-0.2i}\cdot\frac{0.2i}{0.2i}=\frac{0.32i-0.06i^2}{-0.04i^2}$$
$$=\frac{0.32i+0.06}{0.04}$$
$$=\frac{0.32i}{0.04}+\frac{0.06}{0.04}$$
$$=8i+1.5=1.5+8i$$

Ahora resuelve el ejercicio 121

5 Determinación de potencias de *i*

Con $i=\sqrt{-1}$ e $i^2=-1$, se pueden determinar otras **potencias de *i***. Por ejemplo,

$$i^3=i^2\cdot i=-1\cdot i=-i \qquad i^6=i^4\cdot i^2=1(-1)=-1$$
$$i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1 \qquad i^7=i^4\cdot i^3=1(-i)=-i$$
$$i^5=i^4\cdot i^1=1\cdot i=i \qquad i^8=i^4\cdot i^4=(1)(1)=1$$

Observa que las potencias sucesivas de i rotan por los cuatro valores i, -1, $-i$ y 1 (observa la **Figura 7.8**).

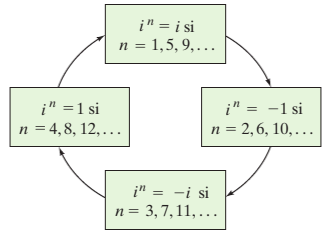


FIGURA 7.8

EJEMPLO 8 Evalúa.

a) i^{35} **b)** i^{101}

Solución Escribe cada expresión como un producto de factores, tales que el exponente de un factor sea el múltiplo más grande de 4 menor o igual que el exponente dado. Luego, escribe este factor como i^4 elevado a alguna potencia. Dado que i^4 tiene un valor de 1, la expresión i^4 elevada a una potencia también tendrá un valor de 1.

a) $i^{35} = i^{32} \cdot i^3 = (i^4)^8 \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = 1(-i) = -i$

b) $i^{101} = i^{100} \cdot i^1 = (i^4)^{25} \cdot i = 1 \cdot i = i$

Ahora resuelve el ejercicio 101

SUGERENCIA ÚTIL

Una forma rápida de evaluar i^n, es dividir el exponente por 4 y analizar el residuo.

Si el residuo es 0, el valor es 1.
Si el residuo es 1, el valor es i.
Si el residuo es 2, el valor es -1.
Si el residuo es 3, el valor es $-i$.

Para el ejemplo **a)**

$$4\overline{)35}\quad 8,\ \text{residuo } 3$$

La respuesta es $-i$.

$i^{35} = (i^4)^8 \cdot i^3 = (1)^8 \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = i^3 = -i$

Para el ejemplo 8 **b)**

$$4\overline{)101}\quad 25,\ \text{residuo } 1$$

La respuesta es i.

EJEMPLO 9 Sea $f(x) = x^2$. Determina **a)** $f(6i)$ **b)** $f(3 + 7i)$.

Solución

a) $f(x) = x^2$

$f(6i) = (6i)^2 = 36i^2 = 36(-1) = -36$

b) $f(x) = x^2$

$f(3 + 7i) = (3 + 7i)^2 = (3)^2 + 2(3)(7i) + (7i)^2$
$= 9 + 42i + 49i^2$
$= 9 + 42i + 49(-1)$
$= 9 + 42i - 49$
$= -40 + 42i$

Ahora resuelve el ejercicio 111

7.7 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

-1	puro	real	complejo	número	$-i$
unidad	parte	1	conjugado	imaginario	racional

1. La raíz cuadrada de cualquier número negativo es un número _____.

2. La _____ imaginaria, se denota con la letra i.

3. Todo número de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales, e i es la unidad imaginaria, es un número _____.

4. En un número complejo, $a + bi$, a se conoce como la parte _____.

5. En un número complejo, $a + bi$, b se conoce como la _____ imaginaria.

6. Si $a = 0$, el número complejo $a + bi$ es un número imaginario _____.

7. Si $b = 0$, el número complejo $a + bi$ es un _____ real.

8. Para un número complejo de la forma $a + bi$, el _____ es $a - bi$.

9. Si i es la unidad imaginaria, entonces $i^2 =$ _____.

10. Si i es la unidad imaginaria, entonces $i^3 =$ _____.

Practica tus habilidades

Escribe cada expresión como un número complejo en la forma $a + bi$.

11. 3

12. $4i$

13. $-\sqrt{-9}$

14. $-\sqrt{16}$

15. $21 - \sqrt{-36}$

16. $12 - \sqrt{-25}$

17. $\sqrt{7} - \sqrt{-11}$

18. $\sqrt{3} + \sqrt{-3}$

19. $8 - \sqrt{-12}$

20. $-3 + \sqrt{-18}$

21. $\sqrt{-9} + \sqrt{-81}$

22. $\sqrt{-4} - \sqrt{-144}$

23. $-\sqrt{25} + \sqrt{3}$

24. $-7 + \sqrt{45}$

25. $\sqrt{75} - \sqrt{-32}$

26. $\sqrt{288} + \sqrt{-48}$

Suma o resta.

27. $(3 + 7i) + (1 - 3i)$

28. $(-4 + 5i) + (2 - 4i)$

29. $(3 + 7i) - (1 - 3i)$

30. $(13 - i) - (21 - 3i)$

31. $\left(1 + \sqrt{-1}\right) + \left(-18 - \sqrt{-169}\right)$

32. $\left(7 - \sqrt{-4}\right) - \left(-1 - \sqrt{-16}\right)$

33. $\left(5 - \sqrt{-72}\right) + \left(6 + \sqrt{-8}\right)$

34. $(11 + \sqrt{-63}) - (7 - \sqrt{-28})$

35. $(3\sqrt{5} + \sqrt{-108}) - (\sqrt{80} - \sqrt{-27})$

36. $\left(\sqrt{20} - \sqrt{-12}\right) + \left(2\sqrt{5} + \sqrt{-75}\right)$

37. $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) + \left(3\sqrt{2} - \sqrt{-8}\right)$

38. $(\sqrt{5} + \sqrt{7}) - (6\sqrt{5} - \sqrt{-28})$

Multiplica.

39. $3(2 - 4i)$

40. $-2(-3 + i)$

41. $i(4 + 9i)$

42. $3i(6 - i)$

43. $\frac{2}{3}i\left(\frac{9}{4} + \frac{3}{8}i\right)$

44. $\frac{2}{5}i\left(\frac{5}{4} - \frac{15}{8}i\right)$

45. $\sqrt{-16}\left(\sqrt{3} - 7i\right)$

46. $\sqrt{-25}\left(-\sqrt{7} + 2i\right)$

47. $\sqrt{-27}\left(\sqrt{3} - \sqrt{-3}\right)$

48. $\sqrt{-32}\left(\sqrt{2} + \sqrt{-8}\right)$

49. $(3 + 2i)(1 + i)$

50. $(-4 + 3i)(2 - 5i)$

51. $(10 - 3i)(10 + 3i)$

52. $(7 + 11i)(7 - 11i)$

53. $(3 + 2i)^2$

54. $(7 - 5i)^2$

55. $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}i\right)$

56. $\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4}i\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5}i\right)$

Divide.

57. $\frac{2}{3i}$

58. $\frac{-3}{4i}$

59. $\frac{2 + 3i}{2i}$

60. $\frac{7 - 3i}{2i}$

61. $\frac{6}{2 - i}$

62. $\frac{9}{5 + i}$

63. $\frac{3}{1 - 2i}$

64. $\frac{13}{-3 - 4i}$

65. $\frac{3i}{4 + 2i}$

66. $\frac{7i}{5 - 6i}$

67. $\frac{6 - 3i}{4 + 2i}$

68. $\frac{4 - 3i}{4 + 3i}$

69. $\frac{4}{6 - \sqrt{-4}}$

70. $\frac{-5}{3 - \sqrt{-49}}$

71. $\frac{\sqrt{2}}{5 + \sqrt{-12}}$

72. $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{-9}}$

73. $\frac{5 + \sqrt{-4}}{4 - \sqrt{-16}}$

74. $\frac{2 + \sqrt{-25}}{4 - \sqrt{-9}}$

75. $\frac{\sqrt{5} + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i\sqrt{5}}$

76. $\frac{\sqrt{7} - i\sqrt{2}}{\sqrt{2} + i\sqrt{7}}$

Realiza cada operación indicada. Estos ejercicios son una combinación de los tipos de ejercicios presentados anteriormente en esta serie de ejercicios.

77. $(-7 + 8i) - (3 - 5i)$

78. $(-7 + 9i) - (3 - 7i)$

79. $\left(\sqrt{50} - \sqrt{2}\right) - \left(\sqrt{-12} - \sqrt{-48}\right)$

80. $\left(8 - \sqrt{-6}\right) - \left(2 - \sqrt{-24}\right)$

81. $\sqrt{-15}\left(\sqrt{10} + \sqrt{-6}\right)$

82. $\sqrt{-6}\left(\sqrt{3} - \sqrt{-10}\right)$

83. $(9 + 2i)(3 - 5i)$

84. $(4 - 7i)(3 + 11i)$

85. $\dfrac{11 + 4i}{2i}$

86. $\dfrac{3i}{4 - i}$

87. $\dfrac{6}{\sqrt{3} - \sqrt{-4}}$

88. $\dfrac{5}{\sqrt{7} - \sqrt{-16}}$

89. $\left(11 - \dfrac{5}{9}i\right) - \left(4 - \dfrac{3}{5}i\right)$

90. $\left(\dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{2}i\right) - \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}i\right)$

91. $\dfrac{5 - 2i}{3 + 2i}$

92. $\dfrac{2 - \sqrt{-9}}{4 + \sqrt{-49}}$

93. $(2 - 0.4i)(3.1 + 2i)$

94. $(0.3 + 2i)(5 - 0.3i)$

95. $(8 - 3i)^2$

96. $(-7 + i)^2$

Para cada número imaginario, indica si su valor es i, -1, $-i$ o 1.

97. i^6 **98.** i^{96} **99.** i^{160} **100.** i^{150}

101. i^{93} **102.** i^{103} **103.** i^{811} **104.** i^{1213}

Resolución de problemas

105. Considera el número complejo $2 + 3i$.

a) Determina el inverso aditivo.

b) Determina el inverso multiplicativo. Escribe la respuesta en forma simplificada.

106. Considera el número complejo $4 - 5i$.

a) Determina el inverso aditivo.

b) Determina el inverso multiplicativo. Escribe la respuesta en forma simplificada.

107. Si $f(x) = x^2$, determina $f(2i)$.

108. Si $f(x) = x^2$, determina $f(4i)$.

109. Si $f(x) = x^4 - 2x$, determina $f(2i)$.

110. Si $f(x) = x^3 - 4x^2$, determina $f(5i)$.

111. Si $f(x) = x^2 + 2x$, determina $f(3 + i)$.

112. Si $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 2}$, determina $f(4 - i)$.

Evalúa cada expresión para el valor dado de x.

113. $x^2 - 2x + 5, x = 1 + 2i$

114. $x^2 - 2x + 5, x = 1 - 2i$

115. $x^2 + 2x + 7, x = -1 + i\sqrt{5}$

116. $x^2 + 2x + 9, x = -1 - i\sqrt{5}$

En los ejercicios 117-120, determina si el valor dado de x es una solución de la ecuación.

117. $x^2 - 4x + 5 = 0, x = 2 - i$

118. $x^2 - 4x + 5 = 0, x = 2 + i$

119. $x^2 - 6x + 11 = 0, x = -3 + i\sqrt{3}$

120. $x^2 - 6x + 15 = 0, x = 3 - i\sqrt{3}$

121. Impedancia Determina la impedancia, Z, usando la fórmula $Z = \dfrac{V}{I}$, cuando $V = 1.8 + 0.5i$ y $I = 0.6i$. Consulta el ejemplo 7.

122. Impedancia Consulta el ejercicio 121. Determina la impedancia cuando $V = 2.4 - 0.6i$ e $I = -0.4i$.

123. Impedancia Bajo ciertas condiciones, la impedancia total, Z_T, de un circuito, está dada por la fórmula:

$$Z_T = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Determina Z_T cuando $Z_1 = 2 - i$ y $Z_2 = 4 + i$.

124. Impedancia Consulta el ejercicio 123. Determina Z_T cuando $Z_1 = 3 - i$ y $Z_2 = 5 + i$.

125. Determina si i^{-1} es igual a i, -1, $-i$ o 1. Muestra tu trabajo.

126. Determina si i^{-5} es igual a i, -1, $-i$ o 1. Muestra tu trabajo.

En el capítulo 8 se usará la fórmula cuadrática $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, para resolver ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. **a)** *Usa la fórmula cuadrática para resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas.* **b)** *Verifica cada una de las dos soluciones al sustituir los valores determinados para x (uno a la vez) en la ecuación original. En estos ejercicios, el $\pm$ (léase "más menos") resulta en dos respuestas complejas distintas.*

127. $x^2 - 2x + 6 = 0$

128. $x^2 - 4x + 6 = 0$

Dados los números complejos $a = 5 + 2i\sqrt{3}, b = 1 + i\sqrt{3}$, *evalúa cada expresión.*

129. $a + b$ **130.** $a - b$ **131.** ab **132.** $\frac{a}{b}$

Ejercicios conceptuales y de redacción

133. ¿Todos los siguientes son números complejos? Si algunos no son números complejos, explica por qué.

a) 9 **b)** $-\frac{1}{2}$ **c)** $4 - \sqrt{-2}$

d) $7 - 3i$ **e)** $4.2i$ **f)** $11 + \sqrt{3}$

134. ¿Todo número real y todo número imaginario, es un número complejo?

135. ¿Todo número complejo es un número real?

136. a) ¿Es $i \cdot i$ un número real? Explica

b) ¿Es $i \cdot i \cdot i$ un número real? Explica

En los ejercicios 137-140, responde verdadero o falso. Respalda tu repuesta con un ejemplo.

137. El producto de dos números imaginarios puros, siempre es un número real.

138. La suma de dos números imaginarios puros, siempre es un número imaginario.

139. El producto de dos números complejos, siempre es un número real.

140. La suma de dos números complejos, siempre es un número complejo.

141. ¿Qué valores de n resultarán en que i^n sea un número real? Explica.

142. ¿Qué valores de n resultarán en que i^{2n} sea un número real? Explica.

Ejercicios de repaso acumulativo

[4.3] **143. Mezcla** El Sr. Méndez, vendedor de abarrotes en Dallas, tiene dos cafés, uno que vende por $5.50 la libra y el otro por $6.30 la libra. ¿Cuántas libras de cada tipo de café debe mezclar, para elaborar 40 libras de un café que venderá a $6.00 la libra?



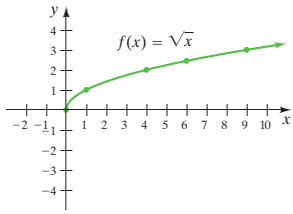
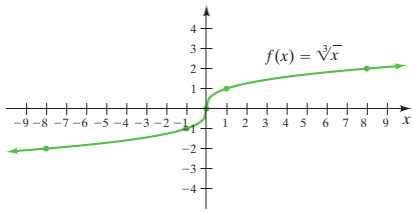
[5.3] **144.** Divide $\frac{8c^2 + 6c - 35}{4c + 9}$.

[6.2] **145.** Suma $\frac{b}{a - b} + \frac{a + b}{b}$.

[6.4] **146.** Resuelve $\frac{x}{4} + \frac{1}{2} = \frac{x - 1}{2}$.

Capítulo 7 Resumen

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 7.1	
Una **expresión radical** tiene la forma $\sqrt[n]{x}$, donde n es el índice y x es el radicando.	En la expresión radical $\sqrt[3]{x}$, 3 es el índice y x es el radicando.
La **raíz cuadrada principal** de un número positivo, escrito $\sqrt{a}$, es el número positivo b, tal que $b^2 = a$.	$\sqrt{81} = 9$, ya que $9^2 = 81$ $\sqrt{0.36} = 0.6$ ya que $(0.6)^2 = 0.36$

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 7.1 (Continuación)	
La **función raíz cuadrada** es $f(x) = \sqrt{x}$. Su dominio es $[0, \infty)$ y su rango es $[0, \infty)$.	
La **raíz cúbica** de un número a, escrito $\sqrt[3]{a}$, es el número b, tal que $b^3 = a$.	$\sqrt[3]{27} = 3$ ya que $3^3 = 27$ $\sqrt[3]{-125} = -5$ ya que $(-5)^3 = -125$
La **función raíz cúbica** es $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Su dominio es $(-\infty, \infty)$ o $\mathbb{R}$, y su rango es $(-\infty, \infty)$ o $\mathbb{R}$.	
La raíz *enésima* de a, $\sqrt[n]{a}$, donde n es un **índice par** y a es un número real no negativo, se llama **raíz par** y es el número no negativo b, tal que $b^n = a$. La raíz *enésima* de a, $\sqrt[n]{a}$, donde n es un **índice impar** y a es cualquier número real, se llama **raíz impar** y es el número real b, tal que $b^n = a$.	$\sqrt{4} = 2$ ya que $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$ $\sqrt[4]{81} = 3$ ya que $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ $\sqrt[3]{27} = 3$ ya que $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ $\sqrt[5]{-32} = -2$ ya que $(-2)^5 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$
Para cualquier número real a, $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$.	$\sqrt{(-6)^2} = \lvert -6 \rvert = 6$ $\sqrt{(y+8)^2} = \lvert y + 8 \rvert$
Sección 7.2	
Exponente racional $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ Cuando a es no negativo, n puede ser cualquier índice. Cuando a es negativo, n debe ser impar.	$\sqrt{17} = 17^{1/2}$ $\sqrt[4]{21x^3y^2} = (21x^3y^2)^{1/4}$
Para cualquier número no negativo a, y enteros m y n, Potencia $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{m/n} \leftarrow$ Índice	$\sqrt[4]{z^9} = (\sqrt[4]{z})^9 = z^{9/4}$
Para cualquier número real no negativo a: $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a^{n/n} = a$	$\sqrt[4]{y^4} = y, \quad \sqrt[8]{14^8} = 14$

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 7.2 (Continuación)	
Reglas de exponentes Para todo número real a y b y todo número racional m y n, Regla del producto $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ Regla del cociente $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$ Regla del exponente negativo $a^{-m} = \frac{1}{a^m}, \quad a \neq 0$ Regla del exponente cero $a^0 = 1, \quad a \neq 0$ Elevar una potencia a otra potencia $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ Elevar un producto a una potencia $(ab)^m = a^m b^m$ Elevar un cociente a una potencia $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \quad b \neq 0$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}, \quad a \neq 0, b \neq 0$	$x^{1/3} \cdot x^{4/3} = x^{(1/3)+(4/3)} = x^{5/3}$ $\frac{x^{4/5}}{x^{1/2}} = x^{(4/5)-(1/2)} = x^{(8/10)-(5/10)} = x^{3/10}$ $x^{-1/7} = \frac{1}{x^{1/7}}$ $m^0 = 1$ $(c^{1/8})^{16} = c^{(1/8)\cdot 16} = c^2$ $(p^3 q^4)^{1/8} = p^{3/8} q^{1/2}$ $\left(\frac{81}{49}\right)^{-1/2} = \left(\frac{49}{81}\right)^{1/2} = \frac{49^{1/2}}{81^{1/2}} = \frac{7}{9}$
Sección 7.3	
Un número o expresión es un **cuadrado perfecto**, si es el cuadrado de una expresión. Un número o expresión es un **cubo perfecto**, si es el cubo de una expresión.	Cuadrados perfectos: $49 \quad 81 \quad x^{12} \quad y^{50}$ Cuadrado de un número o expresión $7^2 \quad 9^2 \quad (x^6)^2 \quad (y^{25})^2$ Cubos perfectos: $27 \quad -27 \quad y^{18} \quad z^{30}$ Cubo de un número o expresión: $3^3 \quad (-3)^3 \quad (y^6)^3 \quad (z^{10})^3$
Regla del producto para radicales Para números reales no negativos a y b: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ y $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4, \quad \sqrt[3]{2x^3} = \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{2} = x\sqrt[3]{2}$
Para simplificar radicales usando la regla del producto 1. Si el radicando contiene un coeficiente distinto a 1, escríbelo como un producto de dos números, uno de los cuales es la máxima potencia perfecta para el índice. 2. Escribe cada factor variable como un producto de dos factores, uno de los cuales es la máxima potencia perfecta de la variable para el índice. 3. Usa la regla del producto para escribir la expresión radical como un producto de radicales. Coloca todas las potencias perfectas (números y variables) bajo el mismo radical. 4. Simplifica el radical que contiene las potencias perfectas.	$\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6} = \sqrt{4}\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$ $\sqrt[3]{16x^5y^9} = \sqrt[3]{8x^3y^9 \cdot 2x^2}$ $= \sqrt[3]{8x^3y^9}\sqrt[3]{2x^2}$ $= 2xy^3\sqrt[3]{2x^2}$
Regla del cociente para radicales Para números reales no negativos a y b: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ y $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, b \neq 0$	$\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{32}{2}} = \sqrt{16} = 4, \quad \sqrt[3]{\frac{x^6}{y^{12}}} = \frac{\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[3]{y^{12}}} = \frac{x^2}{y^4}$
Sección 7.4	
Los **radicales semejantes** son radicales con el mismo radicando y el mismo índice. Los **radicales no semejantes** son radicales con un radicando o índice diferente.	**Radicales semejantes** $\sqrt{3}, \quad 12\sqrt{3}$ $2\sqrt[4]{xy^3}, \quad -3\sqrt[4]{xy^3}$ **Radicales no semejantes** $\sqrt{3}, \quad 7\sqrt[4]{3}$ $\sqrt[5]{xy^3}, \quad x\sqrt[5]{y^3}$

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 7.4 (Continuación)	
Para sumar o restar radicales 1. Simplifica cada expresión radical. 2. Combina radicales semejantes (si los hay).	$\sqrt{27} + \sqrt{48} - 2\sqrt{75} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{3} + \sqrt{16}\cdot\sqrt{3} - 2\cdot\sqrt{25}\cdot\sqrt{3}$ $= 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 10\sqrt{3}$ $= -3\sqrt{3}$
Para multiplicar radicales Usa la regla del producto. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$\sqrt[4]{8c^2}\,\sqrt[4]{4c^3} = \sqrt[4]{32c^5} = \sqrt[4]{16c^4}\,\sqrt[4]{2c}$ $= 2c\sqrt[4]{2c}$
Sección 7.5	
Para **racionalizar un denominador**, multiplica tanto el numerador como el denominador de la fracción, por un radical que lleve como resultado a que el radicando en el denominador sea una potencia perfecta.	$\frac{6}{\sqrt{3x}}\cdot\frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}} = \frac{6\sqrt{3x}}{\sqrt{9x^2}} = \frac{6\sqrt{3x}}{3x} = \frac{2\sqrt{3x}}{x}$
Una expresión radical se simplifica cuando se cumple lo siguiente: 1. No hay potencias perfectas que sean factores del radicando y todos los exponentes en el radicando son menores que el índice. 2. Ningún radicando tiene fracciones. 3. Ningún denominador tiene radicales.	**No está simplificada** / **Simplificada** 1. $\sqrt{x^3}$ / $x\sqrt{x}$ 2. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ / $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ / $\frac{\sqrt{2}}{2}$
Sección 7.6	
Para resolver ecuaciones radicales 1. Reescribe la ecuación, de modo que un radical que contenga una variable, esté por sí solo (despejado) en un lado de la ecuación. 2. Eleva cada lado de la ecuación a una potencia igual al índice del radical. 3. Combina términos semejantes. 4. Si la ecuación todavía contiene un término con una variable en un radicando, repite los pasos del 1 al 3. 5. Resuelve la ecuación resultante para la variable. 6. Verifica todas las soluciones en la ecuación original para evitar soluciones extrañas.	Resuelve $\sqrt{x} - 8 = 0$. $\sqrt{x} - 8 = 0$ $\sqrt{x} = 8$ $(\sqrt{x})^2 = 8^2$ $x = 64$ Una verificación muestra que 64 es la solución.
Sección 7.7	
La **unidad imaginaria**, i, se define como $i = \sqrt{-1}$. (Además, $i^2 = -1$.)	$\sqrt{-25} = \sqrt{25}\,\sqrt{-1} = 5i$
Número imaginario Para cualquier número positivo n: $\sqrt{-n} = i\sqrt{n}$.	$\sqrt{-19} = i\sqrt{19}$
Un **número complejo** es un número de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.	$3 + 2i$ y $26 - 15i$ son números complejos.
Para sumar o restar números complejos 1. Cambia todos los números imaginarios a forma bi. 2. Suma (o resta) las partes reales de los números complejos. 3. Suma (o resta) las partes imaginarias de los números complejos. 4. Escribe la respuesta en la forma $a + bi$.	Suma $(8 - 3i) + (12 + 5i)$. $(8 - 3i) + (12 + 5i)$ $= 8 + 12 - 3i + 5i$ $= 20 + 2i$

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 7.7 (Continuación)	
Para multiplicar números complejos 1. Cambia todos los números imaginarios a forma bi. 2. Multiplica los números complejos como multiplicarías polinomios. 3. Sustituye -1 por cada i^2. 4. Combina las partes reales y las partes imaginarias. Escribe la respuesta en forma $a + bi$.	Multiplica $(7 + 2i\sqrt{3})(5 - 4i\sqrt{3})$. $(7 + 2i\sqrt{3})(5 - 4i\sqrt{3})$ $= 35 - 28i\sqrt{3} + 10i\sqrt{3} - 8(i^2)(3)$ $= 35 - 28i\sqrt{3} + 10i\sqrt{3} + 24$ $= 59 - 18i\sqrt{3}$
El **conjugado de un número complejo** $a + bi$ es $a - bi$.	**Número complejo** / **Conjugado** $14 + 2i$ / $14 - 2i$ $-17 - 8i$ / $-17 + 8i$
Para dividir números complejos 1. Cambia todos los números imaginarios a forma bi. 2. Racionaliza el denominador al multiplicar, tanto el numerador como el denominador, por el conjugado del denominador. 3. Escribe la respuesta en forma $a + bi$.	Divide $\dfrac{2 - i}{5 + 3i}$. $\dfrac{2 - i}{5 + 3i} \cdot \dfrac{5 - 3i}{5 - 3i} = \dfrac{10 - 6i - 5i + 3i^2}{25 - 9i^2}$ $= \dfrac{7 - 11i}{34} = \dfrac{7}{34} - \dfrac{11}{34}i$
Potencias de i $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i$	$i^{38} = i^{36} \cdot i^2 = (i^4)^9 \cdot i^2 = 1^9 \cdot (-1) = -1$ $i^{63} = i^{60} \cdot i^3 = (i^4)^{15} \cdot i^3 = 1^{15}(-i) = -i$

Capítulo 7 Ejercicios de repaso

[7.1] *Evalúa.*

1. $\sqrt{9}$
2. $\sqrt[3]{-27}$
3. $\sqrt[3]{-125}$
4. $\sqrt[4]{256}$

Usa el valor absoluto para evaluar.

5. $\sqrt{(-5)^2}$
6. $\sqrt{(38.2)^2}$

Escribe como valor absoluto.

7. $\sqrt{x^2}$
8. $\sqrt{(x + 7)^2}$
9. $\sqrt{(x - y)^2}$
10. $\sqrt{(x^2 - 4x + 12)^2}$

11. Se $f(x) = \sqrt{10x + 9}$. Determina $f(4)$.
12. Se $k(x) = 2x + \sqrt{\dfrac{x}{3}}$. Determina $k(27)$.
13. Sea $g(x) = \sqrt[3]{2x + 3}$. Determina $g(4)$ y redondea la respuesta a la décima más cercana.
14. **Área** El área de un cuadrado es de 144 metros cuadrados. Determina la longitud de su lado.

Para el resto de estos ejercicios de repaso, asume que todas las variables representan números reales positivos.

[7.2] *Escribe en forma exponencial.*

15. $\sqrt{x^3}$
16. $\sqrt[3]{x^5}$
17. $(\sqrt[4]{y})^{13}$
18. $\sqrt[7]{6^2}$

Escribe en forma radical.

19. $x^{1/2}$
20. $a^{2/3}$
21. $(8m^2n)^{7/4}$
22. $(x + y)^{-5/3}$

Simplifica cada expresión radical al cambiar la expresión a forma exponencial. Escribe la respuesta en forma radical cuando sea apropiado.

23. $\sqrt[3]{4^6}$
24. $\sqrt{x^{12}}$
25. $(\sqrt[4]{9})^8$
26. $\sqrt[20]{a^5}$

Evalúa si es posible. Si la expresión no es un número real, indícalo.

27. $-36^{1/2}$ **28.** $(-36)^{1/2}$ **29.** $\left(\frac{64}{27}\right)^{-1/3}$ **30.** $64^{-1/2} + 8^{-2/3}$

Simplifica. Escribe la respuesta sin exponentes negativos.

31. $x^{3/5} \cdot x^{-1/3}$ **32.** $\left(\frac{64}{y^9}\right)^{1/3}$ **33.** $\left(\frac{a^{-6/5}}{a^{2/5}}\right)^{2/3}$

34. $\left(\frac{20x^5y^{-3}}{4y^{1/2}}\right)^2$ **35.** $\left(\frac{3x^{-2/3}}{x^{-5/6}}\right)^{-2}$ **36.** $\left(\frac{d^{-1/3}}{c^{5/7}}\right)^0$

Multiplica.

37. $a^{1/2}(5a^{3/2} - 3a^2)$ **38.** $4x^{-2/3}\left(x^{-1/2} + \frac{11}{4}x^{2/3}\right)$

Para cada función, determina el valor indicado de la función. Usa tu calculadora para evaluar números irracionales. Redondea los números irracionales a la milésima más cercana.

39. Si $f(x) = \sqrt{6x - 11}$, determina $f(6)$. **40.** Si $g(x) = \sqrt[3]{9x - 17}$, determina $g(4)$.

Elabora la gráfica de las siguientes funciones.

41. $f(x) = \sqrt{x}$ **42.** $f(x) = \sqrt{x} - 4$

[7.2–7.5] *Simplifica.*

43. $\sqrt{18}$ **44.** $\sqrt[3]{16}$ **45.** $\sqrt{\frac{49}{9}}$ **46.** $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$

47. $-\sqrt{\frac{81}{49}}$ **48.** $\sqrt[3]{-\frac{27}{125}}$ **49.** $\sqrt{32}\sqrt{2}$ **50.** $\sqrt[3]{32}\sqrt[3]{2}$

51. $\sqrt{18x^2y^3z^4}$ **52.** $\sqrt{75x^3y^7}$ **53.** $\sqrt[3]{54a^7b^{10}}$ **54.** $\sqrt[3]{125x^8y^9z^{16}}$

55. $\left(\sqrt[6]{x^2y^3z^5}\right)^{42}$ **56.** $\left(\sqrt[5]{2ab^4c^6}\right)^{15}$ **57.** $\sqrt{5x}\sqrt{8x^5}$ **58.** $\sqrt[3]{2x^2y}\sqrt[3]{4x^9y^4}$

59. $\sqrt[3]{2x^4y^5}\sqrt[3]{16x^4y^4}$ **60.** $\sqrt[4]{4x^4y^7}\sqrt[4]{4x^5y^9}$ **61.** $\sqrt{3x}\left(\sqrt{12x} - \sqrt{20}\right)$ **62.** $\sqrt[3]{2x^2y}\left(\sqrt[3]{4x^4y^7} + \sqrt[3]{9x}\right)$

63. $\sqrt{\sqrt{a^3b^2}}$ **64.** $\sqrt{\sqrt[3]{x^5y^2}}$ **65.** $\left(\frac{4r^2p^{1/3}}{r^{1/2}p^{4/3}}\right)^3$ **66.** $\left(\frac{6y^{2/5}z^{1/3}}{x^{-1}y^{3/5}}\right)^{-1}$

67. $\sqrt{\frac{3}{5}}$ **68.** $\sqrt[3]{\frac{7}{9}}$ **69.** $\sqrt[4]{\frac{5}{4}}$ **70.** $\frac{x}{\sqrt{10}}$

71. $\frac{8}{\sqrt{x}}$ **72.** $\frac{m}{\sqrt[3]{25}}$ **73.** $\frac{10}{\sqrt[3]{y^2}}$ **74.** $\frac{9}{\sqrt[4]{z}}$

75. $\sqrt[3]{\frac{x^3}{27}}$ **76.** $\frac{\sqrt[3]{2x^{10}}}{\sqrt[3]{16x^7}}$ **77.** $\sqrt{\frac{32x^2y^5}{2x^8y}}$ **78.** $\sqrt[4]{\frac{48x^9y^{15}}{3xy^3}}$

79. $\sqrt{\frac{6x^4}{y}}$ **80.** $\sqrt{\frac{12a}{7b}}$ **81.** $\sqrt{\frac{18x^4y^5}{3z}}$ **82.** $\sqrt{\frac{125x^2y^5}{3z}}$

83. $\sqrt[3]{\frac{108x^3y^7}{2y^3}}$ **84.** $\sqrt[3]{\frac{3x}{5y}}$ **85.** $\sqrt[3]{\frac{9x^5y^3}{x^6}}$ **86.** $\sqrt[3]{\frac{y^6}{5x^2}}$

87. $\sqrt[4]{\frac{2r^2b^{11}}{a^5b}}$ **88.** $\sqrt[4]{\frac{3x^2y^6}{8x^3}}$ **89.** $(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})$ **90.** $(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{5})$

91. $(x - \sqrt{y})(x + \sqrt{y})$ **92.** $(\sqrt{3} + 2)^2$ **93.** $(\sqrt{x} - \sqrt{3y})(\sqrt{x} + \sqrt{5y})$

94. $(\sqrt[3]{2x} - \sqrt[3]{3y})(\sqrt[3]{3x} - \sqrt[3]{2y})$ **95.** $\frac{6}{2 + \sqrt{5}}$ **96.** $\frac{x}{4 + \sqrt{x}}$

97. $\frac{a}{4 - \sqrt{b}}$ **98.** $\frac{x}{\sqrt{y} - 7}$ **99.** $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

100. $\frac{\sqrt{x} - 3\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ **101.** $\frac{2}{\sqrt{a - 1} - 2}$ **102.** $\frac{5}{\sqrt{y + 2} - 3}$

103. $\sqrt[3]{x} + 10\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{x}$

104. $\sqrt{3} + \sqrt{27} - \sqrt{192}$

105. $\sqrt[3]{16} - 5\sqrt[3]{54} + 3\sqrt[3]{64}$

106. $\sqrt{2} - \dfrac{3}{\sqrt{32}} + \sqrt{50}$

107. $9\sqrt{x^5y^6} - \sqrt{16x^7y^8}$

108. $8\sqrt[3]{x^7y^8} - \sqrt[3]{x^4y^2} + 3\sqrt[3]{x^{10}y^2}$

En los ejercicios 109 y 110, se proporcionan $f(x)$ y $g(x)$. Determina $(f \cdot g)(x)$.

109. $f(x) = \sqrt{3x}, g(x) = \sqrt{6x} - \sqrt{15}$

110. $f(x) = \sqrt[3]{2x^2}, g(x) = \sqrt[3]{4x^4} + \sqrt[3]{16x^5}$

Simplifica. En el ejercicio 112, asume que la variable puede ser cualquier número real.

111. $f(x) = \sqrt{2x + 7}\sqrt{2x + 7}, x \geq -\dfrac{7}{2}$

112. $g(a) = \sqrt{4a^2 + 20a + 25}$

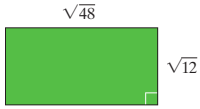
Simplifica.

113. $\dfrac{\sqrt[3]{(x + 5)^5}}{\sqrt{(x + 5)^3}}$

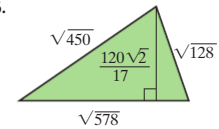
114. $\dfrac{\sqrt[3]{a^3b^2}}{\sqrt[4]{a^4b}}$

Perímetro y área *Para cada figura, determina a) el perímetro y b) el área. Escribe el perímetro y el área en forma radical con los radicales simplificados.*

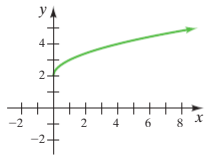
115.



116.



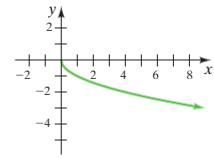
117. Se proporciona la gráfica de $f(x) = \sqrt{x} + 2$



a) Para $g(x) = -3$, bosqueja la gráfica de $(f+g)(x)$.

b) ¿Cuál es el dominio de $(f+g)(x)$?

118. Se proporciona la gráfica de $f(x) = -\sqrt{x}$



a) Para $g(x) = \sqrt{x} + 2$, bosqueja la gráfica de $(f+g)(x)$.

b) ¿Cuál es el dominio de $(f+g)(x)$?

[7.6] *Resuelve cada ecuación y verifica tus soluciones.*

119. $\sqrt{x} = 4$

120. $\sqrt{x} = -4$

121. $\sqrt[3]{x} = 4$

122. $\sqrt[3]{x} = -5$

123. $7 + \sqrt{x} = 10$

124. $7 + \sqrt[3]{x} = 12$

125. $\sqrt{3x + 4} = \sqrt{5x + 14}$

126. $\sqrt{x^2 + 2x - 8} = x$

127. $\sqrt[3]{x - 9} = \sqrt[3]{5x + 3}$

128. $(x^2 + 7)^{1/2} = x + 1$

129. $\sqrt{x} + 3 = \sqrt{3x + 9}$

130. $\sqrt{6x - 5} - \sqrt{2x + 6} - 1 = 0$

Para cada par de funciones, determina todos los valores de x para los cuales $f(x) = g(x)$.

131. $f(x) = \sqrt{3x + 4}, g(x) = 2\sqrt{2x - 4}$

132. $f(x) = (4x + 5)^{1/3}, g(x) = (6x - 7)^{1/3}$

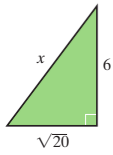
Resuelve lo siguiente para la variable indicada.

133. $V = \sqrt{\dfrac{2L}{w}}$, para L

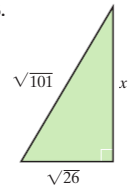
134. $r = \sqrt{\dfrac{A}{\pi}}$, para A

Determina la longitud del lado desconocido de cada triángulo recto. Escribe la respuesta como un radical en forma simplificada.

135.



136.



Resuelve.

137. Poste de electricidad ¿Qué tan largo debe ser un cable que una compañía eléctrica necesita tender, para llegar a la parte superior de un poste de 5 metros, desde un punto sobre el suelo a 2 metros de la base del poste?

138. Velocidad Usa la fórmula $v = \sqrt{2gh}$ para determinar la velocidad de un objeto, después de que cae 20 pies ($g = 32$ ft/s^2).

139. Péndulo Usa la fórmula

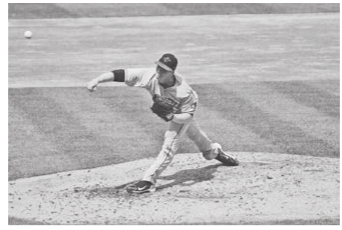
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{32}}$$

para determinar el periodo de un péndulo, T, si su longitud, L, es de 64 pies.

140. Energía cinética Energía cinética, es la energía de un objeto en movimiento. La fórmula

$$V = \sqrt{\frac{2K}{m}}$$

puede usarse para determinar la velocidad, V, en metros por segundo, cuando una masa, m, en kilogramos, tiene una energía cinética, K, en joules. Se lanza una pelota de béisbol de 0.145 kg. Si la energía cinética de la pelota en movimiento es de 45 joules, ¿a qué rapidez se mueve la pelota?



Consulta el ejercicio 140.

141. Rapidez de la luz Albert Einstein determinó que, si a un objeto en reposo, con masa m_0, se le hace viajar cerca de la rapidez de la luz, su masa aumenta a m, donde:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

En la fórmula, v es la velocidad del objeto en movimiento y c es la rapidez de la luz*. En un acelerador que se usa para terapia contra el cáncer, la partículas viajan con rapideces de $0.98c$, es decir, a 98% de la rapidez de la luz. Con una rapidez de $0.98c$, determina la masa de una partícula, m, en términos de su masa en reposo, m_0. Usa $v = 0.98c$ en la fórmula anterior.

[7.7] *Escribe cada expresión como un número complejo de la forma $a + bi$.*

142. 1 **143.** -8 **144.** $7 - \sqrt{-256}$ **145.** $9 + \sqrt{-16}$

Realiza cada operación indicada.

146. $(3 + 2i) + (10 - i)$ **147.** $(4 + i) - (7 - 2i)$ **148.** $\left(\sqrt{3} + \sqrt{-5}\right) + \left(11\sqrt{3} - \sqrt{-7}\right)$

149. $\sqrt{-6}\left(\sqrt{6} + \sqrt{-6}\right)$ **150.** $(4 + 3i)(2 - 3i)$ **151.** $\left(6 + \sqrt{-3}\right)\left(4 - \sqrt{-15}\right)$

152. $\dfrac{8}{3i}$ **153.** $\dfrac{2 + \sqrt{3}}{2i}$ **154.** $\dfrac{4}{3 + 2i}$ **155.** $\dfrac{\sqrt{3}}{5 - \sqrt{-6}}$

Evalúa cada expresión para el valor dado de x.

156. $x^2 - 2x + 9, x = 1 + 2i\sqrt{2}$ **157.** $x^2 - 2x + 12, x = 1 - 2i$

Para cada número imaginario, indica si su valor es i, -1, $-i$ o 1.

158. i^{33} **159.** i^{59} **160.** i^{404} **161.** i^{802}

Capítulo 7 Examen de práctica

1. Escribe $\sqrt{(5x - 3)^2}$ como un valor absoluto.

2. Simplifica $\left(\dfrac{x^{2/5} \cdot x^{-1}}{x^{3/5}}\right)^2$.

3. Escribe en forma exponencial. Supón que x es un número positivo. $\left(\sqrt[5]{2x + 7}\right)^2$

4. Elabora la gráfica de $g(x) = \sqrt{x} + 1$.

En los ejercicios 5-14, simplifica. Asume que todas las variables representan números reales positivos.

5. $\sqrt{54x^7y^{10}}$ **6.** $\sqrt[3]{25x^5y^2}\sqrt[3]{10x^6y^8}$

7. $\sqrt{\dfrac{7x^6y^3}{8z}}$ **8.** $\dfrac{9}{\sqrt[3]{x}}$

9. $\dfrac{\sqrt{3}}{3 + \sqrt{27}}$ **10.** $2\sqrt{24} - 6\sqrt{6} + 3\sqrt{54}$

11. $\sqrt[3]{8x^3y^5} + 4\sqrt[3]{x^6y^8}$

12. $\left(\sqrt{3} - 2\right)\left(6 - \sqrt{8}\right)$

13. $\sqrt[4]{\sqrt{x^5y^3}}$ **14.** $\dfrac{\sqrt[4]{(7x + 2)^5}}{\sqrt[3]{(7x + 2)^2}}$

*La rapidez de la luz es 3.00×10^8 metros por segundo. Sin embargo, no necesitas esta información para resolver este problema.

En los ejercicios 15-17, resuelve la ecuación.

15. $\sqrt{2x + 19} = 3$

16. $\sqrt{x^2 - x - 12} = x + 3$

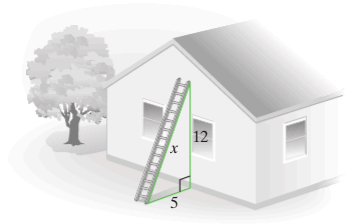
17. $\sqrt{a - 8} = \sqrt{a} - 2$

18. Para $f(x) = (9x + 37)^{1/3}$ y $g(x) = 2(2x + 2)^{1/3}$, determina todos los valores de x, tales que $f(x) = g(x)$.

19. Resuelve la fórmula $w = \dfrac{\sqrt{2gh}}{4}$ para g.

20. **Objeto que cae** La velocidad, V, en pies por segundo, después de que un objeto cae una distancia, h, en pies, puede determinarse mediante la fórmula $V = \sqrt{64.4h}$. Determina la velocidad de una pluma, después de que ha caído 200 pies.

21. **Escalera** Una escalera se coloca contra una casa. Si la base de la escalera está a 5 pies de la casa y la escalera descansa sobre la casa 12 pies arriba del suelo, determina la longitud de la escalera. (Consulta la figura a la derecha.)



Consulta el ejercicio 21.

22. **Resortes** Una fórmula, que se usa en el estudio de resortes, es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

donde T es el periodo de un resorte (el tiempo para que el resorte se estire y regrese a su punto de reposo), m es la masa en el resorte, en kilogramos, y k es la constante del resorte, en newtons/metro. Una masa de 1400 kilogramos descansa sobre un resorte. Determina el periodo del resorte, si la constante del resorte es de 65000 newtons/metro.

23. Multiplica $\left(6 - \sqrt{-4}\right)\left(2 + \sqrt{-16}\right)$.

24. Divide $\dfrac{5 - i}{7 + 2i}$.

25. Evalúa $x^2 + 6x + 12$ para $x = -3 + i$.

Examen de repaso acumulativo

Resuelve la siguiente evaluación y comprueba tus respuestas con las proporcionadas en la parte final del libro. Revisa cualquier pregunta que respondas de manera incorrecta. Después de la respuesta se indica la sección donde se cubrió el material.

1. Resuelve $\dfrac{1}{5}(x - 3) = \dfrac{3}{4}(x + 3) - x$.

2. Resuelve $3(x - 4) = 6x - (4 - 5x)$.

3. **Suéter** Cuando el precio de un suéter se reduce 60%, cuesta \$16. Determina el precio original del suéter.

4. Determina el conjunto solución de $|3 - 2x| < 5$.

5. Elabora la gráfica de $y = \dfrac{3}{2}x - 3$.

6. Determina si las gráficas de las ecuaciones dadas son rectas paralelas, perpendiculares o ninguna de las anteriores.

$$y = 3x - 8$$
$$6y = 18x + 12$$

7. Dados $f(x) = x^2 - 3x + 4$ y $g(x) = 2x - 9$, determina $(g - f)(x)$.

8. Determina la ecuación de la recta que pasa a través de $(1, -4)$ que es perpendicular a la gráfica de $3x - 2y = 6$.

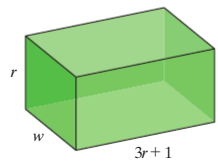
9. Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} x + 2y &= 12 \\ 4x &= 8 \\ 3x - 4y + 5z &= 20 \end{aligned}$$

10. Evalúa el determinante.

$$\begin{vmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

11. **Volumen** El volumen de la caja mostrada a continuación, es $6r^3 + 5r^2 + r$. Determina w en términos de r.



12. Multiplica $(5xy - 3)(5xy + 3)$.

13. Resuelve $\sqrt{2x^2 + 7} + 3 = 8$.

14. Factoriza $4x^3 - 9x^2 + 5x$.

15. Factoriza $(x + 1)^3 - 27$.

16. Resuelve $8x^2 - 3 = -10x$.

17. Multiplica $\dfrac{4x + 4y}{x^2y} \cdot \dfrac{y^3}{12x}$.

18. Suma $\dfrac{x - 4}{x - 5} - \dfrac{3}{x + 5} - \dfrac{10}{x^2 - 25}$.

19. Resuelve $\dfrac{4}{x} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{x}$.

20. **Objeto que cae** La distancia, d, que cae un objeto en caída libre, es directamente proporcional al cuadrado del tiempo, t. Si un objeto cae 16 pies en 1 segundo, ¿cuánto caerá en 5 segundos?

8.1 Resolución de ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado

1. **Uso de la propiedad de la raíz cuadrada para resolver ecuaciones cuadráticas**
2. **Comprensión de los trinomios cuadrados perfectos**
3. **Resolución de ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado**

Recuerda, del capítulo 5, que una **ecuación cuadrática** es una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales, y $a \neq 0$. En la sección 5.8, se resolvieron ecuaciones cuadráticas mediante factorización. Sin embargo, no toda ecuación cuadrática puede resolverse mediante factorización. En esta sección, se presentan dos procedimientos adicionales usados para resolver ecuaciones cuadráticas: la propiedad de la raíz cuadrada y completar el cuadrado.

1 Uso de la propiedad de la raíz cuadrada para resolver ecuaciones cuadráticas

En el capítulo 7, aprendiste que todo número positivo tiene dos raíces cuadradas: una raíz cuadrada positiva y una raíz cuadrada negativa. Por ejemplo, 25 tiene dos raíces cuadradas:

Raíz cuadrada positiva de 25	Raíz cuadrada negativa de 25
$\sqrt{25} = 5$	$-\sqrt{25} = -5$

Comprende el Álgebra

Una forma conveniente de escribir las raíces cuadradas, tanto positivas como negativas, es usar el símbolo $\pm$, que se lee "más menos". Las soluciones a la ecuación $x^2 = 25$ pueden escribirse como $\pm\sqrt{25} = \pm 5$. En consecuencia, las soluciones son 5 y -5.

Se puede hacer referencia a ambas raíces cuadradas de 25 usando el símbolo $\pm$, que se lee "más menos". En consecuencia, ± 5 se refiere tanto a 5 como a -5.

A continuación, considera la ecuación cuadrática $x^2 = 25$. Dado que $5^2 = 25$ y $(-5)^2 = 25$, tanto $x = 5$ como $x = -5$, son soluciones a la ecuación. El proceso de solución se puede resumir del modo siguiente:

$$x^2 = 25$$
$$x = \pm\sqrt{25} \quad \pm\text{significa tomar las raíces cuadradas positiva y negativa.}$$
$$x = \pm 5 \quad \text{Las soluciones son 5 y } -5.$$

En general, cuando resuelvas ecuaciones de la forma $x^2 = a$, puedes usar la *propiedad de la raíz cuadrada*.

Propiedad de la raíz cuadrada

Si $x^2 = a$, donde a es un número real, entonces $x = \pm\sqrt{a}$.

EJEMPLO 1 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 = 36$ **b)** $x^2 - 9 = 0$ **c)** $x^2 + 10 = 85$

Solución

a) Para resolver esta ecuación cuadrática, usa la propiedad de la raíz cuadrada.

$$x^2 = 36 \quad \text{Usa la propiedad de la raíz cuadrada.}$$
$$x = \pm\sqrt{36} \quad \text{Raíces cuadradas positiva y negativa de 36.}$$
$$x = \pm 6 \quad \text{Las soluciones son 6 y } -6.$$

Las soluciones se verifican en la ecuación original.

$x = 6$		$x = -6$	
$x^2 = 36$		$x^2 = 36$	
$(6)^2 \stackrel{?}{=} 36$		$(-6)^2 \stackrel{?}{=} 36$	
$36 = 36$	Verdadero	$36 = 36$	Verdadero

Tanto 6 como -6, son soluciones a la ecuación.

b)
$$x^2 - 9 = 0 \quad \text{Suma 9 a ambos lados.}$$
$$x^2 = 9 \quad \text{Usa la propiedad de la raíz cuadrada.}$$
$$x = \pm\sqrt{9}$$
$$x = \pm 3 \quad \text{Las soluciones son 3 y } -3.$$

Las soluciones se verifican en la ecuación original.

$x = 3$		$x = -3$	
$x^2 - 9 = 0$		$x^2 - 9 = 0$	
$3^2 - 9 \stackrel{?}{=} 0$		$(-3)^2 - 9 \stackrel{?}{=} 0$	
$0 = 0$	Verdadero	$0 = 0$	Verdadero

En ambos casos, la verificación es verdadera, lo cual significa que, tanto 3 como -3, son soluciones a la ecuación.

c)

$$\begin{aligned} x^2 + 10 &= 85 && \text{Resta 10 de ambos lados.} \\ x^2 &= 75 && \text{Usa la propiedad de la raíz cuadrada.} \\ x &= \pm\sqrt{75} && \text{Simplifica } \sqrt{75}. \\ &= \pm\sqrt{25}\sqrt{3} \\ &= \pm 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

Una comprobación confirmará que las soluciones son $5\sqrt{3}$ y $-5\sqrt{3}$.

Ahora resuelve el ejercicio 13

En la sección 7.7, estudiaste los números imaginarios y complejos. En los siguientes dos ejemplos, verás que la solución a algunas ecuaciones cuadráticas son números imaginarios o complejos. Las soluciones en número complejo se escribirán en la forma $a \pm bi$.

EJEMPLO 2 Resuelve la ecuación $x^2 + 49 = 0$.

Solution

$$\begin{aligned} x^2 + 49 &= 0 && \text{Resta 49 de ambos lados.} \\ x^2 &= -49 && \text{Usa la propiedad de la raíz cuadrada.} \\ x &= \pm\sqrt{-49} && \text{Simplifica las soluciones imaginarias.} \\ x &= \pm 7i \end{aligned}$$

Comprende el Álgebra

Recuerda, de la sección 7.7, que la raíz cuadrada de un número negativo es un *número imaginario*. En general, para cualquier número real positivo, n,

$$\sqrt{-n} = \sqrt{-1 \cdot n} = \sqrt{-1}\sqrt{n} = i\sqrt{n}$$

donde $i = \sqrt{-1}$ y $i^2 = -1$.

Las soluciones son $7i$ y $-7i$, siendo ambas números imaginarios. Las soluciones se verifican en la ecuación original.

$x = 7i$		$x = -7i$	
$x^2 + 49 = 0$		$x^2 + 49 = 0$	
$(7i)^2 + 49 \stackrel{?}{=} 0$		$(-7i)^2 + 49 \stackrel{?}{=} 0$	
$7^2 i^2 + 49 \stackrel{?}{=} 0$		$(-7)^2 i^2 + 49 \stackrel{?}{=} 0$	
$49(-1) + 49 \stackrel{?}{=} 0$		$49(-1) + 49 \stackrel{?}{=} 0$	
$-49 + 49 \stackrel{?}{=} 0$		$-49 + 49 \stackrel{?}{=} 0$	
$0 = 0$	Verdadero	$0 = 0$	Verdadero

Tanto $7i$ como $-7i$, son soluciones a la ecuación.

Ahora resuelve el ejercicio 17

SUGERENCIA ÚTIL

Consejo de estudio

En este capítulo trabajarás con raíces y radicales. Este material se discutió en el capítulo 7. Si no recuerdas cómo evaluar o simplificar radicales, revisa ahora el capítulo 7.

EJEMPLO 3 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $(a-5)^2 = 32$ **b)** $(z+3)^2 + 28 = 0$ **c)** $(2k-3)^2 + 16 = 0$

Solución

a) Comienza por usar la propiedad de la raíz cuadrada.

$$\begin{aligned} (a-5)^2 &= 32 && \text{Usa la propiedad de la raíz cuadrada.}\\ a-5 &= \pm\sqrt{32} && \text{Suma 5 a ambos lados.}\\ a &= 5 \pm \sqrt{32} && \text{Simplifica } \sqrt{32}.\\ &= 5 \pm \sqrt{16}\sqrt{2}\\ &= 5 \pm 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

Las soluciones son $5 + 4\sqrt{2}$ y $5 - 4\sqrt{2}$.

b) Comienza por restar 28 de ambos lados de la ecuación, para despejar el término que contiene la variable.

$$\begin{aligned} (z+3)^2 + 28 &= 0 && \text{Resta 28 de ambos lados.}\\ (z+3)^2 &= -28 && \text{Usa la propiedad de la raíz cuadrada.}\\ z+3 &= \pm\sqrt{-28} && \text{Resta 3 de ambos lados.}\\ z &= -3 \pm \sqrt{-28} && \text{Simplifica } \sqrt{-28}.\\ &= -3 \pm \sqrt{-1}\sqrt{28}\\ &= -3 \pm i\sqrt{4}\sqrt{7}\\ &= -3 \pm 2i\sqrt{7} \end{aligned}$$

Las soluciones son $-3 + 2i\sqrt{7}$ y $-3 - 2i\sqrt{7}$. Observa que las soluciones a la ecuación $(z+3)^2 + 28 = 0$, son números complejos.

Comprende el Álgebra

Recuerda que los números complejos se escriben de la forma

$$a + bi$$

donde a y b son números reales, y:

$$i = \sqrt{-1}.$$

c) Comienza por restar 16 de ambos lados de la ecuación, para aislar el término que contiene la variable.

$$\begin{aligned} (2k-3)^2 + 16 &= 0 && \text{Resta 16 de ambos lados.}\\ (2k-3)^2 &= -16 && \text{Usa la propiedad de la raíz cuadrada.}\\ \sqrt{(2k-3)^2} &= \pm\sqrt{-16} && \text{Simplifica } \sqrt{-16}.\\ 2k-3 &= \pm 4i && \text{Suma 3 a ambos lados.}\\ 2k &= 3 \pm 4i && \text{Divide ambos lados entre 2.}\\ \frac{2k}{2} &= \frac{3 \pm 4i}{2} && \text{Divide cada término a la derecha entre 2.}\\ k &= \frac{3}{2} \pm \frac{4i}{2} && \text{Simplifica.}\\ k &= \frac{3}{2} \pm 2i && \text{Las soluciones se escriben en forma estándar de un número complejo.} \end{aligned}$$

Las soluciones son $\frac{3}{2} + 2i$ y $\frac{3}{2} - 2i$. Las soluciones a la ecuación $(2k-3)^2 + 16 = 0$, son números complejos.

Ahora resuelve el ejercicio 35

2 Comprensión de los trinomios cuadrados perfectos

Recuerda que un trinomio **cuadrado perfecto**, es un trinomio que se puede expresar como el cuadrado de un binomio. A continuación se presentan algunos ejemplos.

Trinomios cuadrados perfectos		Factores		Cuadrado de un binomio
$x^2 + 8x + 16$	$=$	$(x+4)(x+4)$	$=$	$(x+4)^2$
$x^2 - 8x + 16$	$=$	$(x-4)(x-4)$	$=$	$(x-4)^2$
$x^2 + 10x + 25$	$=$	$(x+5)(x+5)$	$=$	$(x+5)^2$
$x^2 - 10x + 25$	$=$	$(x-5)(x-5)$	$=$	$(x-5)^2$

En un trinomio cuadrado perfecto con un coeficiente principal de 1, el término constante es el cuadrado de un medio del coeficiente del término de primer grado.

Ahora se examinan algunos trinomios cuadrados perfectos, para los cuales, el coeficiente principal es 1.

$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$$
$$\left[\tfrac{1}{2}(8)\right]^2 = (4)^2$$
$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$$
$$\left[\tfrac{1}{2}(-10)\right]^2 = (-5)^2$$

Cuando un trinomio cuadrado perfecto con un coeficiente principal de 1 se escribe como el cuadrado de un binomio, la constante en el binomio es la mitad el coeficiente del término de primer grado en el trinomio. Por ejemplo,

$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$$
$$\tfrac{1}{2}(8)$$

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$$
$$\tfrac{1}{2}(-10)$$

3 Resolución de ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado

Para resolver una ecuación cuadrática **completando el cuadrado**, suma una constante a ambos lados de la ecuación para que el trinomio resultante sea un trinomio cuadrado perfecto. Luego, usa la propiedad de la raíz cuadrada para resolver la ecuación resultante.

Para resolver una ecuación cuadrática completando el cuadrado

1. Usa la propiedad de multiplicación (o división) de la igualdad, si es necesario, para hacer 1 el coeficiente principal.
2. Reescribe la ecuación con la constante por sí sola, al lado derecho de la ecuación.
3. Toma *un medio* del coeficiente numérico del término de primer grado, *elévalo al cuadrado* y suma esta cantidad a ambos lados de la ecuación.
4. Factoriza el trinomio como el cuadrado de un binomio.
5. Usa la propiedad de la raíz cuadrada para sacar la raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación.
6. Resuelve en términos de la variable.
7. Verifica tus soluciones en la ecuación *original*.

EJEMPLO 4 Resuelve la ecuación $x^2 + 6x + 5 = 0$ completando el cuadrado.

Solución Dado que el coeficiente principal es 1, el paso 1 no es necesario.

Paso 2 Resta 5 de ambos lados de la ecuación.

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$
$$x^2 + 6x = -5$$

Paso 3 Determina el cuadrado de un medio del coeficiente numérico del término de primer grado, 6.

$$\frac{1}{2}(6) = 3, \qquad 3^2 = 9$$

Suma este valor a ambos lados de la ecuación.

$$x^2 + 6x + 9 = -5 + 9$$
$$x^2 + 6x + 9 = 4$$

Paso 4 Siguiendo este procedimiento, se reproduce un trinomio cuadrado perfecto en el lado izquierdo de la ecuación. La expresión $x^2 + 6x + 9$, es un trinomio cuadrado perfecto que puede ser factorizado como $(x + 3)^2$.

$\frac{1}{2}$ del coeficiente numérico del término de primer grado es $\frac{1}{2}(6) = +3$

$$(x + 3)^2 = 4$$

Paso 5 Usa la propiedad de la raíz cuadrada.

$$x + 3 = \pm\sqrt{4}$$
$$x + 3 = \pm 2$$

Paso 6 Finalmente, resuelve en términos de x al restar 3 de ambos lado de la ecuación.

$$x + 3 - 3 = -3 \pm 2$$
$$x = -3 \pm 2$$
$$x = -3 + 2 \quad \text{o} \quad x = -3 - 2$$
$$x = -1 \qquad\qquad x = -5$$

Paso 7 Verifica ambas soluciones en la ecuación original.

$x = -1$		$x = -5$	
$x^2 + 6x + 5 = 0$		$x^2 + 6x + 5 = 0$	
$(-1)^2 + 6(-1) + 5 \stackrel{?}{=} 0$		$(-5)^2 + 6(-5) + 5 \stackrel{?}{=} 0$	
$1 - 6 + 5 \stackrel{?}{=} 0$		$25 - 30 + 5 \stackrel{?}{=} 0$	
$0 = 0$	Verdadero	$0 = 0$	Verdadero

Dado que cada número coincide, tanto -1 como -5, son soluciones de la ecuación original.

Ahora resuelve el ejercicio 39

EJEMPLO 5 Resuelve la ecuación $-x^2 = -3x - 18$, completando el cuadrado.

Solución Comienza por multiplicar ambos lados de la ecuación por -1, para hacer el coeficiente del término cuadrado igual a 1.

$$-x^2 = -3x - 18$$
$$-1(-x^2) = -1(-3x - 18) \quad \text{Multiplica ambos lados por } -1.$$
$$x^2 = 3x + 18 \quad \text{Resta } 3x \text{ de ambos lados.}$$
$$x^2 - 3x = 18$$

Toma la mitad del coeficiente numérico del término de primer grado, elévalo al cuadrado y suma este producto a ambos lados de la ecuación.

$$\frac{1}{2}(-3) = -\frac{3}{2} \qquad \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$
$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 18 + \frac{9}{4} \quad \text{Completa el cuadrado.}$$
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 18 + \frac{9}{4} \quad \text{Factoriza el trinomio como el cuadrado de un binomio.}$$
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{72}{4} + \frac{9}{4}$$
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$$
$$x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{81}{4}} \quad \text{Propiedad de la raíz cuadrada.}$$
$$x - \frac{3}{2} = \pm\frac{9}{2} \quad \text{Simplifica.}$$
$$x = \frac{3}{2} \pm \frac{9}{2} \quad \text{Suma } \frac{3}{2} \text{ a ambos lados.}$$

Comprende el Álgebra

Cuando una ecuación cuadrática tenga un coeficiente principal que no sea 1, puedes multiplicar cada término en ambos lados de la ecuación por el recíproco del coeficiente principal. Esto resultará en una ecuación equivalente con un coeficiente principal de 1. Por ejemplo, la ecuación

$$-\frac{1}{4}x^2 + 2x - 8 = 0$$

puede multiplicarse por -4 para obtener la ecuación equivalente

$$x^2 - 8x + 32 = 0$$

que tiene un coeficiente principal de 1.

$$x = \frac{3}{2} + \frac{9}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{3}{2} - \frac{9}{2}$$
$$x = \frac{12}{2} = 6 \qquad x = -\frac{6}{2} = -3$$

Una verificación confirmará que las soluciones son 6 y −3.

Ahora resuelve el ejercicio 51

En los siguientes ejemplos no se mostrarán algunos de los pasos intermedios.

EJEMPLO 6 Resuelve $x^2 - 4x + 24 = 0$ completando el cuadrado.

Solution

$x^2 - 4x + 24 = 0$ — Resta 24 de ambos lados.
$x^2 - 4x = -24$
$x^2 - 4x + 4 = -24 + 4$ — Completa el cuadrado.
$(x - 2)^2 = -20$ — Factoriza el trinomio como el cuadrado de un binomio.
$x - 2 = \pm\sqrt{-20}$ — Propiedad de la raíz cuadrada.
$x - 2 = \pm 2i\sqrt{5}$ — Simplifica.
$x = 2 \pm 2i\sqrt{5}$ — Resuelve en términos de x.

Una verificación confirmará que las soluciones son los números complejos $2 + 2i\sqrt{5}$ y $2 - 2i\sqrt{5}$.

Ahora resuelve el ejercicio 69

EJEMPLO 7 Resuelve la ecuación $-4x^2 + 8x + 32 = 0$, completando el cuadrado.

Solución

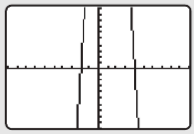
$-4x^2 + 8x + 32 = 0$
$-\frac{1}{4}(-4x^2 + 8x + 32) = -\frac{1}{4}(0)$ — Multiplica por $-1/4$ para obtener un coeficiente principal de 1.
$x^2 - 2x - 8 = 0$
$x^2 - 2x = 8$ — Suma 8 a ambos lados.
$x^2 - 2x + 1 = 8 + 1$ — Completa el cuadrado.
$(x - 1)^2 = 9$ — Factoriza el trinomio como el cuadrado de un binomio.
$x - 1 = \pm 3$ — Propiedad de la raíz cuadrada
$x = 1 \pm 3$ — Resuelve en términos de x.
$x = 1 + 3$ o $x = 1 - 3$
$x = 4$ $\qquad x = -2$

Ahora resuelve el ejercicio 75

USA TU CALCULADORA GRAFICADORA



Puedes verificar las soluciones *reales* a ecuaciones cuadráticas, usando una calculadora graficadora. Recuerda que las intersecciones con el eje de las x de una función, ocurren cuando $y = 0$. Por tanto, para verificar las soluciones a la ecuación en el ejemplo 7, $-4x^2 + 8x + 32 = 0$, se considerarán las intersecciones con el eje de las x de la función $y = -4x^2 + 8x + 32$.



La figura anterior verifica que las soluciones a $-4x^2 + 8x + 32 = 0$ son −2 y 4. Recuerda que las intersecciones con el eje de las x sólo representan soluciones *reales* a una ecuación. Por tanto, no puedes usar una calculadora graficadora para verificar las soluciones de la ecuación del ejemplo 6, pues las soluciones son números complejos.

Por lo general, las ecuaciones cuadráticas que no se puedan resolver fácilmente mediante factorización, se resolverán mediante la *fórmula cuadrática*, que se presenta en la siguiente sección.

Esta sección, concluye con problemas aplicados que involucran la *fórmula de interés compuesto*. Recuerda, de la sección 2.2, que la **fórmula de interés compuesto**, $A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$, se puede usar para determinar el monto acumulativo, A, cuando un principal inicial, p, se invierte a una tasa de interés anual, r, compuesta n veces al año durante t años. Esta fórmula se usará en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8 Interés compuesto

a) Para ahorrar dinero para comprar una bicicleta nueva, Josué inicialmente invirtió $1 000 en una cuenta de ahorros, donde el interés se acumula anualmente (una vez al año). Si después de 2 años, el monto en la cuenta es de $1 102.50, determina la tasa de interés anual, r.

b) Para ahorrar dinero para la universidad, Teresa inicialmente invirtió $1 000 en una cuenta de ahorros, donde el interés se acumula trimestralmente (cuatro veces al año). Si después de 3 años, el monto en la cuenta es de $1 195.62, determina la tasa de interés anual, r.



Solución

a) Entiende Se proporciona la siguiente información:

$$p = \$1\,000, \quad A = \$1\,102.50, \quad n = 1, \quad t = 2$$

Se pide determinar la tasa de interés anual, r. Para hacerlo, sustituye los valores adecuados en la fórmula y resuelve en términos de r.

Traduce
$$A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$
$$1\,102.50 = 1000\left(1 + \frac{r}{1}\right)^{1(2)}$$

Realiza

$1\,102.50 = 1000(1 + r)^2$	Divide ambos lados entre 1 000.
$1.10250 = (1 + r)^2$	Propiedad de la raíz cuadrada.
$\pm\sqrt{1.10250} = 1 + r$	Sólo se usará la raíz cuadrada positiva, pues r debe ser positiva.
$1.05 = 1 + r$	Resta 1 de ambos lados.
$0.05 = r$	

Responde La tasa de interés anual es de 0.05 o 5%.

b) Entiende Se proporcionan:

$$p = 1\,000, \quad A = \$1\,195.62, \quad n = 4, \quad t = 3$$

Para determinar r, sustituye los valores adecuados en la fórmula y resuelve en términos de r.

Traduce
$$A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$
$$1\,195.62 = 1\,000\left(1 + \frac{r}{4}\right)^{4(3)}$$

Realiza

$1.19562 = \left(1 + \frac{r}{4}\right)^{12}$	Divide ambos lados entre 1 000.
$\sqrt[12]{1.19562} = 1 + \frac{r}{4}$	Saca la raíz 12^{ava} de ambos lados (o eleva ambos lados a la potencia 1/12).
$1.015 \approx 1 + \frac{r}{4}$	Aproxima $1.19562^{1/12}$ en una calculadora.
$0.015 \approx \frac{r}{4}$	Resta 1 de ambos lados.
$0.06 \approx r$	Multiplica ambos lados por 4.

Responde La tasa de interés anual es aproximadamente de 0.06 o 6%.

Ahora resuelve el ejercicio 103

Comprende el Álgebra

Recuerda, del capítulo 7, que:

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}.$$

Por tanto, del ejemplo 8:

$$\sqrt[12]{1.19562} = 1.19562^{1/12}$$

8.1 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

recíproco	imaginario	cuadrática	cuadrada	perfecto	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$
25	10	100	un medio	complejo	binomio	

1. Una ecuación _____ es una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c, son números reales y $a \neq 0$.
2. La raíz cuadrada de un número negativo, es un número _____.
3. Un número de la forma $a + bi$, es un número _____.
4. Un trinomio cuadrado perfecto, es un trinomio que puede expresarse como el cuadrado de un _____.
5. Para resolver una ecuación cuadrática completando el cuadrado, suma una constante a ambos lados de la ecuación, de modo que el trinomio resultante sea un trinomio cuadrado _____.
6. Una vez que un lado de una ecuación cuadrática se reescribe como un trinomio cuadrado perfecto, la ecuación puede resolverse mediante el uso de la propiedad de la raíz _____.
7. Cuando una ecuación cuadrática tiene un coeficiente principal que no es 1, puedes multiplicar cada término en ambos lados de la ecuación, por el _____ del coeficiente principal.
8. En un trinomio cuadrado perfecto, con un coeficiente principal de 1, el término constante es el cuadrado de _____ del coeficiente del término de primer grado.
9. Para resolver la ecuación cuadrática $x^2 - 10x = 24$, completando el cuadrado, se suma _____ a ambos lados de la ecuación.
10. Para obtener una ecuación equivalente con un coeficiente principal de 1, multiplica ambos lados de la ecuación $\frac{2}{3}x^2 + 3x - 5 = 0$, por _____.

Practica tus habilidades

Para los ejercicios 11-38, usa la propiedad de la raíz cuadrada para resolver cada ecuación. Escribe las soluciones como número complejo en la forma $a \pm bi$.

11. $x^2 = 64$ **12.** $y^2 = 121$ **13.** $x^2 - 25 = 0$

14. $x^2 - 49 = 0$ **15.** $x^2 - 24 = 0$ **16.** $p^2 - 45 = 0$

17. $p^2 + 81 = 0$ **18.** $q^2 + 144 = 0$ **19.** $x^2 + 24 = 0$

20. $r^2 + 48 = 0$ **21.** $y^2 - 5 = 22$ **22.** $z^2 + 8 = 40$

23. $a^2 + 7 = 2$ **24.** $b^2 - 5 = -11$ **25.** $(p - 4)^2 = 16$

26. $(x + 3)^2 = 49$ **27.** $(x + 3)^2 + 25 = 0$ **28.** $(y - 4)^2 + 144 = 0$

29. $(a - 2)^2 + 45 = 0$ **30.** $(b + 5)^2 + 80 = 0$ **31.** $\left(b + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

32. $\left(b - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ **33.** $(2a - 5)^2 = 18$ **34.** $(4y + 1)^2 = 12$

35. $(5x + 9)^2 + 4 = 0$ **36.** $(7r - 3)^2 + 36 = 0$ **37.** $\left(2y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4}{25}$

38. $\left(3x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{25}$

Resuelve cada ecuación completando el cuadrado. Escribe las soluciones como número complejo en la forma $a \pm bi$.

39. $x^2 + 4x + 3 = 0$ **40.** $y^2 + 6y + 5 = 0$ **41.** $x^2 - 2x - 3 = 0$

42. $y^2 + 4y - 21 = 0$ **43.** $x^2 + 7x + 12 = 0$ **44.** $x^2 + 9x + 18 = 0$

45. $c^2 - 5c + 4 = 0$ **46.** $d^2 - 11d + 18 = 0$ **47.** $2x^2 + x - 1 = 0$

48. $3c^2 - 4c - 4 = 0$

49. $2z^2 - 7z - 4 = 0$

50. $4a^2 + 9a = 9$

51. $-x^2 + 6x + 7 = 0$

52. $-z^2 - 4z + 12 = 0$

53. $x^2 + 10x = 11$

54. $-x^2 = 6x - 27$

55. $b^2 = 3b + 28$

56. $-x^2 + 40 = -3x$

57. $x^2 - 4x - 10 = 0$

58. $x^2 - 6x + 2 = 0$

59. $m^2 + 6m + 1 = 0$

60. $a^2 + 4a - 8 = 0$

61. $p^2 - 4p + 13 = 0$

62. $q^2 - 6q + 13 = 0$

63. $n^2 - n = 3$

64. $p^2 - p = 5$

65. $x^2 + 3x + 6 = 0$

66. $z^2 - 5z + 7 = 0$

67. $9x^2 - 9x = 0$

68. $4y^2 + 12y = 0$

69. $a^2 - 4a + 7 = 0$

70. $b^2 - 2b + 6 = 0$

71. $36c^2 - 36c + 25 = 0$

72. $100d^2 - 300d + 229 = 0$

73. $-\frac{1}{2}p^2 - p + \frac{3}{2} = 0$

74. $-\frac{1}{5}q^2 + \frac{4}{5}q + 1 = 0$

75. $2x^2 = 8x + 64$

76. $2x^2 + 6x = 20$

77. $\frac{3}{4}w^2 + \frac{1}{2}w - \frac{1}{4} = 0$

78. $\frac{3}{4}c^2 - 2c + 1 = 0$

79. $-\frac{3}{2}x^2 + 6x + \frac{3}{2} = 0$

80. $-\frac{2}{3}x^2 + 4x - \frac{14}{3} = 0$

81. $2x^2 - x = -5$

82. $5y^2 - 3y = -2$

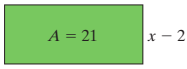
83. $\frac{5}{6}z^2 + \frac{15}{2}z + \frac{5}{3} = 0$

84. $\frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} = 0$

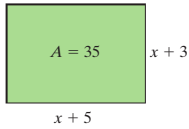
Resolución de problemas

Área *En los ejercicios 85-88, se proporciona el área, A, de cada rectángulo.* **a)** *Escribe una ecuación para el área.* **b)** *Resuelve la ecuación en términos de x.*

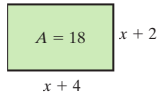
85.



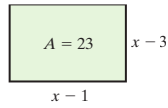
86.



87.



88.



89. Distancia de frenado en nieve Una fórmula para aproximar la distancia de frenado, d, en pies, para un automóvil particular en la nieve, es $d = \frac{1}{6}x^2$, donde x es la rapidez del automóvil, en millas por hora, antes de aplicar los frenos. Si la distancia de frenado del automóvil fue de 24 pies, ¿cuál fue la rapidez del automóvil antes de aplicar los frenos?



90. Distancia de frenado sobre pavimento seco Una fórmula para aproximar la distancia de frenado, d, en pies, para un automóvil particular sobre pavimento seco, es $d = \frac{1}{10}x^2$, donde x es la rapidez del automóvil, en millas por hora, antes de aplicar los frenos. Si la distancia de frenado del automóvil fue de 90 pies, ¿cuál fue la rapidez del automóvil ante de aplicar los frenos?

91. Enteros El producto de dos enteros impares positivos consecutivos es 35. Determina los dos enteros impares.

92. Enteros El producto de dos enteros pares positivos consecutivos es 48. Determina los dos enteros pares.

93. Jardín rectangular Diana marcó una área en su patio donde plantará tomates. Determina las dimensiones del área rectangular, si la longitud es 2 pies mayor que el doble del ancho y el área es de 60 pies cuadrados.

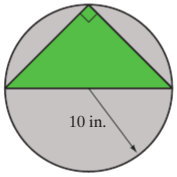
94. Jardín de mariposas Gabriel designa una área rectangular en su patio para un jardín de mariposas. Determina las dimensiones del jardín, si la longitud es 8 pies mayor que el doble del ancho y el área es de 120 pies cuadrados.



95. Patio Bill diseña un patio cuadrado, cuya diagonal es 6 pies más larga que la longitud de un lado. Determina la longitud de un lado.

96. Chapoteadero El hotel Lakeside planea construir un chapoteadero para niños. Si el chapoteadero será un cuadrado y la diagonal del cuadrado es 7 pies más larga que un lado, determina la longitud de un lado del chapoteadero.

97. Triángulo inscrito Cuando un triángulo está inscrito en un semicírculo, donde un diámetro del círculo es un lado del triángulo, el triángulo formado siempre es un triángulo recto. Si un triángulo isósceles (dos lados iguales) se inscribe en un semicírculo de 10 pulgadas de radio, determina la longitud de los otros dos lados del triángulo.



98. Triángulo inscrito Consulta el ejercicio 97. Supón que un triángulo se inscribe en un semicírculo cuyo diámetro es de 12 metros. Si un lado del triángulo inscrito es de 6 metros, determina el tercer lado.

99. Área de círculo El área de un círculo es de 24π pies cuadrados. Usa la fórmula $A = \pi r^2$ para determinar el radio del círculo.

100. Área de círculo El área de un círculo es de 16.4π metros cuadrados. Determina el radio del círculo.

Usa la fórmula $A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)$, *para responder los ejercicios 101-104.*

101. Cuenta de ahorros Francisco inicialmente invirtió $500 en una cuenta de ahorros, donde el interés se compone anualmente. Si después de 2 años, el monto en la cuenta es de $540.80, determina la tasa de interés anual.

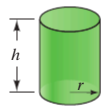
102. Cuenta de ahorros Margarita inicialmente invirtió $1 500 en una cuenta de ahorros, donde el interés se compone anualmente. Si después de 3 años, el monto en la cuenta es de $1 687.30, determina la tasa de interés anual.

103. Cuenta de ahorros Esteban inicialmente invirtió $1 200 en una cuenta de ahorros, donde el interés se compone semestralmente. Si después de 3 años, el monto en la cuenta es de $1 432.86, determina la tasa de interés anual.

104. Cuenta de ahorros Ángela inicialmente invirtió $1 500 en una cuenta de ahorros, donde el interés se compone semestralmente. Si después de 4 años, el monto en la cuenta es de $2 052.85, determina la tasa de interés anual.

105. Área superficial y volumen El área superficial, S, y el volumen, V, de un cilindro circular recto de radio r y altura h, se obtienen mediante las fórmulas:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh, \qquad V = \pi r^2 h$$



a) Determina el área superficial del cilindro, si su altura es de 10 pulgadas y su volumen es de 160 pulgadas cúbicas.

b) Determina el radio, si la altura es de 10 pulgadas y el volumen es de 160 pulgadas cúbicas.

c) Determina el radio, si la altura es de 10 pulgadas y el área superficial es de 160 pulgadas cuadradas.

Actividad grupal

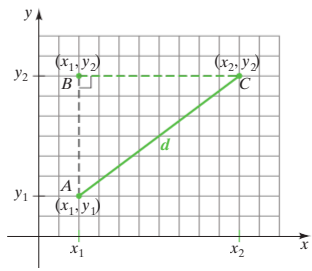
Discute y responde el ejercicio 106, en equipo.

106. En la siguiente cuadrícula, se trazaron los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_1, y_2).

a) Explica por qué (x_1, y_2) se colocó en la posición indicada y no en alguna otra parte sobre la gráfica.

b) Expresa la longitud de la recta punteada vertical en términos de y_2 y y_1. Explica cómo determinaste tu respuesta.

c) Expresa la longitud de la recta punteada horizontal en términos de x_2 y x_1.



d) Con el teorema de Pitágoras y el triángulo recto ABC, deriva una fórmula para la distancia, d, entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).* Explica cómo determinaste la fórmula.

e) Usa la fórmula que determinaste en el inciso **d)**, para determinar la distancia del segmento de recta entre los puntos (1, 4) y (3, 7).

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.1] **107.** Resuelve $-4(2z - 6) = -3(z - 4) + z$.

[2.4] **108. Inversión** Mateo invirtió \$10 000 durante 1 año, una parte a 7% y otra parte a $6\frac{1}{4}$%. Si ganó un interés total de \$656.50, ¿cuánto invirtió a cada tasa?

[2.6] **109.** Resuelve $|x + 3| = |2x - 7|$.

[3.4] **110.** Determina la pendiente de la recta que pasa a través de (−2, 5) y (0, 5).

[5.2] **111.** Multiplica $(x - 2)(4x^2 + 9x - 3)$.

8.2 Resolución de ecuaciones cuadráticas mediante la fórmula cuadrática

1. **Derivación de la fórmula cuadrática**
2. **Uso de la fórmula cuadrática para resolver ecuaciones**
3. **Determinación de una ecuación cuadrática dadas sus soluciones**
4. **Uso del discriminante para determinar el número de soluciones reales de una ecuación cuadrática**
5. **Estudio de aplicaciones que usen ecuaciones cuadráticas**

Comprende el Álgebra

Aunque cualquier ecuación cuadrática también se puede resolver completando el cuadrado, en este libro, por lo general, se prefiere el uso de la fórmula cuadrática, ya que es más fácil y más eficiente. Sin embargo, completar cuadrados es una habilidad útil que puede usarse en otras áreas del Álgebra, incluyendo en el estudio de las secciones cónicas del capítulo 10.

1 Derivación de la fórmula cuadrática

La fórmula cuadrática puede usarse para resolver cualquier ecuación cuadrática. *Es el método más útil y más versátil para resolver ecuaciones cuadráticas.*

La forma general de una ecuación cuadrática, es $ax^2 + bx + c = 0$, donde a es el coeficiente del término al cuadrado, b es el coeficiente del término de primer grado y c es la constante.

Ecuación cuadrática en forma general	Valores de coeficientes
$x^2 - 5x + 13 = 0$	$a = 1,\ b = -5,\ c = 13$
$4x^2 + x - 7 = 0$	$a = 4,\ b = 1,\ c = -7$
$5x^2 - 2x + 1 = 0$	$a = 5,\ b = -2,\ c = 1$

La fórmula cuadrática, se puede derivar comenzando con una ecuación cuadrática en forma general y completando el cuadrado, como se mostró en la sección anterior.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \qquad \text{Divide ambos lados por } a.$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \qquad \text{Resta } c/a \text{ de ambos lados.}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \qquad \text{Toma } 1/2 \text{ de } b/a \text{ (es decir, } b/2a\text{) y elévalo al cuadrado para obtener } b^2/4a^2. \text{ Luego, suma esta expresión a ambos lados.}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \qquad \text{Reescribe el lado izquierdo de la ecuación, como el cuadrado de un binomio.}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad \text{Escribe el lado derecho con un denominador común.}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \qquad \text{Propiedad de la raíz cuadrada.}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{Regla del cociente para radicales.}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{Resta } b/2a \text{ de ambos lados.}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{Escribe con un denominador común, para obtener la fórmula cuadrática.}$$

*La fórmula de distancia se estudiará en un capítulo posterior.

2 Uso de la fórmula cuadrática para resolver ecuaciones

Ahora que se derivó la fórmula cuadrática, se recurrirá a ella para resolver ecuaciones cuadráticas.

Para resolver una ecuación cuadrática mediante la fórmula cuadrática

1. Escribe la ecuación cuadrática en forma general, $ax^2 + bx + c = 0$, y determina los valores numéricos de a, b y c.
2. Sustituye los valores de a, b y c en la fórmula cuadrática y después evalúa la fórmula para obtener la solución.

La fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EJEMPLO 1 Resuelve $x^2 + 2x - 8 = 0$, usando la fórmula cuadrática.

Solución En esta ecuación, $a = 1$, $b = 2$ y $c = -8$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-8)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 6}{2}$$

$$x = \frac{-2 + 6}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{-2 - 6}{2}$$

$$x = \frac{4}{2} = 2 \qquad x = \frac{-8}{2} = -4$$

Una verificación mostrará que, tanto 2 como -4, son soluciones de la ecuación. Observa que las soluciones de la ecuación $x^2 + 2x - 8 = 0$, son dos números reales.

Ahora resuelve el ejercicio 23

SUGERENCIA ÚTIL

La solución al ejemplo 1 también se podría obtener mediante factorización, de la siguiente manera:

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x + 4)(x - 2) = 0$$

$$x + 4 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$

$$x = -4 \qquad x = 2$$

Cuando se proporciona una ecuación cuadrática para resolver y no se especifica el método para resolverla, puedes intentar resolverla primero por factorización (como se discutió en la sección 5.8). Si la ecuación no se puede factorizar fácilmente, usa la fórmula cuadrática.

EJEMPLO 2 Resuelve $-4x^2 = -12x + 9$, usando la fórmula cuadrática.

Solución Comienza por escribir la ecuación cuadrática en forma general. Luego, identifica los coeficientes y sustituye los coeficientes en la fórmula cuadrática.

$$-4x^2 = -12x + 9 \qquad \text{Suma } 4x^2 \text{ a ambos lados.}$$

$$0 = 4x^2 - 12x + 9$$

$$a = 4, \quad b = -12, \quad c = 9$$

Comprende el Álgebra

Cuando usas la fórmula cuadrática, los cálculos son más sencillos si el coeficiente principal, a, es un entero positivo. Por tanto, si resuelves la ecuación

$$-x^2 + 3x = 2,$$

puedes sumar x^2 a ambos lados y restar $3x$ de ambos lados, para obtener la ecuación equivalente

$$0 = x^2 - 3x + 2$$

o $$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(4)(9)}}{2(4)} \\ &= \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8} \\ &= \frac{12 \pm \sqrt{0}}{8} = \frac{12 \pm 0}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

La única solución a la ecuación cuadrática $-4x^2 = -12x + 9$ es $\frac{3}{2}$ Como se verá más adelante en esta sección, algunas ecuaciones cuadráticas tienen sólo una solución.

Ahora resuelve el ejercicio 39

CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

Todo el numerador de la fórmula cuadrática, debe dividirse por $2a$.

CORRECTO

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

INCORRECTO

$$x = -b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

EJEMPLO 3 Resuelve $p^2 + \frac{1}{3}p + \frac{5}{6} = 0$, usando la fórmula cuadrática.

Solución Comienza por eliminar las fracciones de la ecuación al multiplicar ambos lados de la ecuación, por el mínimo común denominador, 6.

$$6\left(p^2 + \frac{1}{3}p + \frac{5}{6}\right) = 6(0)$$

$$6p^2 + 2p + 5 = 0$$

Ahora puedes usar la fórmula cuadrática con $a = 6$, $b = 2$, y $c = 5$.

$$\begin{aligned} p &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(6)(5)}}{2(6)} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-116}}{12} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-4}\sqrt{29}}{12} \\ &= \frac{-2 \pm 2i\sqrt{29}}{12} \\ &= \frac{\overset{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{29})}{\underset{6}{12}} \\ &= \frac{-1 \pm i\sqrt{29}}{6} \\ &= -\frac{1}{6} \pm \frac{i\sqrt{29}}{6}* \end{aligned}$$

*En la Sección de Respuestas, las soluciones con números complejos se escriben en la forma $a \pm bi$.

Las soluciones son $-\frac{1}{6}+\frac{i\sqrt{29}}{6}$ y $-\frac{1}{6}-\frac{i\sqrt{29}}{6}$. Observa que ambas soluciones son números complejos escritos en forma general de los números complejos.

Ahora resuelve el ejercicio 53

CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

A continuación se ilustran procedimientos, correctos e incorrectos, para simplificar una respuesta cuando se usa la fórmula cuadrática.

Cuando los términos, *tanto* del numerador *como* del denominador, tienen un factor común, dicho factor común puede dividirse del siguiente modo:

CORRECTO

$$\frac{2+4\sqrt{3}}{2}=\frac{\overset{1}{\cancel{2}}(1+2\sqrt{3})}{\underset{1}{\cancel{2}}}=1+2\sqrt{3}$$

$$\frac{6+3\sqrt{3}}{6}=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}(2+\sqrt{3})}{\underset{2}{\cancel{6}}}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$$

A continuación, se muestran algunos errores.

INCORRECTO

$$\cancel{\frac{2+3}{2}=\frac{\overset{1}{\cancel{2}}+3}{\underset{1}{\cancel{2}}}} \qquad \cancel{\frac{3+2\sqrt{5}}{2}=\frac{3+\overset{1}{\cancel{2}}\sqrt{5}}{\underset{1}{\cancel{2}}}}$$

$$\cancel{\frac{3+\sqrt{6}}{\cancel{2}}=\frac{3+\sqrt{6^3}}{\underset{1}{\cancel{2}}}} \qquad \cancel{\frac{4+3\sqrt{5}}{2}=\frac{\overset{2}{\cancel{4}}+3\sqrt{5}}{\underset{1}{\cancel{2}}}}$$

Observa que, $\frac{2+3}{2}$ se simplifica como $\frac{5}{2}$. Sin embargo, $\frac{3+2\sqrt{5}}{2}$, $\frac{3+\sqrt{6}}{2}$ y $\frac{4+3\sqrt{5}}{2}$, no se pueden simplificar más.

EJEMPLO 4 Dada $f(x)=x^2+2x-8$, determina todos los valores reales de x, para los cuales, $f(x)=-7$.

Solución Se pide determinar todos los valores reales de x, para los cuales, $f(x)=-7$.

$$\underbrace{f(x)}_{\downarrow} = -7 \quad \downarrow$$
$$x^2+2x-8=-7$$

Para resolver esta ecuación usando la fórmula cuadrática, comienza por escribir la ecuación cuadrática en forma general.

$$x^2+2x-8=-7 \quad \text{Suma 7 a ambos lados.}$$
$$x^2+2x-1=0 \quad \text{Usa la fórmula cuadrática con } a=1,\ b=2 \text{ y } c=-1.$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-(2)\pm\sqrt{(2)^2-4(1)(-1)}}{2(1)}$$
$$=\frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2}$$
$$=\frac{-2\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2}=\frac{\overset{1}{\cancel{2}}(-1\pm\sqrt{2})}{\underset{1}{\cancel{2}}}=-1\pm\sqrt{2}^{*}$$

*En la Sección de Respuestas, las soluciones en número real se escriben de esta forma.

Comprende el Álgebra

Si los coeficientes numéricos de una ecuación cuadrática tienen un factor común, divide cada término entre el factor común. Por ejemplo, para la ecuación $3x^2+12x+3=0$, primero divide cada término entre el factor común, 3, y simplifica:

$$\frac{3x^2}{3}+\frac{12x}{3}+\frac{3}{3}=\frac{0}{3}$$
$$x^2+4x+1=0$$

Esta nueva ecuación es equivalente a la ecuación original y es más fácil de resolver.

En consecuencia, los valores de x son $-1 + \sqrt{2}$ y $-1 - \sqrt{2}$. Observa que la ecuación cuadrática, $x^2 + 2x - 1 = 0$, no se puede resolver por factorización.

Ahora resuelve el ejercicio 69

3 Determinación de una ecuación cuadrática dadas sus soluciones

Si se proporcionan las soluciones de una ecuación cuadrática, es posible determinar la ecuación al trabajar de forma regresiva. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Determina una ecuación cuadrática que tenga las siguientes soluciones:

a) -5 y 1 **b)** $3 + 2i$ y $3 - 2i$

Solución

a) Si las soluciones son -5 y 1, escribe:

$$x = -5 \quad \text{o} \quad x = 1$$

$$x + 5 = 0 \qquad x - 1 = 0 \qquad \text{Iguala las ecuaciones a 0.}$$

$$(x + 5)(x - 1) = 0 \qquad \text{Propiedad del factor cero.}$$

$$x^2 - x + 5x - 5 = 0 \qquad \text{Multiplica los factores.}$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \qquad \text{Combina los términos semejantes.}$$

En consecuencia, la ecuación cuadrática es $x^2 + 4x - 5 = 0$. Muchas otras ecuaciones cuadráticas tienen soluciones -5 y 1. De hecho, cualquier ecuación de la forma $k(x^2 + 4x - 5) = 0$, donde k es una constante distinta de cero, tiene dichas soluciones.

b)

$$x = 3 + 2i \quad \text{o} \quad x = 3 - 2i$$

$$x - (3 + 2i) = 0 \qquad x - (3 - 2i) = 0 \qquad \text{Iguala las ecuaciones a 0.}$$

$$[x - (3 + 2i)][x - (3 - 2i)] = 0 \qquad \text{Propiedad del factor cero.}$$

$$x \cdot x - x(3 - 2i) - x(3 + 2i) + (3 + 2i)(3 - 2i) = 0 \qquad \text{Multiplica.}$$

$$x^2 - 3x + 2xi - 3x - 2xi + (9 - 4i^2) = 0 \qquad \text{Propiedad distributiva; multiplica.}$$

$$x^2 - 6x + 9 - 4i^2 = 0 \qquad \text{Combina los términos semejantes.}$$

$$x^2 - 6x + 9 - 4(-1) = 0 \qquad \text{Sustituye: } i^2 = -1.$$

$$x^2 - 6x + 13 = 0 \qquad \text{Simplifica.}$$

La ecuación $x^2 - 6x + 13 = 0$, tiene como soluciones los números complejos $3 + 2i$ y $3 - 2i$.

Ahora resuelve el ejercicio 73

En el ejemplo 5 **a)**, la ecuación $x^2 + 4x - 5 = 0$ tuvo soluciones de números reales -5 y 1. Las soluciones corresponden a las intersecciones con el eje de las x $(-5, 0)$ y $(1, 0)$ de la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 4x - 5$, como se muestra en la **Figura 8.1**

Comprende el Álgebra

Recuerda, del capítulo 3, que una intersección al eje de las x de una gráfica, es un punto $(x, 0)$ donde una gráfica cruza o toca el eje x. Para determinar la intersección con el eje de las x de una gráfica, se hace $y = 0$ o $f(x) = 0$ y se resuelve en términos de x. Si x es un número real, entonces el punto $(x, 0)$ es una intersección con el eje de las x de la gráfica.

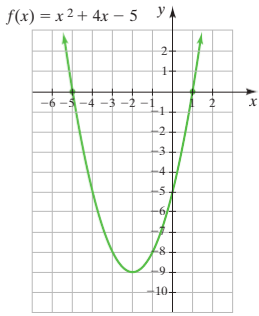


FIGURA 8.1

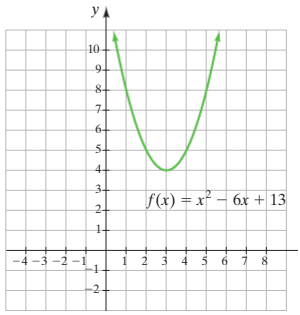


FIGURA 8.2

En el ejemplo 5 **b)**, la ecuación $x^2 - 6x + 13 = 0$, sólo tiene soluciones complejas y ninguna solución en números reales. Por tanto, la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 6x + 13$, no tiene intersección con el eje de las x, como se muestra en la **Figura 8.2**.

4 Uso del discriminante para determinar el número de soluciones reales de una ecuación cuadrática

Discriminante

El **discriminante** de una ecuación cuadrática, es la expresión bajo el signo radical en la fórmula cuadrática.

$$\underbrace{b^2 - 4ac}_{\text{Discriminante}}$$

El discriminante proporciona información para determinar el número y los tipos de soluciones de una ecuación cuadrática.

Soluciones de una ecuación cuadrática

Para una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$:

- Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación cuadrática tiene dos soluciones en números reales distintas.
- Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación cuadrática tiene una única solución en números reales.
- Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación cuadrática no tiene solución en números reales.

EJEMPLO 6

a) Determina el discriminante de la ecuación $x^2 - 8x + 16 = 0$.

b) ¿Cuántas soluciones en números reales tiene la ecuación dada?

c) Usa la fórmula cuadrática para determinar la(s) solución(es).

Solución

a) $a = 1, \quad b = -8, \quad c = 16$

$$b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(1)(16)$$
$$= 64 - 64 = 0$$

b) Como el discriminante es igual a 0, hay una única solución en números reales.

c)
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-(-8) \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{8 \pm 0}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

La única solución es 4.

Ahora resuelve el ejercicio 21

EJEMPLO 7

Sin que determines las soluciones, indica si las siguientes ecuaciones tienen dos soluciones en números reales distintas, una única solución en números reales o ninguna solución en números reales.

a) $2x^2 - 4x + 6 = 0$ **b)** $x^2 - 5x - 3 = 0$ **c)** $4x^2 - 12x = -9$

Solución Usa el discriminante de la fórmula cuadrática para responder estas preguntas.

a) $b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(2)(6) = 16 - 48 = -32$

Dado que el discriminante es negativo, esta ecuación no tiene solución en números reales.

b) $b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(-3) = 25 + 12 = 37$

Dado que el discriminante es positivo, esta ecuación tiene dos soluciones en números reales distintas.

Traduce $a = 0.2, \quad b = -50, \quad c = 480$

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-50) \pm \sqrt{(-50)^2 - 4(0.2)(480)}}{2(0.2)}$$

Realiza

$$= \frac{50 \pm \sqrt{2500 - 384}}{0.4}$$

$$= \frac{50 \pm \sqrt{2116}}{0.4}$$

$$= \frac{50 \pm 46}{0.4}$$

$$n = \frac{50 + 46}{0.4} = 240 \quad \text{o} \quad n = \frac{50 - 46}{0.4} = 10$$

Responde Puesto que el problema especificó que $n \leq 50$, la única solución aceptable es $n = 10$. En consecuencia, para obtener \$480 de ingreso, Haydee debe vender 10 collares.

Ahora resuelve el ejercicio 87

Una importante ecuación en física, relaciona la altura de un objeto con el tiempo, después de que el objeto se lanza hacia arriba.

Comprende el Álgebra

En la fórmula del tiro parabólico, la variables v_0 y h_0 tienen *subíndices* 0. Los subíndices 0, por lo general, se refieren al valor *inicial* de una variable. En consecuencia, v_0 se refiere a la velocidad *inicial* con la que el objeto se lanza hacia arriba, y h_0 se refiere a la altura *inicial* desde la cual se lanza el objeto.

Fórmula del tiro parabólico

La altura, h, de un objeto t segundos después de que se lanza hacia arriba, puede determinarse al resolver la fórmula

$$h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0, \text{ donde}$$

- g es la aceleración debida a la gravedad,
- v_0 es la velocidad inicial del objeto y
- h_0 es la altura inicial del objeto.

Antes de usar la ecuación, algunas notas acerca de g, la aceleración debida a la gravedad.

- Cuando la altura del objeto se mide en pies, la aceleración de la gravedad sobre la Tierra es de -32 ft/s^2 o $g = -32$.
- Cuando la altura de un objeto se mide en metros, la aceleración de la gravedad sobre la Tierra es de -9.8 m/s^2 o $g = -9.8$.
- El valor de g, será diferente en la Luna o en un planeta distinto a la Tierra, no obstante, se puede seguir usando la fórmula del tiro parabólico.

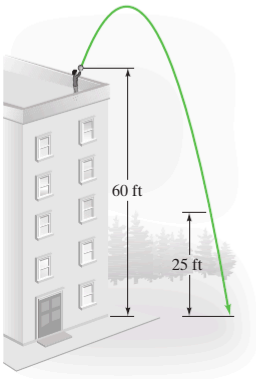


FIGURA 8.4

EJEMPLO 9 **Lanzamiento de una pelota** Beatriz está en lo alto de un edificio y lanza una pelota de béisbol hacia arriba, desde una altura inicial de 60 pies con una velocidad inicial de 30 pies por segundo. Usa la fórmula del tiro parabólico para responder las siguientes preguntas. Redondea tus respuestas a la décima de segundo más cercana.

a) ¿Cuánto tiempo después de que Beatriz lance la pelota, esta estará a 25 pies sobre el suelo?

b) ¿Cuánto tiempo después de que Beatriz lance la pelota, esta golpeará el suelo?

c) ¿Cuál es la altura de la pelota después de 2 segundos?

Solución

a) Entiende El problema se ilustra en la **Figura 8.4**. Se pidió determinar el tiempo, t, que el objeto tarda en llegar a una altura, h, de 25 pies. Por tanto, se tienen que sustituir los siguientes valores en la fórmula del tiro parabólico: $h = 25, g = -32, v_0 = 30$ y $h_0 = 60$.

Traduce
$$h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$$
$$25 = \frac{1}{2}(-32)t^2 + (30)t + 60$$

Realiza
$$25 = -16t^2 + 30t + 60$$

Suma $16t^2$, resta $30t$ y resta 60 de ambos lados para obtener una ecuación cuadrática en la forma general, con un coeficiente principal positivo.

$$16t^2 - 30t - 35 = 0$$
$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Resuelve usando la fórmula cuadrática con $a = 16$, $b = -30$ y $c = -35$.

$$= \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(16)(-35)}}{2(16)}$$
$$= \frac{30 \pm \sqrt{3140}}{32}$$
$$t = \frac{30 + \sqrt{3140}}{32} \quad \text{o} \quad t = \frac{30 - \sqrt{3140}}{32}$$
$$\approx 2.7 \qquad \approx -0.8$$

Responde Puesto que el tiempo no puede ser negativo, la única solución razonable es 2.7 segundos. En consecuencia, aproximadamente 2.7 segundos después de lanzar la pelota hacia arriba, esta estará a 25 pies sobre el suelo.

b) Entiende Cuando la pelota golpea el suelo, su distancia sobre el suelo es de 0. Sustituye $h = 0$ en la fórmula y resuelve en términos de t.

Traduce
$$h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$$
$$0 = \frac{1}{2}(-32)t^2 + 30t + 60$$

Realiza
$$0 = -16t^2 + 30t + 60$$
$$16t^2 - 30t - 60 = 0$$

Multiplica ambos lados de la ecuación por –1, para obtener un coeficiente principal positivo.

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Resuelve usando la fórmula cuadrática con $a = 16$, $b = -30$ y $c = -60$.

$$= \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(16)(-60)}}{2(16)}$$
$$= \frac{30 \pm \sqrt{4740}}{32}$$
$$t = \frac{30 + \sqrt{4740}}{32} \quad \text{o} \quad t = \frac{30 - \sqrt{4740}}{32}$$
$$\approx 3.1 \qquad \approx -1.2$$

Responde Dado que el tiempo no puede ser negativo, la única solución razonable es 3.1 segundos. En consecuencia, la pelota golpeará el suelo después de aproximadamente 3.1 segundos.

c) Entiende Se pide determinar la altura, h, después de 2 segundos. Se sustituirá $t = 2$ en la fórmula del tiro parabólico y se resolverá en términos de h.

$$h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$$

Traduce y Realiza
$$h = \frac{1}{2}(-32)(2)^2 + 30(2) + 60$$
$$= -64 + 60 + 60 = 56$$

Responde En consecuencia, la pelota estará a una altura de 56 pies después de 2 segundos.

Ahora resuelve el ejercicio 97

8.2 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

no	una	dos	completando	discriminante	positivo
parabólico	divide	multiplica	factoriza	lineal	

1. Aunque cualquier ecuación cuadrática puede resolverse _____ el cuadrado, en este texto por lo general se prefiere usar la fórmula cuadrática porque es más fácil y más.
2. Cuando se usa la fórmula cuadrática, los cálculos, por lo general, son más sencillos si el coeficiente principal, a, es un entero _____.
3. Si los coeficientes numéricos de los términos en una ecuación cuadrática tienen un factor común, _____ cada término entre el factor común.
4. El _____ de una ecuación cuadrática es la expresión bajo el signo radical en la fórmula cuadrática: $b^2 - 4ac$.
5. Si el discriminante de una ecuación cuadrática es positivo, la ecuación tiene _____ solución(es) distinta(s) de número(s) real(es).
6. Si el discriminante de una ecuación cuadrática es igual a cero, la ecuación tiene _____ solución(es) de número(s) real(es).
7. Si el discriminante de una ecuación cuadrática es negativo, la ecuación _____ tiene solución(es) de número(s) real(es).
8. La altura, h, de un objeto, t, segundos después de que se lanza hacia arriba, se puede encontrar usando la fórmula del tiro _____.

Practica tus habilidades

Usa el discriminante para determinar si cada ecuación tiene dos soluciones reales distintas, una única solución real o ninguna solución real.

9. $x^2 - 6x + 9 = 0$ **10.** $x^2 - 8x + 16 = 0$ **11.** $5x^2 - 2x + 7 = 0$

12. $6y^2 + 5y + 2 = 0$ **13.** $5p^2 + 3p - 7 = 0$ **14.** $7q^2 - 3q - 1 = 0$

15. $2j^2 = 3j + 8$ **16.** $-k^2 + 7 = 5k$ **17.** $\frac{m^2}{9} = \frac{m}{3} - \frac{1}{4}$

18. $0.72n = 1.44n^2 + 0.09$ **19.** $-1.3s^2 - 0.4s = 2.1$ **20.** $\frac{t}{5} - \frac{3}{4} = \frac{2}{3}t^2$

Resuelve cada ecuación usando la fórmula cuadrática. Escribe las soluciones en números complejos en la forma $a \pm bi$.

21. $x^2 + 5x + 6 = 0$ **22.** $x^2 + 8x + 15 = 0$ **23.** $p^2 - 6p + 8 = 0$

24. $q^2 - 9q + 14 = 0$ **25.** $r^2 - 2r - 15 = 0$ **26.** $s^2 - 5s - 24 = 0$

27. $6t^2 - 17t + 12 = 0$ **28.** $10u^2 - 37u + 7 = 0$ **29.** $6v^2 = v + 1$

30. $15w^2 - w = 6$ **31.** $21x^2 = 42 - 49x$ **32.** $6y^2 = 18 - 33y$

33. $x^2 - 16x = -64$ **34.** $y^2 = 18x - 81$ **35.** $d^2 - 6d + 7 = 0$

36. $k^2 - 4k - 1 = 0$ **37.** $3h^2 - 5h = 4$ **38.** $5j^2 = 3j + 4$

39. $99 - 66x = -11x^2$ **40.** $52 - 52x = -13x^2$ **41.** $y^2 - 10y + 34 = 0$

42. $y^2 - 14y + 65 = 0$ **43.** $4z^2 - 24z + 37 = 0$ **44.** $9z^2 - 36z + 37 = 0$

45. $7d^2 = 11d$ **46.** $13d = 5d^2$ **47.** $6p^2 + 7 = 0$

48. $8q^2 + 11 = 0$ **49.** $49r^2 = 140r - 100$ **50.** $121s^2 = 66s - 9$

51. $(3k - 2)(5k + 1) = 2$ **52.** $(14d + 9)(d - 1) = -3$ **53.** $7x^2 + \frac{3}{8}x - \frac{5}{2} = 0$

54. $\frac{7}{4}x^2 - \frac{19}{20}x - \frac{6}{5} = 0$ **55.** $\frac{5}{3}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{7}{8} = 0$ **56.** $\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{5}{8} = 0$

57. $2x^2 - 2x + 3 = 0$

58. $3x^2 - 2x + 1 = 0$

59. $h = \dfrac{h - 6}{4 - h}$

60. $3k = \dfrac{5k + 6}{2k + 3}$

61. $\dfrac{1}{2}x^2 + 2x + \dfrac{2}{3} = 0$

62. $\dfrac{1}{3}x^2 + 3x + \dfrac{3}{2} = 0$

63. $0.1y^2 + 0.6y - 1.2 = 0$

64. $0.01y^2 - 0.1y + 0.12 = 0$

Para cada función, determina todos los valores reales de la variable, para los cuales, la función tenga el valor indicado.

65. $f(x) = 2x^2 - 3x + 7,\ f(x) = 7$

66. $g(x) = x^2 + 3x + 8, g(x) = 8$

67. $k(x) = x^2 - x - 15, k(x) = 15$

68. $p(r) = r^2 + 17r + 81,\ p(r) = 9$

69. $h(t) = 2t^2 - 7t + 6,\ h(t) = 2$

70. $t(x) = x^2 + 5x - 4,\ t(x) = 3$

71. $s(t) = 2t^2 - 3t + 16, s(t) = 14$

72. $h(x) = 6x^2 + 3x + 1,\ h(x) = -7$

Determina una ecuación cuadrática que tenga las soluciones dadas.

73. $1, -9$

74. $-3, 4$

75. $1, 6$

76. $-2, -6$

77. $-\dfrac{3}{5}, \dfrac{2}{3}$

78. $\dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{7}$

79. $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$

80. $\sqrt{5}, -\sqrt{5}$

81. $3i, -3i$

82. $8i, -8i$

83. $3 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}$

84. $5 - \sqrt{3}, 5 + \sqrt{3}$

85. $2 + 3i, 2 - 3i$

86. $5 - 4i, 5 + 4i$

Resolución de problemas

87. Lámparas Olga tiene un negocio donde vende lámparas. El ingreso, $R(n)$, por vender n lámparas, $n \leq 65$, es de $R(n) = n(10 - 0.02n)$.

a) Determina el ingreso cuando se venden 30 lámparas.

b) ¿Cuántas lámparas debe vender para tener un ingreso de $450?

88. Relojes Pedro tiene un negocio donde vende relojes. El ingreso, $R(n)$, por vender n relojes, $n \leq 75$, es de $R(n) = n(30 - 0.15n)$.



a) Determina el ingreso cuando se venden 40 relojes.

b) ¿Cuántos relojes debe vender para tener un ingreso de $1 260?

89. Sillas Abril tiene un negocio donde vende sillas. El ingreso, $R(n)$, por vender n sillas, $n \leq 50$, es de $R(n) = n(50 - 0.4n)$.

a) Determina el ingreso cuando se venden 25 sillas.

b) ¿Cuántas sillas debe vender para tener un ingreso de $660?

90. Baterías Lidia tiene un negocio donde vende baterías. El ingreso, $R(n)$, por vender n baterías, $n \leq 25$, es de $R(n) = n(25 - 0.1n)$.

a) Determina el ingreso cuando se venden 22 baterías.

b) ¿Cuántas baterías debe vender para tener un ingreso de $460?

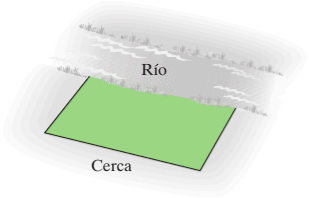
En los ejercicios 91-100, usa una calculadora, según se requiera, para obtener la solución en forma decimal. Redondea los números irracionales a la centésima más cercana.

91. Números El doble del cuadrado de un número positivo aumentado por el triple del número, es 27. Determina el número.

92. Números Tres veces el cuadrado de un número positivo reducido por el doble del número, es 21. Determina el número.

93. Jardín rectangular La longitud de un jardín rectangular es 1 pie menos que 3 veces su ancho. Determina la longitud y el ancho, si el área del jardín es de 24 pies cuadrados.

94. Región rectangular Laura quiere cercar una región rectangular a lo largo del banco de un río, al construir el cercado que se ilustra en el diagrama. Si ella sólo tiene 400 pies de cerca y quiere cercar una área de 15000 pies cuadrados, determina las dimensiones de la región rectangular.



95. Fotografía Juan, fotógrafo profesional, tiene una fotografía de 6 pulgadas por 8 pulgadas. Él quiere reducir la fotografía la misma cantidad en cada lado, de modo que la fotografía resultante tenga la mitad del área de la fotografía original. ¿Por cuánto tendrá que reducir la longitud de cada lado?

96. Jardín rectangular Bernardo tiene un jardín de flores de 12 metros por 9 metros. Él quiere construir un sendero de grava de un ancho uniforme a lo largo del interior del jardín en cada lado, de modo que el jardín resultante tendrá la mitad del área del jardín original. ¿Cuál será el ancho del sendero de grava?

En los ejercicios 97-100, usa la fórmula del tiro parabólico $h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$. *Si es necesario, redondea tus respuestas a la centésima más cercana. Consulta el ejemplo 9.*

97. Golpear una pelota de tenis Una pelota de tenis se golpea hacia arriba desde una altura inicial de 4 pies, con una velocidad inicial de 40 pies por segundo.

a) ¿Cuánto tiempo, después de golpear la pelota, estará 20 pies arriba del suelo?

b) ¿Cuánto tiempo, después de golpear la pelota, golpeará el suelo?

c) ¿Cuál es la altura de la pelota después de 1 segundo?

98. Lanzamiento de herraduras Una herradura se lanza hacia arriba, desde una altura inicial de 3 pies, con una velocidad inicial de 25 pies por segundo.



a) ¿Cuánto tiempo, después de lanzar la herradura, estará 10 pies arriba del suelo?

b) ¿Cuánto tiempo, después de lanzar la herradura, golpeará el suelo?

c) ¿Cuál es la altura de la herradura después de 1 segundo?

99. Juego de golf en la Luna El 6 de febrero de 1971, el astronauta Alan Shepard golpeó una pelota de golf mientras estaba de pie sobre la Luna. La aceleración debida a la gravedad, g, en la Luna, es de aproximadamente -5.3 ft/s^2. Supón que la pelota se golpeó hacia arriba desde una altura inicial de 0 pies y con una velocidad inicial de 26.5 ft/s.

a) ¿Cuánto tiempo, después de golpear la pelota de golf, esta alcanzaría una altura de 23.85 pies?

(*Sugerencia:* sustituye los valores apropiados en la fórmula del tiro parabólico y después divide cada término por el coeficiente principal.)

b) ¿Cuánto tiempo, después de golpear la pelota, regresaría a la superficie de la Luna?

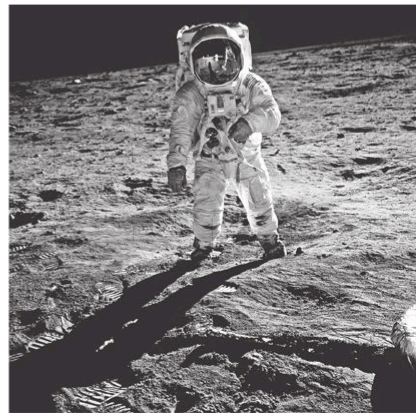
c) ¿Cuál sería la altura de la pelota de golf después de 5 segundos?

100. Béisbol en la Luna Supón que Neil Armstrong hubiera golpeado una pelota de béisbol cuando pisó por primera vez la Luna, el 20 de julio de 1969. Supón que la pelota fue golpeada hacia arriba desde una altura inicial de 2.65 pies y con una velocidad inicial de 132.5 ft/s. Consulta el ejercicio 99.

a) ¿Cuánto tiempo, después de que la pelota fue golpeada, alcanzaría una altura de 132.5 pies?

b) ¿Cuánto tiempo, después de que la pelota fue golpeada, llegaría al suelo?

c) ¿Cuál sería la altura de la pelota después de 25 segundos?



Neil Armstrong en la Luna

Ejercicios conceptuales y de redacción

101. Considera las dos ecuaciones $-6x^2 + \frac{1}{2}x - 5 = 0$ y $6x^2 - \frac{1}{2}x + 5 = 0$. ¿Las soluciones a estas dos ecuaciones deben ser iguales? Explica tu respuesta.

102. Considera $12x^2 - 15x - 6 = 0$ y $3(4x^2 - 5x - 2) = 0$.

a) ¿La solución a las dos ecuaciones deber ser la misma? Explica tu respuesta.

b) Resuelve $12x^2 - 15x - 6 = 0$.

c) Resuelve $3(4x^2 - 5x - 2) = 0$.

103. a) Explica cómo determinas el discriminante.

b) ¿Cuál es el discriminante para la ecuación $3x^2 - 6x + 10 = 0$?

c) Escribe un párrafo, o dos, donde expliques la relación entre el valor del discriminante y el número de soluciones reales de una ecuación cuadrática. En tu párrafo, explica *por qué* el valor del discriminante determina el número de soluciones reales.

104. Escribe un párrafo, o dos, donde expliques la relación entre el valor del discriminante y el número de intersecciones con el eje de las x de $f(x) = ax^2 + bx + c$. En tu párrafo, explica en qué caso la función no tendría intersección con el eje de las x, en qué caso tendría una intersección, y en qué caso tendría dos intersecciones con el eje de las x.

105. Proporciona tu propio ejemplo de una ecuación cuadrática que pueda resolverse por medio de la fórmula cuadrática, mas no por factorización sobre el conjunto de los enteros.

106. ¿Existen ecuaciones cuadráticas que **a)** pueden resolverse por medio de la fórmula cuadrática, mas no más no completando el cuadrado? **b)** pueden resolver completando el cuadrado, mas no por factorización sobre el conjunto de los enteros?

107. Cuando resuelves una ecuación cuadrática por medio de la fórmula cuadrática, si el discriminante es un cuadrado perfecto, ¿la ecuación debe ser factorizable sobre el conjunto de los enteros?

108. Cuando resuelves una ecuación cuadrática por medio de la fórmula cuadrática, si el discriminante es un número natural, ¿la ecuación debe ser factorizable sobre el conjunto de los enteros?

Problemas de desafío

109. Calentamiento de un cubo metálico Un cubo metálico se expande cuando se calienta. Si cada arista aumenta 0.20 milímetros después de calentarse y el volumen total aumenta en 6 milímetros cúbicos, determina la longitud original de un lado del cubo.

110. Seis soluciones La ecuación $x^n = 1$ tiene n soluciones (incluyendo soluciones complejas). Determina las seis soluciones a $x^6 = 1$. (*Sugerencia:* reescribe la ecuación como $x^6 - 1 = 0$, luego factoriza usando la fórmula de la diferencia de dos cuadrados.)

111. Lanzamiento de una roca Ramón está en el cuarto piso de un edificio de ocho pisos y Carolina está en el techo. Ramón está a 60 pies sobre el suelo, mientras que Carolina está a 120 pies arriba del suelo.

a) Si Ramón suelta una roca desde una ventana, determina el tiempo que tarda la roca en golpear el suelo.

b) Si Carolina suelta una roca desde el techo, determina el tiempo que tarda la roca en golpear el suelo.

c) Si Ramón lanza una roca hacia arriba, con una velocidad inicial de 100 pies por segundo, al mismo tiempo que Carolina lanza una roca hacia arriba a 60 pies por segundo, ¿cuál roca golpeará el suelo primero? Explica.

d) ¿Las rocas alguna vez estarán a la misma distancia sobre el suelo? Si es así, ¿en qué momento?

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.6] **112.** Evalúa $\frac{5.55 \times 10^3}{1.11 \times 10^1}$.

[3.2] **113.** Si $f(x) = x^2 + 2x - 8$, determina $f(3)$.

[4.1] **114.** Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$3x + 4y = 2$$
$$2x = -5y - 1$$

[6.3] **115.** Simplifica. $2x^{-1} - (3y)^{-1}$.

[7.6] **116.** Resuelve $\sqrt{x^2 - 6x - 4} = x$.

8.3 Ecuaciones cuadráticas: aplicaciones y resolución de problemas

1 **Resolución de problemas aplicados adicionales**

2 **Despeje de una variable en una fórmula**

1 Resolución de problemas aplicados adicionales

En esta sección, se explorarán muchas más aplicaciones de las ecuaciones cuadráticas. Se comienza considerando la ganancia de una nueva compañía.

EJEMPLO 1 **Drones** Cold Front es una compañía emergente con operaciones en la fabricación de drones: vehículos aéreos no tripulados. Cold Front proyecta que su ganancia anual, $p(t)$, en miles de dólares, durante los primeros 10 años de operación, puede aproximarse mediante la función $p(t) = 1.2t^2 + 4t - 8$, donde t es el número de años completos que la compañía ha estado en el negocio.

a) Estima la ganancia (o pérdida) de la compañía, después del primer año.

b) Estima la ganancia (o pérdida) de la compañía, después de 6 años.

c) Estima el tiempo necesario para que la compañía salga tablas.



Solución

a) Para estimar la ganancia, después de 1 año, evalúa la función en 1:

$$p(t) = 1.2t^2 + 4t - 8$$
$$p(1) = 1.2(1)^2 + 4(1) - 8 = -2.8$$

En consecuencia, al final del primer año, la compañía proyecta una pérdida de \$2.8 miles o una pérdida de \$2800.

b) $p(6) = 1.2(6)^2 + 4(6) - 8 = 59.2$

En consecuencia, al final del sexto año, la ganancia proyectada de la compañía es de \$59.2 miles, o una ganancia de \$59 200.

c) Entiende La compañía alcanzará su punto de equilibrio cuando la ganancia supere 0. En consecuencia, para determinar el punto de equilibrio (no ganancia ni pérdida), se debe resolver la ecuación:

$$1.2t^2 + 4t - 8 = 0$$

Puedes usar la fórmula cuadrática para resolver esta ecuación.

Traduce $a = 1.2, \quad b = 4, \quad c = -8$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1.2)(-8)}}{2(1.2)}$$

Realiza
$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 38.4}}{2.4}$$
$$= \frac{-4 \pm \sqrt{54.4}}{2.4}$$
$$\approx \frac{-4 \pm 7.376}{2.4}$$

$$t \approx \frac{-4 + 7.376}{2.4} \approx 1.4 \quad \text{o} \quad t \approx \frac{-4 - 7.376}{2.4} \approx -4.74$$

Responde Dado que el tiempo no puede ser negativo, el tiempo para alcanzar el punto de equilibrio es de aproximadamente 1.4 años.

Ahora resuelve el ejercicio 29

EJEMPLO 2 **Esperanza de vida** La función $N(t) = 0.0054t^2 - 1.46t + 95.11$ puede usarse para estimar el número promedio de años de esperanza de vida restante para una persona con edad t años, donde $30 \le t \le 100$.

a) Estima la esperanza de vida restante de una persona de 40 años de edad.

b) Si una persona tiene una esperanza de vida restante de 14.3 años, estima la edad de la persona.

Solución

a) Entiende Para determinar la esperanza de vida restante para una persona de 40 años de edad, sustituye 40 por t en la función y evalúa.

Traduce
$$N(t) = 0.0054t^2 - 1.46t + 95.11$$
$$N(40) = 0.0054(40)^2 - 1.46(40) + 95.11$$

Realiza
$$= 0.0054(1600) - 58.4 + 95.11$$
$$= 8.64 - 58.4 + 95.11$$
$$= 45.35$$

Responde y Verifica La respuesta parece razonable. En consecuencia, en promedio, una persona de 40 años de edad puede esperar vivir otros 45.35 años, hasta una edad de 85.35 años.

b) Entiende Aquí se proporciona la esperanza de vida restante, $N(t)$, y se pide determinar la edad de la persona, t. Para resolver este problema, sustituye 14.3 por $N(t)$ y resuelve para t. Se usará la fórmula cuadrática.

Traduce
$$N(t) = 0.0054t^2 - 1.46t + 95.11$$
$$14.3 = 0.0054t^2 - 1.46t + 95.11$$

Realiza
$$0 = 0.0054t^2 - 1.46t + 80.81$$
$$a = 0.0054, \quad b = -1.46, \quad c = 80.81$$
$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-(-1.46) \pm \sqrt{(-1.46)^2 - 4(0.0054)(80.81)}}{2(0.0054)}$$
$$= \frac{1.46 \pm \sqrt{2.1316 - 1.745496}}{0.0108}$$
$$= \frac{1.46 \pm \sqrt{0.386104}}{0.0108}$$
$$\approx \frac{1.46 \pm 0.6214}{0.0108}$$
$$t \approx \frac{1.46 + 0.6214}{0.0108} \quad \text{o} \quad t \approx \frac{1.46 - 0.6214}{0.0108}$$
$$\approx 192.72 \qquad \approx 77.65$$

Responde Dado que 192.72 no es una edad razonable, puede excluirse esta como una posibilidad. En consecuencia, la persona promedio que tenga una esperanza de vida de 14.3 años, tiene alrededor de 77.65 años de edad.

Ahora resuelve el ejercicio 33

Problemas de movimiento Los problemas de movimiento se estudiaron, por primera ocasión, en la sección 2.4. Recuerda que la fórmula para los problemas de movimiento es:

$$distancia = rapidez \cdot tiempo$$

En el siguiente ejemplo, deberás resolver esta fórmula en términos del *tiempo*, al dividir ambos lados de la ecuación entre la *rapidez*.

$$\frac{\text{distancia}}{\text{rapidez}} = \frac{\text{rapidez} \cdot \text{tiempo}}{\text{rapidez}} \quad \text{o} \quad \text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{rapidez}}$$

EJEMPLO 3 **Paseo en bote de motor** Carlos viaja en su bote de motor durante 12 millas con la corriente a favor. Luego, da la vuelta y se dirige de regreso al punto de partida, contra la corriente. El tiempo total de su viaje es de 5 horas y la corriente del río es de 2 millas por hora. Si durante todo el viaje no cambió su rapidez, determina la rapidez que el bote tendría de haber viajado en aguas quietas.



Solución Entiende Se pide determinar la rapidez del bote en aguas quietas. Sea r = rapidez del bote en aguas quietas. Se sabe que el tiempo total del viaje es de 5 horas. Por tanto, el tiempo con la corriente a favor, más el tiempo contra la corriente, debe ser un total de 5 horas. Como se discutió anteriormente, se puede determinar el tiempo al dividir la distancia entre la rapidez.

Dirección	Distancia	Rapidez	Tiempo
Con la corriente a favor	12	$r + 2$	$\frac{12}{r+2}$
Contra la corriente	12	$r - 2$	$\frac{12}{r-2}$

Traduce tiempo con la corriente a favor + tiempo contra la corriente = tiempo total

$$\frac{12}{r+2} + \frac{12}{r-2} = 5$$

Realiza $(r+2)(r-2)\left(\frac{12}{r+2} + \frac{12}{r-2}\right) = (r+2)(r-2)(5)$ Multiplica por el MCD.

$(r+2)(r-2)\left(\frac{12}{r+2}\right) + (r+2)(r-2)\left(\frac{12}{r-2}\right) = (r+2)(r-2)(5)$ Propiedad distributiva.

$$12(r-2) + 12(r+2) = 5(r^2 - 4)$$

$12r - 24 + 12r + 24 = 5r^2 - 20$ Propiedad distributiva.

$24r = 5r^2 - 20$ Simplifica.

o $5r^2 - 24r - 20 = 0$

Usando la fórmula cuadrática con $a = 5$, $b = -24$ y $c = -20$, se obtiene:

$$r = \frac{24 \pm \sqrt{976}}{10}$$

$$r \approx 5.5 \quad \text{o} \quad r \approx -0.7$$

Responde Dado que la rapidez no puede ser negativa, la rapidez del bote en aguas quietas, es de aproximadamente 5.5 millas por hora.

Ahora resuelve el ejercicio 45

Problemas de trabajo A continuación, se trabajará un ejemplo que involucra un problema de trabajo, discutido inicialmente en la sección 6.5.

EJEMPLO 4 **Bombeo de agua** Los Domínguez necesitan bombear el agua de su sótano inundado. Tienen una bomba y piden prestada otra a sus vecinos, los Suárez. Con ambas bombas trabajando juntas, la tarea puede hacerse en 6 horas. Si la bomba de los Suárez operara sola, haría el trabajo en 2 horas menos que la bomba de los Durazo operando por sí sola. ¿Cuánto tardaría cada bomba en hacer el trabajo por sí sola?

Solución Entiende Recuerda, de la sección 6.5, que la rapidez de trabajo multiplicada por el tiempo trabajado, produce la parte de la tarea completada. Sea t = número de horas para que la bomba de los Domínguez complete sola la tarea (es más lenta), entonces $t - 2$ = número de horas para que la bomba de los Suárez complete sola la tarea.

Comprende el Álgebra

En general, si una persona (o máquina) puede completar una tarea en x unidades de tiempo, la razón es $\frac{1}{x}$ de la tarea, por unidad de tiempo.

Bomba	Rapidez de trabajo	Tiempo trabajado	Parte de la tarea completada
Bomba de los Domínguez	$\frac{1}{t}$	6	$\frac{6}{t}$
Bomba de los Suárez	$\frac{1}{t-2}$	6	$\frac{6}{t-2}$

Traduce $\left(\begin{array}{c}\text{parte de la tarea realizada}\\ \text{con la bomba de los Domínguez}\end{array}\right) + \left(\begin{array}{c}\text{parte de la tarea realizada}\\ \text{con la bomba de los Suárez}\end{array}\right) = 1$

$$\frac{6}{t} + \frac{6}{t-2} = 1$$

Realiza
$$t(t-2)\left(\frac{6}{t} + \frac{6}{t-2}\right) = t(t-2)(1)$$ Multiplica ambos lados por el MCD, $t(t-2)$.

$$t(t-2)\left(\frac{6}{t}\right) + t(t-2)\left(\frac{6}{t-2}\right) = t^2 - 2t$$ Propiedad distributiva.

$$6(t-2) + 6t = t^2 - 2t$$
$$6t - 12 + 6t = t^2 - 2t$$
$$t^2 - 14t + 12 = 0$$

Usando la fórmula cuadrática se obtiene:

$$t = \frac{14 \pm \sqrt{148}}{2}$$
$$t \approx 13.1 \quad \text{o} \quad t \approx 0.9$$

Responde Tanto $t = 13.1$ como $t = 0.9$, satisfacen la ecuación original. Sin embargo, si $t = 0.9$, entonces la bomba de los Domíguez podría completar la tarea en 0.9 horas y la bomba de los Suárez podría completar la tarea en $0.9 - 2$ o -1.1 horas, lo cual no es posible. Por tanto, la única solución aceptable es $t = 13.1$. En consecuencia, la bomba de los Domíguez tarda aproximadamente 13.1 horas por sí sola y la bomba de los Suárez tarda aproximadamente $13.1 - 2$ u 11.1 horas por sí sola en completar la tarea.

Ahora resuelve el ejercicio 49

2 Despeje de una variable en una fórmula

Comprende el Álgebra

Recuerda, de la sección 8.1, la propiedad de la raíz cuadrada: si $x^2 = a$, donde a es un número real, entonces $x = \pm\sqrt{a}$. Cuando se resuelven fórmulas para una variable, con frecuencia, la variable sólo puede representar un número no negativo, de modo que, en dichas soluciones, se eliminará el $\pm$.

Cuando se resuelve en términos de una variable en una fórmula, puede ser necesario usar la propiedad de la raíz cuadrada para despejar la variable. Sin embargo, con frecuencia, la variable solamente puede representar un número no negativo. Por ende, *cuando se usa la propiedad de la raíz cuadrada para resolver en términos de una variable en la mayoría de las fórmulas, se usará solamente la raíz cuadrada positiva.* Esto se demostrará en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5

a) La fórmula para el volumen de un cilindro circular recto, es $V = \pi r^2 h$. Resuelve esta fórmula para el radio, r.

b) La *ley de Newton de gravitación universal* es:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Resuelve la ecuación en términos de r, la cual mide distancia.

Solución

a) $V = \pi r^2 h$

$$\frac{V}{\pi h} = \frac{\pi r^2 h}{\pi h}$$ Despeja r^2 al dividir ambos lados por πh.

$$\frac{V}{\pi h} = r^2$$

$$\sqrt{\frac{V}{\pi h}} = r$$ Propiedad de la raíz cuadrada; r debe ser positiva.

Dado que r es el radio del cilindro, r debe ser un número positivo.

b) $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$

$r^2 F = Gm_1 m_2$ Multiplica ambos lados de la fórmula por r^2.

$r^2 = \dfrac{Gm_1 m_2}{F}$ Despeja r^2 al dividir ambos lados entre F.

$r = \sqrt{\dfrac{Gm_1 m_2}{F}}$ Propiedad de la raíz cuadrada; r debe ser positiva.

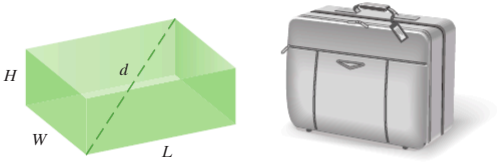
Dado que r mide una distancia, r debe ser un número positivo.

Ahora resuelve el ejercicio 23

EJEMPLO 6 **Diagonal de una maleta** La diagonal de una caja, puede calcularse mediante la fórmula

$$d = \sqrt{L^2 + W^2 + H^2}$$

donde L es la longitud, W es el ancho y H es la altura de la caja. Observa la **Figura 8.5**.



a) Determina la diagonal de una maleta con 30 pulgadas de largo, 15 pulgadas de ancho y 10 pulgadas de alto.

b) Resuelve la ecuación en términos del ancho, W.

Solución

a) Entiende Para determinar la diagonal, es necesario sustituir los valores adecuados en la fórmula y resolver en términos de la diagonal, d.

Traduce
$$d = \sqrt{L^2 + W^2 + H^2}$$
$$d = \sqrt{(30)^2 + (15)^2 + (10)^2}$$

Realiza
$$= \sqrt{900 + 225 + 100}$$
$$= \sqrt{1225}$$
$$= 35$$

Responde En consecuencia, la diagonal de la maleta mide 35 pulgadas.

b) El primer paso para resolver en términos de W, es elevar al cuadrado ambos lados de la fórmula.

$d = \sqrt{L^2 + W^2 + H^2}$

$d^2 = \left(\sqrt{L^2 + W^2 + H^2}\right)^2$ Eleva al cuadrado ambos lados.

$d^2 = L^2 + W^2 + H^2$ Usa $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a, a \geq 0$.

$d^2 - L^2 - H^2 = W^2$ Despeja W^2.

$\sqrt{d^2 - L^2 - H^2} = W$ Propiedad de la raíz cuadrada.

Ahora resuelve el ejercicio 15

Comprende el Álgebra

Recuerda, de la sección 7.6, que cuando se necesita eliminar una raíz cuadrada de una ecuación, se puede despejar la raíz cuadrada y después elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación. Se simplifica usando la propiedad:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a,\ a \geq 0$$

EJEMPLO 7 **Conos de tráfico** El área superficial de un cono circular recto es de:

$$s = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$$



a) Un cono de tráfico anaranjado, del tipo que se utiliza en las carreteras, mide 18 pulgadas de alto, con un radio de 12 pulgadas. Determina el área superficial del cono.

b) Resuelve la fórmula en términos de h.

Solución

a) Entiende y traduce Para determinar el área superficial, sustituye los valores apropiados en la fórmula.

$$\begin{aligned} s &= \pi r\sqrt{r^2 + h^2} \\ &= \pi(12)\sqrt{(12)^2 + (18)^2} \end{aligned}$$

Realiza

$$\begin{aligned} &= 12\pi\sqrt{144 + 324} \\ &= 12\pi\sqrt{468} \\ &\approx 815.56 \end{aligned}$$

Responde El área superficial es de aproximadamente 815.56 pulgadas cuadradas.

b) Para resolver en términos de h, es necesario despejar h en un lado de la ecuación. Existen varias formas de resolver la ecuación en términos de h.

$$s = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$$

$$\frac{s}{\pi r} = \sqrt{r^2 + h^2} \qquad \text{Divide ambos lados por } \pi r.$$

$$\left(\frac{s}{\pi r}\right)^2 = \left(\sqrt{r^2 + h^2}\right)^2 \qquad \text{Eleva al cuadrado ambos lados.}$$

$$\frac{s^2}{\pi^2 r^2} = r^2 + h^2 \qquad \text{Usa } \left(\sqrt{a}\right)^2 = a, a \geq 0.$$

$$\frac{s^2}{\pi^2 r^2} - r^2 = h^2 \qquad \text{Resta } r^2 \text{ de ambos lados.}$$

$$\sqrt{\frac{s^2}{\pi^2 r^2} - r^2} = h \qquad \text{Propiedad de la raíz cuadrada.}$$

Otras respuestas aceptables son $h = \sqrt{\dfrac{s^2 - \pi^2 r^4}{\pi^2 r^2}}$ y $h = \dfrac{\sqrt{s^2 - \pi^2 r^4}}{\pi r}$.

Ahora resuelve el ejercicio 19

8.3 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

raíz cuadrada ganancia elevar al cuadrado $\dfrac{\text{razón}}{\text{distancia}}$ $\dfrac{\text{distancia}}{\text{razón}}$ ingreso tarea parte

1. Una compañía alcanzará el punto de equilibrio cuando tenga un(a) _____ de 0.

2. Si la fórmula de la distancia se resuelve en términos del *tiempo*, se obtiene que tiempo = _____.

3. Para resolver problemas de trabajo, se usa el hecho de que la parte de la tarea realizada por la primera persona (o máquina), sumada con la parte de la tarea realizada por la segunda persona (o máquina), es igual a una _____ completa.

4. Cuando se necesita eliminar una raíz cuadrada de una ecuación, puedes despejar la raíz cuadrada y después _____ ambos lados de la ecuación.

Practica tus habilidades

Resuelve en términos de la variable indicada. Asume que la variable que resuelves debe ser mayor que 0.

5. $A = 6s^2$, en términos de s (área superficial de un cubo).

6. $A = \pi r^2$, en términos de r (área de un círculo).

7. $A = \frac{1}{2}s^2$, en términos de s (área de un triángulo isósceles recto).

8. $A = \frac{1}{2}\pi r^2$, en términos de r (área de un semicírculo).

9. $E = i^2r$, en términos de i (corriente en electrónicos).

10. $E = mc^2$, en términos de c (famosa fórmula de energía de Einstein).

11. $d = \frac{1}{25}v^2$ en términos de v (distancia de frenado en pavimento seco).

12. $d = \frac{1}{16}v^2$ en términos de v (distancia de frenado sobre pavimento húmedo).

13. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, en términos de r (volumen de un cono circular recto).

14. $V = \frac{1}{3}s^2h$ en términos de s (volumen de una pirámide con base cuadrada).

15. $d = \sqrt{L^2 + W^2}$, en términos de W (diagonal de un rectángulo).

16. $d = \sqrt{L^2 + W^2}$, en términos de L (diagonal de un rectángulo).

17. $a^2 + b^2 = c^2$, en términos de b (teorema de Pitágoras).

18. $a^2 + b^2 = c^2$, en términos de a (teorema de Pitágoras).

19. $d = \sqrt{L^2 + W^2 + H^2}$, en términos de H (diagonal de una caja).

20. $d = \sqrt{L^2 + W^2 + H^2}$, en términos de L (diagonal de una caja).

21. $h = -16t^2 + s_0$, en términos de t (altura de un objeto).

22. $h = -4.9t^2 + s_0$, en términos de t (altura de un objeto).

23. $E = \frac{1}{2}mv^2$, en términos de v (energía cinética).

24. $h = \frac{1}{2}gt^2$ en términos de t (distancia de un objeto que cae).

25. $f_x^2 + f_y^2 = f^2$, en términos de f_x (fuerzas que actúan sobre un objeto).

26. $f_x^2 + f_y^2 = f^2$, en términos de f_y (fuerzas que actúan sobre un objeto.

27. $a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2d}$, en términos de v_2 (aceleración de un vehículo).

28. $a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2d}$, en términos de v_1 (aceleración de un vehículo).

Resolución de problemas

En los ejercicios 29-54, cuando sea apropiado, redondea las respuestas a la centésima más cercana.

29. Tienda de aceite de oliva Olive You, una tienda que se especializa en aceites de oliva artesanales, proyecta que su ganancia anual, $p(t)$, en miles de dólares, durante los primeros 7 años de operaciones, puede aproximarse mediante la función $p(t) = 0.1t^2 + 4.2t - 7$, donde t es el número de años completos que la tienda ha estado en operación.



a) Estima la ganancia (o pérdida) de la tienda, después del primer año.

b) Estima la ganancia (o pérdida) de la tienda, después del sexto año.

c) Estima el tiempo necesario para que la tienda alcance su punto de equilibrio.

30. Ganancia de una tienda de reparación de relojes Repair Time, una tienda de reparación de relojes, proyecta que su ganancia anual, $p(t)$, en miles de dólares, durante los primeros 7 años de operaciones, puede aproximarse mediante la función $p(t) = 0.4t^2 + 4.4t - 8$, donde t se mide en años.

a) Estima la ganancia (o pérdida) de la tienda de reparaciones, después del primer año.

b) Estima la ganancia (o pérdida) de la tienda de reparaciones, después del sexto año.

c) Estima el tiempo necesario para que la tienda de reparaciones alcance su punto de equilibrio.

31. Ganancia de una cafetería Benny's Beans, una nueva cafetería, proyecta que su ganancia anual, $p(t)$, en miles de dólares, durante los primeros 6 años de operaciones, puede aproximarse mediante la función $p(t) = 0.2t^2 + 5.4t - 8$, donde t se mide en años.

a) Estima la ganancia (o pérdida) de la cafetería, después del primer año.

b) Estima la ganancia (o pérdida) de la cafetería, después del quinto año.

c) Estima el tiempo necesario para que la cafetería alcance su punto de equilibrio.

32. Ganancia de una tienda de alimentos orgánicos Hatty's Health Foods, una tienda de alimentos orgánicos, proyecta que su ganancia anual, $p(t)$, en miles de dólares, durante los primeros 6 años de operaciones, puede aproximarse mediante la función $p(t) = 0.3t^2 + 4.8t - 9$, donde t se mide en años.

a) Estima la ganancia (o pérdida) de la tienda de alimentos, después del primer año.

b) Estima la ganancia (o pérdida) de la tienda de alimentos, después del quinto año.

c) Estima el tiempo necesario para que la tienda de alimentos alcance su punto de equilibrio.

33. Temperatura La temperatura, T, en grados Fahrenheit, en el radiador de un automóvil durante los primeros 4 minutos de manejo, es una función del tiempo, t. La temperatura puede aproximarse mediante la fórmula $T = 6.2t^2 + 12t + 32, 0 \le t \le 4$.

a) Estima la temperatura del radiador del automóvil en el instante en el que el automóvil se enciende.

b) Estima la temperatura del radiador del automóvil, después de que el automóvil se ha conducido durante 2 minutos.

c) ¿Cuánto tiempo, después de que el automóvil comenzó a operar, alcanzará el radiador la temperatura de 120°F?

34. Calificación general promedio (CGP) En una escuela, los registros muestran que la calificación general promedio, G, de una persona promedio, es una función del número de horas por semana, h, que dedica al estudio y a hacer su tarea. La calificación general promedio se puede estimar mediante la ecuación $G = 0.01h^2 + 0.2h + 1.2, 0 \le h \le 8$.

a) ¿Cuál es la CGP del estudiante promedio, que estudia 0 horas a la semana?

b) ¿Cuál es la CGP del estudiante promedio, que estudia 3 horas a la semana?

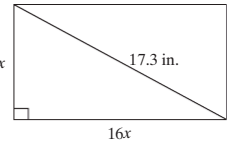
c) Para obtener una CGP de 3.2, ¿cuántas horas por semana tendría que estudiar el estudiante promedio?

35. Patio de juegos El área de un patio de juegos rectangular para niños mide 600 metros cuadrados. La longitud es de 10 metros más larga que el ancho. Determina la longitud y el ancho del patio de juegos.



36. Lote de estacionamiento El restaurante Greenhouse, debe repavimentar su estacionamiento rectangular. El área del estacionamiento es de 3200 pies cuadrados y la longitud es el doble del ancho. Determina la longitud y el ancho del estacionamiento.

37. Pantalla de una computadora Gerardo acaba de comprar una nueva laptop. La pantalla rectangular tiene una relación de aspecto de 16:9. Esto significa que la razón entre la longitud de la pantalla y la altura de la pantalla, es de 16 a 9. La diagonal de la pantalla mide 17.3 pulgadas, como se muestra en la siguiente figura. Determina la longitud y el ancho de la pantalla de la computadora.



38. Televisión Melissa acaba de comprar una nueva televisión. La pantalla rectangular tiene una relación de aspecto de 16:9 (consulta el ejercicio 37). La diagonal de la pantalla mide 59.5 pulgadas. Determina la longitud y la altura de la pantalla de televisión.

39. Triángulo rectángulo La hipotenusa de un triángulo rectángulo es de 13 pulgadas. Determina la longitud de los catetos del triángulo, si un cateto es 7 pulgadas más largo que el otro cateto.

40. Triángulo rectágulo Un cateto de un triángulo rectágulo es 2 centímetros más corto que la hipotenusa. El otro cateto del triángulo rectágulo es 9 centímetros más corto que la hipotenusa. Determina la longitud de los tres lados del triángulo rectágulo.

41. Viaje Jana conduce 80 millas en tráfico pesado. Al llegar a la autopista, donde conduce 260 millas con una rapidez promedio, que es 25 millas por hora mayor que la rapidez promedio con la que condujo en el tráfico pesado. Si el viaje total duró 6 horas, determina su rapidez promedio en tráfico pesado y en la autopista.

42. Camión transportador de automóviles Francisco, conductor de camiones, transporta una pesada carga de automóviles nuevos en un camión transportador de automóviles desde Detroit, Michigan, hasta Indianápolis, Indiana. En su viaje de regreso a Detroit, promedia 10 millas por hora más rápido que en su viaje hacia Indianápolis. Si la distancia total recorrida en cada trayecto fue de 300 millas y el tiempo total que empleó conduciendo fue de 11 horas, determina su rapidez promedio de ida y de vuelta.



43. Llanta ponchada Patricio viaja en su bicicleta, desde su casa hacia el trabajo, una distancia de 8 millas. Después del trabajo, Patricio descubre que su bicicleta tiene una llanta ponchada y decide caminar con su bicicleta hacia

casa. La rapidez de pedaleo de Patricio fue 12 mph más rápido que su rapidez de caminata. Si tardó 1.5 horas más en caminar con la bicicleta hacia su casa, que en viajar con su bicicleta al trabajo, determina su rapidez de caminata y su rapidez de pedaleo.

44. Cañón Red Rock Katia viajó del área de conservación del cañón Red Rock, justo en la afueras de Las Vegas, hacia Phoenix, Arizona. La distancia total que recorrió fue de 300 millas. Después de llegar a Phoenix, supuso que, si hubiese promediado 10 millas por hora más rápido, habría llegado 1 hora antes. Determina la rapidez promedio a la que condujo Katia.

45. Volar un avión Daniel voló su avioneta de monomotor Cessna, durante 80 millas con el viento, desde Jackson Hole, Wyoming, hasta Blackfoot, Idaho. Luego dio la vuelta y voló de regreso a Jackson Hole contra el viento. Si el viento era constante a 30 millas por hora, y el tiempo total de ida y vuelta fue de 1.3 horas, determina la rapidez del avión en aire tranquilo.

46. Viaje en bicicleta Ricardo disfruta pasear en bicicleta desde Washington, DC, hasta Bethesda, Maryland, y de vuelta, un total de 30 millas en la ruta de Capital Crescent. El viaje a Bethesda es colina arriba la mayor parte del tiempo. La rapidez promedio de la bicicleta, al ir a Bethesda, es 5 millas por hora más lento que la rapidez promedio de regreso a DC. Si el viaje redondo tarda 4.5 horas, determina la rapidez promedio en cada dirección.

47. Viaje Yadira conduce desde San Antonio, Texas, hasta Austin, Texas, una distancia de 75 millas. Luego se detiene durante 2 horas para ver a un amigo en Austin antes de continuar su viaje de Austin a Dallas, Texas, una distancia de 195 millas. Si ella conduce 10 millas por hora más rápido de San Antonio a Austin y el tiempo total del viaje fue de 6 horas, determina su rapidez promedio de San Antonio a Austin.

48. Viaje Luis y su amigo Jorge viajan de Nashville a Baltimore. Luis viaja en automóvil, mientras que Jorge viaja en tren. El tren y el automóvil salen de Nashville al mismo tiempo desde el mismo punto. Durante el viaje, Luis y Jorge hablan por teléfono celular, y Luis le informa a Jorge que acaba de detenerse para descansar la noche después de viajar 500 millas. Una y dos tercios de hora más tarde, Jorge llama a Luis y le informa que el tren acaba de llegar a Baltimore, a una distancia de 800 millas de Nashville. Si supones que el tren promedió 20 millas por hora más rápido que el automóvil, determina la rapidez promedio del automóvil y del tren.



Nashville, TN

49. Reconstrucción de un motor Dos mecánicas, Benita y Pamela, tardan 6 horas en reconstruir un motor al trabajar juntas. Si cada una trabajara sola, Benita, la mecánica más experimentada, podría completar la tarea 1 hora más rápido que Pamela. ¿Cuánto tardaría cada una de ellas en reconstruir el motor, si trabajaran individualmente?

50. Doblado de ropa Enrique y su hermano César tardan cada semana 3 horas en doblar la ropa recién lavada de toda la familia si trabajan juntos. Si cada uno trabajara solo, César tardaría 1 hora más que Enrique para completar la misma tarea. ¿Cuánto tardaría cada uno de ellos en completar la tarea, si trabajaran individualmente?

51. Servicio de conserjería Los Ortiz tienen un pequeño negocio de limpieza. Juan requiere $\frac{1}{2}$ hora más que Christian para limpiar él solo el Moose Club. Si juntos pueden limpiar el club en 6 horas, determina el tiempo requerido por cada uno para limpiar el club individualmente.

52. Calentador eléctrico Un pequeño calentador eléctrico requiere 6 minutos más, para elevar la temperatura en un garaje no calentado a un nivel confortable, de lo que tarda un calentador eléctrico más grande. En conjunto, los dos calentadores pueden elevar la temperatura del garaje a un nivel confortable en 42 minutos. ¿Cuánto tardaría cada calentador, por sí solo, en elevar la temperatura en el garaje a un nivel confortable?

53. Ordeña de vacas Cuando David y su hermana Katia trabajan juntos, pueden ordenar las vacas de su granja familiar en 75 minutos. Cuando David trabaja solo, puede ordeñar las vacas en 15 minutos menos tiempo de lo que tarda Katia cuando ella trabaja sola. ¿Cuánto tardaría cada uno de ellos en ordeñar las vacas, si trabajaran individualmente?

54. Entrega de correo Cuando Ana y Rebeca trabajan juntas, pueden entregar el correo en Oppelo, Arkansas, en 5.5 horas. Cuando Ana trabaja sola, ella puede entregar el correo en 0.5 horas más tiempo de lo que tarda Rebeca cuando ella trabaja sola. ¿Cuánto tardaría cada una de ellas en entregar el correo, si trabajaran individualmente?



Ejercicios conceptuales y de redacción

55. Escribe tu propio problema de movimiento y resuélvelo.

56. Escribe tu propio problema de trabajo y resuélvelo.

57. En general, cuando resuelves en términos de una variable en una fórmula, ya sea que uses la propiedad de la raíz cuadrada o la fórmula cuadrática, solamente usas la raíz cuadrada positiva. Explica por qué.

58. Supón que $P = ☺^2 + □^2$ es una fórmula real. Al resolver para ☺ se obtiene $☺ = \sqrt{P - □^2}$. Si ☺ fuera real, ¿qué relación debe existir entre P y □?

Problemas de desafío

59. Área El área de un rectángulo es de 18 metros cuadrados. Cuando la longitud aumenta por 2 metros y el ancho por 3 metros, el área es de 48 metros cuadrados. Determina las dimensiones del rectángulo más pequeño.

60. Área El área de un rectángulo es de 35 pulgadas cuadradas. Cuando la longitud disminuye por 1 pulgada y el ancho aumenta por 1 pulgada, el área del rectángulo nuevo es de 36 pulgadas cuadradas. Determina las dimensiones del rectángulo original.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.4] **61.** Evalúa $-\left[4(5-3)^3\right] + 2^4$.

[2.2] **62.** Resuelve $IR + Ir = E$ para R.

[6.2] **63.** Suma $\dfrac{r}{r-4} - \dfrac{r}{r+4} + \dfrac{32}{r^2-16}$.

[7.2] **64.** Simplifica $\left(\dfrac{x^{3/4}y^{-2}}{x^{1/2}y^2}\right)^8$.

[7.6] **65.** Resuelve $\sqrt{x^2+3x+12} = x$.

EXAMEN DE MITAD DE CAPÍTULO: SECCIONES 8.1-8.3

Para descubrir qué tan bien entiendes el material del capítulo hasta este punto, resuelve esta breve evaluación. Las respuestas, y la sección donde el material se discutió inicialmente, se proporcionan en la parte final del libro. Revisa cualquier pregunta que respondas de manera incorrecta.

Usa la propiedad de la raíz cuadrada para resolver cada ecuación.

1. $x^2 - 12 = 86$

2. $(a-3)^2 + 20 = 0$

3. $(2m+7)^2 = 36$

Resuelve cada ecuación completando del cuadrado.

4. $y^2 + 4y - 12 = 0$

5. $3a^2 - 12a - 30 = 0$

6. $4c^2 + c = -9$

7. Patio El patio de una casa es un cuadrado, donde la diagonal es 6 metros más larga que uno de los lados. Determina la longitud de un lado del patio.

8. a) Proporciona la fórmula para el discriminante de una ecuación cuadrática.

b) Explica cómo determinas si una ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales distintas, una única solución real o ninguna solución real.

9. Usa el discriminante para determinar si la ecuación $2b^2 - 6b - 11 = 0$ tiene dos soluciones reales distintas, una única solución real o ninguna solución real.

Resuelve cada ecuación mediante la fórmula cuadrática.

10. $6n^2 + n = 15$

11. $p^2 = -4p + 8$

12. $3d^2 - 2d + 5 = 0$

En los ejercicios 13 y 14, determina una ecuación que tenga las soluciones dadas.

13. $7, -2$

14. $2 + \sqrt{5}, 2 - \sqrt{5}$

15. Lámparas El ingreso, $R(n)$, por vender n lámparas, es de $R(n) = -0.5n^2 + 60n$, $n \le 20$. ¿Cuántas lámparas deben venderse para tener un ingreso de \$550?

En los ejercicios 16-18, resuelve en términos de la variable indicada. Supón que todas las variables son positivas.

16. $y = x^2 - r^2$, para r

17. $A = \dfrac{1}{3}kx^2$, para x

18. $D = \sqrt{x^2 + y^2}$, para y

19. Área La longitud de un rectángulo es dos pies mayor que el doble del ancho. Determina las dimensiones, si su área es de 60 pies cuadrados.

20. Relojes La ganancia de una compañía que vende n relojes, es de $p(n) = 2n^2 + n - 35$, donde $p(n)$ es cientos de dólares. ¿Cuántos relojes deben venderse para tener una ganancia de \$2 000?

8.4 Ecuaciones en la forma cuadrática

1 **Resolución de ecuaciones que tengan forma cuadrática**

2 **Resolución de ecuaciones con exponentes racionales**

Comprende el Álgebra

En general, cuando se reescribe una ecuación en la forma cuadrática, se igualará u con la expresión variable "en medio" sin el coeficiente numérico. Por ejemplo, en la ecuación $4a - 5\sqrt{a} + 1 = 0$, se hará $u = \sqrt{a}$. Puesto que $u^2 = (\sqrt{a})^2 = a$, la ecuación se convierte en $4u^2 - 5u + 1 = 0$.

1 Resolución de ecuaciones que tengan forma cuadrática

En esta sección, resolverás ecuaciones que no son cuadráticas, pero que pueden reescribirse en forma de ecuación cuadrática.

Ecuaciones en la forma cuadrática

Una ecuación, que puede reescribirse en la forma $au^2 + bu + c = 0$ para $a \neq 0$, donde u es una expresión algebraica, se dice que está en la **forma cuadrática**.

Cuando se proporciona una ecuación en la forma cuadrática, se hará una sustitución para reescribir la ecuación en la forma $au^2 + bu + c = 0$. Por ejemplo, considera la ecuación $2(x-3)^2 + 5(x-3) - 7 = 0$.

Sea $u = x - 3$. Entonces $u^2 = (x-3)^2$ y así, la ecuación puede reescribirse de la siguiente manera;

$$\underbrace{2(x-3)^2}_{\downarrow\ 2u^2} + \underbrace{5(x-3)}_{\downarrow\ 5u} - 7 = 0$$

La ecuación $2u^2 + 5u - 7 = 0$ puede resolverse por medio de factorización, completando el cuadrado o usando la fórmula cuadrática. En la siguiente tabla, se muestran otros ejemplos.

Ecuación en la forma cuadrática	Sustitución	Ecuación con la sustitución
$x^4 - 4x^2 - 12 = 0$	$u = x^2$	$u^2 - 4u - 12 = 0$
$(x+3)^2 + 2(x+3) - 3 = 0$	$u = x + 3$	$u^2 + 2u - 3 = 0$
$12b^{-2} - 7b^{-1} + 1 = 0$	$u = b^{-1}$	$12u^2 - 7u + 1 = 0$
$10x^{2/3} + 11x^{1/3} - 6 = 0$	$u = x^{1/3}$	$10u^2 + 11u - 6 = 0$

El siguiente procedimiento se usa para resolver ecuaciones en la forma cuadrática.

Para resolver ecuaciones en la forma cuadrática

1. Haz una sustitución que resulte en una ecuación de la forma $au^2 + bu + c = 0$, $a \neq 0$, donde u es una función de la variable original.
2. Resuelve la ecuación $au^2 + bu + c = 0$ en términos de u.
3. Sustituye u con la función de la variable original del paso 1.
4. Resuelve la ecuación resultante en términos de la variable original.
5. Si, durante el paso 4, elevas ambos lados de la ecuación a una potencia *par*, haz una verificación para evitar soluciones extrañas al sustituir las soluciones aparentes en la ecuación *original*.

EJEMPLO 1

a) Resuelve $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

b) Determina las intersecciones con el eje de las x de la gráfica de la función $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

Solución

a) Para obtener una ecuación en la forma cuadrática, se hará $u = x^2$. Entonces $u^2 = (x^2)^2 = x^4$.

$$\begin{array}{l} x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \\ \downarrow \\ (x^2)^2 - 5x^2 + 4 = 0 \quad x^4 \text{ se sustituyó con } (x^2)^2. \\ \downarrow \qquad \downarrow \\ u^2 \quad - 5u + 4 = 0 \quad u \text{ sustituye a } x^2. \end{array}$$

Ahora se tiene una ecuación cuadrática que se puede resolver por medio de factorización:

$$u^2 - 5u + 4 = 0$$
$$(u - 4)(u - 1) = 0$$
$$u - 4 = 0 \quad \text{o} \quad u - 1 = 0$$
$$u = 4 \qquad\qquad u = 1$$

A continuación, sustituye u con x^2 y resuelve en términos de x.

$$\begin{array}{ll} u = 4 & u = 1 \\ \downarrow & \downarrow \\ x^2 = 4 & x^2 = 1 \qquad u \text{ se sustituyó con } x^2. \\ x = \pm\sqrt{4} & x = \pm\sqrt{1} \qquad \text{Propiedad de la raíz cuadrada.} \\ x = \pm 2 & x = \pm 1 \end{array}$$

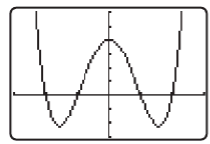
Dado que no se elevaron ambos lados de una ecuación a una potencia par, no se requiere la verificación de estas soluciones aparentes. Sin embargo, verificar las soluciones de las ecuaciones siempre es una buena idea. La siguiente verificación demuestra que 2, −2, 1 y −1, son todas soluciones a la ecuación original.

$x = 2$	$x = -2$	$x = 1$	$x = -1$
$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$	$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$	$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$	$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
$2^4 - 5(2)^2 + 4 \stackrel{?}{=} 0$	$(-2)^4 - 5(-2)^2 + 4 \stackrel{?}{=} 0$	$1^4 - 5(1)^2 + 4 \stackrel{?}{=} 0$	$(-1)^4 - 5(-1)^2 + 4 \stackrel{?}{=} 0$
$16 - 20 + 4 \stackrel{?}{=} 0$	$16 - 20 + 4 \stackrel{?}{=} 0$	$1 - 5 + 4 \stackrel{?}{=} 0$	$1 - 5 + 4 \stackrel{?}{=} 0$
$0 = 0$	$0 = 0$	$0 = 0$	$0 = 0$
Verdadero	Verdadero	Verdadero	Verdadero

Comprende el Álgebra

Recuerda, que las intersecciones con el eje de las x de una función, son los puntos donde la gráfica cruza o toca el eje de las x. Las intersecciones con el eje de las x siempre tienen coordenada y de 0. Para determinar las intersecciones con el eje de las x de una función, haz que y o $f(x) = 0$, y resuelve en términos de x.

b) Las intersecciones con el eje de las x, ocurren donde $f(x) = 0$. Por tanto, la gráfica cruzará el eje de las x en las soluciones a la ecuación $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.



$[-3, 3, 1, -3, 6, 1]$

FIGURA 8.6

A partir del inciso **a)**, se sabe que las soluciones son 2, −2, 1 y −1. En consecuencia, las intersecciones con el eje de las x, son $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(1, 0)$, y $(-1, 0)$. La **Figura 8.6** es la gráfica de $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$, como se ilustra en una calculadora graficadora. Observa que, la gráfica cruza el eje de las x en $x = 2$, $x = -2$, $x = 1$ y $x = -1$.

Ahora resuelve el ejercicio 7

EJEMPLO 2 Resuelve $p^4 + 2p^2 = 8$.

Solución Se hará $u = p^2$, entonces $u^2 = (p^2)^2 = p^4$.

$$p^4 + 2p^2 - 8 = 0 \qquad \text{La ecuación se igualó a 0.}$$
$$(p^2)^2 + 2p^2 - 8 = 0 \qquad p^4 \text{ se escribe como } (p^2)^2.$$
$$\downarrow \qquad\quad \downarrow$$
$$u^2 + 2u - 8 = 0 \qquad u \text{ sustituyó a } p^2.$$
$$(u + 4)(u - 2) = 0$$
$$u + 4 = 0 \quad \text{o} \quad u - 2 = 0$$
$$u = -4 \qquad\qquad u = 2$$

A continuación, sustituye p^2 por u y resuelve en términos de p.

$$p^2 = -4 \qquad p^2 = 2 \qquad u \text{ se sustituyó con } p^2.$$
$$p = \pm\sqrt{-4} \qquad p = \pm\sqrt{2} \qquad \text{Propiedad de la raíz cuadrada.}$$
$$p = \pm 2i$$

Dado que no se elevaron ambos lados de la ecuación a una potencia par, no se requiere la verificación de estas soluciones. Sin embargo, la siguiente verificación confirma que $2i$, $-2i$, $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ son todas soluciones a la ecuación original.

$p = 2i$

$$p^4 + 2p^2 = 8$$
$$(2i)^4 + 2(2i)^2 \stackrel{?}{=} 8$$
$$2^4 i^4 + 2\left(2^2\right)\left(i^2\right) \stackrel{?}{=} 8$$
$$16(1) + 8(-1) \stackrel{?}{=} 8$$
$$16 - 8 = 8$$

Verdadero

$p = -2i$

$$p^4 + 2p^2 = 8$$
$$(-2i)^4 + 2(-2i)^2 \stackrel{?}{=} 8$$
$$(-2)^4 i^4 + 2(-2)^2 i^2 \stackrel{?}{=} 8$$
$$16(1) + 8(-1) \stackrel{?}{=} 8$$
$$16 - 8 = 8$$

Verdadero

$p = \sqrt{2}$

$$p^4 + 2p^2 = 8$$
$$\left(\sqrt{2}\right)^4 + 2\left(\sqrt{2}\right)^2 \stackrel{?}{=} 8$$
$$4 + 2(2) \stackrel{?}{=} 8$$
$$8 = 8$$

Verdadero

$p = -\sqrt{2}$

$$p^4 + 2p^2 = 8$$
$$\left(-\sqrt{2}\right)^4 + 2\left(-\sqrt{2}\right)^2 \stackrel{?}{=} 8$$
$$4 + 2(2) \stackrel{?}{=} 8$$
$$8 = 8$$

Verdadero

Ahora resuelve el ejercicio 17

SUGERENCIA ÚTIL

En ocasiones, los estudiantes resuelven la ecuación en términos de u, pero después olvidan terminar el problema al resolver en términos de la variable original. Recuerda que, si la ecuación original está en x, debes obtener valores para x.

EJEMPLO 3 Resuelve $(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$.

Solución Se hará $u = x^2 + x$, así $u^2 = (x^2 + x)^2$. Luego se harán las sustituciones que se muestran a continuación:

$$(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$$
$$u^2 - 8u + 12 = 0 \qquad u \text{ se sustituyó por } x^2 + x.$$

Ahora puedes factorizar y resolver.

$$u^2 - 8u + 12 = 0$$
$$(u - 2)(u - 6) = 0$$
$$u - 2 = 0 \quad \text{o} \quad u - 6 = 0$$
$$u = 2 \qquad u = 6$$

A continuación, sustituye $x^2 + x$ para u y resuelve en términos de x.

$$x^2 + x = 2 \qquad x^2 + x = 6$$
$$x^2 + x - 2 = 0 \qquad x^2 + x - 6 = 0$$
$$(x + 2)(x - 1) = 0 \qquad (x + 3)(x - 2) = 0$$
$$x + 2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0 \qquad x + 3 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$
$$x = -2 \qquad x = 1 \qquad x = -3 \qquad x = 2$$

Una verificación mostrará que los números -3, -2, 1 y 2, son soluciones a la ecuación original $(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = 0$.

Ahora resuelve el ejercicio 31

EJEMPLO 4 Determina las intersecciones con el eje de las x de la gráfica de la función $f(x) = 2x^{-2} + x^{-1} - 1$.

Solución Las intersecciones con el eje de las x, ocurren donde $f(x) = 0$. Por tanto, para determinar las intersecciones con el eje de las x, debes resolver la ecuación

$$2x^{-2} + x^{-1} - 1 = 0$$

Se hará $u = x^{-1}$, entonces $u^2 = \left(x^{-1}\right)^2 = x^{-2}$.

$$\begin{aligned} 2\left(x^{-1}\right)^2 + x^{-1} - 1 &= 0 \\ 2u^2 + u - 1 &= 0 \qquad u \text{ se sustituyó por } x^{-1}. \\ (2u - 1)(u + 1) &= 0 \\ 2u - 1 = 0 \quad \text{o} \quad u + 1 &= 0 \\ u = \frac{1}{2} \qquad u &= -1 \end{aligned}$$

Ahora sustituye x^{-1} por u.

$$\begin{aligned} x^{-1} = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad x^{-1} &= -1 \\ \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{x} &= -1 \\ x = 2 \qquad x &= -1 \end{aligned}$$

Una verificación mostrará que, tanto 2 como −1, son soluciones a la ecuación original. En consecuencia, las intersecciones con el eje de las x, son $(2, 0)$ y $(-1, 0)$.

Ahora resuelve el ejercicio 61

Comprende el Álgebra

Recuerda, del capítulo 1, que una expresión elevada a un exponente negativo puede escribirse del siguiente modo:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m},\ a \neq 0$$

2 Resolución de ecuaciones con exponentes racionales

En los siguientes dos ejemplos, al resolver ecuaciones que son de la forma cuadrática, se elevarán ambos lados de la ecuación a una potencia par, para eliminar exponentes racionales o radicales. Recuerda, del capítulo 7, que siempre que ambos lados de una ecuación se eleven a una potencia par, es posible introducir soluciones extrañas. *Por tanto, siempre que eleves ambos lados de una ecuación a una potencia par, debes verificar todas las soluciones aparentes en la ecuación* original.

EJEMPLO 5 Resuelve $x^{1/2} + x^{1/4} - 6 = 0$.

Solución Se hará $u = x^{1/4}$, entonces $u^2 = (x^{1/4})^2 = x^{2/4} = x^{1/2}$. La ecuación se convierte en

$$\begin{aligned} x^{1/2} + x^{1/4} - 6 &= 0 \\ (x^{1/4})^2 + x^{1/4} - 6 &= 0 \\ u^2 + u - 6 &= 0 \qquad u \text{ fue sustituido por } x^{1/4}. \\ (u + 3)(u - 2) &= 0 \\ u + 3 = 0 \quad \text{o} \quad u - 2 &= 0 \\ u = -3 \qquad u &= 2 \end{aligned}$$

Ahora sustituye $x^{1/4}$ por u y eleva ambos lados de la ecuación a la cuarta potencia, para resolver en términos de x.

$$\begin{aligned} x^{1/4} = -3 \quad \text{o} \quad x^{1/4} &= 2 \\ (x^{1/4})^4 = (-3)^4 \qquad (x^{1/4})^4 &= (2)^4 \\ x = 81 \qquad x &= 16 \end{aligned}$$

Las dos *posibles* soluciones son 81 y 16. Sin embargo, dado que ambos lados de la ecuación se elevaron a una potencia par, es necesario hacer una verificación para evitar soluciones extrañas.

Verifica

$x = 81$		$x = 16$	
$x^{1/2} + x^{1/4} - 6 = 0$		$x^{1/2} + x^{1/4} - 6 = 0$	
$(81)^{1/2} + (81)^{1/4} - 6 \stackrel{?}{=} 0$		$(16)^{1/2} + (16)^{1/4} - 6 \stackrel{?}{=} 0$	
$\sqrt{81} + \sqrt[4]{81} - 6 \stackrel{?}{=} 0$		$\sqrt{16} + \sqrt[4]{16} - 6 \stackrel{?}{=} 0$	
$9 + 3 - 6 \stackrel{?}{=} 0$		$4 + 2 - 6 \stackrel{?}{=} 0$	
$6 = 0$	Falso	$0 = 0$	Verdadero

Dado que 81 no coincide, es una solución aparente. La única solución es 16.

Ahora resuelve el ejercicio 47

Comprende el Álgebra

Recuerda, del capítulo 7, que una expresión con exponentes racionales puede reescribirse como una expresión radical, usando la siguiente regla:

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$$

EJEMPLO 6 Resuelve $2p - \sqrt{p} - 10 = 0$.

Solución Ya que $\sqrt{p} = p^{1/2}$, se puede expresar la ecuación como:

$$2p - p^{1/2} - 10 = 0$$

Se hará $u = p^{1/2}$, entonces $u^2 = (p^{1/2})^2 = p$ y la ecuación se convierte en:

$$2p - p^{1/2} - 10 = 0$$
$$2(p^{1/2})^2 - p^{1/2} - 10 = 0$$

Si se hace $u = p^{1/2}$, esta ecuación es de la forma cuadrática.

$$2u^2 - u - 10 = 0$$
$$(2u - 5)(u + 2) = 0$$
$$2u - 5 = 0 \quad \text{o} \quad u + 2 = 0$$
$$2u = 5 \qquad\qquad u = -2$$
$$u = \frac{5}{2}$$

A continuación, sustituye $p^{1/2}$ por u.

$$p^{1/2} = \frac{5}{2} \qquad p^{1/2} = -2$$

Ahora, eleva al cuadrado ambos lados de la ecuación.

$$(p^{1/2})^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \qquad (p^{1/2})^2 = (-2)^2$$
$$p = \frac{25}{4} \qquad p = 4$$

Debes ahora verificar ambas soluciones aparentes en la ecuación original.

Verifica

$p = \frac{25}{4}$

$$2p - \sqrt{p} - 10 = 0$$
$$2\left(\frac{25}{4}\right) - \sqrt{\frac{25}{4}} - 10 \stackrel{?}{=} 0$$
$$\frac{25}{2} - \frac{5}{2} - 10 \stackrel{?}{=} 0$$
$$0 = 0 \quad \text{Verdadero}$$

$p = 4$

$$2p - \sqrt{p} - 10 = 0$$
$$2(4) - \sqrt{4} - 10 \stackrel{?}{=} 0$$
$$8 - 2 - 10 \stackrel{?}{=} 0$$
$$-4 = 0 \quad \text{Falso}$$

Dado que 4 no coincide, es una solución aparente. La única solución es $\frac{25}{4}$.

Ahora resuelve el ejercicio 53

Comprende el Álgebra

Cuando se resuelva una ecuación que involucre variables con exponentes racionales o radicales, con frecuencia, se elevarán ambos lados de la ecuación a una potencia par para eliminar el exponente racional o radical. Siempre que lo hagas, es posible introducir una solución aparente o falsa. En consecuencia, debes verificar las respuestas en la ecuación original.

8.4 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

$u = h - 2$ aparente u cuadrática $u = \sqrt{v}$ $u = (h - 2)^2$ intersecciones con el eje de las x $u = c^2$

1. Una ecuación que pueda escribirse en la forma $au^2 + bu + c = 0$ para $a \neq 0$, donde u es una expresión algebraica, se dice que está en la forma _____.
2. Las _____ de una función, son los puntos donde la gráfica de la función cruza o toca el eje de las x.
3. Siempre que resuelvas una ecuación al elevar ambos lados de la ecuación a una potencia par, es posible introducir una solución _____.
4. Para resolver la ecuación $c^4 + c^2 - 2 = 0$, la mejor elección de u para obtener una ecuación en la forma cuadrática es _____.

5. Para resolver la ecuación $(h-2)^2+(h-2)-42=0$, la mejor elección de u para obtener una ecuación en la forma cuadrática es _____.

6. Para resolver la ecuación $v-3\sqrt{v}-28=0$, la mejor elección de u para obtener una ecuación en la forma cuadrática, es _____.

Practica tus habilidades

Resuelve cada ecuación.

7. $x^4-17x^2+16=0$
8. $x^4-10x^2+9=0$
9. $x^4+13x^2+36=0$
10. $x^4+50x^2+49=0$
11. $a^4-7a^2+12=0$
12. $b^4-14b^2+45=0$
13. $a^4+14a^2+45=0$
14. $b^4+7b^2+12=0$
15. $4x^4-17x^2+4=0$
16. $9d^4-13d^2+4=0$
17. $r^4-8r^2=-15$
18. $p^4-8p^2=-12$
19. $z^4-7z^2=18$
20. $a^4+a^2=42$
21. $4k^4+20=42k^2$
22. $9b^4=57b^2-18$
23. $(x-4)^2-2(x-4)-35=0$
24. $(x+1)^2+4(x+1)+3=0$
25. $6(a-2)^2=-19(a-2)-10$
26. $10(z+2)^2=3(z+2)+1$
27. $(s^2+2)^2-17(s^2+2)+66=0$
28. $(t^2+1)^2-27(t^2+1)+170=0$
29. $(z^2+2)^2+6(z^2+2)-7=0$
30. $(z^2-7)^2+19(z^2-7)+88=0$
31. $(x^2+2x)^2-11(x^2+2x)+24=0$
32. $(x^2-2x)^2-18(x^2-2x)+45=0$
33. $a^{-2}+4a^{-1}+4=0$
34. $x^{-2}+10x^{-1}+25=0$
35. $12b^{-2}-7b^{-1}+1=0$
36. $5x^{-2}+4x^{-1}-1=0$
37. $2b^{-2}=7b^{-1}-3$
38. $x^{-2}+9x^{-1}=10$
39. $x^{-2}=4x^{-1}+12$
40. $6a^{-2}=a^{-1}+12$
41. $x^{2/3}-5x^{1/3}+6=0$
42. $b^{2/3}-9b^{1/3}+18=0$
43. $x^{2/3}-4x^{1/3}=-3$
44. $x^{2/3}=3x^{1/3}+4$
45. $m^{1/2}-5m^{1/4}+6=0$
46. $n^{1/2}-6n^{1/4}+8=0$
47. $p^{1/2}+2p^{1/4}-3=0$
48. $q^{1/2}-3q^{1/4}-10=0$
49. $-2a-5a^{1/2}+3=0$
50. $6b=15-b^{1/2}$
51. $x-5\sqrt{x}+6=0$
52. $y-12\sqrt{y}+35=0$
53. $2x-\sqrt{x}-6=0$
54. $3y-2\sqrt{y}-21=0$
55. $9x+3\sqrt{x}=2$
56. $8x+2\sqrt{x}=1$

Determina todas las intersecciones con el eje de las x de cada función.

57. $f(x)=x-5\sqrt{x}+6$
58. $g(x)=x-15\sqrt{x}+56$
59. $h(x)=x+14\sqrt{x}+45$
60. $k(x)=x+7\sqrt{x}+12$
61. $p(x)=4x^{-2}-19x^{-1}-5$
62. $q(x)=6x^{-2}+x^{-1}-2$
63. $f(x)=x^{1/2}+6x^{1/4}-7$
64. $g(x)=3\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}-10$
65. $g(x)=(x^2-3x)^2+2(x^2-3x)-24$
66. $h(x)=(x^2+2x)^2-6(x^2+2x)-16$
67. $f(x)=x^4-29x^2+100$
68. $s(x)=x^4-17x^2+16$

Determina todas las intersecciones con el eje de las x de cada función.

Resolución de problemas

69. Resuelve la ecuación $\frac{3}{x^2}-\frac{3}{x}=60$

a) multiplicando ambos lados de la ecuación por el MCD.

b) escribiendo la ecuación con exponentes negativos.

70. Resuelve la ecuación $1=\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}$

a) multiplicando ambos lados de la ecuación por el MCD.

b) escribiendo la ecuación con exponentes negativos.

Determina todas las soluciones reales de cada ecuación.

71. $15(r+2)+22=-\frac{8}{r+2}$
72. $2(p+3)+5=\frac{3}{p+3}$
73. $4-(x-1)^{-1}=3(x-1)^{-2}$
74. $3(x-4)^{-2}=16(x-4)^{-1}+12$

75. $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

76. $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$

77. $(x^2 + 2x - 2)^2 - 7(x^2 + 2x - 2) + 6 = 0$

78. $(x^2 + 3x - 2)^2 - 10(x^2 + 3x - 2) + 16 = 0$

Determina todas las soluciones reales de cada ecuación.

79. $2n^4 - 6n^2 - 3 = 0$

80. $3x^4 + 8x^2 - 1 = 0$

Ejercicios conceptuales y de redacción

81. Proporciona un procedimiento general para resolver una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

82. Proporciona un procedimiento general para resolver una ecuación de la forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$.

83. Proporciona un procedimiento general para resolver una ecuación de la forma $ax^{-2} + bx^{-1} + c = 0$.

84. Proporciona un procedimiento general para resolver una ecuación de la forma $a(x - r)^2 + b(x - r) + c = 0$.

85. Determina una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, que tenga soluciones ± 2 y ± 1. Explica cómo obtuviste tu respuesta.

86. Determina una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, que tenga soluciones ± 3 y $\pm 2i$. Explica cómo obtuviste tu respuesta.

87. Determina una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, que tenga soluciones $\pm\sqrt{2}$ y $\pm\sqrt{5}$. Explica cómo obtuviste tu respuesta.

88. Determina una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, que tenga soluciones $\pm 2i$ y $\pm 5i$. Explica cómo obtuviste tu respuesta.

89. ¿Es posible que una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, tenga exactamente una solución imaginaria? Explica.

90. ¿Es posible que una ecuación de la forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, tenga exactamente una solución real? Explica.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.3] **91.** Evalúa $\frac{4}{5} - \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right)$.

[2.1] **92.** Resuelve $3(x + 2) - 2(3x + 3) = -3$.

[3.2] **93.** Indica el dominio y rango para $y = (x - 3)^2$.

[7.3] **94.** Simplifica $\sqrt[3]{16x^3y^6}$.

[7.4] **95.** Suma $\sqrt{75} + \sqrt{48}$.

8.5 Gráficas de funciones cuadráticas

1. **Determinación de cuándo una parábola abre hacia arriba y cuándo abre hacia abajo**
2. **Determinación del eje de simetría, el vértice y las intersecciones con el eje de las *x* de una parábola**
3. **Gráficas de funciones cuadráticas usando el eje de simetría, el vértice y las intersecciones**
4. **Resolución de problemas de máximos y mínimos**
5. **Comprensión de las traslaciones de las parábolas**
6. **Escritura de funciones en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$**

En los capítulos 3 y 5, se estudiaron brevemente las gráficas de las funciones cuadráticas. En esta sección, se estudiará cómo graficar funciones cuadráticas usando el eje de simetría, el vértice y las intersecciones con los ejes del plano cartesiano. También se usarán las traslaciones para graficar funciones cuadráticas.

1 Determinación de cuándo una parábola abre hacia arriba y cuándo abre hacia abajo

Comienza con la definición de una función cuadrática.

Función cuadrática

Una **función cuadrática** es una función que puede escribirse en la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{para números reales } a, b \text{ y } c, \text{ con } a \neq 0.$$

La gráfica de una función cuadrática, es una **parábola**. Una parábola tiene una forma parecida, mas no igual, a la de la letra *U*. Para una función cuadrática, el signo del coeficiente principal, a, determina si la parábola abre hacia arriba (observa la **Figura 8.7a** de la página 567) o hacia abajo (observa la **Figura 8.7b**).

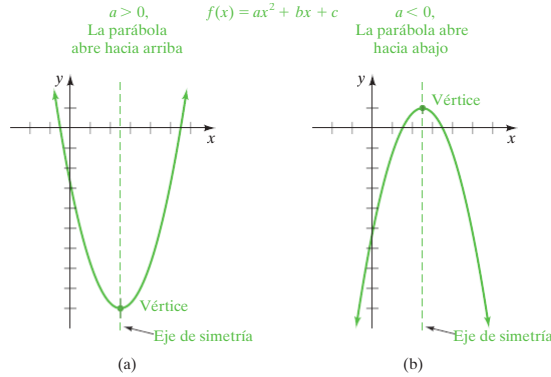


FIGURE 8.7

- Cuando $a > 0$, la parábola abre hacia arriba.
- El **vértice** es el punto más bajo de la curva.
- El **valor mínimo de la función** es la coordenada y del vértice.

- Cuando $a < 0$, la parábola abre hacia abajo.
- El **vértice** es el punto más alto de la curva.
- El **valor máximo de la función** es la coordenada y del vértice.

2 Determinación del eje de simetría, el vértice y las intersecciones con el eje de las x de una parábola

Las gráficas de las funciones cuadráticas tendrán **simetría** en torno a una recta vertical, llamada **eje de simetría**, la cuál pasa a través del vértice. Esto significa que, si doblas el papel a lo largo de esta recta imaginaria, los lados derecho e izquierdo de la parábola coincidirán (observa las dos gráficas de la **Figura 8.7**).

Ahora, se derivará la fórmula para el eje de simetría y se determinarán las coordenadas del vértice de una parábola, comenzando con una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ y completando el cuadro en los primeros dos términos.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \quad \text{Factoriza } a. \end{aligned}$$

Un medio del coeficiente de x es $\dfrac{b}{2a}$. Su cuadrado es $\dfrac{b^2}{4a^2}$. Suma y resta este término adentro de los paréntesis. La suma de estos dos términos es cero.

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c$$

Ahora reescribe la función de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \quad \text{Sustituye el trinomio con el cuadrado de un binomio.} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} \quad \text{Escribe fracciones con un denominador común.} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \quad \text{Combina los dos últimos términos; escríbelos poniendo la variable a primero.} \\ &= a\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

Ahora considera lo siguiente:

- La expresión $\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2$ siempre será mayor que o igual que 0.
- Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba y la función tiene un valor mínimo. Este valor mínimo ocurrirá cuando $x = -\frac{b}{2a}$.
- Si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo y la función tiene un valor máximo. Este valor máximo ocurrirá cuando $x = -\frac{b}{2a}$.
- Por tanto, la coordenada x del vértice puede determinarse usando la fórmula $x = -\frac{b}{2a}$. Para determinar la coordenada y del vértice, evalúa $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$. Se determina que la coordenada y del vértice es $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Vértice de una parábola

La parábola representada por la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tendrá vértice:

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

Puesto que, con frecuencia, la coordenada y del vértice se determina al sustituir la coordenada x del vértice en $f(x)$, el vértice también se puede designar como:

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

Observa, en el recuadro anterior, que hay dos formas de determinar la coordenada y del vértice de una parábola. ¿Cuál método debes usar? Si la coordenada x del vértice es una fracción, entonces usar la fórmula $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$ puede ser más sencillo. Si la coordenada x del vértice no es una fracción, entonces sustituir la coordenada x del vértice en $f(x)$ puede ser más sencillo. También se resolverán algunos problemas aplicados, en los cuáles, primero se pide determinar la coordenada y. En tales problemas se usará la fórmula $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Como el eje de simetría es la recta vertical que pasa a través del vértice, su ecuación se determina usando la misma fórmula utilizada para determinar la coordenada x del vértice.

Eje de simetría de una parábola

Para una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, la ecuación del **eje de simetría** de la parábola es:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

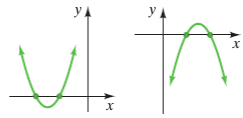
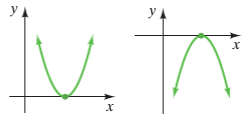
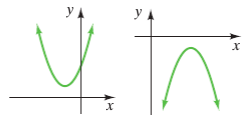
Recuerda que, para determinar las intersecciones con el eje de las x de una función, se hace y o $f(x) = 0$, y se resuelve en términos de x.

Intersecciones con el eje de las *x* de una parábola

Para determinar las intersecciones con el eje de las x (si las hay) de la gráfica de una función cuadrática, resuelve la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ en términos de x.

Esta ecuación puede resolverse por medio de factorización, usando la fórmula cuadrática o completando el cuadrado.

Como se mencionó en la sección 8.2, el discriminante, $b^2 - 4ac$, puede usarse para determinar el *número de intersecciones con el eje de las x*. La siguiente tabla resume la información sobre el discriminante.

Discriminante, $b^2 - 4ac$	Número de intersecciones con el eje de las x	Posibles gráficas de $f(x) = ax^2 + bx + c$
> 0	Dos	
$= 0$	Una	
< 0	Cero	

3 Gráficas de funciones cuadráticas usando el eje de simetría, el vértice y las intersecciones

Ahora, se dibujarán gráficas de funciones cuadráticas.

EJEMPLO 1 Considera la función cuadrática $y = -x^2 + 8x - 12$.

a) Determina si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.
b) Determina la intersección con el eje de las y.
c) Determina el vértice.
d) Determina la ecuación del eje de simetría.
e) Determina las intersecciones con el eje de las x, si las hay.
f) Grafica la ecuación

Solución

a) Puesto que a es -1, que es menor que 0, la parábola abre hacia abajo.

b) Para determinar la intersección con el eje de las y, haz $x = 0$ y resuelve en términos de y.

$$y = -(0)^2 + 8(0) - 12 = -12$$

La intersección con el eje de las y es $(0, -12)$.

c) Primero, determina la coordenada x, luego determina la coordenada y del vértice. A partir de la función $a = -1$, $b = 8$, y $c = -12$.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2(-1)} = 4$$

Dado que la coordenada x del vértice no es una fracción, se sustituirá $x = 4$ en la función original para determinar la coordenada y del vértice.

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 8x - 12 \\ y &= -(4)^2 + 8(4) - 12 \\ &= -16 + 32 - 12 = 4 \end{aligned}$$

Comprende el Álgebra

Recuerda, del capítulo 3, y es una función de x, y se escribe $y = f(x)$. Por tanto, cuando grafiques la función del ejemplo 1, puedes escribir $f(x) = -x^2 + 8x - 12$, o de manera equivalente, $y = -x^2 + 8x - 12$.

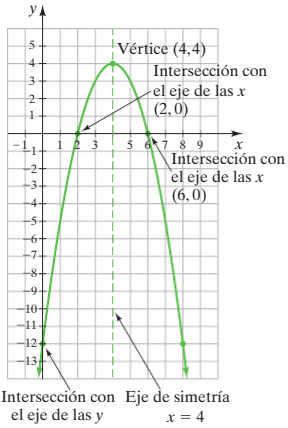


FIGURA 8.8

El vértice es (4, 4) La coordenada y del vértice también se puede determinar usando la fórmula $y = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$. Haz esto ahora para confirmar que la coordenada y del vértice, es 4.

d) Dado que el eje de simetría es una recta vertical que pasa a través del vértice, la ecuación se determina usando la misma fórmula usada para determinar la coordenada x del vértice (consulta el inciso **c)** anterior). En consecuencia, la ecuación del eje de simetría es $x = 4$.

e) Para determinar las intersecciones con el eje de las x, haz $y = 0$.

$$0 = -x^2 + 8x - 12$$
$$\text{o} \quad x^2 - 8x + 12 = 0$$
$$(x - 6)(x - 2) = 0$$
$$x - 6 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$
$$x = 6 \quad \text{o} \quad x = 2$$

En consecuencia, las intersecciones con el eje de las x son (2, 0) y (6, 0). Estos valores también podrían determinarse mediante la fórmula cuadrática (o completando el cuadrado).

f) Usa toda esta información para dibujar la gráfica (**Figura 8.8**).

Ahora resuelve el ejercicio 15

Observa que, en el ejemplo 1, la ecuación es $y = -x^2 + 8x - 12$ y la intersección con el eje de las y es $(0, -12)$. En general, para cualquier ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$, la intersección con el eje de las y será $(0, c)$.

Si obtienes valores irracionales cuando determines las intersecciones con el eje de las x mediante la fórmula cuadrática, usa tu calculadora para estimar estos valores y luego traza estos valores decimales. Por ejemplo, si obtienes $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$ evaluarías $\dfrac{2 + \sqrt{10}}{2}$ y $\dfrac{2 - \sqrt{10}}{2}$ en tu calculadora, para obtener 2.58 y −0.58, respectivamente, a la centésima más cercana. Por tanto, las intersecciones con el eje de las x estarían aproximadamente en (2.58, 0) y (−0.58, 0).

EJEMPLO 2

Considera la función cuadrática $f(x) = 2x^2 + 6x + 5$.

a) Determina si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.
b) Determina la intersección con el eje de las y.
c) Determina el vértice.
d) Determina la ecuación del eje de simetría.
e) Determina las intersecciones con el eje de las x, si las hay.
f) Grafica la ecuación

Solución

a) Dado que a es 2, que es mayor que 0, la parábola abre hacia arriba.

b) Dado que $f(x)$ es lo mismo que y, para determinar la intersección con el eje y, haz $x = 0$ y resuelve en términos de $f(x)$ o y.

$$f(0) = 2(0)^2 + 6(0) + 5 = 5$$

La intersección con el eje de las y es (0, 5).

c) Aquí, $a = 2$, $b = 6$ y $c = 5$.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(2)} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Dado que la coordenada x del vértice es una fracción, se usará la fórmula $y = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ para determinar la coordenada y del vértice.

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(2)(5) - 6^2}{4(2)} = \frac{40 - 36}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

El vértice es $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. La *coordenada y* del vértice también se puede determinar al evaluar $f\left(-\frac{3}{2}\right)$.

d) Dado que el eje de simetría es una recta vertical que pasa a través del vértice, la ecuación se determina usando la misma fórmula utilizada para determinar la *coordenada x* del vértice. Por tanto, la ecuación del eje de simetría, es $x = -\frac{3}{2}$.

e) Para determinar las intersecciones con el eje de las x, haz $f(x) = 0$.

$$0 = 2x^2 + 6x + 5$$

Este trinomio no se puede factorizar. Para determinar si esta ecuación tiene alguna solución real, evalúa el discriminante.

$$b^2 - 4ac = 6^2 - 4(2)(5) = 36 - 40 = -4$$

Dado que el discriminante es menor que 0, esta ecuación no tiene soluciones reales y la gráfica no tiene intersección con el eje de las x.

f) La gráfica se proporciona en la **Figura 8.9**.

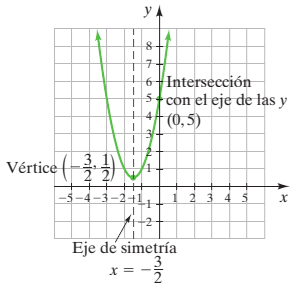


FIGURA 8.9

Ahora resuelve el ejercicio 39

4 Resolución de problemas de máximos y mínimos

Una parábola que se abre hacia arriba tiene un **valor mínimo** en su vértice, como se ilustra en la **Figura 8.10a**. Una parábola que se abre hacia abajo tiene un **valor máximo** en su vértice, como se muestra en la **Figura 8.10b**. Si te proporcionan una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, el valor máximo o mínimo ocurrirá en $-\frac{b}{2a}$, y el valor será $\frac{4ac - b^2}{4a}$. Existen muchos problemas de la vida real que requieren la determinación de valores máximos y mínimos.

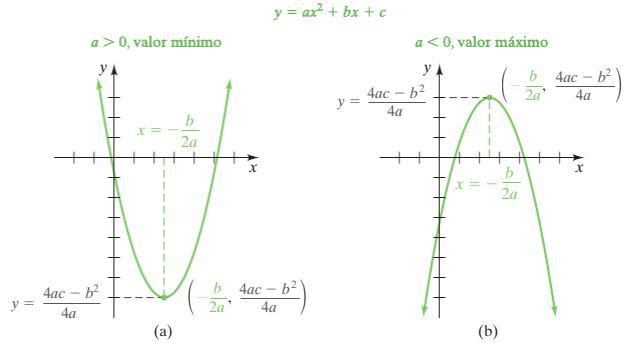


FIGURA 8.10

EJEMPLO 3 **Béisbol** Un bateador golpea una pelota de béisbol a una altura de 2 pies arriba del suelo. La altura de la pelota sobre el suelo, $h(t)$, en pies, en el tiempo t, en segundos, puede estimarse mediante la función

$$h(t) = -16t^2 + 60t + 2$$

a) Determina la altura máxima alcanzada por la pelota de béisbol.

b) Determina el tiempo que la pelota tarda en alcanzar su altura máxima.

c) Si supones que la pelota no fue atrapada, determina el tiempo que tardará en llegar al suelo. Redondea tu respuesta del inciso **c)** a la centésima más cercana.



Solución

a) Entiende La función dada tiene $a = -16$, un número negativo; en consecuencia, la pelota de béisbol seguirá la trayectoria de una parábola que abre hacia abajo. La pelota subirá a la altura máxima y luego comenzará a caer de vuelta al suelo, debido a la gravedad. Para determinar la altura máxima, se usará la fórmula $y = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$.

Traduce $a = -16, \quad b = 60, \quad c = 2$

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Realiza
$$= \frac{4(-16)(2) - (60)^2}{4(-16)}$$
$$= \frac{-128 - 3600}{-64}$$
$$= \frac{-3728}{-64} = 58.25$$

Responde La altura máxima alcanzada por la pelota de béisbol es de 58.25 pies.

b) La pelota de béisbol alcanza su altura máxima en

$$t = -\frac{b}{2a} = -\frac{60}{2(-16)} = -\frac{60}{-32} = 1.875$$

Por tanto, la pelota de béisbol alcanza la altura máxima en 1.875 segundos.

c) Entiende y Traduce Cuando la pelota de béisbol golpea el suelo, su altura sobre el terreno, $h(t)$, es 0. Por tanto, en la función original, sustituye $h(t)$ con 0 y resuelve la ecuación resultante.

$$h(t) = -16t^2 + 60t + 2$$
$$0 = -16t^2 + 60t + 2$$

Se usará la fórmula cuadrática para resolver esta ecuación, con $a = -16$, $b = 60$, y $c = 2$.

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-(60) \pm \sqrt{(60)^2 - 4(-16)(2)}}{2(-16)}$$

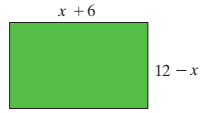
Realiza
$$= \frac{-60 \pm \sqrt{3600 + 128}}{-32}$$
$$= \frac{-60 \pm \sqrt{3728}}{-32}$$
$$\approx \frac{-60 \pm 61.06}{-32}$$

$$t \approx \frac{-60 + 61.06}{-32} \quad \text{o} \quad t \approx \frac{-60 - 61.06}{-32}$$
$$\approx -0.03 \text{ segundos} \qquad \approx 3.78 \text{ segundos}$$

Responde Como el tiempo no puede ser negativo, la pelota de béisbol topa con el suelo aproximadamente 3.78 segundos después de que la pelota fue golpeada. Observa en el inciso **b)**, que el tiempo que tarda la pelota en llegar a su altura máxima, 1.875, no es la mitad del tiempo total que la pelota está en vuelo, 3.78 segundos. Esto se debe a que la pelota fue golpeada a una altura de 2 pies y no a nivel del suelo.

Ahora resuelve el ejercicio 85

EJEMPLO 4 **Área de un rectángulo** Considera el siguiente rectángulo, donde la longitud es $x \neq 6$ y el ancho es $12 - x$.



a) Determina una función cuadrática para el área del rectángulo, $A(x)$.

b) Determina el valor de x que produce el área máxima.

c) Determina el área máxima.

Solución

a) El área de un rectángulo, es longitud por ancho. En consecuencia, la función cuadrática es

$$\begin{aligned} A &= l \cdot w \\ A(x) &= (x + 6)(12 - x) \\ &= 12x + 72 - x^2 - 6x \quad \text{Multiplica los factores usando PIES.} \\ &= -x^2 + 6x + 72 \quad \text{Reduce los términos semejantes; colócalos en orden decreciente.} \end{aligned}$$

Por tanto, la función cuadrática para el área del rectángulo es $A(x) = -x^2 + 6x + 72$.

b) Entiende y Traduce La gráfica de la función es una parábola que abre hacia abajo. En consecuencia, el área máxima del rectángulo ocurre en el vértice. El valor de x, que produce el área máxima del rectángulo puede determinarse usando la fórmula $x = -\dfrac{b}{2a}$. Aquí, $a = -1$ y $b = 6$.

Realiza $$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(-1)} = -\frac{6}{-2} = -(-3) = 3$$

c) Para determinar el área máxima del rectángulo, evalúa $A(3)$.

$$\begin{aligned} A(x) &= -x^2 + 6x + 72 \\ A(3) &= -(3)^2 + 6(3) + 72 \\ &= -9 + 18 + 72 = 81 \end{aligned}$$

Por tanto, el área máxima del rectángulo es de 81 unidades cuadradas.

Observa que, la longitud del rectángulo con área máxima es $x + 6 = 3 + 6 = 9$ y la anchura de este rectángulo es $12 - x = 12 - 3 = 9$. Hay que notar que el rectángulo con la área máxima es en realidad, un cuadrado con área de (9)(9) = 81 unidades cuadradas.

Ahora resuelve el ejercicio 73

En el ejemplo 4 **c)**, el área máxima podría determinarse usando la fórmula $y = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$. Ahora determina el área máxima usando esta fórmula. Debes obtener la misma respuesta, 81 unidades cuadradas.

EJEMPLO 5 **Corral rectangular** Gregorio construye un corral, con forma rectangular, para terneros recién nacidos (observa la **Figura 8.11**). Si él planea usar 160 metros de cerca, determina las dimensiones del corral que producirán el área más grande.



FIGURA 8.11

Solución Entiende Se proporciona el perímetro del corral, 160 metros. La fórmula para el perímetro de un rectángulo es $P = 2l + 2w$. Para este problema, $160 = 2l + 2w$. Se pide maximizar el área, A, donde

$$A = lw$$

Es necesario expresar el área en términos de una variable, no de dos. Para expresar el área en términos de l, resuelve la fórmula del perímetro, $160 = 2l + 2w$, en términos de w, luego haz una sustitución.



Traduce
$$160 = 2l + 2w$$
$$160 - 2l = 2w$$
$$80 - l = w$$

Realiza Ahora sustituye $80 - l$ en términos de w en $A = lw$. Esto da que:
$$A = lw$$
$$A = l(80 - l)$$
$$A = -l^2 + 80l$$

En esta ecuación cuadrática, $a = -1$, $b = 80$ y $c = 0$. El área máxima ocurrirá en:
$$l = -\frac{b}{2a} = -\frac{80}{2(-1)} = 40$$

Responde La longitud que producirá el área más grande es de 40 metros. El ancho, $w = 80 - l$, también será de 40 metros. Por tanto, un cuadrado con dimensiones de 40 por 40 metros producirá el área más grande. En consecuencia, el área más grande es de 40 metros $\times$ 40 metros, o 1 600 metros cuadrados.

Ahora resuelve el ejercicio 87

2 Comprensión de las traslaciones de las parábolas

El siguiente método para graficar parábolas, comienza con las gráficas de funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2$. Considera las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$ y $h(x) = \frac{1}{2}x^2$, que se muestran en la **Figura 8.12**. Observa que el *valor* de a determina el ancho de la parábola.

A continuación, considera las funciones $f(x) = -x^2$, $g(x) = -2x^2$ y $h(x) = -\frac{1}{2}x^2$, que se muestran en la **Figura 8.13**. Aunque las parábolas abren hacia abajo, el valor de a todavía determina el ancho de la parábola.

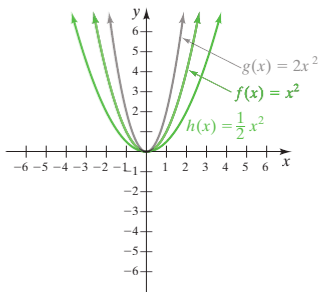


FIGURA 8.12

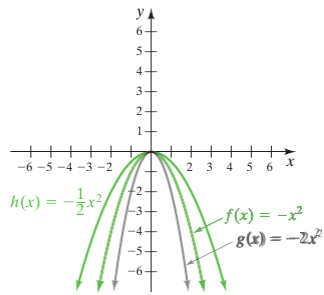


FIGURA 8.13

Comprende el Álgebra

En general, cuando grafiques la parábola que corresponda a una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2$, conforme $|a|$ se hace más grande, la parábola se hace más estrecha. Conforme $|a|$ se hace más pequeño, la parábola se hace más ancha.

A partir de la **Figura 8.12** y de la **Figura 8.13**, se puede ver que, *en general, conforme* $|a|$ *se hace más grande, la parábola se hace más estrecha. Conforme* $|a|$ *se hace más pequeño, la parábola se hace más ancha.*

Ahora, se **trasladará**, o correrá, la posición de las gráficas de la forma $f(x) = ax^2$, para obtener las gráficas de otras funciones cuadráticas. Por ejemplo, considera las tres funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = (x - 2)^2$ y $h(x) = (x + 2)^2$ que se muestran en la **Figura 8.14** de la página 575. Observa que, las tres gráficas, son idénticas en *forma*, pero se encuentran en distintas posiciones.

Observa también que, la gráfica de $g(x)$ está trasladada, o corrida, 2 unidades a la derecha de la gráfica de $f(x)$. La gráfica de $h(x)$ está trasladada 2 unidades a la izquierda de la gráfica de $f(x)$.

En general, la gráfica de $g(x) = a(x - h)^2$ *tendrá la misma forma que la gráfica de* $f(x) = ax^2$. *Si h es positiva, entonces la gráfica de g(x) estará corrida h unidades a la derecha*

de la gráfica de $f(x)$. Si h es negativa, entonces la gráfica de $g(x)$ estará corrida $|h|$ unidades a la izquierda de la gráfica de $f(x)$.

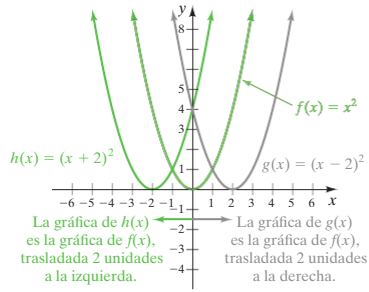


FIGURA 8.14

A continuación, considera las gráficas de $f(x) = x^2, g(x) = x^2 + 3$ y $h(x) = x^2 - 3$ que se muestran en la **Figura 8.15**. Observa nuevamente que, las tres gráficas, son idénticas en *forma* pero que están en diferentes posiciones.

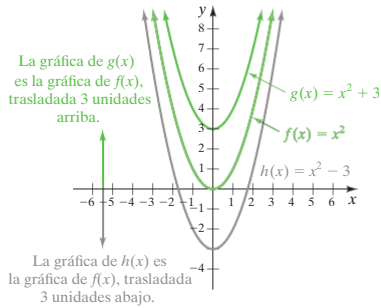


FIGURA 8.15

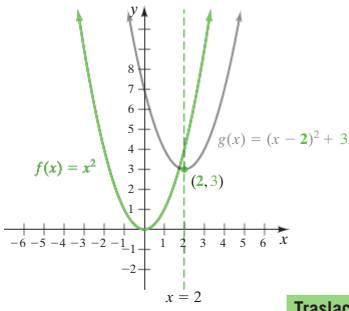


FIGURA 8.16

Observa también que, la gráfica de $g(x)$ está trasladada 3 unidades arriba de la gráfica de $f(x)$. La gráfica de $h(x)$ está trasladada 3 unidades abajo de la gráfica de $f(x)$.

En general, la gráfica de $g(x) = ax^2 + k$ tendrá la misma forma que la gráfica de $f(x) = ax^2$. Si k es positiva, entonces la gráfica de $g(x)$ estará corrida k unidades arriba de la gráfica de $f(x)$. Si k es negativa, entonces la gráfica de $g(x)$ estará corrida $|k|$ unidades abajo de la gráfica de $f(x)$.

Ahora, considera las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = (x - 2)^2 + 3$, que se muestran en la **Figura 8.16**. Observa que la gráfica de $g(x)$ tiene la misma forma que la de $f(x)$. La gráfica de $g(x)$ es la gráfica de $f(x)$, trasladada 2 unidades a la derecha y 3 unidades arriba. Esta gráfica y la discusión precedente, conducen a los siguientes hechos importantes:

Traslaciones de parábolas

Para cualquier función $f(x) = ax^2$, la gráfica de $g(x) = a(x - h)^2 + k$, tendrá la misma forma que la gráfica de $f(x)$. La gráfica de $g(x)$ será la gráfica de $f(x)$ trasladada de la siguiente manera:

- Si h es un número real positivo, la gráfica estará trasladada h unidades a la derecha.
- Si h es un número real negativo, la gráfica estará trasladada $|h|$ unidades a la izquierda.
- Si k es un número real positivo, la gráfica estará trasladada k unidades arriba.
- Si k es un número real negativo, la gráfica estará trasladada $|k|$ unidades abajo.

Examina la gráfica de $g(x) = (x - 2)^2 + 3$ en la **Figura 8.16**. Observa que, su eje de simetría es $x = 2$ y su vértice es $(2, 3)$.

Eje de simetría y vértice de una parábola

La gráfica de cualquier función de la forma

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

será una parábola con eje de simetría $x = h$ y vértice en (h, k).

Ejemplo	Eje de simetría	Vértice	La parábola abre
$f(x) = 2(x - 5)^2 + 7$	$x = 5$	$(5, 7)$	hacia arriba, $a > 0$
$f(x) = -\frac{1}{2}(x - 6)^2 - 3$	$x = 6$	$(6, -3)$	hacia abajo, $a < 0$

Ahora, considera $f(x) = 2(x + 5)^2 + 3$. Esta se puede reescribir como $f(x) = 2[x - (-5)]^2 + 3$. Por tanto, h tiene un valor de -5 y k tiene un valor de 3. La gráfica de esta función tiene eje de simetría $x = -5$ y vértice en $(-5, 3)$.

Ejemplo	Eje de simetría	Vértice	La parábola abre
$f(x) = 3(x + 4)^2 - 2$	$x = -4$	$(-4, -2)$	hacia arriba, $a > 0$
$f(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{4}$	$x = -\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$	hacia abajo, $a < 0$

Ahora estás listo para graficar parábolas usando traslaciones.

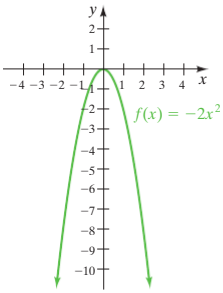


FIGURA 8.17

EJEMPLO 6 La gráfica de $f(x) = -2x^2$ se ilustra en la **Figura 8.17**. Usando esta gráfica como guía, grafica $g(x) = -2(x + 3)^2 - 4$.

Solución La función $g(x)$ se puede escribir $g(x) = -2[x - (-3)]^2 - 4$. En consecuencia, en la función, h tiene un valor de -3 y k tiene un valor de -4. Por tanto, la gráfica de $g(x)$ será la gráfica de $g(x)$ trasladada 3 unidades a la izquierda (porque $h = -3$) y 4 unidades abajo (porque $k = -4$). Las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ se ilustran en la **Figura 8.18**.

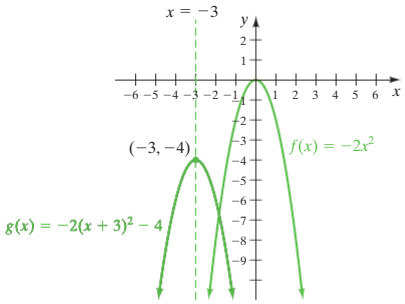


FIGURA 8.18

Ahora resuelve el ejercicio 49

En el objetivo 2, se comenzó con una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, y se completó el cuadrado para obtener:

$$f(x) = a\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Se indicó que el vértice de la parábola de esta función es $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$. Supón, que h se sustituye por $-\frac{b}{2a}$ y k por $\frac{4ac - b^2}{4a}$ en la función. Entonces se obtiene:

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

la cual, se sabe que es una parábola con vértice en (h, k). Por tanto, ambas funciones, $f(x) = ax^2 + bx + c$ y $f(x) = a(x - h)^2 + k$, producen el mismo vértice y eje de simetría para cualquier función dada.

6 Escritura de funciones en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$

Si quieres graficar parábolas usando traslaciones, es necesario cambiar la forma de una función de $f(x) = ax^2 + bx + c$ a $f(x) = a(x - h)^2 + k$. Para hacer esto, *completa el cuadrado* como se estudió en la sección 8.1.

EJEMPLO 7 Dada $f(x) = x^2 - 6x + 10$,

a) Escribe $f(x)$ en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

b) Grafica $f(x)$.

Solución

a) Usa los términos x^2 y $-6x$ para obtener un trinomio cuadrado perfecto.

$$f(x) = (x^2 - 6x) + 10$$

Ahora toma la mitad del coeficiente del término x y elévalo al cuadrado.

$$\left[\frac{1}{2}(-6)\right]^2 = 9$$

Luego, suma este valor, 9, dentro de los paréntesis. Dado que se suma 9 dentro de los paréntesis, suma -9 afuera de los paréntesis. Sumar 9 y -9 a una expresión, es lo mismo que sumar 0, lo cual, no cambia el valor de la expresión.

$$f(x) = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 10$$

Al hacer esto, se creó un trinomio cuadrado perfecto dentro de los paréntesis, más una constante afuera de los paréntesis. El trinomio cuadrado perfecto se expresa como el cuadrado de un binomio.

$$f(x) = (x - 3)^2 + 1$$

Ahora, la función está en la forma que se busca.

b) Como $a = 1$, que es mayor que 0, la parábola abre hacia arriba. El eje de simetría de la parábola es $x = 3$ y el vértice está en (3, 1). La intersección con el eje de las y, se puede obtener al sustituir $x = 0$ y determinar $f(x)$. Cuando $x = 0$, $x = 0, f(x) = (-3)^2 + 1 = 10$. En consecuencia, la intersección con el eje de las y, está en 10. Al trazar el vértice, la intersección con el eje de las y, y algunos otros puntos, se obtiene la gráfica de la **Figura 8.19**. La figura también muestra la gráfica de $y = x^2$, como comparativo.

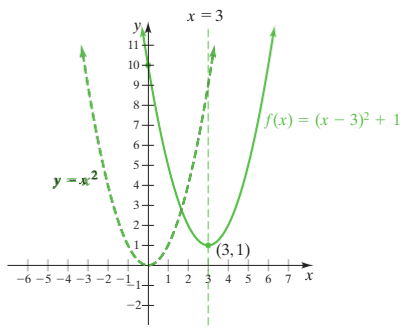


FIGURA 8.19

Ahora resuelve el ejercicio 59

EJEMPLO 8 Dada $f(x) = -2x^2 - 10x - 13$,

a) Escribe $f(x)$ en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

b) Grafica $g(x)$.

Solución

a) Cuando el coeficiente principal no es 1, se factoriza el coeficiente principal de los términos que contienen la variable.

$$f(x) = -2(x^2 + 5x) - 13$$

Ahora, completa el cuadrado.

Mitad del coeficiente del término de primer grado al cuadrado

$$\left[\frac{1}{2}(5)\right]^2 = \frac{25}{4}$$

Si sumas $\frac{25}{4}$ dentro de los paréntesis, se está sumando $-2\left(\frac{25}{4}\right)$ o $-\frac{25}{2}$, pues cada término entre paréntesis se multiplica por -2. En consecuencia, para compensar, debes sumar $\frac{25}{2}$ afuera de los paréntesis.

$$\begin{aligned} f(x) &= -2\left(x^2 + 5x + \frac{25}{4}\right) + \frac{25}{2} - 13 \\ &= -2\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) Como $a = -2$, la parábola abre hacia abajo. El eje de simetría es $x = -\frac{5}{2}$, y el vértice es $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. La intersección con el eje de las y está en $f(0) = -13$. Al trazar algunos puntos se puede dibujar la gráfica como se ve en la **Figura 8.20**. En la figura, también se muestra la gráfica de $y = -2x^2$, como comparativo.

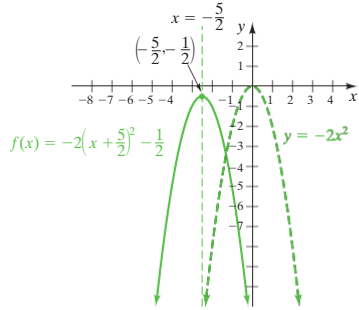


FIGURA 8.20

Observa que, $f(x) = -2\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$ no tiene intersecciones con el eje de las x. En consecuencia, no hay valores reales de x, para los cuales $f(x) = 0$.

Ahora resuelve el ejercicio 63

Una segunda forma de cambiar la forma de la función de $f(x) = ax^2 + bx + c$ a $f(x) = a(x - h)^2 + k$, es hacer $h = -\frac{b}{2a}$ y $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Determina los valores para h y k, y luego, sustituye los valores obtenidos en $f(x) = a(x - h)^2 + k$. Por ejemplo,

para la función $f(x) = -2x^2 - 10x - 13$, en el ejemplo 8, $a = -2$, $b = -10$, y $c = -13$. Entonces:

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{2(-2)} = -\frac{5}{2}$$

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(-2)(-13) - (-10)^2}{4(-2)} = -\frac{1}{2}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x-h)^2 + k \\ &= -2\left[x - \left(-\frac{5}{2}\right)\right]^2 - \frac{1}{2} \\ &= -2\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Esta respuesta coincide con la obtenida en el ejemplo 8.

8.5 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

abajo	eje	intersección con el eje de las y	$-\frac{b}{2a}$	hacia abajo	vértice	más estrecha
derecha	izquierda	intersección con el eje de las x	$\frac{4ac - b^2}{4a}$	parábola	arriba	recta

1. La gráfica de una función cuadrática es una _____.
2. Cuando $a > 0$, la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$, es una parábola que abre hacia arriba y el _____ es el punto más bajo de la curva.
3. Cuando $a < 0$, la gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$, es una parábola que abre _____ y el vértice es el punto más alto de la curva.
4. Las gráficas de las funciones cuadráticas tendrán simetría en torno a una recta vertical llamada _____ de simetría.
5. La ecuación $x =$ _____ proporciona la ecuación del eje de simetría y la coordenada x al origen del vértice.
6. Para determinar la _____ de una función cuadrática (si la hay), haz y o $f(x)$ igual a 0 y resuelve en términos de x.
7. Para determinar la _____ de una función cuadrática, haz $x = 0$ y resuelve en términos de y o $f(x)$.
8. En general, cuando se grafica la parábola que corresponde a una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2$, conforme $|a|$ se vuelve más grande, la parábola se vuelve _____.
9. Si h es positivo, entonces la gráfica de $g(x) = a(x-h)^2$ tendrá la misma forma que la gráfica de $f(x) = ax^2$, pero estará trasladada h unidades a la _____ de la gráfica de $f(x)$.
10. Si h es negativo, entonces la gráfica de $g(x) = a(x-h)^2$ tendrá la misma forma que la gráfica de $f(x) = ax^2$, pero estará trasladada $|h|$ unidades a la _____ de la gráfica de $f(x)$.
11. Si k es positivo, entonces la gráfica de $g(x) = ax^2 + k$ tendrá la misma forma que la gráfica de $f(x) = ax^2$, pero estará trasladada k unidades _____ de la gráfica de $f(x)$.
12. Si k es negativo, entonces la gráfica de $g(x) = ax^2 + k$ tendrá la misma forma que la gráfica de $f(x) = ax^2$, pero estará trasladada $|k|$ unidades _____ de la gráfica de $f(x)$.

Practica tus habilidades

a) *Determina si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.* **b)** *Determina la intersección con el eje de las y.* **c)** *Determina el vértice.* **d)** *Determina la ecuación del eje de simetría.* **e)** *Determina las intersecciones con el eje de las x (si las hay).* **f)** *Grafica la ecuación.*

13. $f(x) = x^2 - 4x + 3$

14. $f(x) = x^2 - 6x + 5$

15. $f(x) = x^2 + 8x + 15$

16. $g(x) = x^2 + 2x - 3$

17. $f(x) = x^2 + 6x + 8$

18. $h(x) = x^2 - 2x - 8$

19. $f(x) = -x^2 - 2x + 8$

20. $p(x) = -x^2 + 8x - 15$

21. $g(x) = -x^2 + 4x + 5$

22. $n(x) = -x^2 - 2x + 24$

23. $f(x) = x^2 - 4x + 4$

24. $r(x) = -x^2 + 10x - 25$

25. $t(x) = -x^2 + 4x - 5$

26. $g(x) = x^2 + 6x + 13$

27. $r(x) = x^2 + 2$

28. $l(x) = -x^2 + 5$

29. $g(x) = -x^2 + 6x$

30. $f(x) = x^2 + 4x$

31. $f(x) = -2x^2 + 4x - 8$

32. $m(x) = 3x^2 + 4x + 3$

33. $g(x) = -2x^2 - 6x + 4$

34. $p(x) = -2x^2 + 5x + 4$

35. $y = 3x^2 + 4x - 6$

36. $y = x^2 - 6x + 4$

37. $y = 2x^2 - x - 6$

38. $g(x) = -4x^2 + 6x - 9$

39. $f(x) = -x^2 + 3x - 5$

40. $h(x) = -2x^2 + 4x - 5$

Con las gráficas de las **Figuras 8.12** *a la* **8.16,** *como guía, elabora la gráfica de cada función e indica el vértice.*

41. $f(x) = (x - 3)^2$

42. $f(x) = (x - 4)^2$

43. $f(x) = (x + 1)^2$

44. $f(x) = (x + 2)^2$

45. $f(x) = x^2 + 3$

46. $f(x) = x^2 + 5$

47. $f(x) = x^2 - 1$

48. $f(x) = x^2 - 4$

49. $f(x) = (x - 2)^2 + 3$

50. $h(x) = (x + 4)^2 - 1$

51. $f(x) = (x + 4)^2 + 4$

52. $f(x) = (x - 3)^2 - 4$

53. $g(x) = -(x + 3)^2 - 2$

54. $g(x) = (x - 1)^2 + 4$

55. $y = -2(x - 2)^2 + 2$

56. $y = -2(x - 3)^2 + 1$

57. $h(x) = -2(x + 1)^2 - 3$

58. $f(x) = -(x - 5)^2 + 2$

En los ejercicios 59-68, **a)** *expresa cada función en la forma* $f(x) = a(x - h)^2 + k$ *y* **b)** *dibuja la gráfica de cada función e indica el vértice.*

59. $f(x) = x^2 - 6x + 8$

60. $g(x) = x^2 + 6x + 2$

61. $g(x) = x^2 - x - 3$

62. $f(x) = x^2 - x + 1$

63. $f(x) = -x^2 - 4x - 6$

64. $h(x) = -x^2 + 6x + 1$

65. $g(x) = x^2 - 4x - 1$

66. $p(x) = x^2 - 2x - 6$

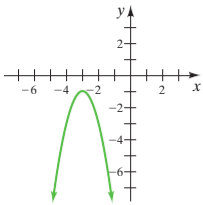
67. $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$

68. $k(x) = 2x^2 + 7x - 4$

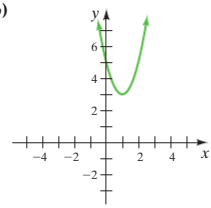
Resolución de problemas

Relaciona las funciones en los ejercicios 69-72 con las gráficas adecuadas etiquetadas de la **a)** *a la* **d)**.

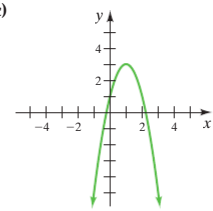
a)



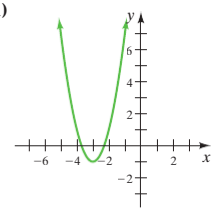
b)



c)



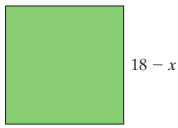
d)



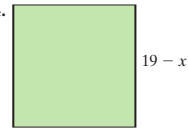
69. $f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$ **70.** $f(x) = -2(x + 3)^2 - 1$ **71.** $f(x) = 2(x + 3)^2 - 1$ **72.** $f(x) = -2(x - 1)^2 + 3$

Área *Para cada rectángulo,* **a)** *determina el valor en términos de x, que produce el área máxima y* **b)** *determina el área máxima.*

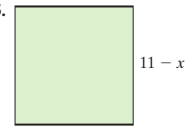
73.



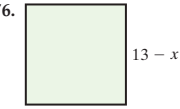
74.



75.



76.



77. Decoración de bote Rogelio opera un negocio de limpieza de botes. Rogelio ha determinado que su ganancia anual, en dólares, se puede estimar mediante la función $P(x) = -x^2 + 400x - 200$, donde x representa el monto que cobra Rogelio por limpiar un bote.



a) Determina el monto que debería cobrar Rogelio para obtener la ganancia anual máxima.

b) Determina la ganancia anual máxima.

78. Limpieza de casa Elías opera un servicio de limpieza de casas. Elías ha determinado que su ganancia anual, en dólares, se puede estimar mediante la función $P(x) = -8x^2 + 1280x - 5200$, donde x es el monto que cobra Elías por limpiar una casa.

a) Determina el monto que debería cobrar Elías para obtener la ganancia anual máxima.

b) Determina la ganancia anual máxima

79. Spinners La función de ingreso por vender n *spinners*, es

$$R(n) = n(8 - 0.02n) = -0.02n^2 + 8n.$$



a) Determina el número de spinners que deben venderse para obtener el ingreso máximo.

b) Determina el ingreso máximo.

80. Gafas para el Sol La función de ingreso por vender n pares de gafas para el Sol, es

$$R(n) = n(25 - 0.1n) = -0.1n^2 + 25n.$$

a) Determina el número de pares de gafas para el Sol que deben venderse para obtener el ingreso máximo.

b) Determina el ingreso máximo.

81. Boletos para musicales El club de teatro de la preparatoria Benton, intenta establecer el precio de los boletos para un musical. Si el precio es muy bajo, no tendrán suficiente dinero para cubrir los gastos; si el precio es muy alto, no habrán suficientes personas dispuestas a pagar el precio de un boleto. Ellos estiman que su ingreso total por musical, I, en cientos de dólares, se puede aproximar mediante la fórmula

$$I = -x^2 + 24x - 44, 0 \le x \le 24$$

donde x es el costo de un boleto.

a) Dibuja una gráfica de ingreso contra el costo de un boleto.

b) Determina el costo mínimo de un boleto, para que el club de teatro alcance su punto de equilibrio.

c) Determina el costo máximo de un boleto que el club de teatro puede cobrar para alcanzar su punto de equilibrio.

d) ¿Cuánto se debe cobrar para obtener el ingreso máximo?

e) Determina el ingreso máximo.

82. Lanzamiento de un objeto Un objeto se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de 192 pies por segundo. La distancia del objeto arriba del suelo, d, después de t segundos puede estimarse mediante la fórmula $d = -16t^2 + 192t$.

a) Determina la distancia del objeto arriba del suelo, después de 3 segundos.

b) Dibuja una gráfica de distancia vs. tiempo.

c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanzará el objeto?

d) ¿En qué tiempo llegará a su altura máxima?

e) ¿En qué tiempo el objeto golpeará el suelo?

83. Ganancia La Compañía Outdoor Life, tiene una ganancia semanal de acuerdo con la función $f(x) = -0.4x^2 + 80x - 200$, donde x es el número de alimentadores para aves que construye y vende.

a) Determina el número de alimentadores para aves que la compañía debe vender en una semana, para obtener la ganancia máxima.

b) Determina la ganancia máxima.

84. Ganancia La Compañía Open Environment, tiene una ganancia semanal de acuerdo con la función $f(x) = -1.2x^2 + 180x - 280$, donde x es el número de mesas de pícnic vendidas.



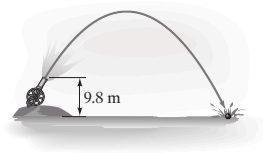
a) Determina el número de mesas de pícnic que la compañía debe vender en una semana para obtener la ganancia máxima.

b) Determina la ganancia máxima.

85. Disparo de cañón Si cierto cañón se dispara desde una altura de 9.8 metros sobre el suelo, con cierto ángulo, la altura de la bala sobre el suelo, $h(t)$, en metros, para un tiempo t, en segundos, está determinada por la función:

$$h(t) = -4.9t^2 + 24.5t + 9.8$$

a) Determina la altura máxima que alcanza la bala.



b) Determina el tiempo que la bala tarda en llegar a su altura máxima.

c) Determina el tiempo que la bala tarda en golpear el suelo.

86. Lanzamiento de una pelota de tenis Una pelota de tenis es lanzada desde una altura de 1 pie sobre el suelo. La altura de la pelota, $h(t)$, en pies, para un tiempo, t, en segundos, se determina mediante la función:

$$h(t) = -16t^2 + 32t + 1$$



a) Determina la altura máxima que alcanza la pelota de tenis.

b) Determina el tiempo que la pelota de tenis tarda en alcanzar su altura máxima.

c) Determina el tiempo que la pelota de tenis tarda en golpear el suelo. Redondea tu respuesta a la centésima de segundo más cercana.

87. Habitación Javier diseña planos para su casa. ¿Cuál es el área máxima posible para un piso de una habitación rectangular, si su perímetro debe ser de 80 pies?

88. Jardín ¿Cuáles son las dimensiones de un jardín rectangular que tendrá un área máxima, si su perímetro es de 70 pies?

89. Producto mínimo ¿Cuál es el producto mínimo de dos números que difieren por 8? ¿Cuáles son los números?

90. Producto mínimo ¿Cuál es el producto mínimo de dos números que difieren por 10? ¿Cuáles son los números?

91. Producto máximo ¿Cuál es el producto máximo de dos números que suman 60? ¿Cuáles son los números?

92. Producto máximo ¿Cuál es el producto máximo de dos números que suman 5? ¿Cuáles son los números?

La ganancia, $P(x)$, de una compañía, en dólares, es la diferencia entre el ingreso y el costo de la compañía. Los ejercicios 93-96 proporcionan las funciones de costo, $C(x)$, e ingreso, $R(x)$, para una compañía particular. La x representa el número de artículos producidos y vendidos a los distribuidores. Determina **a)** *la ganancia máxima de la compañía y* **b)** *el número de artículos que deben producirse y venderse para obtener la ganancia máxima.*

93. $C(x) = 2000 + 40x$
$R(x) = 800x - x^2$

94. $C(x) = 5000 + 12x$
$R(x) = 2000x - x^2$

95. $C(x) = 3000 + 74x$
$R(x) = 950x - x^2$

96. $C(x) = 2300 + 39x$
$R(x) = 1047x - x^2$

97. ¿Cuál es la distancia entre los vértices de las gráficas de $f(x) = (x-2)^2 + \frac{5}{2}$ y $g(x) = (x-2)^2 - \frac{3}{2}$?

98. ¿Cuál es la distancia entre los vértices de las gráficas de $f(x) = 2(x-4)^2 - 3$ y $g(x) = -3(x-4)^2 + 2$?

99. ¿Cuál es la distancia entre los vértices de las gráficas de $f(x) = 2(x+4)^2 - 3$ y $g(x) = -(x+1)^2 - 3$?

100. ¿Cuál es la distancia entre los vértices de las gráficas de $f(x) = -\frac{1}{3}(x-3)^2 - 2$ y $g(x) = 2(x+5)^2 - 2$?

101. Escribe la función cuya gráfica tiene la forma de la gráfica de $f(x) = 2x^2$, y tiene un vértice en $(3, -2)$.

102. Escribe la función cuya gráfica tiene la forma de la gráfica de $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$, y tiene un vértice en $\left(\frac{2}{3}, -5\right)$.

Ejercicios conceptuales y de redacción

103. Considera la gráfica de $f(x) = ax^2$. ¿Cuál es la gráfica general de $f(x)$, si **a)** $a > 0$, **b)** $a < 0$?

104. Considera la gráfica de $f(x) = ax^2$. Explica cómo cambia la gráfica de $f(x)$, conforme $|a|$ aumenta y conforme $|a|$ disminuye.

105. ¿La función $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$, tiene un valor máximo o mínimo? Explica.

106. ¿La función $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 7$, tiene un valor máximo o mínimo? Explica.

107. Considera $f(x) = x^2 - 8x + 12$ y $g(x) = -x^2 + 8x - 12$.

a) Sin graficar, ¿puedes explicar cómo se comparan las gráficas de las dos funciones?

b) ¿Las gráficas tendrán las mismas intersecciones con el eje de las x? Explica.

c) ¿Las gráficas tendrán el mismo vértice? Explica.

d) Elabora la gráfica de ambas funciones sobre los mismos ejes.

108. Mediante la observación del coeficiente principal de una función cuadrática y la determinación de las coordenadas del vértice de su gráfica, explica cómo puedes determinar el número de intersecciones con el eje de las x que tiene la parábola.

Problemas de desafío

109. Béisbol Revisa el ejemplo 3 de la página 571. Con la función $h(t) = -16t^2 + 60t + 2$, se determinó que la altura máxima alcanzada por la pelota de béisbol era de 58.25 pies. Se alcanzó esta altura 1.875 segundos después de ser golpeada.

a) Escribe $h(t)$, en la forma $h(t) = a(t-h)^2 + k$, completando el cuadrado.

b) Con la función que obtuviste en el inciso **a)**, determina la altura máxima alcanzada por la pelota de béisbol y el tiempo en que alcanza su altura máxima, después de ser golpeada.

c) ¿Las respuestas que obtuviste en el inciso **b)**, son iguales a las obtenidas en el ejemplo 3?

Actividad grupal

Discute y responde el ejercicio 110, en equipo.

110. **a)** Miembro 1 del equipo: escribe dos funciones cuadráticas $f(x)$ y $g(x)$, de modo que las funciones no intersequen.

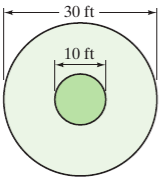
b) Miembro 2 del equipo: escribe dos funciones cuadráticas $f(x)$ y $g(x)$, de modo que ninguna función tenga intersecciones con el eje de las x, y los vértices de las funciones estén en lados opuestos del eje de las x.

c) Miembro 3 del equipo: escribe dos funciones cuadráticas $f(x)$ y $g(x)$, de modo que ambas funciones tengan el mismo vértice, pero una función abra hacia arriba y la otra abra hacia abajo.

d) En equipo, revisen cada respuesta a los incisos **a)-c)** y decidan si cada respuesta es correcta. Corrijan cualquier respuesta que no sea correcta.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **111.** Determina el área sombreada de la figura.



[3.7] **112.** Elabora la gráfica de $y \leq \frac{2}{3}x + 3$.

[4.2] **113.** Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} x - y &= -5 \\ 2x + 2y - z &= 0 \\ x + y + z &= 3 \end{aligned}$$

[4.5] **114.** Evalúa el determinante.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$$

[6.1] **115.** Divide $(x - 3) \div \dfrac{x^2 + 3x - 18}{x}$.

8.6 Desigualdades cuadráticas, polinomiales y racionales en una variable

1. **Resolución de desigualdades cuadráticas**
2. **Resolución de otras desigualdades polinomiales**
3. **Resolución de desigualdades racionales**

En la sección 2.5, se estudiaron las desigualdades lineales en una variable. Ahora se estudian las desigualdades cuadráticas en una variable.

Desigualdad cuadrática

Una **desigualdad cuadrática***, es una desigualdad que puede escribirse en una de las siguientes formas

$$ax^2 + bx + c < 0 \qquad ax^2 + bx + c > 0$$
$$ax^2 + bx + c \leq 0 \qquad ax^2 + bx + c \geq 0$$

donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$.

Ejemplos de desigualdades cuadráticas

$$x^2 + x - 12 > 0, \qquad 2x^2 - 9x - 5 \leq 0$$

Solución a una desigualdad cuadrática

La **solución a una desigualdad cuadrática**, es el conjunto de todos los valores que convierten a la desigualdad en un enunciado verdadero.

Por ejemplo, sustituye 5 por x en $x^2 + x - 12 > 0$.

$$\begin{aligned} x^2 + x - 12 &> 0 \\ 5^2 + 5 - 12 &\stackrel{?}{>} 0 \\ 18 &> 0 \quad \text{Verdadero} \end{aligned}$$

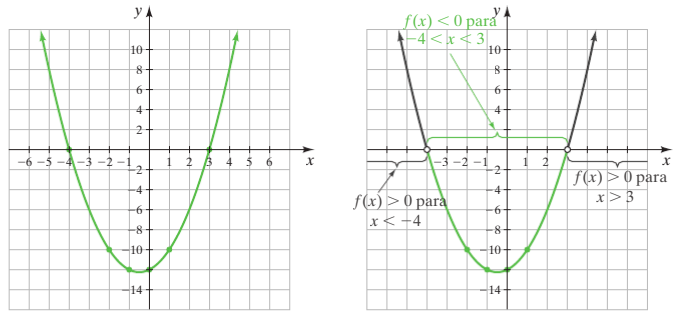
La desigualdad es verdadera cuando x es 5, de modo que 5 es una solución, o satisface, la desigualdad. Sin embargo, 5 no es la única solución. Existen otros valores que son soluciones a la desigualdad.

1 Resolución de desigualdades cuadráticas

El estudio de las desigualdades cuadráticas comenzará con el estudio de las gráficas de las funciones cuadráticas. Por ejemplo, considera nuevamente la desigualdad $x^2 + x - 12 > 0$. La **Figura 8.21a** de la siguiente página, muestra la gráfica de la función $f(x) = x^2 + x - 12$.

*Una desigualdad de la forma $ax^2 + bx + c \neq 0$ también es una desigualdad cuadrática que no se estudiará en este libro.

Observa que, cuando $x < -4$ o cuando $x > 3$, $f(x) > 0$, lo que se muestra en rojo en la **Figura 8.21b**. Por tanto, cuando $x < -4$ o cuando $x > 3$, $x^2 + x - 12 > 0$.



(a) (b)

FIGURA 8.21

Observa también que, cuando $-4 < x < 3$, $f(x) < 0$, lo que se muestra en verde en la **Figura 8.21b**. Por tanto, cuando, $-4 < x < 3$, $x^2 + x - 12 < 0$.

Aunque el método recién descrito para resolver desigualdades funcionará para cualquier desigualdad cuadrática, para muchas desigualdades puede ser inconveniente o puede tomar demasiado tiempo para graficar la función. En el siguiente ejemplo, se destacará un procedimiento más eficiente para resolver esta misma desigualdad cuadrática.

EJEMPLO 1 Resuelve la desigualdad cuadrática $x^2 + x - 12 > 0$. Proporciona la solución **a)** sobre una recta numérica, **b)** en notación de intervalo y **c)** en notación constructiva de conjuntos.

Solución Primero, iguala la desigualdad a 0 y resuelve la ecuación.

$$x^2 + x - 12 = 0$$
$$(x + 4)(x - 3) = 0$$
$$x + 4 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0$$
$$x = -4 \qquad\qquad x = 3$$

Comprende el Álgebra

Mientras resuelvas desigualdades cuadráticas, usa lo siguiente cuando marques los valores límite sobre la recta numérica:

- Si el símbolo de desigualdad es $<$ o $>$, usa un círculo abierto, ○.
- Si el símbolo de desigualdad es $\leq$ o $\geq$, usa un círculo cerrado, ●.

Los valores $x = -4$ y $x = 3$ se llaman **valores límite** pues estarán sobre los límites de los intervalos que constituyen la solución a la desigualdad. Los valores límite se usan para dividir una recta numérica en intervalos. Siempre que el símbolo de la desigualdad original sea $<$ o $>$, los valores límite se indicarán sobre la recta numérica usando círculos abiertos, ○. Esto indica que los valores límite no son parte de la solución. Siempre que el símbolo de la desigualdad original sea $\leq$ o $\geq$, los valores límite se indicarán sobre la recta numérica usando círculos cerrados, ●. Esto indica que los valores límite son parte de la solución.

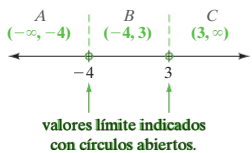


FIGURA 8.22

En la **Figura 8.22**, se etiquetaron los intervalos A, B y C. A continuación, se selecciona un valor de prueba en *cada* intervalo. Luego, se sustituye cada uno de estos valores, uno a la vez, en la *desigualdad* $x^2 + x - 12 > 0$. Si el valor de prueba resulta en un enunciado verdadero, todos los valores en dicho intervalo también satisfarán la desigualdad. Si el valor de prueba resulta en un enunciado falso, ningún número, en dicho intervalo, satisfará la desigualdad.

En este ejemplo, se usarán los valores de prueba de -5 en el intervalo A, 0 en el intervalo B y 4 en el intervalo C (observa la **Figura 8.23**).

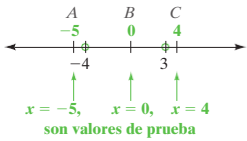


FIGURA 8.23

Intervalo *A*	Intervalo *B*	Intervalo *C*
$(-\infty, -4)$	$(-4, 3)$	$(3, \infty)$
Valor de prueba, -5	Valor de prueba, 0	Valor de prueba, 4
¿Es $x^2 + x - 12 > 0$?	¿Es $x^2 + x - 12 > 0$?	¿Es $x^2 + x - 12 > 0$?
$(-5)^2 + (-5) - 12 \stackrel{?}{>} 0$	$0^2 + 0 - 12 \stackrel{?}{>} 0$	$4^2 + 4 - 12 \stackrel{?}{>} 0$
$8 > 0$	$-12 > 0$	$8 > 0$
Verdadero	Falso	Verdadero

Dado que los valores de prueba en los intervalos A y C satisfacen la desigualdad, la solución es todos los números reales en los intervalos A o C. Como el símbolo de desigualdad es $>$, los valores -4 y 3 no están incluidos en la solución, ya que hacen a la desigualdad igual a 0.

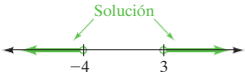


FIGURA 8.24

A continuación se presentan las respuestas a los incisos **a)**, **b)** y **c)**:

a) La solución se ilustra sobre una recta numérica en la **Figura 8.24**.

b) La solución, en notación de intervalos, es $(-\infty, -4) \cup (3, \infty)$.

c) La solución, en notación constructiva de conjuntos, es $\{x | x < -4 \text{ o } x > 3\}$.

Observa que, la solución, en cualquier forma, es consistente con la porción roja de la gráfica en la **Figura 8.21b**.

Ahora resuelve el ejercicio 15

Para resolver desigualdades cuadráticas, polinomiales y racionales

1. Escribe la desigualdad como una ecuación y resuelve la ecuación. Las soluciones son los valores límite.
2. Construye una recta numérica y marca cada valor límite del paso 1 de la siguiente manera:
   - Si el símbolo de desigualdad es $<$ o $>$, usa un círculo abierto, ○.
   - Si el símbolo de desigualdad es $\leq$ o $\geq$, usa un círculo cerrado, ●.
3. Si resuelves una desigualdad racional, determina los valores que hacen cualquier denominador 0. Estos valores también son valores límite. Indica estos valores límite en tu recta numérica con un círculo abierto, ○.
4. Selecciona un valor de prueba en cada intervalo y determina si satisface la desigualdad.
5. La solución es el conjunto de puntos que satisfacen la desigualdad.
6. Escribe la solución en la forma indicada.

EJEMPLO 2 Resuelve la desigualdad $x^2 - 4x \geq -4$. Proporciona la solución **a)** en una recta numérica, **b)** en notación de intervalo y **c)** en notación constructiva de conjuntos.

Solución Escribe la desigualdad como una ecuación, luego resuelve la ecuación.

$$x^2 - 4x = -4$$
$$x^2 - 4x + 4 = 0$$
$$(x - 2)(x - 2) = 0$$
$$x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0$$
$$x = 2 \qquad\qquad x = 2$$

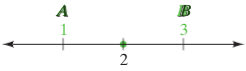


FIGURA 8.25

Dado que ambas soluciones son la misma, sólo hay un valor límite, 2, que se indica en la **Figura 8.25**, con un círculo cerrado. Ambos valores de prueba, 1 y 3, resultan en enunciados verdaderos.

Intervalo *A*	Intervalo *B*
$(-\infty, 2]$	$[2, \infty)$
Valor de prueba, 1	Valor de prueba, 3
$x^2 - 4x \geq -4$	$x^2 - 4x \geq -4$
$1^2 - 4(1) \stackrel{?}{\geq} -4$	$3^2 - 4(3) \stackrel{?}{\geq} -4$
$1 - 4 \stackrel{?}{\geq} -4$	$9 - 12 \stackrel{?}{\geq} -4$
$-3 \geq -4$ Verdadero	$-3 \geq -4$ Verdadero

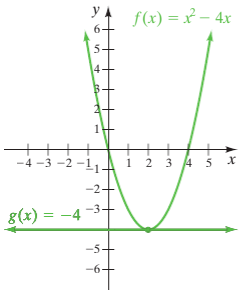
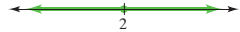


FIGURA 8.26

El conjunto solución incluye ambos intervalos y el valor límite, 2. El conjunto solución es el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$. A continuación, se presentan las respuestas a los incisos **a)**, **b)** y **c)**:

a) 

b) $(-\infty, \infty)$ **c)** $\{x \mid -\infty < x < \infty\}$

Ahora resuelve el ejercicio 19

Puedes comprobar la solución al ejemplo 2 mediante una gráfica. Sea $f(x) = x^2 - 4x$ y y $g(x) = -4$. Para que $x^2 - 4x \geq -4$ sea verdadera, se quiere $f(x) \geq g(x)$. Las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ se proporcionan en la **Figura 8.26**.

Observa que, $f(x) = g(x)$ en $x = 2$ y $f(x) > g(x)$ para todos los otros valores de x. Por tanto, $f(x) \geq g(x)$ para todos los valores de x, y el conjunto solución es el conjunto de los números reales.

En el ejemplo 2, si reescribes la desigualdad $x^2 - 4x \geq -4$ como $x^2 - 4x + 4 \geq 0$ y luego como $(x - 2)^2 \geq 0$, puedes ver que la solución debe ser el conjunto de los números reales, ya que $(x-2)^2$ debe ser mayor que o igual que 0, para cualquier número real x.

EJEMPLO 3 Resuelve la desigualdad $x^2 - 2x - 4 \leq 0$. Proporciona la solución en notación de intervalo.

Solución Primero, debes resolver la ecuación $x^2 - 2x - 4 = 0$. Puesto que esta ecuación no es factorizable, usa la fórmula cuadrática para resolverla. Aquí, $a = 1$, $b = -2$, y $c = -4$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

Los valores límite son $-\sqrt{5}$ y $1 + \sqrt{5}$. El valor de $-\sqrt{5}$ es de aproximadamente -1.24 y el valor de $1 + \sqrt{5}$ es de aproximadamente 3.24. Los valores límite se indican sobre la recta numérica con círculos cerrados y se seleccionarán valores de prueba de -2, 0 y 4 (observa la **Figura 8.27**).

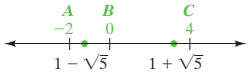


FIGURA 8.27

Intervalo *A*	Intervalo *B*	Intervalo *C*
$(-\infty, 1 - \sqrt{5}]$	$[1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}]$	$[1 + \sqrt{5}, \infty)$
Valor de prueba, -2	Valor de prueba, 0	Valor de prueba, 4
$x^2 - 2x - 4 \leq 0$	$x^2 - 2x - 4 \leq 0$	$x^2 - 2x - 4 \leq 0$
$(-2)^2 - 2(-2) - 4 \stackrel{?}{\leq} 0$	$0^2 - 2(0) - 4 \stackrel{?}{\leq} 0$	$4^2 - 2(4) - 4 \stackrel{?}{\leq} 0$
$4 + 4 - 4 \stackrel{?}{\leq} 0$	$0 - 0 - 4 \stackrel{?}{\leq} 0$	$16 - 8 - 4 \stackrel{?}{\leq} 0$
$4 \leq 0$	$-4 \leq 0$	$4 \leq 0$
Falso	Verdadero	Falso

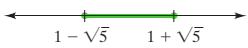


FIGURA 8.28

Los valores límite son parte de la solución, porque el símbolo de desigualdad es $\leq$ y los valores límite hacen que la igualdad sea 0. Por tanto, la solución en notación de intervalo es $[1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}]$. La solución se ilustra sobre la recta numérica en la **Figura 8.28.**

Ahora resuelve el ejercicio 17

SUGERENCIA ÚTIL

Si $ax^2 + bx + c = 0$, con $a > 0$, tiene dos soluciones reales distintas, entonces:

Forma de la desigualdad	La solución es	Solución en la recta numérica
$ax^2 + bx + c \geq 0$	Intervalos finales	
$ax^2 + bx + c \leq 0$	Intervalo central	

El ejemplo 1, es una desigualdad de la forma $ax^2 + bx + c > 0$, y, el ejemplo 3, es una desigualdad de la forma $ax^2 + bx + c \leq 0$. El ejemplo 2, no tiene dos soluciones reales distintas, así que esta Sugerencia útil no aplica.

2 Resolución de otras desigualdades polinomiales

El mismo procedimiento usado para resolver desigualdades cuadráticas, también se puede usar para resolver **desigualdades polinomiales** de mayor grado, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 4 Resuelve la desigualdad polinomial $(2x + 3)(x - 1)(x - 3) < 0$. Proporciona la solución **a)** en una recta numérica, **b)** en notación de intervalo y **c)** en notación constructiva de conjuntos.

Solución Determina primero los valores límite, al resolver la ecuación $(2x + 3)(x - 1)(x - 3) = 0$. Usa la propiedad de factor cero e iguala a 0 cada factor de la ecuación.

$$2x + 3 = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0$$

$$x = -\frac{3}{2} \qquad x = 1 \qquad x = 3$$

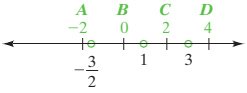


FIGURA 8.29

Los valores límite $-\frac{3}{2}$, 1 y 3, se indican con círculos abiertos sobre la recta numérica de la **Figura 8.29**.

Observa que, los valores límite, dividen la recta numérica en cuatro intervalos que se etiquetaron A, B, C y D. Los valores de prueba que se usarán, son -2, 0, 2 y 4. El resultado se muestra en la siguiente tabla.

Intervalo	Valor de prueba	$(2x + 3)(x - 1)(x - 3)$	< 0
A: $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$	-2	-15	Verdadero
B: $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$	0	9	**Falso**
C: $(1, 3)$	2	-7	Verdadero
D: $(3, \infty)$	4	33	**Falso**

Dado que el símbolo de la desigualdad original es $<$, los valores límite no son parte de la solución.

a) La solución, los intervalos A y C, se ilustra sobre la recta numérica de la **Figura 8.30**.

b) La solución, en notación de intervalo, es $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (1, 3)$.

c) La solución, en notación constructiva de conjuntos, es $\left\{ x \middle| x < -\frac{3}{2} \text{ o } 1 < x < 3 \right\}$.

Ahora resuelve el ejercicio 27

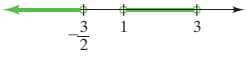


FIGURA 8.30

EJEMPLO 5 Dada $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 6x$, determina todos los valores de x, para los cuales, $f(x) \geq 0$. Ilustra la solución sobre una recta numérica y proporciona la solución en notación de intervalo.

Solución Es necesario resolver la desigualdad

$$\overbrace{3x^3 - 3x^2 - 6x}^{f(x)} \geq 0$$

Comienza por resolver la ecuación $3x^3 - 3x^2 - 6x = 0$:

$$3x(x^2 - x - 2) = 0$$
$$3x(x - 2)(x + 1) = 0$$
$$3x = 0 \quad \text{o} \quad x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0$$
$$x = 0 \qquad x = 2 \qquad x = -1$$

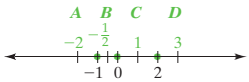


FIGURA 8.31

Los valores límite, −1, 0 y 2, se indican con círculos cerrados y dividen la recta numérica en cuatro intervalos (observa la **Figura 8.31**). Los valores de prueba que se usarán son $-2, -\frac{1}{2}$, 1, y 3.

Intervalo	Valor de prueba	$3x^3 - 3x^2 - 6x$	≥ 0
A: $(-\infty, -1]$	-2	-24	Falso
B: $[-1, 0]$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{15}{8}$	Verdadero
C: $[0, 2]$	1	-6	Falso
D: $[2, \infty)$	3	36	Verdadero

Dado que la desigualdad original es $\geq$, los valores límite son parte de la solución. La solución, los intervalos B y D, se ilustra sobre la recta numérica de la **Figura 8.32a**. La solución, en notación de intervalo, es $[-1, 0] \cup [2, \infty)$. La **Figura 8.32b**, muestra la gráfica de $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 6x$. Observa que, $f(x) \geq 0$ para $-1 \leq x \leq 0$, y para $x \geq 2$, lo cual se muestra en verde y concuerda con la solución.

Comprende el Álgebra

Considera la desigualdad

$$-3x^3 + 3x^2 + 6x \leq 0.$$

Por lo general, es más sencillo resolver una desigualdad polinomial con un coeficiente principal positivo. Puedes cambiar el coeficiente principal a un número positivo, al multiplicar ambos lados de la desigualdad por −1. Cuando haces esto, debes cambiar la *dirección* del símbolo de desigualdad.

$$-3x^3 + 3x^2 + 6x \leq 0$$
$$-1(-3x^3 + 3x^2 + 6x) \geq -1(0)$$
$$3x^3 - 3x^2 - 6x \geq 0$$

Esta desigualdad se resolvió en el ejemplo 5.

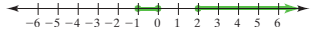


FIGURA 8.32(a)

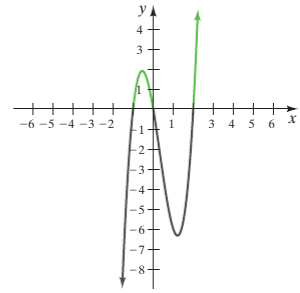


FIGURA 8.32(b)

Ahora resuelve el ejercicio 41

3 Resolución de desigualdades racionales

En los ejemplos 6 y 7, se resuelven **desigualdades racionales**, que son desigualdades que contienen al menos una expresión racional.

EJEMPLO 6 Resuelve la desigualdad $\frac{x-1}{x+3} \geq 2$. Elabora la gráfica de la solución sobre una recta numérica y escribe la solución en notación de intervalo.

Solución Comienza por resolver la ecuación $\frac{x-1}{x+3} = 2$.

$$\frac{x-1}{x+3} = 2$$
$$(x+3)\cdot\frac{x-1}{x+3} = 2(x+3) \quad \text{Multiplica ambos lados por } x+3.$$
$$x - 1 = 2x + 6$$
$$-1 = x + 6$$
$$-7 = x$$

En consecuencia, −7 es un valor límite y se indica con un círculo cerrado sobre la recta numérica (observa la **Figura 8.33**).

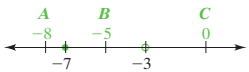


FIGURA 8.33

Cuando resuelvas desigualdades racionales, también necesitarás determinar el valor o valores que hacen 0 a cualquier denominador. Iguala el denominador a 0 y resuelve:

$$x + 3 = 0$$

$$x = -3$$

Por tanto, -3 es un valor límite. Sin embargo, -3 no puede ser una solución, de modo que se le indica sobre la recta numérica con un círculo abierto (observa la **Figura 8.33**).

Usa la solución a la ecuación, -7, y el valor que hace 0 al denominador, -3, como los valores límite, como se muestra en la **Figura 8.33**. Se usarán -8, -5 y 0 como valores de prueba.

Intervalo *A*	Intervalo *B*	Intervalo *C*
$(-\infty, -7]$	$[-7, -3)$	$(-3, \infty)$
Valor de prueba, -8	Valor de prueba, -5	Valor de prueba, 0
$\frac{x-1}{x+3} \geq 2$	$\frac{x-1}{x+3} \geq 2$	$\frac{x-1}{x+3} \geq 2$
$\frac{-8-1}{-8+3} \stackrel{?}{\geq} 2$	$\frac{-5-1}{-5+3} \stackrel{?}{\geq} 2$	$\frac{0-1}{0+3} \stackrel{?}{\geq} 2$
$\frac{9}{5} \geq 2$ Falso	$3 \geq 2$ Verdadero	$-\frac{1}{3} \geq 2$ Falso

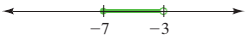


FIGURA 8.34

La solución, se ilustra sobre la recta numérica de la **Figura 8.34**, y la solución escrita en notación de intervalo, es $[-7, -3)$.

Ahora resuelve el ejercicio 83

En el ejemplo 6, se resolvió $\frac{x-1}{x+3} \geq 2$. Supón que elaboras la gráfica de $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$.

La **Figura 8.35**, muestra la gráfica de $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$ y la gráfica de $y = 2$. Observa que, $f(x) \geq 2$ cuando $-7 \leq x < -3$.

Comprende el Álgebra

Cuando resuelvas una desigualdad racional, los valores en los cuales cualquier denominador es igual a 0, son valores límite. Sin embargo, dado que un valor que hace 0 al denominador nunca puede ser una solución, *siempre* se indicarán estos valores con un círculo abierto. Esto muestra que no se incluyen en el conjunto solución.

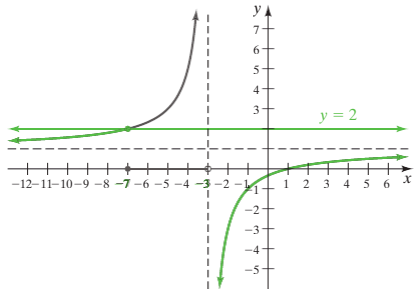


FIGURA 8.35

EJEMPLO 7 Resuelve la desigualdad $\frac{(x-3)(x+4)}{x+1} \geq 0$. Elabora la gráfica de la solución en una recta numérica y proporciona la solución en notación de intervalo.

Solución Las soluciones a la ecuación $\frac{(x-3)(x+4)}{x+1} = 0$, son 3 y -4. Estos valores límite se indican sobre la recta numérica con círculos cerrados (observa la **Figura 8.36**) pues el símbolo de desigualdad es $\geq$. La desigualdad no está definida para -1. Este valor límite se indica sobre la recta numérica con un círculo abierto (observa la **Figura 8.36**), pues -1 no puede ser una solución a la desigualdad.

En consecuencia, se tienen los valores límite de -4, -1 y 3, como se muestra en la **Figura 8.36**. Se usarán los valores de prueba de -5, -2, 0 y 4. Al verificar estos valores, se mostrará que el intervalo B, $-4 \leq x < -1$, y el intervalo D, $x \geq 3$, satisfacen ambos la

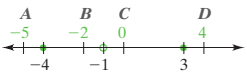


FIGURA 8.36

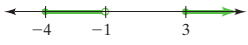


FIGURA 8.37

desigualdad. La solución está indicada sobre la recta numérica de la **Figura 8.37**. Escrita en notación de intervalo, la solución es $[-4,-1) \cup [3, \infty)$.

Ahora resuelve el ejercicio 65

8.6 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

no se incluyen límite cerrado se incluyen solución abierto vértices divisor

1. La _____ a una desigualdad, es el conjunto de todos los valores que convierten la desigualdad en un enunciado verdadero.
2. Considera la desigualdad $x^2 - 3x - 4 \leq 0$. Las soluciones a la ecuación $x^2 - 3x - 4 = 0$, se llaman valores _____.
3. Al resolver la desigualdad $(x - 5)(x + 3) \geq 0$, los valores límite 5 y -3 _____ en el conjunto solución.
4. Al resolver la desigualdad $(x - 2)(x + 4) < 0$, los valores límite 2 y -4 _____ en el conjunto solución.
5. Al resolver la desigualdad $\frac{1}{x - 3} \leq 0$, el valor límite de 3, se indica sobre la recta numérica con un círculo _____.
6. Al resolver la desigualdad $\frac{x + 1}{x - 3} \leq 0$, el valor de límite de -1 se indica sobre la recta numérica con un círculo _____.

Practica tus habilidades

Resuelve cada desigualdad cuadrática y grafica la solución sobre una recta numérica.

7. $x^2 - 2x - 3 < 0$
8. $x^2 + 7x + 6 \leq 0$
9. $x^2 - 2x - 3 \geq 0$
10. $x^2 + 7x + 6 > 0$
11. $x^2 - 8x \geq 0$
12. $r^2 - 5r < 0$
13. $x^2 - 16 < 0$
14. $x^2 - 25 \geq 0$
15. $2x^2 + 5x - 3 > 0$
16. $3n^2 - 7n \leq 6$
17. $2x^2 - 12x + 9 \leq 0$
18. $9x^2 - 30x + 12 > 0$
19. $n^2 - 6n + 9 \geq 0$
20. $x^2 + 10x + 25 > 0$

Resuelve cada desigualdad polinomial y proporciona la solución en notación de intervalo.

21. $(a - 3)(a + 2)(a + 4) < 0$
22. $(r - 1)(r + 2)(r + 7) < 0$
23. $(x - 1)(x + 2)(x - 3) \leq 0$
24. $(x - 2)(x + 2)(x + 5) \leq 0$
25. $(4x - 1)(x + 3)(x - 2) > 0$
26. $(3x + 5)(x - 3)(x + 1) > 0$
27. $(3a - 1)(2a + 1)(a - 3) \geq 0$
28. $(4b + 3)(3b - 2)(b + 2) \geq 0$
29. $(x + 3)^2(4x - 7) \leq 0$
30. $(x - 1)^2(3x + 5) > 0$
31. $x^3 - 6x^2 + 9x < 0$
32. $x^3 + 10x^2 + 25x > 0$

Para cada función proporcionada, determina todos los valores de x, para los cuales, f(x) satisface las condiciones indicadas. Elabora la gráfica de la solución sobre una recta numérica.

33. $f(x) = x^2 + 4x, f(x) > 0$
34. $f(x) = x^2 - 7x, f(x) > 0$
35. $f(x) = x^2 - 2x, f(x) \geq 0$
36. $f(x) = x^2 + 8x, f(x) \leq 0$

37. $f(x) = x^2 - 14x + 48, f(x) < 0$

38. $f(x) = x^2 - 2x - 15, f(x) < 0$

39. $f(x) = 2x^2 + 9x - 1, f(x) \leq 5$

40. $f(x) = x^2 + 5x - 3, f(x) \leq 4$

41. $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 35x, f(x) \geq 0$

42. $f(x) = x^3 - 9x, f(x) \leq 0$

Resuelve cada desigualdad racional y proporciona la solución en notación constructiva de conjuntos.

43. $\dfrac{x+1}{x-3} \leq 0$

44. $\dfrac{x-1}{x+5} \leq 0$

45. $\dfrac{x+3}{x-2} \geq 0$

46. $\dfrac{x+2}{x-4} \geq 0$

47. $\dfrac{x-1}{x+5} < 0$

48. $\dfrac{a-9}{a+5} < 0$

49. $\dfrac{c-10}{c-4} > 0$

50. $\dfrac{x-4}{x+6} > 0$

51. $\dfrac{b+7}{b+1} \leq 0$

52. $\dfrac{x+4}{x-4} \leq 0$

53. $\dfrac{j}{j-5} \leq 0$

54. $\dfrac{k+2}{k} \leq 0$

55. $\dfrac{m-3}{m} \geq 0$

56. $\dfrac{k+3}{k} \geq 0$

57. $\dfrac{5x-7}{3x+5} > 0$

58. $\dfrac{2y+5}{3y-7} \geq 0$

59. $\dfrac{5w-3}{4w+1} \leq 0$

60. $\dfrac{2x+7}{11x-1} < 0$

Resuelve cada desigualdad racional y proporciona la solución en notación de intervalo.

61. $\dfrac{(x-2)(x-4)}{x+1} < 0$

62. $\dfrac{(b-2)(b+4)}{b} < 0$

63. $\dfrac{(x-2)(x+3)}{x-5} > 0$

64. $\dfrac{x+9}{(x-2)(x+4)} > 0$

65. $\dfrac{(a-1)(a-7)}{a+2} \geq 0$

66. $\dfrac{z-5}{(z+6)(z-9)} \geq 0$

67. $\dfrac{c}{(c-3)(c+8)} \leq 0$

68. $\dfrac{(x+1)(x-6)}{x+3} \leq 0$

69. $\dfrac{(x-2)(x+3)}{x-5} \geq 0$

70. $\dfrac{(x-3)(2x+5)}{x-4} \geq 0$

71. $\dfrac{r^2+3r-4}{r+2} \leq 0$

72. $\dfrac{s^2-5s+4}{s+2} \leq 0$

Resuelve cada desigualdad racional y elabora la gráfica de la solución sobre una recta numérica.

73. $\dfrac{3}{x-1} > -1$

74. $\dfrac{3}{x+1} \geq -1$

75. $\dfrac{2}{x-4} \geq 1$

76. $\dfrac{2}{x-4} > 1$

77. $\dfrac{5}{x+2} \leq 1$

78. $\dfrac{5}{x+2} < 1$

79. $\dfrac{2p-5}{p-4} \leq 1$

80. $\dfrac{3q-7}{q+1} \leq 1$

81. $\dfrac{p+7}{p+3} \geq 1$

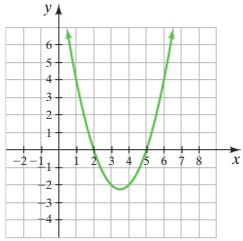
82. $\dfrac{x+6}{x+2} > 1$

83. $\dfrac{w}{3w-2} > -2$

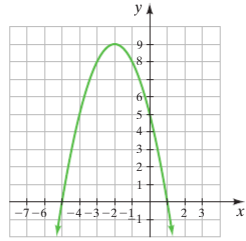
84. $\dfrac{2z+11}{3z+1} \leq 3$

Resolución de problemas

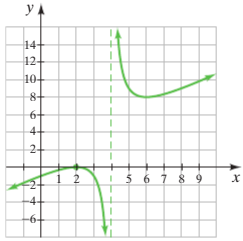
85. Se proporciona la gráfica de $f(x) = x^2 - 7x + 10$. Determina la solución para **a)** $f(x) > 0$ y **b)** $f(x) < 0$.



86. Se proporciona la gráfica de $f(x) = -x^2 - 4x + 5$. Determina la solución de **a)** $f(x) \geq 0$ y **b)** $f(x) \leq 0$.



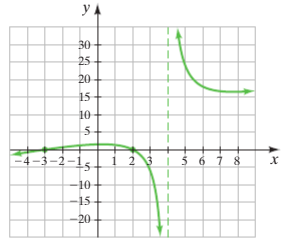
87. Se muestra la gráfica de $y = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 4}$. Determina la solución a las siguientes desigualdades.



a) $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 4} > 0$

b) $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 4} < 0$

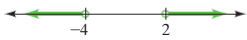
88. Se muestra la gráfica de $y = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 4}$. Determina la solución a las siguientes desigualdades.



a) $\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 4} \geq 0$

b) $\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 4} < 0$

89. Escribe una desigualdad cuadrática, cuya solución sea



90. Escribe una desigualdad cuadrática, cuya solución sea



91. Escribe una desigualdad racional, cuya solución sea



92. Escribe una desigualdad racional, cuya solución sea



Ejercicios conceptuales y de redacción

93. ¿Cuál es la solución a la desigualdad $(x + 3)^2(x - 1)^2 \geq 0$? Explica tu respuesta.

94. ¿Cuál es la solución a la desigualdad $x^2(x - 3)^2(x + 4)^2 < 0$? Explica tu respuesta.

95. ¿Cuál es la solución a la desigualdad $\dfrac{x^2}{(x + 2)^2} \geq 0$? Explica tu respuesta.

96. ¿Cuál es la solución a la desigualdad $\dfrac{x^2}{(x - 3)^2} > 0$? Explica tu respuesta.

97. Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a > 0$ y el discriminante es negativo, ¿cuál es la solución a $f(x) < 0$? Explica.

98. Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a < 0$ y el discriminante es negativo, ¿cuál es la solución a $f(x) > 0$? Explica.

Problemas de desafío

Resuelve cada desigualdad y grafica la solución sobre la recta numérica.

99. $(x+1)(x-3)(x+5)(x+8) \geq 0$

100. $\dfrac{(x-4)(x+2)}{x(x+9)} \geq 0$

Escribe una desigualdad cuadrática con las siguientes soluciones. Son posibles varias respuestas. Explica cómo determinaste tus respuestas.

101. $(-\infty, 0) \cup (3, \infty)$

102. $\{2\}$

103. $\varnothing$

104. $\mathbb{R}$

En los ejercicios 105 y 106, resuelve cada desigualdad y proporciona la solución en notación de intervalo. Usa las técnicas, de la sección 8.5, para ayudarte a determinar la solución.

105. $x^4 - 10x^2 + 9 > 0$

106. $x^4 - 26x^2 + 25 \leq 0$

En los ejercicios 107 y 108, resuelve cada desigualdad usando factorización por agrupamiento. Proporciona la solución en notación de intervalo.

107. $x^3 + x^2 - 4x - 4 \geq 0$

108. $2x^3 + x^2 - 32x - 16 < 0$

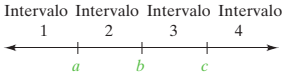
Actividad grupal

Discute y responde los ejercicios 109 y 110, en equipo.

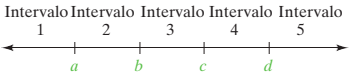
109. Considera la siguiente recta numérica, donde a, b y c son distintos números reales.

a) ¿En cuáles intervalos los números reales satisfarán la desigualdad $(x-a)(x-b)(x-c) > 0$? Explica.

b) ¿En cuáles intervalos los números reales satisfarán la desigualdad $(x-a)(x-b)(x-c) < 0$? Explica.



110. Considera la siguiente recta numérica, donde a, b, c y d son distintos números reales.



a) ¿En cuáles intervalos los números reales satisfarán la desigualdad $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) > 0$? Explica.

b) ¿En cuáles intervalos los números reales satisfarán la desigualdad $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) < 0$? Explica.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.4] **111. Ácido** ¿Cuántos mililitros, de una solución ácida al 100%, deberá agregar el profesor Silva, a 10 mililitros de una solución ácida al 20%, para elaborar una solución ácida al 50%?



[3.2] **112.** Si $h(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x + 9}$, determina $h(-3)$.

[5.1] **113.** Suma $(6r + 5s - t) + (-3r - 2s - 8t)$.

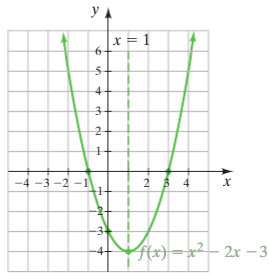
[6.3] **114.** Simplifica $\dfrac{1 + \dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{2x+1}{x-3}}$.

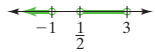
[7.7] **115.** Multiplica $(3 - 4i)(6 + 5i)$.

Capítulo 8 Resumen

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 8.1	
Propiedad de la raíz cuadrada Si $x^2 = a$, donde a es un número real, entonces $x = \pm\sqrt{a}$.	Resuelve $x^2 - 36 = 0$. $x^2 - 36 = 0$ $x^2 = 36$ $x = \pm\sqrt{36} = \pm 6$ Las soluciones son -6 y 6.
Un **trinomio cuadrado perfecto**, es un trinomio que puede expresarse como el cuadrado de un binomio.	$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$
Para resolver una ecuación cuadrática completando el cuadrado 1. Usa la propiedad de multiplicación (o división) de la igualdad, si es necesario, para hacer 1 el coeficiente principal. 2. Reescribe la ecuación con la constante por sí sola en el lado derecho de la ecuación. 3. Toma un medio del coeficiente numérico del término de primer grado, elévalo al cuadrado y suma esta cantidad a ambos lados de la ecuación. 4. Factoriza el trinomio como el cuadrado de un binomio. 5. Usa la propiedad de la raíz cuadrada, para sacar la raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación. 6. Resuelve en términos de la variable.	Resuelve $x^2 + 4x - 12 = 0$, completando el cuadrado. $x^2 + 4x - 12 = 0$ $x^2 + 4x = 12$ $x^2 + 4x + 4 = 12 + 4$ $(x + 2)^2 = 16$ $x + 2 = \pm\sqrt{16}$ $x + 2 = \pm 4$ $x = -2 \pm 4$ $x = -2 - 4 = -6$ o $x = -2 + 4 = 2$ Las soluciones son -6 y 2.
Sección 8.2	
La **forma general de una ecuación cuadrática**, es $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$.	$x^2 - 5x + 17 = 0$
Para resolver una ecuación cuadrática mediante la fórmula cuadrática 1. Escribe la ecuación cuadrática en forma general, $ax^2 + bx + c = 0$ y determina los valores numéricos para a, b y c. 2. Sustituye los valores para a, b y c en la fórmula cuadrática y, luego, evalúa la fórmula para obtener la solución. **Fórmula cuadrática** $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Resuelve $x^2 - 2x - 15 = 0$, mediante la fórmula cuadrática. $a = 1, \quad b = -2, \quad c = -15$ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $= \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-15)}}{2(1)}$ $= \dfrac{2 \pm \sqrt{64}}{2}$ $= \dfrac{2 \pm 8}{2}$ $x = \dfrac{2 + 8}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$ o $x = \dfrac{2 - 8}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3$ Las soluciones son 5 y -3.
Soluciones de una ecuación cuadrática Para una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, el **discriminante** es $b^2 - 4ac$. Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación cuadrática tiene dos soluciones con números reales distintas.	Determina el número de soluciones de $3x^2 - x + 7 = 0$. $a = 3, b = -1, c = 7$ $b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(3)(7)$ $= 1 - 84$ $= -83$

(Continúa)

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 8.3 (Continuación)	
Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación cuadrática tiene una única solución con número real. Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación cuadrática no tiene solución con número real.	Puesto que el discriminante es negativo, la ecuación no tiene solución con número real.
Sección 8.4	
Una ecuación que puede escribirse en la forma $au^2 + bu + c = 0$, para $a \neq 0$, donde u es una expresión algebraica, se dice que tiene **forma cuadrática**. **Para resolver una ecuación con forma cuadrática** **1.** Haz una sustitución que resulte en una ecuación de la forma $au^2 + bu + c = 0$, $a \neq 0$, donde u es una función de la variable original. **2.** Resuelve la ecuación $au^2 + bu + c = 0$ para u. **3.** Sustituye u con la función de la variable original del paso 1. **4.** Resuelve la ecuación resultante para la variable original. **5.** Si, durante el paso 4, elevas ambos lados de la ecuación a una potencia *par*, haz una verificación para evitar soluciones extrañas mediante la sustitución de las soluciones aparentes en la ecuación *original*.	Resuelve $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$. Sea $u = x^2$. Entonces, $u^2 - 17u + 16 = 0$ $(u - 16)(u - 1) = 0$ $u - 16 = 0$ o $u - 1 = 0$ $u = 16$ $\quad$ $u = 1$ $x^2 = 16$ $\quad$ $x^2 = 1$ $x = \pm 4$ $\quad$ $x = \pm 1$ Una verificación mostrará que las soluciones son 4, −4, 1 y −1.
Sección 8.5	
Funciones cuadráticas Las funciones de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, se llaman **funciones cuadráticas** y tienen gráficas que son parábolas. **a)** La parábola abre hacia arriba cuando $a > 0$, y hacia abajo, cuando $a < 0$. **b)** El eje de simetría es la recta $x = -\frac{b}{2a}$. **c)** El vértice es el punto $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ o $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$. **d)** La intersección con el eje de las y, es el punto $(0, c)$. **e)** Para obtener la(s) intersección(es) con el eje de las x (si las hay), resuelve la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ en términos de x.	La gráfica de la función cuadrática $f(x) = x^2 - 2x - 3$, es una parábola. **a)** La parábola abre hacia arriba porque $a > 0$. **b)** El eje de simetría es $x = -\frac{-2}{2(1)} = 1$. **c)** El vértice es $(1, -4)$. **d)** La intersección con el eje de las y, es $(0, -3)$. **e)** $x^2 - 2x - 3 = 0$ $(x - 3)(x + 1) = 0$ $x - 3 = 0$ o $x + 1 = 0$ $x = 3$ $\quad$ $x = -1$ Las intersecciones con el eje de las x, son $(3, 0)$ y $(-1, 0)$. A continuación, se muestra la gráfica de $f(x) = x^2 - 2x - 3$ 

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 8.6	
Una **desigualdad cuadrática**, es una desigualdad que puede escribirse en una de las siguientes formas: $ax^2 + bx + c < 0 \quad ax^2 + bx + c > 0$ $ax^2 + bx + c \leq 0 \quad ax^2 + bx + c \geq 0$ donde a, b y c, son números reales, con $a \neq 0$. La **solución de una desigualdad cuadrática**, es el conjunto de todos los valores que hacen de la desigualdad un enunciado verdadero.	$x^2 - 5x + 7 > 0$
Para resolver desigualdades cuadráticas, polinomiales y racionales **1.** Escribe la desigualdad como una ecuación y resuelve la ecuación. Las soluciones son los valores límite. **2.** Construye una recta numérica y marca cada valor límite del paso 1, de la siguiente manera: • Si el símbolo de desigualdad es $<$ o $>$, usa un círculo abierto, ○. • Si el símbolo de desigualdad es $\leq$ o $\geq$, usa un círculo cerrado, ●. **3.** Si resuelves una desigualdad racional, determina los valores que hacen 0 a cualquier denominador. Estos valores también son valores límite. Indica estos valores límite sobre tu recta numérica con un círculo abierto, ○. **4.** Selecciona un valor de prueba en cada intervalo y determina si satisface la desigualdad. **5.** La solución, es el conjunto de puntos que satisfacen la desigualdad. **6.** Escribe la solución en la forma indicada.	Resuelve $(2x - 1)(x - 3)(x + 1) < 0$. $(2x - 1)(x - 3)(x + 1) < 0$ $(2x - 1)(x - 3)(x + 1) = 0$ $2x - 1 = 0$ o $x - 3 = 0$ o $x + 1 = 0$ $x = \frac{1}{2}$ $x = 3$ $x = -1$ Los intervalos y valores de prueba seleccionados, se muestran a continuación: **Intervalo** **Valor de prueba** $(2x - 1)(x - 3)(x + 1) < 0$ $(-\infty, -1)$ -2 -25 Verdadero $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ 0 3 **Falso** $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ 1 -4 Verdadero $(3, \infty)$ 5 108 **Falso** Solución sobre una recta numérica:  Solución en notación de intervalo: $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ Solución en notación constructiva de conjuntos: $\left\{x \middle\| x < -1 \quad \text{o} \quad \frac{1}{2} < x < 3\right\}$

Capítulo 8 Ejercicios de repaso

[8.1] *Usa la propiedad de la raíz cuadrada, para resolver cada ecuación.*

1. $(x - 5)^2 = 16$ **2.** $(2x + 1)^2 = 60$ **3.** $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ **4.** $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 = 4$

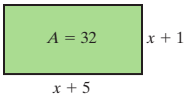
Resuelve cada ecuación completando el cuadrado.

5. $x^2 - 8x + 12 = 0$ **6.** $x^2 + 4x - 32 = 0$ **7.** $a^2 + 2a - 9 = 0$

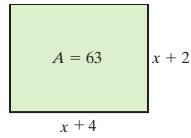
8. $z^2 + 6z = 12$ **9.** $x^2 - 2x + 10 = 0$ **10.** $2r^2 - 8r = -64$

Área *En los ejercicios 11 y 12, se proporciona el área, A, de cada rectángulo.* **a)** *Escribe una ecuación para el área.* **b)** *Resuelve la ecuación en términos de x.*

11.



12.



13. Enteros consecutivos El producto de dos enteros positivos consecutivos, es 56. Determina los dos enteros.

14. Sala de estar Rebeca se acaba de mudar a una nueva casa, donde la sala de estar es un cuadrado, cuya diagonal es 7 pies más larga que la longitud de un lado. Determina las dimensiones de la sala de estar.

[8.2] *Determina si cada ecuación tiene dos soluciones reales distintas, una única solución real, o si no tiene solución real.*

15. $3x^2 - 7x + 1 = 0$

16. $3x^2 + 2x = -6$

17. $r^2 + 16r = -64$

18. $5x^2 - x + 2 = 0$

19. $a^2 - 14a = -49$

20. $\frac{1}{2}x^2 - 3x = 8$

Resuelve cada ecuación mediante el uso de la fórmula cuadrática.

21. $6x^2 - 5x - 50 = 0$

22. $x^2 - 11x = -18$

23. $r^2 = 3r + 40$

24. $7x^2 = 9x$

25. $4m^2 - 28m + 49 = 0$

26. $-25n^2 = 60n + 36$

27. $x^2 + 8x + 5 = 0$

28. $b^2 + 4b = 8$

29. $2x^2 + 4x - 3 = 0$

30. $3y^2 - 6y = 8$

31. $x^2 - x + 13 = 0$

32. $x^2 - 2x + 11 = 0$

33. $2x^2 - \frac{5}{3}x = \frac{25}{3}$

34. $4x^2 + 5x - \frac{3}{2} = 0$

Para la función dada, determina todos los valores reales de la variable, para los cuales, la función tiene el valor indicado.

35. $f(x) = x^2 - 4x - 35, f(x) = 25$

36. $g(x) = 6x^2 + 5x, g(x) = 6$

37. $h(r) = 5r^2 - 7r - 10, h(r) = -8$

38. $f(x) = -2x^2 + 6x + 7, f(x) = -2$

Determina una ecuación que tenga las soluciones dadas.

39. $3, -1$

40. $\frac{2}{3}, -2$

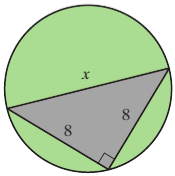
41. $-\sqrt{11}, \sqrt{11}$

42. $3 - 2i, 3 + 2i$

[8.1-8.3]

43. Jardín rectangular Sofía diseña un jardín rectangular de flores. Si el área debe ser de 96 pies cuadrados y la longitud debe ser 4 pies mayor que el ancho, determina las dimensiones del jardín.

44. Triángulo y círculo Determina la longitud del lado x en la figura.



45. Cuenta de ahorros Samuel invirtió $1 000 en una cuenta de ahorros, donde el interés se compone anualmente. Si después de 2 años, el monto en la cuenta es de $1 081.60, determina la tasa de interés anual.

46. Números El mayor de dos números positivos, es 4 más grande que el menor. Determina los dos números, si su producto es 77.

47. Rectángulo La longitud de un rectángulo es 4 pulgadas menos que el doble de su ancho. Determina las dimensiones, si su área es de 96 pulgadas cuadradas.

48. Cultivo de trigo El valor, V, en dólares, por acre de un cultivo de trigo, d, días después de plantarlo, está dado por la fórmula $V = 12d - 0.05d^2, 20 < d < 80$. Determina el valor de un acre de trigo, 60 días después de que se plantó.

49. Crecimiento de secuoya El crecimiento, $f(x)$, en pulgadas por año, de una secuoya, con menos de 30 años de edad, está dado por la función $f(x) = -0.02x^2 + x + 1$, donde x representa el número de pulgadas de lluvia anual.



a) Determina el crecimiento, por año, de una secuoya, en un año en el que hay 12 pulgadas de lluvia.

b) Si el crecimiento de una secuoya, en un año, es de 10 pulgadas, determina el número de pulgadas de lluvia para dicho año (redondea tu respuesta a 2 lugares decimales).

50. Objeto que cae La distancia, d, en pies, a la que un objeto está del suelo a, t segundos, después de soltarlo desde un avión, está dada por la fórmula $d = -16t^2 + 784$.

a) Determina la distancia, a la que el objeto está del suelo, 2 segundos después de soltarse.

b) ¿Cuándo golpeará el objeto el suelo?

51. Fuga de aceite Un tractor tiene una fuga de aceite. La cantidad de aceite, $L(t)$, en mililitros por hora, que escapan, es una función de la temperatura de operación del tractor, t, en grados Celsius. La función es:

$L(t) = 0.0004t^2 + 0.16t + 20, 100℃ \le t \le 160℃$

a) ¿Cuántos mililitros de aceite se fugarán en 1 hora, si la temperatura de operación del tractor es de 100°C?

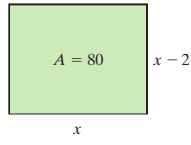
b) Si el aceite se fuga a 53 mililitros por hora, ¿cuál es la temperatura de operación del tractor?

52. Máquinas moldeadoras Dos máquinas moldeadoras pueden completar un pedido en 12 horas. La máquina grande, puede completar el pedido por sí sola en 1 hora menos que la máquina pequeña. ¿Cuánto tardarán cada máquina en completar el pedido si trabaja individualmente?

53. Tiempo de viaje Esteban conduce 25 millas con una rapidez constante, y luego, aumenta su rapidez en 15 millas por hora, durante las siguientes 65 millas. Si el tiempo requerido para viajar 90 millas fue de 1.5 horas, determina la rapidez a la que conduce durante las primeras 25 millas.

54. Viaje en canoa Joana viaja en canoa por un río, con la corriente a favor durante 3 millas, luego, da la vuelta y rema contra la corriente hasta su punto de partida. Si el tiempo total que pasó remando fue de 4 horas y la corriente tiene una rapidez de 0.4 millas por hora, ¿cuál es la rapidez a la que rema en agua quieta?

55. Área El área de un rectángulo es de 80 unidades cuadradas. Si la longitud es de x unidades y el ancho es de $x - 2$ unidades, determina la longitud y el ancho.



56. Venta de mesas El ingreso, $R(n)$, por vender n mesas, es $R(n) = -0.3n^2 + 60n, n \le 40$. ¿Cuántas mesas deben venderse para tener un ingreso de $1 080?

En los ejercicios 57-60, resuelve cada ecuación en términos de la variable indicada.

57. $a^2 + b^2 = c^2$, en términos de a (teorema de Pitágoras).

58. $h = -4.9t^2 + c$, en términos de t (altura de un objeto).

59. $v_x^2 + v_y^2 = v^2$, en términos de v_y (vectores).

60. $a = \dfrac{v_2^2 - v_1^2}{2d}$, en términos de v_2 (fórmula de física).

[8.4] *Resuelve cada ecuación.*

61. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

62. $x^4 - 21x^2 + 80 = 0$

63. $a^4 = 5a^2 + 24$

64. $3y^{-2} + 16y^{-1} = 12$

65. $3r + 11\sqrt{r} - 4 = 0$

66. $2p^{2/3} - 7p^{1/3} + 6 = 0$

67. $6(x - 2)^{-2} = -13(x - 2)^{-1} + 8$

68. $10(r + 1) = \dfrac{12}{r + 1} - 7$

Determina todas las intersecciones con el eje de las x, de la función dada.

69. $f(x) = x^4 - 82x^2 + 81$

70. $f(x) = 30x + 13\sqrt{x} - 10$

71. $f(x) = x - 6\sqrt{x} + 12$

72. $f(x) = (x^2 - 6x)^2 - 5(x^2 - 6x) - 24$

[8.5] *En los ejercicios 73-76,* **a)** *determina si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo,* **b)** *determina la intersección con el eje de las y,* **c)** *determina el vértice,* **d)** *determina la ecuación del eje de simetría y* **e)** *determina las intersecciones con el eje de las x, si existen.* **f)** Elabora la gráfica de *la ecuación.*

73. $f(x) = x^2 + 5x$

74. $f(x) = x^2 - 2x - 8$

75. $g(x) = -x^2 - 2$

76. $g(x) = -2x^2 - x + 15$

77. Venta de boletos El teatro Hamilton Outdoor, estima que su ingreso total, I, en cientos de dólares, para su producción de una obra, puede aproximarse mediante la fórmula $I = -x^2 + 22x - 45, 2 \le x \le 20$, donde x es el costo de un boleto.

a) ¿Cuánto debe cobrar el teatro para maximizar su ingreso?

b) ¿Cuál es el ingreso máximo?

78. Lanzamiento de una bola Josué lanza una bola hacia arriba, desde lo alto de un edificio de 75 pisos. La altura, $s(t)$, de la bola, en cualquier momento, t, se puede determinar mediante la función

$s(t) = -16t^2 + 80t + 75.$

a) ¿En qué momento la bola alcanzará la altura máxima?

b) ¿Cuál es la altura máxima?



Elabora la gráfica de cada función.

79. $f(x) = (x - 3)^2$ **80.** $f(x) = -(x + 2)^2 - 3$ **81.** $g(x) = -2(x + 4)^2 - 1$ **82.** $h(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + 3$

[8.6] *Elabora la gráfica de la solución de cada desigualdad sobre una recta numérica.*

83. $x^2 + 4x + 3 \ge 0$

84. $x^2 + 3x - 10 \le 0$

85. $x^2 \le 11x - 20$

86. $3x^2 + 8x > 16$

87. $4x^2 - 9 \le 0$

88. $6x^2 - 30 > 0$

Resuelve cada desigualdad y proporciona la solución en notación constructiva de conjuntos.

89. $\frac{x + 1}{x - 5} > 0$ **90.** $\frac{x - 3}{x + 2} \le 0$ **91.** $\frac{2x - 4}{x + 3} \ge 0$

92. $\frac{3x + 5}{x - 6} < 0$ **93.** $(x + 4)(x + 1)(x - 2) > 0$ **94.** $x(x - 3)(x - 6) \le 0$

Resuelve cada desigualdad y proporciona la solución en notación de intervalo.

95. $(3x + 4)(x - 1)(x - 3) \ge 0$

96. $2x(x + 2)(x + 4) < 0$

97. $\frac{x(x - 4)}{x + 2} > 0$

98. $\frac{(x - 2)(x - 8)}{x + 3} < 0$

99. $\frac{x - 3}{(x + 2)(x - 7)} \ge 0$

100. $\frac{x(x - 6)}{x + 3} \le 0$

Resuelve cada desigualdad y grafica la solución sobre una recta numérica.

101. $\frac{5}{x + 4} \ge -1$ **102.** $\frac{2x}{x - 2} \le 1$ **103.** $\frac{2x + 3}{3x - 5} < 4$

Examen de repaso acumulativo

Resuelve la siguiente evaluación y verifica tus respuestas con las proporcionadas en la parte final del libro. Revisa cualquier pregunta que respondas de manera incorrecta. La sección del libro donde fue cubierto el material, se indica después de cada respuesta.

1. Evalúa $-4 \div (-2) + 18 - \sqrt{49}$.

2. Evalúa $2x^2 + 3x + 4$ cuando $x = 2$.

3. Expresa 2540000 en notación científica.

4. Determina el conjunto solución de la ecuación $|4 - 2x| = 5$.

5. Simplifica $6x - \{3 - [2(x - 2) - 5x]\}$.

6. Resuelve la ecuación $-\frac{1}{2}(4x - 6) = \frac{1}{3}(3 - 6x) + 2$.

7. Resuelve la desigualdad $-4 < \frac{x + 4}{2} < 6$. Escribe la solución en notación de intervalo.

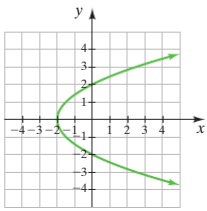
8. Determina la pendiente y la intersección con el eje de las y, de la gráfica de $9x + 7y = 15$.

9. **Huerto pequeño** El número de canastas de cerezas, N, que x árboles producen en un pequeño huerto, está dado por la función $N(x) = -0.2x^2 + 40x$. ¿Cuántas canastas de cerezas producirán 50 árboles?



10. Escribe la ecuación en forma pendiente-intersección con el eje de las y, de una recta que pasa a través de los puntos $(6, 5)$ y $(4, 3)$.

11. **a)** Determina si la siguiente gráfica representa una función. Explica tu respuesta.



b) Determina el dominio y el rango de la función o relación.

12. Elabora la gráfica de cada ecuación.

a) $x = -4$ **b)** $y = 2$

13. Evalúa el siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

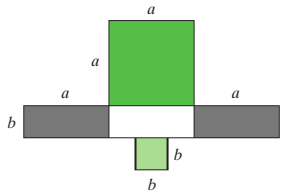
14. Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$4x - 3y = 10$$
$$2x + y = 5$$

15. Factoriza $(x + 3)^2 + 10(x + 3) + 24$.

16. **a)** Escribe una expresión para el área sombreada de la figura.

b) Escribe la expresión en forma factorizada.



17. Suma $\frac{x + 2}{x^2 - x - 6} + \frac{x - 3}{x^2 - 8x + 15}$.

18. Resuelve la ecuación.

$$\frac{1}{a - 2} = \frac{4a - 1}{a^2 + 5a - 14} + \frac{2}{a + 7}.$$

19. **Consumo de watts** La potencia de un electrodoméstico, w, varía conjuntamente como el cuadrado de la corriente, I, y la resistencia, R. Si la potencia es de 12 watts cuando la corriente es de 2 amperes y la resistencia es de 100 ohms, determina la potencia cuando la corriente es de 0.8 amperes y la resistencia es de 600 ohms.

20. Simplifica $\frac{3 - 4i}{2 + 5i}$.

9.1 Función compuesta y función inversa

1. **Determinación de funciones compuestas**
2. **Comprensión de las funciones uno a uno**
3. **Determinación de funciones inversas**
4. **Determinación de la composición de una función y su inversa**

Comprende el Álgebra

Se observan funciones compuestas en la vida cotidiana. Por ejemplo, el presupuesto de gastos semanales, es una función del costo de la gasolina. El costo de la gasolina, es una función del precio del petróleo. Así, desde una perspectiva amplia, el presupuesto semanal de gastos, es una función del precio del petróleo. Esto es un ejemplo de una función compuesta.

Se comenzará con las funciones compuestas, las funciones uno a uno y las funciones inversas. Estos conceptos se usarán en la discusión de las funciones logarítmica y exponencial.

1 Determinación de funciones compuestas

Con frecuencia, una variable es una función de otra variable, que a su vez es una función de una tercera variable. La relación entre dichas funciones, se describe como una **composición de funciones.** Por ejemplo, supón que 1 dólar estadounidense puede convertirse en 1.35 dólares canadienses, y 1 dólar canadiense puede convertirse en 13.84 pesos mexicanos. Con esta información, puedes convertir 100 dólares estadounidenses en pesos mexicanos. Se tienen las siguientes funciones.

$$g(x) = 1.35x \quad (x \text{ dólares estadounidenses a dólares canadienses})$$

$$f(x) = 13.84x \quad (x \text{ dólares canadienses a pesos mexicanos})$$

Si se hace $x = 100$, por \$100 dólares estadounidenses, entonces se pueden convertir en \$135 dólares canadienses, usando la función g:

$$g(x) = 1.35x$$
$$g(100) = 1.35(100) = \$135 \text{ dólares canadienses}$$

Los \$135 dólares canadienses, a su vez, se pueden convertir en 1868.4 pesos mexicanos, usando la función f:

$$f(x) = 13.84x$$
$$f(102) = 13.84\,(135) = 1\,868.4 \text{ pesos mexicanos}$$

Esta conversión se puede determinar directamente sin realizar esta cadena de cálculos. Un dólar estadounidense puede convertirse en pesos mexicanos al sustituir los $1.35x$ determinados en la función $g(x)$, en términos de la x en $f(x)$. Esto produce una nueva función, h, que convierte dólares estadounidenses directamente en pesos mexicanos.

$$g(x) = 1.35x \qquad f(x) = 13.84x$$
$$h(x) = f[g(x)]$$
$$= 13.84(1.35x) \quad \text{Sustituye } g(x) \text{ en términos de } x \text{ en } f(x).$$
$$= 18.684x$$

Por tanto, cada dólar estadounidense, x, vale 18.684 pesos mexicanos. Si sustituyes \$100, en términos de x, obtienes 1868.4 pesos mexicanos, que es lo esperado.

$$h(x) = 18.684x$$
$$h(100) = 18.684(100) = 1\,868.4$$

La función h se llama **composición de f con g** o la **función compuesta de f con g**. La composición de funciones se denota $(f \circ g)(x)$ y se lee "f de g de x" o "f compuesta con g de x". La **Figura 9.1**, muestra cómo la función compuesta h se relaciona con las funciones f y g.

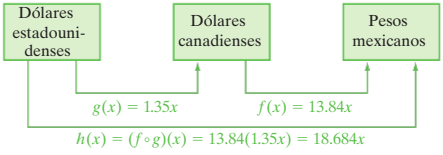


FIGURA 9.1

A continuación, se define la **función compuesta**.

Función compuesta

La **función compuesta** $(f \circ g)(x)$, se define como:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

Cuando se proporcionan $f(x)$ y $g(x)$, para determinar $(f \circ g)(x)$, se sustituye $g(x)$, en términos de x en $f(x)$, para obtener $f[g(x)]$.

EJEMPLO 1 Dado $f(x) = 3x - 1$ y $g(x) = 2x + 5$, determina

a) $(f \circ g)(x)$ **b)** $(f \circ g)(4)$ **c)** $(g \circ f)(x)$ **d)** $(g \circ f)(4)$

Solución

a) Para determinar $(f \circ g)(x)$, sustituye $g(x)$ o $2x + 5$, en términos de x, en $f(x)$.

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f[g(x)] \\ &= f(2x + 5) \\ &= 3(2x + 5) - 1 \\ &= 6x + 15 - 1 \\ &= 6x + 14\end{aligned}$$

Por tanto, $(f \circ g)(x) = 6x + 14$.

b) Para determinar $(f \circ g)(4)$, sustituye 4, en términos de x, en $(f \circ g)(x)$, que se determinó en el inciso **a)**.

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= 6x + 14 \\ (f \circ g)(4) &= 6(4) + 14 \\ &= 24 + 14 = 38\end{aligned}$$

Por tanto, $(f \circ g)(4) = 38$.

c) Para determinar $(g \circ f)(x)$, sustituye $f(x)$ o $3x - 1$, en términos de x, en $g(x)$.

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g[f(x)] \\ &= g(3x - 1) \\ &= 2(3x - 1) + 5 \\ &= 6x - 2 + 5 \\ &= 6x + 3\end{aligned}$$

Por tanto, $(g \circ f)(x) = 6x + 3$.

d) Para determinar $(g \circ f)(4)$, sustituye 4, en términos de x, en $(g \circ f)(x)$, que se determinó en el inciso **c)**.

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= 6x + 3 \\ (g \circ f)(4) &= 6(4) + 3 \\ &= 24 + 3 = 27\end{aligned}$$

Por tanto, $(g \circ f)(4) = 27$

Ahora resuelve el ejercicio 9

Observa, de los incisos **a)** y **c)** del ejemplo 1, que $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$. En esta sección, se verá con varios ejemplos que, en general, la composición de funciones no es conmutativa.

EJEMPLO 2 Dado $f(x) = 5x - 1$ y $g(x) = x^2 + 3x - 1$, determina

a) $(f \circ g)(x)$ **b)** $(f \circ g)(2)$ **c)** $(g \circ f)(x)$ **d)** $(g \circ f)(2)$

Solución

a) Para determinar $(f \circ g)(x)$, sustituye $g(x)$ o $x^2 + 3x - 1$, en términos de x, en $f(x)$.

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f[g(x)] \\ &= f(x^2 + 3x - 1) \\ &= 5(x^2 + 3x - 1) - 1 \\ &= 5x^2 + 15x - 5 - 1 \\ &= 5x^2 + 15x - 6\end{aligned}$$

Por tanto, $(f \circ g)(x) = 5x^2 + 15x - 6$.

b) Para determinar $(f \circ g)(2)$, sustituye 2, en términos de x, en $(f \circ g)(x)$, que se determinó en el inciso **a)**.

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= 5x^2 + 15x - 6 \\ (f \circ g)(2) &= 5(2)^2 + 15(2) - 6 \\ &= 5(4) + 30 - 6 \\ &= 20 + 30 - 6 \\ &= 44\end{aligned}$$

Por tanto, $(f \circ g)(2) = 44$.

c) Para determinar $(g \circ f)(x)$, sustituye $f(x)$ o $5x - 1$, en términos de x, en $g(x)$.

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g[f(x)] \\ &= g(5x - 1) \\ &= (5x - 1)^2 + 3(5x - 1) - 1 \\ &= (5x - 1)(5x - 1) + 15x - 3 - 1 \\ &= 25x^2 - 10x + 1 + 15x - 4 \\ &= 25x^2 + 5x - 3\end{aligned}$$

Por tanto, $(g \circ f)(x) = 25x^2 + 5x - 3$.

d) Para determinar $(g \circ f)(2)$, sustituye 2, en términos de x, en $(g \circ f)(x)$, que se determinó en el inciso **c)**.

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= 25x^2 + 5x - 3 \\ (g \circ f)(2) &= 25(2)^2 + 5(2) - 3 \\ &= 25(4) + 10 - 3 \\ &= 100 + 10 - 3 \\ &= 107\end{aligned}$$

Por tanto, $(g \circ f)(2) = 107$.

Ahora resuelve el ejercicio 11

Nuevamente, observa, de los incisos **a)** y **c)** del ejemplo 2 que, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

EJEMPLO 3

Dado $f(x) = x^2 + 4$ y $g(x) = \sqrt{x - 1}$, determina

a) $(f \circ g)(x)$ **b)** $(g \circ f)(x)$

Solución

a) Para determinar $(f \circ g)(x)$, sustituye $g(x)$, que es $\sqrt{x - 1}$, en términos de cada x, en $f(x)$. Recuerda que $\sqrt{x - 1}$ es un número real sólo cuando $x \geq 1$.

$$f(x) = x^2 + 4$$

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = \left(\sqrt{x - 1}\right)^2 + 4 = x - 1 + 4 = x + 3, x \geq 1$$

Dado que los valores de $x < 1$ no están en el dominio de $g(x)$, los valores de $x < 1$ no estarán en el dominio de $(f \circ g)(x)$.

Comprende el Álgebra

Varios ejemplos y ejercicios, de esta sección, muestran que la composición de funciones no es una operación conmutativa. Esto es, en general:

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$$

b) Para determinar $(g \circ f)(x)$, sustituye $f(x)$, que es x^2+4, en términos de cada x, en $g(x)$.

$$g(x) = \sqrt{x - 1}$$

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \sqrt{(x^2 + 4) - 1} = \sqrt{x^2 + 3}$$

Ahora resuelve el ejercicio 19

SUGERENCIA ÚTIL

Recuerda que, el producto de dos funciones, se estudió en la sección 3.6. No confundas la determinación del producto de dos funciones, con la determinación de una función compuesta.

Producto de funciones f y g: $(fg)(x) = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Función compuesta de f con g: $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$

Cuando multiplicas las funciones f y g, puedes usar un punto entre f y g. Cuando determinas la función compuesta de f con g, usas un pequeño círculo *abierto*.

2 Comprensión de las funciones uno a uno

Recuerda, de la sección 3.2, las siguientes definiciones. Una *relación* es cualquier conjunto de pares ordenados de la forma (x, y). El conjunto de coordenadas x, se llama el *dominio* y el conjunto de las coordenadas y, se llama el *rango* de la relación. Una *función* es una relación, en la cual, cada elemento en el dominio corresponde a exactamente un elemento en el rango.

Función uno a uno

Una función es una **función uno a uno**, si a cada elemento en el rango le corresponde a exactamente un elemento en el dominio.

Considera los siguientes dos conjuntos de pares ordenados.

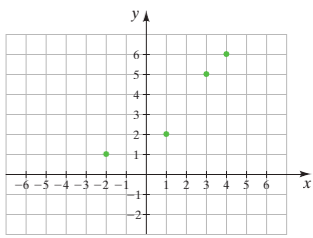
$$A = \{(1, 2), (3, 5), (4, 6), (-2, 1)\}$$

$$B = \{(1, 2), (3, 5), (4, 6), (-2, 5)\}$$

- Los conjuntos A y B representan funciones, pues cada coordenada x corresponde a exactamente una coordenada y.
- El conjunto A también es una función uno a uno, pues cada coordenada y también corresponde a exactamente una coordenada x.
- El conjunto B no es una función uno a uno, pues la coordenada y, 5, corresponde a dos coordenadas x, 3 y -2.

La **Figura 9.2**, muestra la gráfica de la función A y la **Figura 9.3**, muestra la gráfica de la función B.

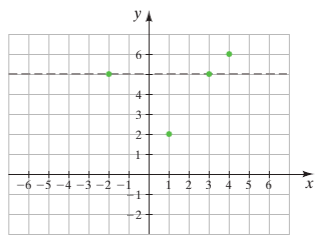
Función A



- Cada coordenada x, corresponde a exactamente una coordenada y. Por tanto, el conjunto A, es una función.
- Cada coordenada y, también corresponde a exactamente una coordenada x. *Por tanto, el conjunto A, es una función uno a uno.*

FIGURA 9.2

Función B



- Cada coordenada x, corresponde a exactamente una coordenada y. *Por tanto, el conjunto B es una función.*
- La coordenada y, 5, corresponde a dos coordenadas x, 3 y -2. *Por tanto, el conjunto B, no es una función uno a uno.*

FIGURA 9.3

Comprende el Álgebra

La *prueba de la recta vertical* afirma que, si se puede trazar una recta vertical que interseque una gráfica en más de un punto, entonces, la gráfica *no es la gráfica de una función*.

La *prueba de la recta horizontal* afirma que, si se puede trazar una recta horizontal, de modo que interseque la gráfica de una función en más de un punto, *la función no es una función uno a uno.*

Para que una gráfica represente una función, debe pasar la prueba de la recta *vertical* (consulta el recuadro de Comprende el Álgebra a la izquierda). Para que una gráfica represente una función uno a uno también, debe cumplir la prueba de la recta *horizontal*.

Prueba de la recta horizontal

Si se puede trazar una recta horizontal, de modo que interseque la gráfica de una función en más de un punto, la gráfica no es una función uno a uno.

Observa, la gráfica de la función $f(x) = x^2$, que se muestra en la **Figura 9.4**. Primero, es una función, pues pasa la prueba de la recta *vertical*. Sin embargo, no es una función uno a uno, porque falla en la prueba de la recta *horizontal*. La **Figura 9.5**, muestra que $f(x) = x^2$ tiene una coordenada y que corresponde a dos coordenadas x diferentes.

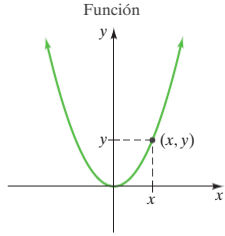


FIGURA 9.4

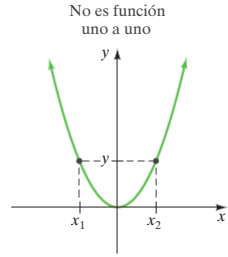


FIGURA 9.5

Con frecuencia, se puede restringir el dominio de una función que no sea una función uno a uno, para que la función resultante sea una función uno a uno. Por ejemplo, tanto $f(x) = x^2, x \geq 0$ (**Figura 9.6a**) como $f(x) = x^2, x \leq 0$ (**Figura 9.6b**), son ejemplos de funciones uno a uno. Observa que, ambas gráficas pasan la prueba de la recta horizontal.

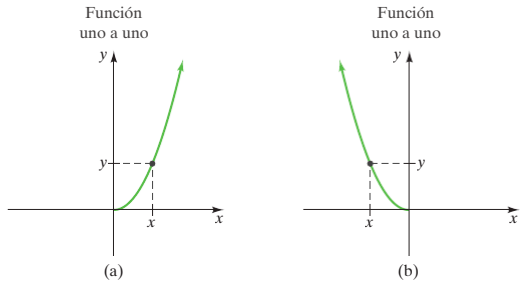


FIGURA 9.6

La **Figura 9.7** de la página 609, muestra varias gráficas y ya sea que representan, o no, funciones uno a uno. Observa que, la gráfica de la parte (f) no representa una función, pues falla la prueba de la recta vertical. En consecuencia, esta gráfica no puede representar una función uno a uno, aun cuando la gráfica pase la prueba de la recta horizontal.

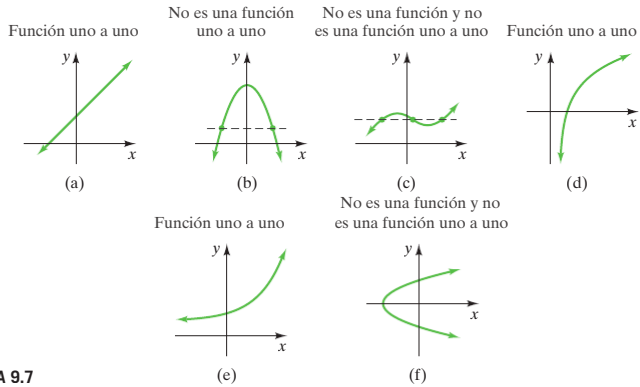


FIGURA 9.7

3 Determinación de funciones inversas

Las funciones uno a uno consisten de pares ordenados, en los cuales, cada coordenada x corresponde a exactamente una coordenada y, y cada coordenada y corresponde a exactamente una coordenada x. Dicha relación permite crear una función llamada función *inversa*. *Solamente las funciones uno a uno tienen inversas*.

Comprende el Álgebra

Es importante observar que, la notación $f^{-1}(x)$ se usa para representar la función inversa de una función dada $f(x)$. El -1 en la notación, *no* es un exponente. En consecuencia,

$$f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$$

Función inversa

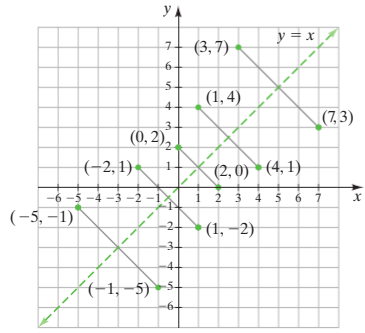
Si $f(x)$ es una función uno a uno con pares ordenados de la forma (x, y), la **función inversa**, $f^{-1}(x)$, es una función uno a uno con pares ordenados de la forma (y, x).

Se comienza con un ejemplo.

Función, $f(x)$: $\{(1,4), (2,0), (3,7), (-2,1), (-1,-5)\}$

Función inversa, $f^{-1}(x)$: $\{(4,1), (0,2), (7,3), (1,-2), (-5,-1)\}$

Si graficas los puntos en la función y los puntos en la función inversa (**Figura 9.8**), se ve que los puntos son simétricos con respecto a la recta $y = x$.



- Par ordenado en función, $f(x)$
- Par ordenado en función inversa, $f^{-1}(x)$

FIGURA 9.8

Alguna información importante acerca de las funciones inversas:

- Sólo las funciones uno a uno tienen funciones inversas.
- El dominio de $f(x)$ es el rango de $f^{-1}(x)$.
- El rango de $f(x)$ es el dominio de $f^{-1}(x)$.
- Cuando las gráficas de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ se grafican sobre los mismos ejes, las gráficas de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son simétricas en torno a la recta $y = x$.

Cuando una función uno a uno se proporciona como ecuación, su función inversa puede determinarse mediante el siguiente procedimiento.

Para determinar la función inversa de una función uno a uno

1. Sustituye $f(x)$ con y.
2. Intercambia las dos variables x y y.
3. Resuelve la ecuación en términos de y.
4. Sustituye y con $f^{-1}(x)$ (esto produce la función inversa usando notación de función inversa).

EJEMPLO 4

a) Determina la función inversa de $f(x) = 4x + 2$.

b) Sobre los mismos ejes, grafica tanto $f(x)$ como $f^{-1}(x)$.

Solución

a) Esta función es uno a uno, por tanto, se seguirá el procedimiento de cuatro pasos.

$$f(x) = 4x + 2 \quad \text{Función original.}$$

Paso 1 $$y = 4x + 2 \quad \text{Sustituye } f(x) \text{ con } y.$$

Paso 2 $$x = 4y + 2 \quad \text{Intercambia } x \text{ y } y.$$

Paso 3 $$x - 2 = 4y \quad \text{Resuelve en términos de } y.$$
$$\frac{x-2}{4} = y$$
$$\text{o} \quad y = \frac{x-2}{4}$$

Paso 4 $$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{4} \quad \text{Sustituye } y \text{ con } f^{-1}(x).$$

b) A continuación, se muestran tablas de valores para $f(x)$ y $f^{-1}(x)$. Las gráficas de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ se muestran en la **Figura 9.9**.

x	$y = f(x)$
0	2
1	6

x	$y = f^{-1}(x)$
2	0
6	1

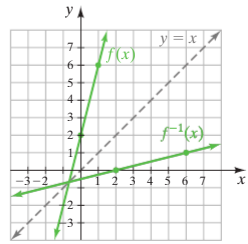


FIGURA 9.9

Observa la simetría de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$, en torno a la recta $y = x$. Observa también que, el dominio y el rango, tanto de $f(x)$ como de $f^{-1}(x)$, son el conjunto de números reales, $\mathbb{R}$.

Ahora resuelve el ejercicio 67

EJEMPLO 5

a) Determina la función inversa de $f(x) = x^3 + 2$.

b) Sobre los mismos ejes, grafica tanto $f(x)$ como $f^{-1}(x)$.

Solución

a) Esta función es uno a uno; por tanto, se seguirá el procedimiento de cuatro pasos para determinar su inversa.

$$f(x) = x^3 + 2 \qquad \text{Función original.}$$

Paso 1 $\quad y = x^3 + 2 \qquad$ Sustituye $f(x)$ con y.

Paso 2 $\quad x = y^3 + 2 \qquad$ Intercambia x y y.

Paso 3 $\quad x - 2 = y^3 \qquad$ Resuelve en términos de y.

$$\sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{y^3} \qquad \text{Saca la raíz cúbica de ambos lados.}$$

$$\sqrt[3]{x-2} = y$$

o $\quad y = \sqrt[3]{x-2}$

Paso 4 $\quad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2} \qquad$ Sustituye y con $f^{-1}(x)$.

b) A continuación, se muestra una tabla de valores para $f(x)$ y $f^{-1}(x)$.

x	$y = f(x)$
−2	−6
−1	1
0	2
1	3
2	10

x	$y = f^{-1}(x)$
−6	−2
1	−1
2	0
3	1
10	2

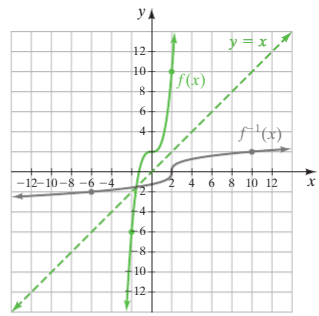


FIGURA 9.10

Las gráficas de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ se muestran en la **Figura 9.10**. Observa que, para cada punto (a, b) sobre la gráfica de $f(x)$, el punto (b, a) aparece sobre la gráfica de $f^{-1}(x)$. Por ejemplo, los puntos $(2, 10)$ y $(-2, -6)$, indicados en verde, aparecen en la gráfica de $f(x)$, y los puntos $(10, 2)$ y $(-6, -2)$, indicados en gris, aparecen en la gráfica de $f^{-1}(x)$.

Ahora resuelve el ejercicio 73

4 Determinación de la composición de una función y su inversa

Para ayudar a reforzar la relación entre una función y su inversa, se evaluará la composición de $f^{-1}(x)$ y $f(x)$ del ejemplo 5, para los valores de $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$.

$$(f^{-1} \circ f)(-2) = f^{-1}[f(-2)] = f^{-1}(-6) = -2$$
$$(f^{-1} \circ f)(0) = f^{-1}[f(0)] = f^{-1}(2) = 0$$
$$(f^{-1} \circ f)(2) = f^{-1}[f(2)] = f^{-1}(10) = 2$$

Observa que, el resultado que se obtiene de la composición de una función, es su inversa y siempre es igual al valor dado. De igual manera, se evaluará la composición de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ del ejemplo 5, para los valores $x = -6$, $x = 2$ y $x = 10$.

$$(f \circ f^{-1})(-6) = f[f^{-1}(-6)] = f(-2) = -6$$
$$(f \circ f^{-1})(2) = f[f^{-1}(2)] = f(0) = 2$$
$$(f \circ f^{-1})(10) = f[f^{-1}(10)] = f(2) = 10$$

Observa nuevamente que, el resultado siempre es igual al valor dado. Esta relación se resume a continuación.

La composición de una función y su inversa

Para cualquier función uno a uno $f(x)$ y su inversa $f^{-1}(x)$:

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \quad \text{y} \quad (f^{-1} \circ f)(x) = x.$$

EJEMPLO 6 En el ejemplo 4, se determinó que, para $f(x) = 4x + 2$, $f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{4}$. Demuestra que:

a) $(f \circ f^{-1})(x) = x$ **b)** $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

Solución

a) Para determinar $(f \circ f^{-1})(x)$, sustituye $f^{-1}(x)$, en términos de cada x en $f(x)$.

$$f(x) = 4x + 2$$
$$(f \circ f^{-1})(x) = 4\left(\frac{x-2}{4}\right) + 2$$
$$= x - 2 + 2 = x$$

b) Para determinar $(f^{-1} \circ f)(x)$, sustituye $f(x)$, para cada x en $f^{-1}(x)$.

$$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{4}$$
$$(f^{-1} \circ f)(x) = \frac{4x + 2 - 2}{4}$$
$$= \frac{4x}{4} = x$$

En consecuencia, $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

Ahora resuelve el ejercicio 79

EJEMPLO 7 En el ejemplo 5, se determinó que $f(x) = x^3 + 2$ y $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$, son funciones inversas. Demuestra que:

a) $(f \circ f^{-1})(x) = x$ **b)** $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

Solución

a) Para determinar $(f \circ f^{-1})(x)$, sustituye $f^{-1}(x)$, para cada x en $f(x)$.

$$f(x) = x^3 + 2$$
$$(f \circ f^{-1})(x) = \left(\sqrt[3]{x-2}\right)^3 + 2$$
$$= x - 2 + 2 = x$$

b) Para determinar $(f^{-1} \circ f)(x)$, sustituye $f(x)$, para cada x en $f^{-1}(x)$.

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$$
$$(f^{-1} \circ f)(x) = \sqrt[3]{(x^3+2) - 2}$$
$$= \sqrt[3]{x^3} = x$$

En consecuencia, $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

Ahora resuelve el ejercicio 81

Puesto que una función y su inversa se "anulan" mutuamente, la composición de una función con su inversa, resulta en el valor dado del dominio. Por ejemplo, para cualquier función $f(x)$ y su inversa $f^{-1}(x)$, $(f^{-1} \circ f)(3) = 3$ y $(f \circ f^{-1})\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

9.1 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

inversa	dominio	horizontal	x	$f(x)$
vertical	rango	uno a uno	composición	y

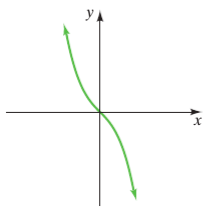
1. Cuando una variable es una función de otra variable, que a su vez es una función de una tercera variable, la relación entre tales funciones se describe como una _____ de funciones.
2. Una función es una función _____ si cada elemento en el rango corresponde a exactamente un elemento en el dominio.
3. La prueba de la recta _____ afirma que, si se puede trazar una recta _____ de modo que interseque una gráfica en más de un punto, entonces la gráfica no es la gráfica de una función.
4. La prueba de la recta _____ afirma que, si se puede trazar una recta _____, de modo que interseque la gráfica de una función en más de un punto, la función no es una función uno a uno.
5. Si una función uno a uno tiene pares ordenados de la forma (x, y), la función _____ es una función uno a uno con pares ordenados de la forma (y, x).
6. Para una función uno a uno $f(x)$ y su función inversa $f^{-1}(x)$, el dominio de $f(x)$ es el _____ de $f^{-1}(x)$.
7. Para una función uno a uno $f(x)$ y su función inversa $f^{-1}(x)$, el rango de $f(x)$ es el _____ de $f^{-1}(x)$.
8. Para cualquier función uno a uno $f(x)$ y su inversa $f^{-1}(x)$, $(f \circ f^{-1})(x) =$ _____ y $(f^{-1} \circ f)(x) =$ _____.

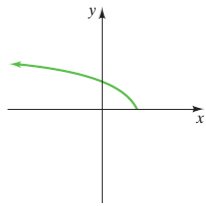
Practica tus habilidades

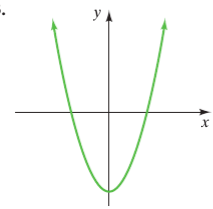
Para cada par de funciones, determina **a)** $(f \circ g)(x)$, **b)** $(f \circ g)(4)$, **c)** $(g \circ f)(x)$ y **d)** $(g \circ f)(4)$.

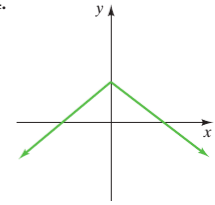
9. $f(x) = x + 4, g(x) = 2x - 3$
10. $f(x) = 3x - 2, g(x) = x + 1$
11. $f(x) = x + 3, g(x) = x^2 + x - 4$
12. $f(x) = x + 2, g(x) = x^2 + 4x - 2$
13. $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = 2x + 3$
14. $f(x) = 3x + 1, g(x) = \frac{3}{x}$
15. $f(x) = \frac{2}{x}, g(x) = x^2 + 1$
16. $f(x) = x^2 - 5, g(x) = \frac{4}{x}$
17. $f(x) = x^2 + 1, g(x) = x^2 + 5$
18. $f(x) = x^2 - 4, g(x) = x^2 + 3$
19. $f(x) = x - 4, g(x) = \sqrt{x + 5}, x \geq -5$
20. $f(x) = \sqrt{x + 6}, x \geq -6, g(x) = x + 7$

En los ejercicios 21-42, determina si cada función es una función uno a uno.

21.


22.


23.


24.


25. $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
26. $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$
27. $\{(-4, 2), (5, 3), (0, 2), (4, 8)\}$
28. $\{(0, 5), (1, 4), (-3, 5), (4, 2)\}$
29. $y = 2x + 5$
30. $y = 3x - 8$

31. $y = x^2 - 1$ **32.** $y = -x^2 + 3$ **33.** $y = x^2 - 9, x \geq 0$

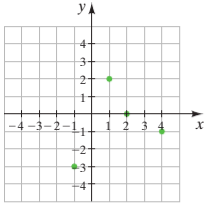
34. $y = x^2 - 9, x \leq 0$ **35.** $y = x^2 - 2x - 3, x \geq 1$ **36.** $y = x^2 + 4x - 5, x \geq -2$

37. $y = \sqrt{x}$ **38.** $y = -\sqrt{x}$ **39.** $y = |x|$

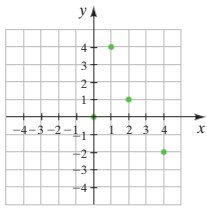
40. $y = -|x|$ **41.** $y = \sqrt[3]{x}$ **42.** $y = x^3$

En los ejercicios 43-48, para la función dada, determina el dominio y el rango, tanto de $f(x)$ como de $f^{-1}(x)$.

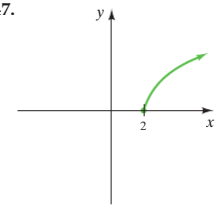
45.



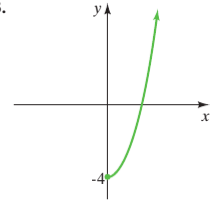
46.



47.



48.



Para cada función, **a)** *determina si es uno a uno;* **b)** *si es uno a uno, determina su función inversa.*

49. $f(x) = x + 5$ **50.** $f(x) = x - 4$ **51.** $h(x) = 4x$

52. $k(x) = 2x - 7$ **53.** $r(x) = |x|$ **54.** $t(x) = -|x|$

55. $t(x) = x^2 + 3$ **56.** $m(x) = -x^2 + x + 8$

57. $g(x) = \dfrac{1}{x}$ **58.** $h(x) = \dfrac{5}{x}$

59. $g(x) = x^3 - 6$ **60.** $g(x) = x^3 + 9$

61. $g(x) = \sqrt{x + 2}, x \geq -2$ **62.** $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$

63. $h(x) = x^2 - 4, x \geq 0$ **64.** $f(x) = x^2 - 3, x \geq 0$

65. $g(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ **66.** $f(x) = \sqrt[3]{x} - 2$

Para cada función uno a uno, **a)** *determina $f^{-1}(x)$ y* **b)** *grafica $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ sobre los mismos ejes.*

67. $f(x) = 2x + 8$ **68.** $f(x) = -3x + 6$

69. $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$ **70.** $f(x) = -\sqrt{x}, x \geq 0$

71. $f(x) = \sqrt{x - 1}, x \geq 1$ **72.** $f(x) = \sqrt{x + 4}, x \geq -4$

73. $f(x) = \sqrt[3]{x + 3}$ **74.** $f(x) = \sqrt[3]{x}$

75. $f(x) = \dfrac{1}{x}, x > 0$ **76.** $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Para cada par de funciones inversas, demuestra que $\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = x$ y $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$.

77. $f(x) = x - 7, f^{-1}(x) = x + 7$ **78.** $f(x) = -2x, f^{-1}(x) = -\dfrac{1}{2}x$

79. $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 3, f^{-1}(x) = 2x - 6$ **80.** $f(x) = -\dfrac{1}{3}x + 2, f^{-1}(x) = -3x + 6$

81. $f(x) = \sqrt[3]{x + 7}, f^{-1}(x) = x^3 - 7$ **82.** $f(x) = \sqrt[3]{x + 9}, f^{-1}(x) = x^3 - 9$

83. $f(x) = \dfrac{3}{x}, f^{-1}(x) = \dfrac{3}{x}$ **84.** $f(x) = -\dfrac{2}{x}, f^{-1}(x) = -\dfrac{2}{x}$

85. $f(x) = x^2 + 1, x \geq 0, f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}$ **86.** $f(x) = \sqrt{x + 5}, f^{-1}(x) = x^2 - 5, x \geq 0$

102. Área superficial El área superficial, S, de un globo esférico de radio r, en pulgadas, se determina mediante $S(r) = 4\pi r^2$. Si el globo se infla a una razón constante mediante una máquina, entonces el radio del globo es una función del tiempo. Supón que esta función es $r(t) = 1.2t$, donde t está en segundos.



a) Determina el radio del globo a los 2 segundos.

b) Determina el área superficial a los 2 segundos.

c) Expresa el área superficial como función del tiempo, al determinar $S \circ r$.

d) Con la función determinada en el inciso **c)**, determina el área superficial después de 2 segundos.

e) ¿Tus respuestas a los incisos **b)** y **d)** concuerdan? Si no, explica por qué no.

Actividad grupal

Discute y responde el ejercicio 103, en equipo.

103. Considera la función $f(x) = 2^x$. Este es un ejemplo de una *función exponencial*, que se estudiará en la siguiente sección.

a) Elabora la gráfica de esta función, sustituyendo valores para x y determinar los valores correspondientes para $f(x)$.

b) ¿Crees que esta función tiene una inversa? Explica tu respuesta.

c) Con la gráfica del inciso **a)**, dibuja la función inversa, $f^{-1}(x)$, sobre los mismos ejes.

d) Explica cómo obtuviste la gráfica de $f^{-1}(x)$.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.3] **104.** Divide $\left|\frac{-9}{4}\right| \div \left|\frac{-4}{9}\right|$.

[3.5] **105.** Determina la ecuación de una recta en forma general, que pase a través de $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ y sea paralela a la gráfica de $2x + 3y - 9 = 0$.

[6.3] **106.** Simplifica $\dfrac{\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x}}{\frac{x}{6}}$.

[6.4] **107.** Resuelve la fórmula $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ para p.

[8.1] **108.** Resuelve $x^2 + 2x - 10 = 0$ completando el cuadrado.

9.2 Funciones exponenciales

1 Gráficas de funciones exponenciales

2 Resolución de problemas aplicados de funciones exponenciales

1 Gráficas de funciones exponenciales

Existen muchas aplicaciones de las funciones exponenciales. Algunos ejemplos incluyen, el crecimiento de poblaciones, la duplicación de bacterias en un experimento de biología, el valor del dinero de una cuenta bancaria con interés compuesto, el declive en la cantidad de carbono 14 restante en un fósil, y muchas otras. Las gráficas que se muestran en las **Figuras 9.11** y **9.12** de la página 617, muestran dos ejemplos de funciones exponenciales.

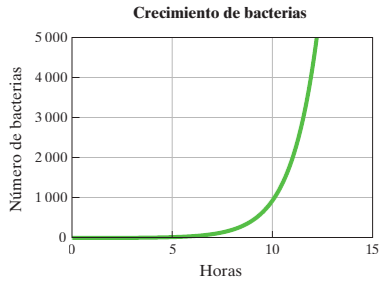


FIGURA 9.11

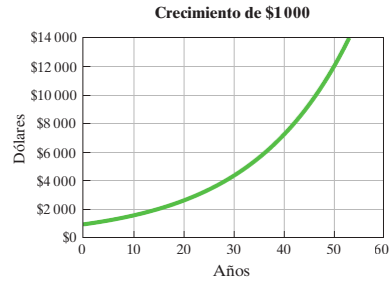


FIGURA 9.12

Comprende el Álgebra

¿Cuál es la diferencia entre las dos funciones

$f(x) = 2^x$ y $g(x) = x^2$?

Función exponencial

$f(x) = 2^x$ ← exponente variable

Observa la ubicación de la variable x. En una función *exponencial*, la variable está en la posición del *exponente*.

Función polinomial (cuadrática)

$g(x) = x^2$ ← base variable

En una función polinomial (en este caso cuadrática), la variable está en la posición de la *base*.

Como se aprecia en la siguiente definición, una función exponencial siempre tendrá un exponente variable.

Función exponencial

Para cualquier número real $a > 0$ y $a \neq 1$,

$$f(x) = a^x \quad \text{o} \quad y = a^x$$

es una **función exponencial**.

Una función exponencial, es una función de la forma $f(x) = a^x$, o $y = a^x$, donde a es un número real positivo distinto de 1. Observa que, la variable está en el exponente.

Ejemplos de funciones exponenciales

$$f(x) = 2^x, \qquad y = 5^x, \qquad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Las funciones exponenciales pueden graficarse mediante la selección de valores en términos de x, la determinación de los valores correspondientes de y, o $f(x)$, y el trazado de puntos.

Antes de graficar funciones exponenciales, se discutirán algunas características de la gráficas de las funciones exponenciales.

Gráficas de las funciones exponenciales

Para toda función exponencial de la forma $y = a^x$ o $f(x) = a^x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$,

1. El dominio de la función es $(-\infty, \infty)$.
2. El rango de la función es $(0, \infty)$.
3. La gráfica de la función pasa a través de los puntos $\left(-1, \frac{1}{a}\right)$, $(0,1)$ y $(1, a)$.

EJEMPLO 1 Elabora la gráfica de la función exponencial $y = 2^x$. Indica el dominio y el rango de la función.

Solución La función es de la forma $y = a^x$, donde $a = 2$. Primero, construye una tabla de valores. En la tabla, los tres puntos mencionados en el punto 3 del recuadro, se muestran en verde.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

Ahora traza estos puntos y conéctalos con una curva lisa (**Figura 9.13** de la página 618). Los tres pares ordenados en verde en la tabla, se marcan en gris sobre la gráfica.

Comprende el Álgebra

Cuando graficas funciones de la forma $y = a^x$ o $f(x) = a^x$, puedes predecir la forma de la gráfica al observar los tres puntos.

$$\left(-1, \frac{1}{a}\right),\ (0,1) \text{ y } (1,a)$$

- Cuando $a > 1$, la gráfica se vuelve casi horizontal a la izquierda de $\left(-1, \frac{1}{a}\right)$ y un poco vertical hacia la derecha de $(1,a)$; consulta el ejemplo 1.
- Cuando $0 < a < 1$, la gráfica se vuelve casi horizontal a la derecha de $(1,a)$ y un poco vertical a la izquierda de $\left(-1, \frac{1}{a}\right)$; consulta el ejemplo 2.

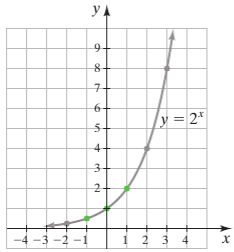


FIGURA 9.13

El dominio de esta función, es el conjunto de números reales, $\mathbb{R}$, o $(-\infty, \infty)$. El rango es $\{y | y > 0\}$ o $(0, \infty)$.

Ahora resuelve el ejercicio 9

EJEMPLO 2 Elabora la gráfica de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Indica el dominio y el rango de la función.

Solución Esta función es de la forma $y = a^x$, donde $a = \frac{1}{2}$. Construye una tabla de valores y traza la curva (**Figura 9.14**).

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

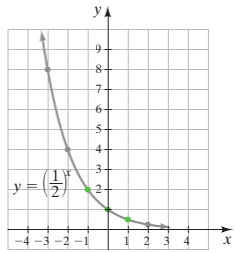


FIGURA 9.14

El dominio es el conjunto de números reales, $\mathbb{R}$, o $(-\infty, \infty)$. El rango es $\{y | y > 0\}$ o $(0, \infty)$.

Ahora resuelve el ejercicio 13

Observa que, las gráficas de las **Figuras 9.13** y **9.14**, representan funciones uno a uno, pues cada gráfica pasa la prueba de la recta horizontal.

SUGERENCIA ÚTIL

Cuando graficas funciones exponenciales de la forma $y = a^x$, donde $x > 0$, si:

- $a > 1$, la gráfica se elevará de izquierda a derecha. Observa la gráfica de $y = 2^x$ en la **Figura 9.13**.
- $0 < a < 1$, la gráfica caerá de izquierda a derecha. Observa la gráfica de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en la **Figura 9.14**.

Siempre que encuentres una función exponencial con un exponente negativo, tal como $y = 2^{-x}$, puedes recordar las reglas de los exponentes para ver que:

$$\begin{aligned} y &= 2^{-x} \\ &= \frac{1}{2^x} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^x \end{aligned}$$

Por tanto, la gráfica de $y = 2^{-x}$ es la gráfica de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, que se muestra en la **Figura 9.14**.

De igual manera, cuando encuentres una función como $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$, puedes usar las reglas de los exponentes para ver que:

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$$
$$= \left(\frac{2}{1}\right)^{x}$$
$$= 2^x$$

En consecuencia, la gráfica de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ es la gráfica de $y = 2^x$, que se muestra en la **Figura 9.13** de la página 618.

2 Resolución de problemas aplicados de funciones exponenciales

Las funciones exponenciales se usan frecuentemente para describir el crecimiento y el decaimiento de ciertas cantidades. En los siguientes cinco ejemplos se ilustran funciones exponenciales.

EJEMPLO 3 **Suma de centavos** Jimena le dijo a su hija que, si hacía sus labores domésticas, recibiría 2 centavos la primera semana y la cantidad se duplicaría cada semana durante las siguientes 10 semanas. El número de centavos que recibiría su hija en cualquier semana dada, w, puede determinarse mediante la función $n(w) = 2^w$. Determina el número de centavos que Jimena daría a su hija en la semana 8.

Solución Al evaluar 2^8, se determina que en la semana 8 Jimena le daría a su hija 256 centavos, o \$2.56.

Ahora resuelve el ejercicio 27

EJEMPLO 4 **Valor de un Jeep** Ronaldo acaba de comprar un nuevo Jeep Compass por \$22 000. Supón que el valor del Jeep se deprecia a una tasa de 20% anual. Por tanto, el valor del Jeep es 80% del valor del año previo. Dentro de un año, su valor será \$22 000(0.80). Dentro de dos años, su valor será $\$22\,000\,(0.80)\,(0.80) = \$22\,000\,(0.80)^2$, etcétera. Por tanto, la fórmula para el valor del Jeep es



$$v(t) = 22\,000\,(0.80)^t$$

donde t es el tiempo en años. Determina el valor del Jeep **a)** dentro de 1 año y **b)** dentro de 5 años.

Solución

a) Para determinar el valor dentro de 1 año, sustituye 1 por t.

$$v(t) = 22\,000\,(0.80)^t$$
$$v(1) = 22\,000\,(0.80)^1 \quad \text{Sustituye 1 por } t.$$
$$= 17\,600$$

Dentro de un año, el valor del Jeep será de \$17 600.

b) Para determinar el valor dentro de 5 años, sustituye 5 por t.

$$v(t) = 22\,000\,(0.80)^t$$
$$v(5) = 22\,000\,(0.80)^5 \quad \text{Sustituye 5 por } t.$$
$$= 22\,000\,(0.32768)$$
$$= 7208.96$$

Dentro de cinco años, el valor del Jeep será de \$7208.96.

Ahora resuelve el ejercicio 29

Anteriormente se utilizó la fórmula del interés compuesto para determinar la cantidad de dinero acumulado en una cuenta de ahorros o en cualquier otra de inversión.

Fórmula de interés compuesto

El monto acumulado, A, en una cuenta de interés compuesto, se puede determinar usando la fórmula

$$A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

donde p es el principal o el monto de inversión inicial, r es la tasa de interés como decimal, n es el número de periodos de composición al año y t es el plazo en años.

EJEMPLO 5 **Interés compuesto** Esteban invierte $5000 en un certificado de depósito (CD) con 2.5% de interés compuesto trimestralmente durante 3 años. Determina el valor del CD después de 3 años.

Solución Entiende Se indica que el principal, p, es de $5000 y que la tasa de interés, r, es de 2.5%, o 0.025. Puesto que el interés se compone trimestralmente, el número de periodos de composición, n, es 4. El dinero se invierte durante 3 años; en consecuencia, t es 3.

Comprende el Álgebra

Cuando uses la fórmula de interés compuesto, deberás tener cuidado en escribir la tasa de interés como decimal. Por ejemplo, una tasa de interés de 5% significa que $r = 0.05$. Una tasa de interés de 2.75% significa que $r = 0.0275$, etcétera.

Cuando escribas n, el número de periodos de composición al año, estos son los valores de uso más común:

semestralmente: $n = 2$
trimestralmente: $n = 4$
mensualmente: $n = 12$

Traduce Sustituye estos números en la fórmula de interés compuesto y evalúa.

$$\begin{aligned} A &= p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \\ &= 5000\left(1 + \frac{0.025}{4}\right)^{(4\cdot 3)} \\ &= 5000\,(1 + 0.00625)^{12} \\ &= 5000\,(1.00625)^{12} \\ &\approx 5000\,(1.0776326) \\ &\approx 5388.16 \end{aligned}$$

Responde Los $5000 originales crecerán a aproximadamente $5388.16 después de 3 años.

Ahora resuelve el ejercicio 31

EJEMPLO 6 **Datación con carbono 14** La datación con carbono 14, la usan los científicos para determinar la edad de fósiles y artefactos. La fórmula usada en la datación con carbono es

$$A = A_0 \cdot 2^{-t/5600}$$

donde A_0 es la cantidad de carbono 14 presente cuando se formó el fósil y A es la cantidad de carbono 14 presente después de t años. Si 500 gramos de carbono 14 estuvieron presentes cuando murió un organismo, ¿cuántos gramos permanecerán en el fósil 2000 años después?



Solución Entiende Cuando el organismo murió, estaban presentes 500 gramos de carbono 14. Por tanto, $A_0 = 500$. Para determinar cuántos gramos de carbono 14 permanecerán 2 000 años después, sustituye 2000 por t en la fórmula.

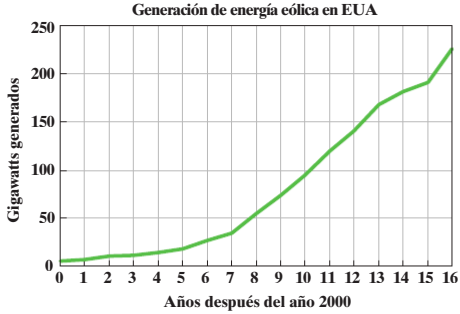
Traduce
$$\begin{aligned} A &= A_0 \cdot 2^{-t/5600} \\ &= 500\,(2)^{-2000/5600} \end{aligned}$$

Realiza
$$\begin{aligned} &\approx 500\,(0.7807092) \quad \text{Obtenido en una calculadora.} \\ &\approx 390.35 \text{ grams} \end{aligned}$$

Responde Después de 2000 años, todavía estarán presentes alrededor de 390.35 de los 500 gramos originales de carbono 14.

Ahora resuelve el ejercicio 37

EJEMPLO 7 **Energía eólica** La **Figura 9.15**, muestra la cantidad anual de energía eólica generada en Estados Unidos, durante los años 2000-2016 en gigawatts de electricidad.



Fuente: U.S. Dept. of Energy

FIGURA 9.15



Una función exponencial que aproxima estrechamente esta curva es $P(t) = 5.93(1.28)^t$, donde $P(t)$ es la cantidad de energía eólica, en gigawatts de electricidad, y t es el número de años desde el año 2000. Si supones que esta tendencia continúa, usa esta función para estimar la cantidad de energía eólica que se generará en los años **a)** 2020 y **b)** 2025. Redondea tu respuesta a la centésima de gigawatt más cercana.

Solución

a) Entiende En esta función, t es el número de años desde el año 2000. Por tanto, el año 2020 se representa mediante $t = 2020 - 2000 = 20$ Para estimar la cantidad de energía eólica generada en Estados Unidos en el año 2020, se necesita evaluar la función para $t = 20$ usando una calculadora.

Traduce y Realiza
$$P(t) = 5.93(1.28)^t$$
$$P(20) = 5.93(1.28)^{20} \approx 826.52$$

Responde Por tanto, si la tendencia continúa, la cantidad de energía eólica generada en Estados Unidos en el año 2020, será de aproximadamente 826.52 gigawatts.

b) El año 2025 se representa mediante$t = 2025 - 2000 = 25$. Se necesita evaluar $P(25)$.

$$P(t) = 5.93(1.28)^t$$
$$P(25) = 5.93(1.28)^{25} \approx 2839.91$$

Responde Por tanto, si la tendencia continúa, la cantidad de energía eólica generada en Estados Unidos en el año 2025, será de aproximadamente 2839.91 gigawatts.

Ahora resuelve el ejercicio 47

9.2 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

periodos base caerá exponente principal se elevará tasa tiempo

1. En una función exponencial, la variable está en la posición de _____.
2. En una función cuadrática, la variable está en la posición de _____.
3. Cuando elaboras la gráfica de funciones exponenciales de la forma $y = a^x$, si $a > 1$, la gráfica _____ de izquierda a derecha.
4. Cuando elaboras la gráfica de funciones exponenciales de la forma $y = a^x$, si $0 < a < 1$, la gráfica _____ de izquierda a derecha.

5. En la fórmula de interés compuesto $A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$, p es el _____ o el monto de inversión inicial.

6. En la fórmula de interés compuesto $A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$, n es el número de _____ de composición por año.

Practica tus habilidades

Elabora la gráfica de cada función exponencial.

7. $y = 2^x$ **8.** $y = 3^x$ **9.** $y = 4^x$ **10.** $y = 5^x$

11. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **12.** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ **13.** $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ **14.** $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

15. $y = 3^{-x}$ **16.** $y = 4^{-x}$ **17.** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$ **18.** $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{-x}$

19. $y = 2^{x-1}$ **20.** $y = 2^{x+1}$ **21.** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ **22.** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$

23. $y = 2^x + 1$ **24.** $y = 2^x - 1$ **25.** $y = 3^x - 1$ **26.** $y = 3^x + 2$

Resolución de problemas

27. Duplicación Si \$2 se duplican cada día durante 9 días, determina el monto al día 9.

28. Duplicación Si \$2 se duplican cada día durante 12 días, determina el monto al día 12.

29. Valor de una SUV El costo de una SUV nueva, es de \$24 000. Si se deprecia a una tasa de 18% anual, el valor de la SUV después de t años, puede aproximarse mediante la fórmula:

$$V(t) = 24\,000(0.82)^t$$

Determina el valor de la SUV después de 4 años.

30. Valor de un ATV El costo de un vehículo todoterreno nuevo es \$6200. Si se deprecia a una tasa de 15% anual, el valor del ATV después de t años, puede aproximarse mediante la fórmula

$$V(t) = 6\,200(0.85)^t$$

Determina el valor del ATV después de 10 años.



31. Interés compuesto Si Darío invierte \$5000 a 6% de interés compuesto trimestralmente, determina el monto después de 4 años (consulta el ejemplo 5).

32. Interés compuesto Si el Sr. Terrazas invierte \$8000 a 4% de interés compuesto trimestralmente, determina el monto después de 5 años.

33. Certificado de depósito Joana recibe un bono de \$5000 por reunir su cuota de ventas anual. Ella invierte el bono en un certificado de depósito (CD) que paga 4.2% de interés compuesto mensualmente. Determina el valor del CD después de 5 años.

34. Cuenta de mercado de dinero Martha invierte \$2500 en una cuenta de mercado de dinero que paga 3.6% de interés compuesto trimestralmente. Determina el monto acumulado después de 2 años.

35. Cuenta de ahorros Bruno deposita \$3000 en una cuenta de ahorros que paga 2.4% de interés compuesto trimestralmente. Determina el monto acumulado después de 2 años.

36. Cuenta para el retiro Para invertir para su retiro, John invierte \$10000 en una cuenta que paga 6% de interés compuesto semestralmente. Determina el monto acumulado después de 25 años.

37. Datación con carbono 14 Si 12 gramos de carbono 14 están presentes originalmente en cierto hueso animal, ¿cuánto permanecerá al final de 1000 años? Usa $A = A_0 \cdot 2^{-t/5\,600}$ (consulta el ejemplo 6).

38. Datación con carbono 14 Si 60 gramos de carbono 14 están presentes originalmente en el fósil que James encontró en un sitio arqueológico, ¿cuánto permanecerá después de 10000 años?

39. Sustancia radiactiva La cantidad de una sustancia radiactiva presente, en gramos, después del tiempo t, en años, está dada por la fórmula $y = 80(2)^{-0.4t}$. Determina el número de gramos presentes después de **a)** 10 años y **b)** 100 años.

40. Sustancia radiactiva La cantidad de una sustancia radiactiva presente, en gramos, después del tiempo t, en años, está dada por la fórmula $y = 20(3)^{-0.6t}$. Determina el número de gramos presentes después de 4 años.

41. Bacterias en una placa de Petri Cinco bacterias se colocan en una placa de Petri. La población se triplica cada día. La fórmula para el número de bacterias en la placa, un día t, es

$$N(t) = 5(3)^t,$$

donde t es el número de días después de que las cinco bacterias se colocan en la placa. ¿Cuántas bacterias hay en la placa, 2 días después de que las cinco bacterias se colocan en la placa?

42. Bacterias en una placa de Petri Consulta el ejercicio 41. ¿Cuántas bacterias hay en la placa, 6 días después de que la cinco bacterias se colocan en la placa?

43. Población de águilas calvas La población de águilas calvas, en Estados Unidos, ha crecido exponencialmente desde el año 1980. La función exponencial que aproxima estrechamente el número de pares de águilas calvas que anidan en Estados Unidos, es:

$$N(t) = 1\,483.035(1.062)^t$$

En esta función, $N(t)$ es el número de pares de águilas calvas que anidan en Estados Unidos y t es el número de años desde el año 1980. Si supones que esta tendencia continúa, estima el número de pares de águilas calvas que anidan en Estados Unidos en los años **a)** 2020 y **b)** 2025.



44. Población de manatíes La población de manatíes, en Estados Unidos, ha crecido exponencialmente desde el año 2000. La función exponencial que aproxima estrechamente el número de manatíes en Estados Unidos, es:

$$N(t) = 1\,774.256(1.081)^t$$

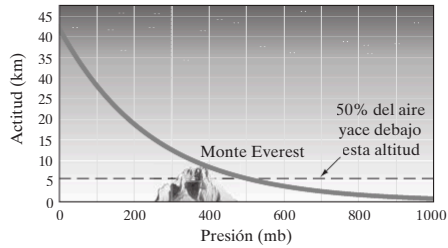
En esta función, $N(t)$ es el número de manatíes en Estados Unidos y t es el número de años desde el año 2000. Si supones que esta tendencia continúa, estima el número de manatíes en Estados Unidos en los años **a)** 2020 y **b)** 2025.



45. Población La población futura esperada de Ackworth, que ahora tiene 200 residentes, se puede aproximar mediante la fórmula $y = 2\,000(1.2)^{0.1t}$, donde t es el número de años en el futuro. Determina la población esperada de esa ciudad en **a)** 10 años y **b)** 50 años.

46. Población La población futura esperada de Antwerp, que actualmente tiene 6 800 residentes, puede aproximarse mediante la fórmula $y = 6\,800(1.4)^{-0.2t}$, donde t es el número de años en el futuro. Determina la población esperada de la ciudad 30 años en el futuro.

47. Presión atmosférica La presión atmosférica varía con la altitud. Mientras mayor es la altitud, menor es la presión, como se muestra en la siguiente gráfica.



Se puede usar la ecuación $A = 41.97(0.996)^x$ para estimar la altitud, A, en kilómetros, para una presión dada, x, en milibares (mb). Si la presión atmosférica en lo alto del monte Everest es de aproximadamente 389 mb, estima la altitud de la cima del monte Everest.

48. Población de Puerto Rico La población de Puerto Rico ha declinado a una tasa exponencial desde el año 2000. La función exponencial que aproxima estrechamente la población de Puerto Rico, es:

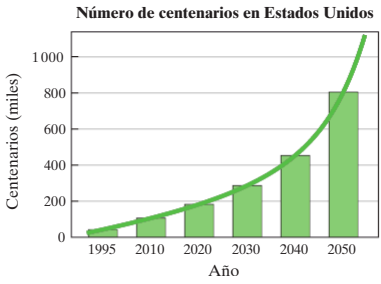
$$P(t) = 3\,794\,054(0.998)^t$$

En esta función, $P(t)$ es la población de Puerto Rico y t es el número de años desde el año 2000. Si supones que esta tendencia continúa, estima la población de Puerto Rico en los años **a)** 2020 y **b)** 2025.

49. Centenarios Con base en proyecciones de la oficina censal estadounidense, el número de centenarios (personas con edades de 100 años o más) crecerá exponencialmente después del año 1995 (consulta la gráfica de la página 624). La función

$$f(t) = 71.24(1.045)^t$$

puede usarse para aproximar el número de centenarios, en miles, en Estados Unidos, donde t es el tiempo en años desde el año 1995. Usa esta función para estimar el número de centenarios en los años **a)** 2060 y **b)** 2070.



Fuente: US Census Bureau.U.

50. Población de Hong Kong La población de Hong Kong ha aumentado exponencialmente desde el año 1960. La función exponencial que aproxima, de manera cercana, la población de Hong Kong, es

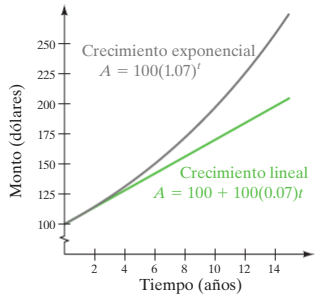
$$P(t) = 3\,397\,356\,(1.015)^t$$

En esta función, $P(t)$ es la población de Hong Kong y t es el número de años desde el año 1960. Si supones que esta tendencia continúa, estima la población de Hong Kong en los años **a)** 2020 y **b)** 2025.



Hong Kong

51. Interés simple y compuesto La siguiente gráfica, indica el crecimiento lineal de \$100 invertidos a 7% de interés simple y el crecimiento exponencial a 7% de interés compuesto anualmente. En las fórmulas, A representa el monto en dólares y t representa el tiempo en años.



a) Usa la gráfica para estimar el tiempo de duplicación para \$100, invertidos a 7% de interés simple.

b) Estima el tiempo de duplicación para \$100 invertidos a 7% de interés compuesto anualmente.

c) Estima la diferencia en montos, después de 10 años, para \$100 invertidos por cada método.

d) La mayoría de los bancos componen el interés diariamente, en lugar de anualmente. ¿Qué efecto tiene esto sobre el monto total? Explica.

52. En el ejercicio 51, se graficó el monto para varios años, cuando \$100 se invierten a 7% de interés simple y a 7% de interés compuesto anualmente.

a) Usa la fórmula de interés compuesto para determinar el monto, si \$100 se componen diariamente a 7% durante 10 años (supón 365 días por año).

b) Estima la diferencia en el monto en 10 años, para los \$100 invertidos a 7% de interés simple, frente al 7% de interés compuesto diariamente.

Ejercicios conceptuales y de redacción

53. Considera la función exponencial $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

a) Conforme x aumenta, ¿qué ocurre con y?

b) ¿Podría y ser 0? Explica.

c) ¿Podría y ser negativa? Explica.

54. Considera la función exponencial $y = 2^x$.

a) Conforme x aumenta, ¿qué ocurre con y?

b) ¿Podría y ser 0? Explica.

c) ¿Podría y ser negativa? Explica.

55. Considera las ecuaciones $y = 2^x$ y $y = 3^x$.

a) ¿Ambas gráficas tendrán las mismas intersecciones con el eje de las y o serán diferentes? Determina sus intersecciones con el eje de las y.

b) ¿Cómo se compararán las gráficas de las dos funciones?

56. Considera la ecuación $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

a) ¿Ambas gráficas tendrán las mismas intersecciones con el eje de las y o serán diferentes? Determina sus intersecciones con el eje de las y .

b) ¿Cómo se compararán las gráficas de las dos funciones?

57. Anteriormente, se dijo que, para funciones exponenciales $f(x) = a^x$, el valor de a no puede ser igual a 1.

a) ¿A qué se parece la gráfica de $f(x) = a^x$ cuando $a = 1$?

b) ¿$f(x) = a^x$ es una función, cuando $a = 1$?

c) ¿$f(x) = a^x$ tiene una función inversa, cuando $a = 1$? Explica tu respuesta.

58. ¿Cómo se compararán las gráficas de $y = a^x$ y $y = a^x + k, k > 0$,?

59. ¿Cómo se compararán las gráficas de $y = a^x$ y $y = a^x - k, k > 0$,?

60. Para $a > 1$, ¿cómo se compararán las gráficas de $y = a^x$ y $y = a^{x+1}$?

61. Para $a > 1$, ¿cómo se compararán las gráficas de $y = a^x$ y $y = a^{x+2}$?

62. **a)** ¿$y = x^\pi$ es una función exponencial? Explica.

b) ¿$y = \pi^x$ es una función exponencial? Explica.

Problemas de desafío

63. Supón que Robert le da a Carolina \$1 el día 1, \$2 el día 2, \$4 el día 3, \$8 el día 4, y continúa este proceso de duplicación durante 30 días.

a) Determina cuánto le dará Robert a Carolina el día 15.

b) Determina cuánto le dará Robert a Carolina el día 20.

c) Expresa el monto, usando forma exponencial, que Robert le da a Carolina el día n.

d) ¿Cuánto, en dólares, le dará Robert a Carolina el día 30? Escribe el monto en forma exponencial. Luego, usa una calculadora para evaluar.

e) Expresa el monto total que Robert le da a Carolina durante los 30 días, como una suma de términos exponenciales. (No determines el valor real.)

Actividad grupal

64. Las funciones, que son exponenciales o aproximadamente exponenciales, las verás con frecuencia.

a) Cada miembro del equipo tiene que determinar de manera individual una función no dada en esta sección, que pueda aproximar una función exponencial. Puedes usar periódicos, libros u otras fuentes.

b) En equipo, discutan las funciones de cada uno. Determinen si cada función presentada es una función exponencial.

c) En equipo, escriban un ensayo en donde se discuta cada una de las funciones exponenciales y se indique por qué consideran que cada función es exponencial.

Ejercicios de repaso acumulativo

[5.1] **65.** Considera el polinomio

$$2.3x^4y - 6.2x^6y^2 + 9.2x^5y^2$$

a) Escribe el polinomio en orden decreciente de la variable x.

b) ¿Cuál es el grado del polinomio?

c) ¿Cuál es el coeficiente principal?

[5.2] **66.** Si $f(x) = x + 5$ y $g(x) = x^2 - 2x + 4$, determina $(f \cdot g)(x)$.

[7.1] **67.** Escribe $\sqrt{a^2 - 8a + 16}$ como un valor absoluto.

[7.3] **68.** Simplifica $\sqrt[4]{\dfrac{32x^5y^9}{2y^3z}}$.

9.3 Funciones logarítmicas

1. Definición de logaritmo
2. Conversión de la forma exponencial a la forma logarítmica
3. Gráficas de las funciones logarítmicas
4. Comparación de las gráficas de funciones exponenciales y las logarítmicas
5. Resolución de problemas aplicados de funciones logarítmicas

1 Definición de logaritmo

Considera la función exponencial $y = 2^x$. En la **Figura 9.13** de la página 618, se ve que la gráfica de esta función pasa la prueba de la recta horizontal y, por tanto, esta función es una función uno a uno y tiene una inversa. Para determinar la inversa de $y = 2^x$, intercambia x y y para obtener la ecuación $x = 2^y$. Para resolver esta ecuación en términos de y, se introduce una nueva definición.

Logaritmo

Para $x > 0$ y $a > 0$, $a \neq 1$:

$$y = \log_a x \text{ significa } x = a^y$$

La expresión $\log_a x$, se lee "el logaritmo de x a la base a" o simplemente "log, base a, de x."

La expresión $\log_a x$, representa el *exponente* al cual debe elevarse la base a para obtener x. En resumen, *un logaritmo es un exponente.*

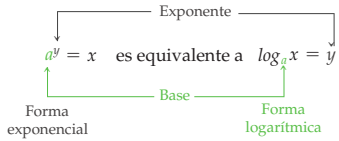
Usando la definición, puedes resolver la ecuación $x = 2^y$ en términos de y, al reescribir la ecuación exponencial como una ecuación que involucra un logaritmo.

$$\underbrace{x = 2^y}_{\text{Forma exponencial}} \quad \text{es una ecuación equivalente a} \quad \underbrace{y = \log_2 x}_{\text{Forma logarítmica}}$$

Por tanto, $y = 2^x$ y $y = \log_2 x$, son funciones inversas. En general, $y = a^x$ y $y = \log_a x$ son funciones inversas.

2 Conversión de la forma exponencial a la forma logarítmica

Para convertir de una ecuación exponencial a una ecuación logarítmica, considera el siguiente diagrama:



Comprende el Álgebra

Una oración útil cuando se trabaja con logaritmos es:

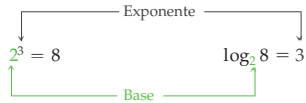
Un logaritmo es un exponente.

La expresión $\log_a x$, representa el exponente al cual debe elevarse la base a para obtener x.

Por ejemplo, $\log_2 8$, representa el exponente al cual debe elevarse 2 para obtener 8. En consecuencia,

$\log_2 8 = 3$, ya que $2^3 = 8$

Por ejemplo:



En consecuencia, la ecuación exponencial $2^3 = 8$, es equivalente a la ecuación logarítmica $\log_2 8 = 3$ o $3 = \log_2 8$.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de cómo una expresión exponencial se puede convertir en una expresión logarítmica.

Forma exponencial	Forma logarítmica
$10^0 = 1$	$\log_{10} 1 = 0$
$4^2 = 16$	$\log_4 16 = 2$
$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$	$\log_{1/2} \frac{1}{32} = 5$
$5^{-2} = \frac{1}{25}$	$\log_5 \frac{1}{25} = -2$

En seguida, se trabajarán ejemplos que involucran la conversión de la forma exponencial, a la forma logarítmica y viceversa.

EJEMPLO 1 Escribe cada ecuación en forma logarítmica.

a) $3^2 = 9$ **b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ **c)** $4^{-2} = \frac{1}{16}$ **d)** $7^{1/2} = \sqrt{7}$

Solución

a) $\log_3 9 = 2$ **b)** $\log_{1/2} \frac{1}{8} = 3$ **c)** $\log_4 \frac{1}{16} = -2$ **d)** $\log_7 \sqrt{7} = \frac{1}{2}$

Ahora resuelve el ejercicio 19

EJEMPLO 2

Escribe cada ecuación en forma exponencial.

a) $\log_2 32 = 5$ **b)** $\log_{1/3} \frac{1}{9} = 2$ **c)** $\log_5 \frac{1}{125} = -3$ **d)** $\log_9 3 = \frac{1}{2}$

Solución

a) $2^5 = 32$ **b)** $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ **c)** $5^{-3} = \frac{1}{125}$ **d)** $9^{1/2} = 3$

Ahora resuelve el ejercicio 3

EJEMPLO 3

Escribe cada ecuación en forma exponencial; luego, determina el valor de la variable.

a) $y = \log_7 49$ **b)** $2 = \log_a \left(\frac{4}{9}\right)$ **c)** $-2 = \log_3 x$ **d)** $y = \log_{25} 5$

Solución

a) $7^y = 49$. Ya que $7^2 = 49$ $y = 2$.

b) $a^2 = \frac{4}{9}$. Ya que $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$, $a = \frac{2}{3}$. Observa que, la base del logaritmo, a, debe ser mayor que 0. En consecuencia, aun cuando $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$ es también igual a $\frac{4}{9}$, como $-\frac{2}{3}$ no es mayor que 0, $-\frac{2}{3}$ no es una respuesta posible para a.

c) $3^{-2} = x$. Ya que $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$, $x = \frac{1}{9}$.

d) $25^y = 5$. Ya que $25^{1/2} = \sqrt{25} = 5$, $y = \frac{1}{2}$.

Ahora resuelve el ejercicio 53

EJEMPLO 4

Evalúa lo siguiente.

a) $\log_5 25$ **b)** $\log_5 625$ **c)** $\log_5 5$

d) $\log_5 1$ **e)** $\log_5 \left(\frac{1}{5}\right)$ **f)** $\log_5 \sqrt{5}$

Solución

a) $\log_5 25 = 2$ ya que $5^2 = 25$.

b) $\log_5 625 = 4$ ya que $5^4 = 625$.

c) $\log_5 5 = 1$ ya que $5^1 = 5$.

d) $\log_5 1 = 0$ ya que $5^0 = 1$.

e) $\log_5 \left(\frac{1}{5}\right) = -1$ ya que $5^{-1} = \frac{1}{5}$.

f) $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$ ya que $5^{1/2} = \sqrt{5}$.

Ahora resuelve el ejercicio 75

SUGERENCIA ÚTIL

Dado que un logaritmo es un exponente, es muy importante conocer las reglas de los exponentes cuando se evalúan expresiones logarítmicas. Sería útil revisar las reglas de los exponentes de la sección 1.5 en la página 47, así como la relación entre exponentes radicales y racionales de la Sección 7.2 de la página 464.

3 Gráficas de las funciones logarítmicas

Ahora estás listo para estudiar las funciones logarítmicas.

Función logarítmica

Para cualquier número real $a > 0$, $a \neq 1$ y $x > 0$,

$$f(x) = \log_a x \text{ o } y = \log_a x$$

es una **función logarítmica**.

Ejemplos de funciones logarítmicas

$$f(x) = \log_5 x \qquad y = \log_{1/2} x \qquad g(x) = \log_5 x$$

Las funciones logarítmicas pueden graficarse al convertir la ecuación logarítmica en una ecuación exponencial y, luego, trazar los puntos.

Antes de graficar funciones logarítmicas, se discutirán algunas características de las gráficas de las funciones logarítmicas.

Gráficas de las funciones logarítmicas

Para todas las funciones logarítmicas de la forma $y = \log_a x$ o $f(x) = \log_a x$, donde $a > 0$, $a \neq 1$ y $x > 0$:

1. El dominio de la función es $(0, \infty)$.
2. El rango de la función es $(-\infty, \infty)$.
3. La gráfica pasa a través de los puntos $\left(\frac{1}{a}, -1\right)$, $(1, 0)$ y $(a, 1)$.

EJEMPLO 5 Elabora la gráfica de $y = \log_2 x$. Indica el dominio y el rango de la función.

Solución Esta es una ecuación de la forma $y = \log_2 x$, donde $a = 2$. $y = \log_a x$, significa $x = 2^y$. Al usar $x = 2^y$, construye una tabla de valores. La tabla será más sencilla de desarrollar al seleccionar valores para y y determinar los correspondientes valores para x. En la tabla, los tres puntos mencionados en la parte 3 del recuadro se muestran en verde.

x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

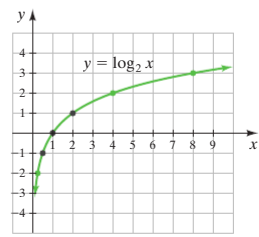


FIGURA 9.16

Ahora dibuja la gráfica (**Figura 9.16**). Los tres pares ordenados en verde en la tabla, se marcan en gris en la gráfica. El dominio, el conjunto de valores x, es $\{x|x > 0\}$ o $(0, \infty)$. El rango, el conjunto de valores y, es el conjunto de todos los números reales, $\mathbb{R}$ o $(-\infty, \infty)$.

Ahora resuelve el ejercicio 89

EJEMPLO 6 Elabora la gráfica de $y = \log_{1/2} x$. Indica el dominio y el rango de la función.

Solución Esta es una ecuación de la forma $y = \log_a x$, donde $a = \frac{1}{2}$. La ecuación $y = \log_{1/2} x$ significa $x = \left(\frac{1}{2}\right)^y$. Construye una tabla de valores, al seleccionar valores para y y determinar los correspondientes valores de x.

Comprende el Álgebra

Cuando grafiques funciones de la forma $y = \log_a x$ o $f(x) = \log_a x$, puedes predecir la forma de la gráfica al observar tres puntos:

$\left(\frac{1}{a}, -1\right)$, $(1, 0)$, y $(a, 1)$.

- Cuando $a > 1$, la gráfica se vuelve casi vertical hacia la izquierda de $\left(\frac{1}{a}, -1\right)$ y un poco horizontal hacia la derecha de $(a,1)$; consulta el ejemplo 5.
- Cuando $0 < a < 1$, la gráfica se vuelve casi vertical hacia la izquierda de $(a,1)$ y un poco horizontal hacia la derecha de $\left(\frac{1}{a}, -1\right)$; consulta el ejemplo 6.

x	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

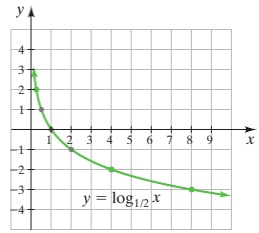


FIGURA 9.17

La gráfica se ilustra en la **Figura 9.17**. El dominio es $\{x|x > 0\}$ o $(0, \infty)$. El rango, es el conjunto de números reales, $\mathbb{R}$ o $(-\infty, \infty)$.

Ahora resuelve el ejercicio 93

Si estudias los dominios de los ejemplos 5 y 6, verás que los dominios, tanto de $y = \log_2 x$ como de $y = \log_{1/2} x$, son $\{x \mid x > 0\}$. De hecho, *para cualquier función logarítmica* $y = \log_a x$, *el dominio es* $\{x \mid x > 0\}$. Observa también que, las gráficas de los ejemplos 5 y 6, son ambas gráficas de funciones uno a uno.

4 Comparación de las gráficas de funciones exponenciales y las logarítmicas

Recuerda que, $y = a^x$ y $y = \log_a x$, son *funciones inversas*. Por tanto, puedes escribir: si $f(x) = a^x$, entonces $f^{-1}(x) = \log_a x$. En el siguiente recuadro, se resaltan algunas de las características de las gráficas de la función exponencial general $y = a^x$ y la función logarítmica general $y = \log_a x$.

Características gráficas

	FUNCIÓN EXPONENCIAL $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$	FUNCIÓN LOGARÍTMICA $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$
Dominio:	$(-\infty, \infty)$	$(0, \infty)$
Rango:	$(0, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
Puntos sobre la gráfica:	$\left(-1, \frac{1}{a}\right)$, $(0, 1)$, $(1, a)$	$\left(\frac{1}{a}, -1\right)$, $(1, 0)$, $(a, 1)$

En los pares ordenados, x se convierte en y, y y se convierte en x.

En la **Figura 9.18**, se muestran las gráficas de $y = a^x$ y $y = \log_a x$, en términos de $a > 1$. Observa que, las gráficas son simétricas en torno a la recta $y = x$.

Comprende el Álgebra

Dado que, $y = a^x$ y $y = \log_a x$, son funciones inversas, se aprecia lo siguiente:

- El rango de la función exponencial, es el dominio de la función logarítmica y viceversa.
- Si (a, b) es un punto sobre la gráfica de la función exponencial, entonces (b, a) es un punto sobre la gráfica de la función logarítmica.

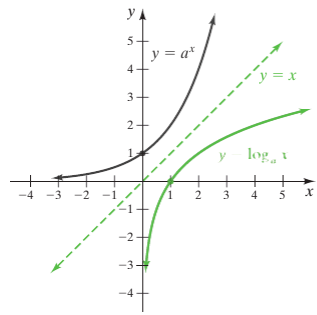


FIGURA 9.18

Las gráficas de $y = 2^x$ y $y = \log_2 x$, se muestran en la **Figura 9.19**. Las gráficas de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ y $y = \log_{1/2} x$, se muestran en la **Figura 9.20**. En cada figura, las gráficas son inversas una de otra y son simétricas con respecto a la recta $y = x$.

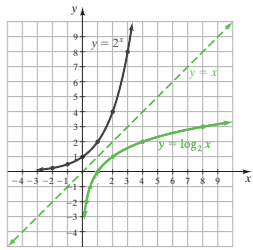


FIGURA 9.19

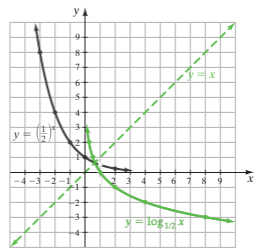


FIGURA 9.20

5 Resolución de problemas aplicados de funciones logarítmicas

Más adelante, se verán muchas aplicaciones de los logaritmos, pero ahora se observará una aplicación importante.

EJEMPLO 7 **Terremotos** Los logaritmos se usan para medir la magnitud de los terremotos. La escala Richter para medir terremotos, la desarrolló Charles R. Richter. La magnitud, R, de un terremoto en la escala Richter, está dada por la fórmula

$$R = \log_{10} I$$

donde I representa el número de veces que el terremoto es mayor (o más intenso) que la actividad medible más pequeña que puede medirse en un sismógrafo.



a) Si un terremoto mide 4 en la escala Richter, ¿cuántas veces más intenso fue que la actividad medible más pequeña?

b) ¿Cuántas veces más intenso es un terremoto que mide 5 en la escala Richter, que un terremoto que mide 4?

Solución

a) Entiende El número Richter, R, es 4. Para determinar cuántas veces más intenso es el terremoto que la actividad mensurable más pequeña, I, sustituye $R = 4$ en la fórmula y resuelve en términos de I.

Traduce
$$R = \log_{10} I$$
$$4 = \log_{10} I$$

Realiza
$$10^4 = I \qquad \text{Cambia a la forma exponencial.}$$
$$10\,000 = I$$

Responde En consecuencia, un terremoto que mide 4 en la escala Richter, es 10 000 veces más intenso que la actividad mensurable más pequeña.

b)
$$5 = \log_{10} I$$
$$10^5 = I \qquad \text{Cambia a la forma exponencial.}$$
$$100\,000 = I$$

Dado que $(10\,000)(10) = 100\,000$, un terremoto que mide 5 en la escala Richter es 10 veces más intenso que un terremoto que mide 4 en la escala Richter.

Ahora resuelve el ejercicio 99

9.3 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

logarítmica exponente simétricas base inversas dominio rango compuestas

1. La expresión $\log_a x$ representa el _____ al cual debe elevarse la base a para obtener x.
2. En general, $y = a^x$ y $y = \log_a x$, son funciones _____.
3. En las ecuaciones $a^y = x$ y $\log_a x = y$, a se llama _____.
4. $f(x) = \log_5 x$ es un ejemplo de una función _____.
5. Para una función logarítmica de la forma $f(x) = \log_a x$, el _____ es $\{x|x > 0\}$.
6. Las gráficas de $y = a^x$ y $y = \log_a x$, son _____ con respecto a la recta $y = x$.

Practica tus habilidades

Escribe cada ecuación en forma logarítmica.

7. $2^5 = 32$
8. $5^2 = 25$
9. $2^3 = 8$
10. $3^2 = 9$
11. $16^{1/2} = 4$
12. $49^{1/2} = 7$
13. $8^{1/3} = 2$
14. $16^{1/4} = 2$
15. $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$
16. $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$
17. $2^{-3} = \frac{1}{8}$
18. $6^{-3} = \frac{1}{216}$
19. $4^{-3} = \frac{1}{64}$
20. $5^{-4} = \frac{1}{625}$
21. $64^{1/3} = 4$
22. $81^{1/2} = 9$
23. $8^{-1/3} = \frac{1}{2}$
24. $16^{-1/2} = \frac{1}{4}$
25. $81^{-1/4} = \frac{1}{3}$
26. $32^{-1/5} = \frac{1}{2}$
27. $10^{0.8451} = 7$
28. $10^{1.0792} = 12$
29. $e^2 = 7.3891$
30. $e^{-1/2} = 0.6065$
31. $a^n = b$
32. $c^b = w$

Escribe cada ecuación en forma exponencial.

33. $\log_2 16 = 4$
34. $\log_5 125 = 3$
35. $\log_{1/3} \frac{1}{27} = 3$
36. $\log_{1/2} \frac{1}{64} = 6$
37. $\log_5 \frac{1}{25} = -2$
38. $\log_5 \frac{1}{625} = -4$
39. $\log_{49} 7 = \frac{1}{2}$
40. $\log_{64} 4 = \frac{1}{3}$
41. $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$
42. $\log_5 \sqrt[3]{5} = \frac{1}{3}$
43. $\log_{10} 100 = 2$
44. $\log_{10} 1\,000 = 3$
45. $\log_{10} \frac{1}{1\,000} = -3$
46. $\log_{10} \frac{1}{10\,000} = -4$
47. $\log_{10} 0.62 = -0.2076$
48. $\log_{10} 0.95 = -0.0223$
49. $\log_e 6.52 = 1.8749$
50. $\log_e 30 = 3.4012$
51. $\log_w s = -p$
52. $\log_r c = -a$

Escribe cada ecuación en forma exponencial; luego, determina el valor desconocido.

53. $\log_4 64 = y$
54. $\log_5 25 = y$
55. $\log_a 125 = 3$
56. $\log_a 81 = 4$
57. $\log_3 x = 3$
58. $\log_2 x = 5$
59. $\log_2 \frac{1}{16} = y$
60. $\log_8 \frac{1}{64} = y$

61. $\log_{1/2} x = 6$ **62.** $\log_{1/3} x = 4$ **63.** $\log_a \frac{1}{27} = -3$ **64.** $\log_a \frac{1}{16} = -4$

65. $\log_{25} 5 = y$ **66.** $\log_{36} 6 = y$

Evalúa lo siguiente.

67. $\log_{10} 1$ **68.** $\log_{10} 10$ **69.** $\log_{10} 100$ **70.** $\log_{10} 1\,000$

71. $\log_{10} 10\,000$ **72.** $\log_{10} 100\,000$ **73.** $\log_{10} \frac{1}{100}$ **74.** $\log_{10} \frac{1}{1\,000}$

75. $\log_9 9$ **76.** $\log_{12} 12$ **77.** $\log_7 \sqrt{7}$ **78.** $\log_7 \sqrt[3]{7}$

79. $\log_{100} 10$ **80.** $\log_{1\,000} 10$ **81.** $\log_3 \frac{1}{3}$ **82.** $\log_6 \frac{1}{6}$

83. $\log_8 \frac{1}{64}$ **84.** $\log_7 \frac{1}{49}$ **85.** $\log_3 \frac{1}{81}$ **86.** $\log_5 \frac{1}{125}$

Elabora la gráfica de la función logarítmica.

87. $y = \log_2 x$ **88.** $y = \log_3 x$ **89.** $y = \log_5 x$ **90.** $y = \log_4 x$

91. $y = \log_{1/2} x$ **92.** $y = \log_{1/3} x$ **93.** $y = \log_{1/5} x$ **94.** $y = \log_{1/4} x$

Elabora la gráfica de cada par de funciones sobre los mismos ejes.

95. $y = 2^x, y = \log_{1/2} x$ **96.** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y = \log_2 x$ **97.** $y = 2^x, y = \log_2 x$ **98.** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y = \log_{1/2} x$

Resolución de problemas

99. Terremoto Si la magnitud de un terremoto es de 7 en la escala Richter, ¿cuántas veces más intenso es el terremoto que la actividad medible más pequeña? Usa $R = \log_{10} I$ (consulta el ejemplo 7).

100. Terremoto Si la magnitud de un terremoto es de 5 en la escala Richter, ¿cuántas veces más intenso es el terremoto que la actividad medible más pequeña? Usa $R = \log_{10} I$.

101. Terremoto ¿Cuántas veces más intenso es un terremoto que mide 6 en la escala Richter, que un terremoto que mide 2?

102. Terremoto ¿Cuántas veces más intenso es un terremoto que mide 4 en la escala Richter, que un terremoto que mide 1?

103. Elabora la gráfica de $y = \log_2 (x - 1)$.

104. Elabora la gráfica de $y = \log_3 (x - 2)$.

Ejercicios conceptuales y de redacción

105. Considera la función logarítmica $y = \log_a x$.

a) ¿Cuáles son las restricciones sobre a?

b) ¿Cuál es el dominio de la función?

c) ¿Cuál es el rango de la función?

106. Para la función logarítmica $y = \log_a (x - 3)$, ¿qué debe ser verdadero acerca de x? Explica.

107. Si algunos puntos sobre la gráfica de la función exponencial $f(x) = a^x$ son $\left(-3, \frac{1}{27}\right)$, $\left(-2, \frac{1}{9}\right)$, $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 9)$, y $(3, 27)$, indica algunos puntos sobre la gráfica de la función logarítmica $g(x) = \log_a x$. Explica cómo determinaste tu respuesta.

108. ¿Cuál es el valor de la intersección con el eje de las x de la gráfica de una ecuación de la forma $y = \log_a x$?

109. Si $f(x) = 5^x$, ¿cuál es $f^{-1}(x)$?

110. Si $f(x) = \log_6 x$, ¿cuál es $f^{-1}(x)$?

111. ¿Entre cuáles dos enteros debe encontrarse $\log_3 62$? Explica.

112. ¿Entre cuáles dos enteros debe encontrarse $\log_{10} 0.672$? Explica.

113. ¿Entre cuáles dos enteros debe encontrarse $\log_{10} 425$? Explica.

114. ¿Entre cuáles dos enteros debe encontrarse $\log_5 0.3256$? Explica.

115. Para $x > 1$, ¿cuál crecerá más rápido conforme x aumenta, 2^x o $\log_{10} x$? Explica.

116. Para $x > 1$, ¿cuál crecerá más rápido conforme x aumenta, x o $\log_{10} x$? Explica.

Ejercicios de repaso acumulativo

[5.4–5.7] *Factoriza*

117. $2x^3 - 6x^2 - 36x$ **118.** $x^4 - 16$ **119.** $40x^2 + 52x - 12$ **120.** $6r^2s^2 + rs - 1$

9.4 Propiedades de los logaritmos

1. **Uso de la regla del producto para logaritmos**
2. **Uso de la regla del cociente para logaritmos**
3. **Uso de la regla de potencia para logaritmos**
4. **Uso de propiedades adicionales de los logaritmos**

En esta sección se estudiarán varias propiedades de los logaritmos. Comienza con una definición importante.

Argumento

En la expresión logarítmica $\log_a x$, se le llama a x el **argumento** del logaritmo.

Expresión logarítmica	Argumento
$\log_{10} 3$	3
$\log_2 (x - 5)$	$x - 5$
$\log_7 (x^2 - 4x + 2)$	$x^2 - 4x + 2$

Dado que sólo se puede sacar el logaritmo de números positivos, cuando un argumento contiene una variable, se supondrá que el argumento representa un número positivo.

1 Uso de la regla del producto para logaritmos

Regla del producto para logaritmos

Para números reales positivos x, y y a, $a \neq 1$:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \quad \text{Propiedad 1}$$

El logaritmo de un producto, es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

Ejemplos de la propiedad 1

$$\log_3 (6 \cdot 7) = \log_3 6 + \log_3 7$$
$$\log_4 3z = \log_4 3 + \log_4 z$$
$$\log_8 x^2 = \log_8 (x \cdot x) = \log_8 x + \log_8 x \text{ o } 2 \log_8 x$$

La propiedad 1, la regla del producto, puede extenderse a tres o más factores, por ejemplo, $\log_a xyz = \log_a x + \log_a y + \log_a z$.

2 Uso de la regla del cociente para logaritmos

Regla del cociente para logaritmos

Para números reales positivos x, y y a, $a \neq 1$:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad \text{Propiedad 2}$$

El logaritmo de un cociente, es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

Comprende el Álgebra

Recuerda que, un *logaritmo es un exponente*. En consecuencia, las reglas de los exponentes estudiadas anteriormente, se relacionan con las reglas de los logaritmos que se presentan aquí.

- La regla de exponentes $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ está relacionada con la regla de logaritmos $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
- La regla de exponentes $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ está relacionada con la regla de logaritmos $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- La regla de exponentes $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ está relacionada con la regla de logaritmos $\log_a x^n = n \log_a x$

Ejemplos de la propiedad 2

$$\log_3 \frac{19}{4} = \log_3 19 - \log_3 4$$

$$\log_6 \frac{x}{3} = \log_6 x - \log_6 3$$

$$\log_5 \frac{z}{z+2} = \log_5 z - \log_5 (z+2)$$

3 Uso de la regla de potencia para logaritmos

Regla de potencia para logaritmos

Si x y a son números reales positivos, $a \neq 1$, y n es cualquier número real, entonces:

$$\log_a x^n = n \log_a x \quad \text{Propiedad 3}$$

El logaritmo de un número elevado a un exponente, es igual al exponente por el logaritmo del número.

Ejemplos de la propiedad 3

$$\log_2 4^3 = 3 \log_2 4$$
$$\log_3 x^2 = 2 \log_3 x$$
$$\log_5 \sqrt{12} = \log_5 (12)^{1/2} = \frac{1}{2} \log_5 12$$
$$\log_8 \sqrt[5]{z+3} = \log_8 (z+3)^{1/5} = \frac{1}{5} \log_8 (z+3)$$

EJEMPLO 1 Usa las propiedades, 1 a la 3, de los logaritmos, para expandir.

a) $\log_7 5x$ **b)** $\log_5 \frac{x}{4}$ **c)** $\log_6 x^2$

Solución

a) $\log_7 5x = \log_7 (5 \cdot x) = \log_7 5 + \log_7 x$ Regla del producto.

b) $\log_5 \frac{x}{4} = \log_5 \left(\frac{x}{4}\right) = \log_5 x - \log_5 4$ Regla del cociente.

c) $\log_6 x^2 = \log_6 (x)^2 = 2 \log_6 x$ Regla de potencia.

Ahora resuelve el ejercicio 9

Con frecuencia, tendrás que usar dos o más de estas propiedades en el mismo problema.

EJEMPLO 2 Expande.

a) $\log_3 5x^4y^2$ **b)** $\log_5 \frac{(4-a)^2}{3}$

c) $\log_5 \left(\frac{4-a}{3}\right)^2$ **d)** $\log_5 \frac{[x(x+4)]^3}{8}$

Solución

a) $\log_3 5x^4y^2 = \log_3 5 + \log_3 x^4 + \log_3 y^2$ Regla del producto.
$= \log_3 5 + 4 \log_3 x + 2 \log_3 y$ Regla de potencia.

b) $\log_5 \frac{(4-a)^2}{3} = \log_5 (4-a)^2 - \log_5 3$ Regla del producto.
$= 2 \log_5 (4-a) - \log_5 3$ Regla de potencia.

c) $\log_5 \left(\frac{4-a}{3}\right)^2 = 2 \log_5 \left(\frac{4-a}{3}\right)$ Regla de potencia.
$= 2[\log_5 (4-a) - \log_5 3]$ Regla del cociente.
$= 2 \log_5 (4-a) - 2 \log_5 3$ Propiedad distributiva.

d) $\log_5 \dfrac{[x(x+4)]^3}{8} = \log_5[x(x+4)]^3 - \log_5 8$ Regla del cociente.

$= 3\log_5 x(x+4) - \log_5 8$ Regla de potencia.

$= 3[\log_5 x + \log_5 (x+4)] - \log_5 8$ Regla del producto.

$= 3\log_5 x + 3\log_5 (x+4) - \log_5 8$ Regla del producto.

Ahora resuelve el ejercicio 21

SUGERENCIA ÚTIL

En el ejemplo 2 **b)**, cuando se expandió $\log_5 \dfrac{(4-a)^2}{3}$, primero se usó la regla del cociente. En el ejemplo 2 **c)**, cuando se expandió $\log_5 \dfrac{(4-a)^2}{3}$, primero se usó la regla de potencia. ¿Ves la diferencia en los dos problemas? En $\log_5\left(\dfrac{4-a}{3}\right)^2$, sólo el numerador del argumento está al cuadrado; por tanto, primero se usa la regla del cociente. En $\log_5\left(\dfrac{4-a}{3}\right)^2$, todo el argumento está al cuadrado, así que se usa primero la regla de potencia.

EJEMPLO 3 Escribe cada una de las siguientes, como el logaritmo de una sola expresión.

a) $\log_5 2 + 3\log_5 a + 4\log_5 b$

b) $3\log_8 (z+2) - \log_8 z$

c) $\log_7 (x+1) + 2\log_7 (x+4) - 3\log_7 (x-5)$

Solución

a) $\log_5 2 + 3\log_5 a + 4\log_5 b = \log_5 2 + \log_5 a^3 + \log_5 b^4$ Regla de potencia.

$= \log_5 2a^3b^4$ Regla del producto.

b) $3\log_8 (z+2) - \log_8 z = \log_8 (z+2)^3 - \log_8 z$ Regla de potencia.

$= \log_8 \dfrac{(z+2)^3}{z}$ Regla del cociente.

c) $\log_7 (x+1) + 2\log_7 (x+4) - 3\log_7 (x-5)$

$= \log_7 (x+1) + \log_7 (x+4)^2 - \log_7 (x-5)^3$ Regla de potencia.

$= \log_7 (x+1)(x+4)^2 - \log_7 (x-5)^3$ Regla del producto.

$= \log_7 \dfrac{(x+1)(x+4)^2}{(x-5)^3}$ Regla del cociente.

Ahora resuelve el ejercicio 39

CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

LAS REGLAS CORRECTAS SON

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Observa que,

$$\log_a (x+y) \neq \log_a x + \log_a y \qquad \log_a xy \neq (\log_a x)(\log_a y)$$

$$\log_a (x-y) \neq \log_a x - \log_a y \qquad \log_a \frac{x}{y} \neq \frac{\log_a x}{\log_a y}$$

4 Uso de propiedades adicionales de los logaritmos

Las últimas dos propiedades de los logaritmos se relacionan con las propiedades de las funciones inversas. En la sección 9.1, se estudió que, si dos funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son inversas mutuas, entonces:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \text{y} \quad (f \circ f^{-1})(x) = x$$

También se discutió que, las funciones $f(x) = a^x$ y $f^{-1}(x) = \log_a x$, son funciones inversas. En consecuencia, se tiene:

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ f)(x) &= f^{-1}[f(x)] \\ &= f^{-1}(a^x) \\ &= \log_a a^x = x\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(f \circ f^{-1})(x) &= f[f^{-1}(x)] \\ &= f(\log_a x) \\ &= a^{\log_a x} = x\end{aligned}$$

Estas propiedades se usarán para resolver ecuaciones en la sección 9.6.

Propiedades adicionales de los logaritmos

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces:

$$\log_a a^x = x \qquad \text{Propiedad 4}$$

y $\quad a^{\log_a x} = x (x > 0) \qquad \text{Propiedad 5}$

Ejemplos de la propiedad 4	Ejemplos de la propiedad 5
$\log_6 6^5 = 5$	$3^{\log_3 7} = 7$
$\log_9 9^x = x$	$5^{\log_5 x} = x (x > 0)$

EJEMPLO 4 Usa las propiedades 4 y 5 de los logaritmos para evaluar.

a) $\log_3 3^8$ **b)** $7^{\log_7 23}$ **c)** $\log_2 2^{3x-1}$ **d)** $5^{\log_5 2x+11}$

Solución

a) $\log_3 3^8 = 8$ Propiedad 4

b) $7^{\log_7 23} = 23$ Propiedad 5

c) $\log_2 2^{3x-1} = 3x - 1$ Propiedad 4

d) $5^{\log_5 2x+11} = 2x + 11$ Propiedad 5

Ahora resuelve el ejercicio 63

9.4 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

por más menos positivos inversas argumento suma compuestos

1. Sólo se puede sacar el logaritmo de los números _____.
2. En la expresión logarítmica $\log_a x$, la x se llama el _____ del logaritmo.
3. El logaritmo de un producto, es igual a la _____ de los logaritmos de los factores.
4. El logaritmo de un cociente, es igual al logaritmo del numerador _____ el logaritmo del denominador.

5. El logaritmo de un número elevado a un exponente, es igual al exponente _____ el logaritmo del número.

6. Si dos funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son _____ una de otra, entonces $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ y $(f \circ f^{-1})(x) = x$.

Practica tus habilidades

Usa las propiedades 1-3 para expandir.

7. $\log_2 5x$

8. $\log_3 7y$

9. $\log_4 \dfrac{x}{11}$

10. $\log_5 \dfrac{3}{z}$

11. $\log_6 x^7$

12. $\log_5 3^x$

13. $\log_8 7(x + 3)$

14. $\log_9 x(x + 2)$

15. $\log_{11} \dfrac{2x + 1}{x - 7}$

16. $\log_4 \dfrac{x + 5}{3x - 2}$

17. $\log_4 (r + 7)^5$

18. $\log_2 (5x + 1)^3$

19. $\log_{10} \dfrac{\sqrt{x}}{x - 9}$

20. $\log_8 \dfrac{a + 5}{\sqrt[3]{b}}$

21. $\log_4 \sqrt{\dfrac{a^3}{a + 2}}$

22. $\log_6 \sqrt[5]{\dfrac{b - 3}{b^2}}$

23. $\log_{10} \dfrac{9m}{8n}$

24. $\log_9 \dfrac{7a}{5b}$

25. $\log_3 \dfrac{x^2 \sqrt{y}}{x + 1}$

26. $\log_5 \dfrac{a - 6}{a^4 \sqrt[3]{b}}$

Escribe como un logaritmo de una sola expresión.

27. $\log_7 8 + \log_7 x$

28. $\log_4 5 + \log_4 z$

29. $\log_6 x - \log_6 5$

30. $\log_8 19 - \log_8 y$

31. $2 \log_3 x$

32. $x \log_4 5$

33. $\dfrac{1}{2} \log_5 x$

34. $\dfrac{1}{3} \log_2 x$

35. $2 \log_9 z - \log_9 (z - 2)$

36. $\log_2 (z - 5) - 4 \log_2 z$

37. $3(\log_2 7 + \log_2 x)$

38. $4(\log_5 2 + \log_5 t)$

39. $\dfrac{1}{3}\left[\log_8 q - \log_8 (3q + 4)\right]$

40. $\dfrac{1}{2}[\log_6 (r - 1) - \log_6 r]$

41. $3 \log_8 x - 2 \log_8 y - 5 \log_8 z$

42. $9 \log_2 s - 3 \log_2 t - 4 \log_2 u$

43. $2 \log_9 4 + \dfrac{1}{3} \log_9 (r - 6) - \dfrac{1}{2} \log_9 r$

44. $6 \log_7 (a + 3) + 2 \log_7 (a - 1) - \dfrac{1}{2} \log_7 a$

Para los ejercicios 45-56, determina el valor al escribir cada argumento usando los números 2, 3 y 5, y usando los valores $\log_a 2 = 0.6931$, $\log_a 3 = 1.0986$ *y* $\log_a 5 = 1.6094$.

45. $\log_a 6$

46. $\log_a 10$

47. $\log_a \dfrac{2}{3}$

48. $\log_a \dfrac{3}{5}$

49. $\log_a 1.5$

50. $\log_a 2.5$

51. $\log_a 9$

52. $\log_a 25$

53. $\log_a \dfrac{1}{9}$

54. $\log_a \dfrac{1}{25}$

55. $\log_a \sqrt{3}$

56. $\log_a \sqrt{5}$

Evalúa (consulta el ejemplo 4).

57. $\log_3 3^x$

58. $\log_7 7^{x+1}$

59. $2^{\log_2(x+3)}$

60. $3^{\log_3(x-4)}$

61. $\log_a a^7$

62. $\log_b b^{132}$

63. $\left(2^3\right)^{\log_8 7}$

64. $(3^2)^{\log_9 11}$

65. $2\log_9 \sqrt{9}$

66. $\frac{1}{2}\log_7(7^2)$

Resolución de problemas

67. Expresa $\log_a\left(x^2-4\right) - \log_a(x+2)$, como un solo logaritmo y simplifica.

68. Expresa $\log_a(x-3) - \log_a\left(x^2+5x-24\right)$, como un solo logaritmo y simplifica.

Usa las propiedades 1-3 para expandir.

69. $\log_2 \dfrac{\sqrt[4]{xy}\,\sqrt[3]{a}}{\sqrt[5]{a-b}}$

70. $\log_3\left[\dfrac{\left(a^2+b^2\right)\left(c^2\right)}{(a-b)(b+c)(c+d)}\right]^2$

En los ejercicios 71-74, si $\log_{10} x = 0.4320$, *determina lo siguiente.*

71. $\log_{10} x^2$

72. $\log_{10}\sqrt[3]{x}$

73. $\log_{10}\sqrt[4]{x}$

74. $\log_{10} x^{11}$

En los ejercicios 75-76, si $\log_{10} x = 0.5000$ *y* $\log_{10} y = 0.2000$, *determina lo siguiente.*

75. $\log_{10} xy$

76. $\log_{10}\left(\dfrac{x}{y}\right)$

77. Con la información dada en las instrucciones para los ejercicios 75 y 76, ¿es posible determinar $\log_{10}(x+y)$? Explica.

78. ¿Las gráficas de $y = \log_b x^2$ y $y = 2\log_b x$ son iguales? Explica tu respuesta al discutir el dominio de cada ecuación.

Ejercicios conceptuales y de redacción

79. ¿Es $\log_a(xyz) = \log_a x + \log_a y + \log_a z$? Explica.

80. ¿Es $\log_b(x+y+z) = \log_b x + \log_b y + \log_b z$? Explica.

81. ¿Es $\log_a\left(x^2+8x+16\right) = 2\log_a(x+4)$? Explica.

82. ¿Es $\log_a\left(4x^2-20x+25\right) = 2\log_a(2x-5)$? Explica.

Problemas de desafío

83. Para $x>0$ y $y>0$, ¿$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a xy^{-1}$

$= \log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a x + \log_a \dfrac{1}{y}$?

84. Lee el ejercicio 83. Por la regla del cociente, $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$. En consecuencia, ¿se puede concluir que $\log_a x - \log_a y = \log_a x + \log_a \dfrac{1}{y}$?

85. Usa la regla del producto para mostrar que:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x + \log_a \frac{1}{y}$$

86. **a)** Explica por qué:

$$\log_a \frac{3}{xy} \neq \log_a 3 - \log_a x + \log_a y$$

b) Expande $\log_a \dfrac{3}{xy}$ correctamente.

Actividad grupal

Discute y responde el ejercicio 87, como equipo.

87. Considera $\log_a \dfrac{\sqrt{x^4y}}{\sqrt{xy^3}}$ donde $x>0$ y $y>0$.

a) Miembro 1 del equipo: expande la expresión usando la regla del cociente.

b) Miembro 2 del equipo: expande la expresión usando la regla del producto.

c) Miembro 3 del equipo: primero simplifica $\dfrac{\sqrt{x^4y}}{\sqrt{xy^3}}$, después expande el logaritmo resultante.

d) Comprueba el trabajo de los demás y asegúrate de que todas las respuestas son correctas. ¿Podría, esta expresión, simplificarse por los tres métodos?

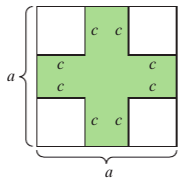
Ejercicios de repaso acumulativo

[2.5] **88.** Resuelve la desigualdad $\frac{x-4}{2} - \frac{2x-5}{5} > 3$ e indica la solución en

a) notación constructiva de conjuntos.

b) notación de intervalo.

[5.7] **89.** **a)** Escribe una expresión para el área sombreada de la siguiente figura.



b) Escribe la expresión del inciso **a)**, en forma factorizada.

[6.4] **90.** Resuelve $\frac{15}{x} + \frac{9x-7}{x+2} = 9$ en términos de x.

[7.7] **91.** Multiplica $(3i + 4)(2i - 5)$.

[8.4] **92.** Resuelve $a - 6\sqrt{a} = 7$ para a.

EXAMEN DE MITAD DE CAPÍTULO: SECCIONES 9.1-9.4

Para descubrir qué tan bien entiendes el material del capítulo hasta este punto, resuelve esta breve evaluación. Las respuestas, y la sección donde el material se discutió inicialmente, se proporcionan en la parte final del libro. Revisa cualquier pregunta que respondas de manera incorrecta.

1. **a)** Explica cómo determinar $(f \circ g)(x)$.

b) Si $f(x) = 3x + 3$ y $g(x) = 2x + 5$, determina $(f \circ g)(x)$.

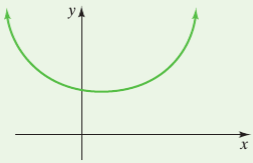
2. Sea $f(x) = x^2 + 5$ y $g(x) = \frac{6}{x}$; determina

a) $(f \circ g)(x)$ **b)** $(f \circ g)(3)$

c) $(g \circ f)(x)$ **d)** $(g \circ f)(3)$

3. **a)** Explica qué se entiende, cuando una función es una función uno a uno.

b) ¿La función representada por la siguiente gráfica, es una función uno a uno? Explica.



En los ejercicios 4-6, para cada función, **a)** *determina si es una función uno a uno;* **b)** *si es una función uno a uno, determina su función inversa.*

4. $\{(-3, 2), (2, 3), (5, 1), (6, 8)\}$

5. $p(x) = \frac{1}{3}x - 5$

6. $k(x) = \sqrt{x-4}, \quad x \geq 4$

7. Sea $m(x) = -2x + 4$. Determina $m^{-1}(x)$ y, luego, elabora la gráfica $m(x)$ y $m^{-1}(x)$ en los mismos ejes.

Elabora la gráfica de cada función exponencial.

8. $y = 2^x$

9. $y = 3^{-x}$

10. Elabora la gráfica de la función logarítmica $y = \log_2 x$.

11. **Bacterias** El número de bacterias en una placa de Petri, es $N(t) = 5(2)^t$, donde t es el número de horas después de que las 5 bacterias originales se colocan en la placa. ¿Cuántas bacterias hay en la placa

a) 1 hora después?

b) 6 horas después?

12. Escribe $27^{2/3} = 9$ en forma logarítmica.

13. Escribe $\log_2 \frac{1}{64} = -6$ en forma exponencial.

14. Evalúa $\log_5 125$.

15. Resuelve la ecuación $\log_{1/4} \frac{1}{16} = x$, en términos de x.

16. Resuelve la ecuación $\log_x 64 = 3$, en términos de x.

Usa las propiedades 1-3, para escribir como una suma o resta de logaritmos.

17. $\log_9 x^2(x - 5)$

18. $\log_5 \frac{7m}{\sqrt{n}}$

Escribe como un solo logaritmo.

19. $3 \log_2 x + \log_2 (x + 7) - 4 \log_2 (x + 1)$

20. $\frac{1}{2}[\log_7 (x + 2) - \log_7 x]$

9.5 Logaritmos comunes

1. **Determinación de logaritmos comunes de potencias de 10**
2. **Aproximación de logaritmos comunes**
3. **Aproximación de potencias de 10**

Las propiedades de los logaritmos estudiadas en la sección 9.4, se aplican a cualquier logaritmo con una base en número real a con $a > 0$ y $a \neq 1$. Dado que el sistema numérico se basa en el número 10, con frecuencia, se usan logaritmos con una base de 10, los cuales se llaman *logaritmos comunes*.

Logaritmo común

Un **logaritmo común**, es un logaritmo con una base de 10. Cuando la base de un logaritmo no se indica, se supone que la base es 10. Por ende:

$$\log x = \log_{10} x \qquad (x > 0)$$

Las cinco propiedades estudiadas en la sección 9.4, se pueden reescribir como propiedades de los logaritmos comunes.

Propiedades de los logaritmos comunes

1. $\log xy = \log x + \log y$
2. $\log \dfrac{x}{y} = \log x - \log y$
3. $\log x^n = n \log x$
4. $\log 10^x = x$
5. $10^{\log x} = x$

Comprende el Álgebra

Recuerda que, *un logaritmo es un exponente*. Un logaritmo común es el exponente al cual elevarías 10 para obtener el argumento. Por ejemplo, log 100 es el exponente al cual elevarías 10, para obtener 100. En consecuencia, log 100 = 2.

1 Determinación de logaritmos comunes de potencias de 10

Puedes usar la cuarta propiedad de los logaritmos comunes, para evaluar los logaritmos comunes de números que sean potencias de 10. Comienza con algunos ejemplos de logaritmos comunes de potencias no negativas de 10.

Logaritmos comunes de potencias no negativas de 10

$$\log 1 = \log 10^0 = 0 \qquad \log 10 = \log 10^1 = 1$$
$$\log 100 = \log 10^2 = 2 \qquad \log 1\,000 = \log 10^3 = 3$$
$$\log 10\,000 = \log 10^4 = 4 \qquad \log 100\,000 = \log 10^5 = 5$$

También puedes evaluar logaritmos comunes de potencias negativas de 10.

Comprende el Álgebra

Para determinar logaritmos comunes de 10 elevado a una potencia negativa, necesitas recordar la siguiente regla de los exponentes:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

Logaritmos comunes de potencias negativas de 10

$$\log 0.1 = \log \frac{1}{10} = \log 10^{-1} = -1$$
$$\log 0.01 = \log \frac{1}{100} = \log 10^{-2} = -2$$
$$\log 0.001 = \log \frac{1}{1\,000} = \log 10^{-3} = -3$$
$$\log 0.0001 = \log \frac{1}{10\,000} = \log 10^{-4} = -4$$
$$\log 0.00001 = \log \frac{1}{100\,000} = \log 10^{-5} = -5$$

2 Aproximación de logaritmos comunes

Se usará una calculadora científica, o graficadora, para aproximar la mayoría de los logaritmos comunes. Antes de hacerlo, se presenta un método para estimar el valor de un logaritmo común entre dos enteros. Por ejemplo, supón que quieres estimar el valor de log 5.

Como 5 está entre 1 y 10, se puede concluir que log 5 está entre log 1 y log 10, y se ve lo siguiente:

$$1 < 5 < 10$$
$$\log 1 < \log 5 < \log 10$$
$$0 < \log 5 < 1$$

En consecuencia, se puede concluir que log 5 es un número entre 0 y 1.

EJEMPLO 1 Sin usar una calculadora, estima entre cuáles dos enteros estará cada logaritmo común.

a) log 82 **b)** log 5 091
c) log 0.7 **d)** log 0.03

Solución

a) Como 82 está entre 10 y 100, se tiene lo siguiente:

$$10 < 82 < 100$$
$$\log 10 < \log 82 < \log 100$$
$$1 < \log 82 < 2$$

En consecuencia, log 82 es un número entre 1 y 2.

b) Como 5091 está entre 1 000 y 10 000, se tiene lo siguiente:

$$1000 < 5091 < 10000$$
$$\log 1000 < \log 5091 < \log 10000$$
$$3 < \log 5091 < 4$$

En consecuencia, log 5 091 es un número entre 3 y 4.

c) Como 0.7 está entre 0.1 y 1, se tiene lo siguiente:

$$0.1 < 0.7 < 1$$
$$\log 0.1 < \log 0.7 < \log 1$$
$$-1 < \log 0.7 < 0$$

En consecuencia, log 0.7 es un número entre -1 y 0.

d) Como 0.03 está entre 0.01 y 0.1, se tiene lo siguiente:

$$0.01 < 0.03 < 0.1$$
$$\log 0.01 < \log 0.03 < \log 0.1$$
$$-2 < \log 0.03 < -1$$

En consecuencia, log 0.03 es un número entre -2 y -1.

Ahora resuelve el ejercicio 17

Ahora se aproximarán logaritmos comunes usando una calculadora científica, o graficadora, con la tecla LOG, como se muestra a continuación.



USA TU CALCULADORA

Aproximación de logaritmos comunes

Calculadora científica

Para aproximar logaritmos comunes, en muchas calculadoras científicas, ingresa el argumento, luego, oprime la tecla de logaritmo.

EJEMPLO	TECLAS A OPRIMIR	RESPUESTA MOSTRADA
Aproximar log 400.	400 LOG	2.60206



Calculadora graficadora

En las calculadoras graficadoras, y en muchas calculadoras científicas, primero oprimes la tecla LOG y después ingresas el número. Por ejemplo, en la TI-84 Plus, harías lo siguiente:

EJEMPLO	TECLAS A OPRIMIR	RESPUESTA MOSTRADA
Aproximar log 400.	LOG (400) ENTER	2.602059991

↑ Generado por la calculadora

EJEMPLO 2 Usa una calculadora para aproximar los siguientes logaritmos comunes. Redondea tu respuesta a cuatro lugares decimales. Compara tus respuestas con las del ejemplo 1 de la página 641.

a) log 82 **b)** log 5 091

c) log 0.7 **d)** log 0.03

Solución Usando una calculadora, se obtiene lo siguiente.

a) log 82 ≈ 1.9138. Observa, en el ejemplo 1 **a)** que, se estimó correctamente que log 82 es un número entre 1 y 2.

b) log 5 091 ≈ 3.7068. Observa, en el ejemplo 1 **b)** que, se estimó correctamente que log 5 091 es un número entre 3 y 4.

c) log 0.7 ≈ −0.1549. Observa, en el ejemplo 1 **c)** que, se estimó correctamente que log 0.7 es un número entre −1 y 0.

d) log 0.03 ≈ −1.5229. Observa, en el ejemplo 1 **d)** que, se estimó correctamente que log 0.03 es un número entre −2 y −1.

Ahora resuelve el ejercicio 29

Recuerda, de la definición de logaritmo de la sección 9.3, que, $y = \log_a x$ significa que $x = a^y$. Esta definición se reformula para logaritmos comunes.

Definición de un logaritmo común

Para todo número positivo x:

$$y = \log x \quad \text{significa} \quad x = 10^y$$

El **logaritmo común** de un número positivo x, es el exponente al cual debe elevarse la base 10 para obtener el número x.

EJEMPLO 3 Determina el exponente, al cual debe elevarse 10 para obtener cada uno de los siguientes números. Redondea tus respuestas a la diezmilésima más cercana.

a) 53 **b)** 3 129

c) 0.936 **d)** 0.0357

Solución Se pide determinar el *exponente* de 10. Con la definición de un logaritmo común, se nota que se pide determinar el logaritmo común de cada uno de estos números.

a) log 53 ≈ 1.7243 Observa que, $10^{1.7243} \approx 53$.

b) log 3 129 ≈ 3.4954 Observa que, $10^{3.4954} \approx 3129$.

c) log 0.936 ≈ −0.0287 Observa que, $10^{-0.0287} \approx 0.936$.

d) log 0.0357 ≈ −1.4473 Observa que, $10^{-1.4473} \approx 0.0357$.

Ahora resuelve el ejercicio 37

3 Aproximación de potencias de 10

Al resolver ecuaciones que involucren logaritmos comunes, con frecuencia, necesitarás evaluar una potencia de 10. Por ejemplo, si $\log x = 3$, entonces, usando la definición de logaritmo común, se ve que $x = 10^3$ o 1000. En muchas ecuaciones, como $x = 10^{2.31}$, la potencia de 10 no será un entero. Se usará una calculadora científica o graficadora para aproximar dichas potencias de 10.



USA TU CALCULADORA

Aproximación de potencias de 10

Para aproximar potencias de 10 en tu calculadora, usa la función 10^x, que se localiza directamente arriba de la tecla LOG. Para acceder a esta función, oprime la tecla; 2ND, INV, o Shift, antes de presionar la tecla LOG.

EJEMPLO 4 Aproxima las siguientes potencias de 10. Redondea tus respuestas a la diezmilésima más cercana.

a) $10^{1.394}$ **b)** $10^{2.827}$ **c)** $10^{-0.356}$

Solución Usa una calculadora para aproximar cada potencia de 10.

a) $10^{1.394} \approx 24.7742$ **b)** $10^{2.827} \approx 671.4289$ **c)** $10^{-0.356} \approx 0.4406$

Ahora resuelve el ejercicio 49

Cuando se evalúa una potencia de 10, el número obtenido puede referirse como un **antilogaritmo** o un **antilog**. Por ejemplo, en el ejemplo 4 **a)**, se determinó que $10^{1.394} \approx 24.7742$. En consecuencia, se puede escribir antilog $1.394 \approx 24.7742$. Observa que, $\log 24.7742 \approx 1.394$.

EJEMPLO 5 Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones. Redondea tus respuestas a la diezmilésima más cercana.

a) $\log x = 0.781$ **b)** $\log x = 5.89$

c) $\log x = -0.921$ **d)** $\log x = -2.81$

Solución

a) A partir de la definición de logaritmo común, se sabe que:

	$\log x = 0.781$	significa	$x = 10^{0.781} \approx 6.0395$
b)	$\log x = 5.89$	significa	$x = 10^{5.89} \approx 776\,247.1166$
c)	$\log x = -0.921$	significa	$x = 10^{-0.921} \approx 0.1199$
d)	$\log x = -2.81$	significa	$x = 10^{-2.81} \approx 0.0015$

Ahora resuelve el ejercicio 63

Cada ecuación en el ejemplo 5, también se podría resolver usando un antilog. Por ejemplo, en el inciso **a)**, la ecuación $\log x = 0.781$ se puede resolver al escribir $x = \text{antilog } 0.781 \approx 6.0395$. Observa que, $\log 6.0395 \approx 0.781$.

EJEMPLO 6 **Terremoto** La magnitud de un terremoto en la escala Richter, está dada por la fórmula $R = \log I$, donde I es el número de veces que el terremoto es más intenso que la actividad medible más pequeña. ¿Cuántas veces más intenso, que la actividad medible más pequeña, es un terremoto que mide 6.2 en la escala Richter?

Solución Se quiere determinar el valor para I. Se indica que $R = 6.2$. Sustituye 6.2 por R en la fórmula $R = \log I$, y, luego, resuelve en términos de I.

$$R = \log I$$
$$6.2 = \log I \quad \text{Sustituye 6.2 por } R.$$

Para determinar I, reescribe la ecuación logarítmica como una ecuación exponencial, usando la definición de un logaritmo común.

$$6.2 = \log I \quad \text{significa} \quad I = 10^{6.2}$$
$$\text{y se obtiene} \quad I \approx 5\,84\,893.$$

En consecuencia, este terremoto es aproximadamente 1 584 893 veces más intenso, que la actividad mensurable más pequeña.

Ahora resuelve el ejercicio 89

9.5 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

10^y común 4 y^{10} exponente 2 10^x

1. Un logaritmo _____, es un logaritmo con una base de 10.
2. Un logaritmo común, es el _____ al cual elevarías 10 para obtener el argumento.
3. Usando la definición de logaritmo común, $y = \log x$ significa $x =$ _____.
4. Como 2019 está entre 1 000 y 10 000, log 2 019 está entre 3 y _____.

Practica tus habilidades

Evalúa el logaritmo común de cada potencia de 10, sin usar una calculadora.

5. log 1 **6.** log 10 **7.** log 100 **8.** log 1000

9. log 0.1 **10.** log 0.01 **11.** log 0.001 **12.** log 0.0001

Sin usar una calculadora, estima entre cuáles dos enteros estará cada logaritmo común. Consulta el ejemplo 1.

13. log 3.79 **14.** log 9.03 **15.** log 86 **16.** log 352

17. log 19 200 **18.** log 1 001 **19.** log 0.721 **20.** log 0.375

21. log 0.0613 **22.** log 0.00872 **23.** log 0.00374 **24.** log 0.000835

Usa una calculadora para aproximar los siguientes logaritmos comunes. Redondea tus respuestas a la diezmilésima más cercana. Compara tus respuestas con las de los ejercicios 13-24.

25. log 3.79 **26.** log 9.03 **27.** log 86 **28.** log 352

29. log 19 200 **30.** log 1 001 **31.** log 0.721 **32.** log 0.375

33. log 0.0613 **34.** log 0.00872 **35.** log 0.00374 **36.** log 0.000835

Determina el exponente, al cual debes elevar 10 para obtener cada uno de los siguientes números. Redondea tus respuestas a la diezmilésima más cercana. Consulta el ejemplo 3.

37. 3 560 **38.** 817 000 **39.** 0.0727 **40.** 0.00612

41. 5.00 **42.** 8.16 **43.** 0.00592 **44.** 0.0347

45. 0.0098 **46.** 0.0037 **47.** 19 283 746 **48.** 73 700 000

Determina las siguientes potencias de 10. Redondea tus respuestas a la diezmilésima más cercana. Consulta el ejemplo 4.

49. $10^{0.2137}$ **50.** $10^{1.3845}$ **51.** $10^{4.6283}$ **52.** $10^{3.5527}$

53. $10^{-1.7086}$ **54.** $10^{-2.7431}$ **55.** $10^{0.001}$ **56.** $10^{0.01}$

57. $10^{-0.001}$ **58.** $10^{-0.01}$ **59.** $10^{1.01}$ **60.** $10^{0.99}$

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones. Si es necesario, redondea tus respuestas a la diezmilésima más cercana. Consulta el ejemplo 5.

61. $\log x = 1$ **62.** $\log x = 2$ **63.** $\log x = 1.4612$ **64.** $\log x = 1.9330$

65. $\log x = 3.3817$ **66.** $\log x = 4.1409$ **67.** $\log x = -1.06$ **68.** $\log x = -1.3206$

69. $\log x = -0.6218$ **70.** $\log x = -0.1256$ **71.** $\log x = -2.103$ **72.** $\log x = -3.1469$

Usa las propiedades 4 y 5 de los logaritmos comunes, que se presentan en la página 640, para evaluar lo siguiente.

73. $\log 10^7$ **74.** $\log 10^{3.4}$ **75.** $10^{\log 7}$ **76.** $10^{\log 3.4}$

77. $4 \log 10^{5.2}$ **78.** $8 \log 10^{1.2}$ **79.** $5(10^{\log 8.3})$ **80.** $2.3(10^{\log 5.2})$

Resolución de problemas

Resuelve los ejercicios 81-84, usando $R = \log I$. Consulta el ejemplo 6. Redondea tus respuestas a la diezmilésima más cercana. Consulta el ejemplo 6.

81. Determina I si $R = 3.4$

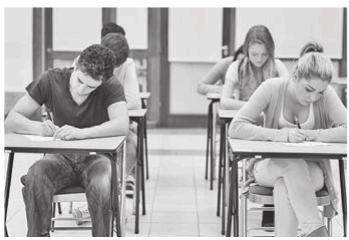
82. Determina I si $R = 4.9$

83. Determina I si $R = 5.7$

84. Determina I si $R = 0.1$

85. Diámetro de un planeta Una fórmula usada para determinar el diámetro, en kilómetros, de los planetas menores, es $\log d = 3.7 - 0.2g$, donde g es una cantidad llamada magnitud absoluta del planeta menor. Determina el diámetro de un planeta menor, si su magnitud absoluta es **a)** 11 y **b)** 20. **c)** Determina la magnitud absoluta del planeta menor cuyo diámetro es de 5.8 kilómetros.

86. Examen estandarizado La calificación promedio en un examen estandarizado, es una función del número de horas estudiadas para el examen. La calificación promedio, $f(x)$, en puntos, puede aproximarse mediante $\log d = 3.7 - 0.2g$, donde x es el número de horas estudiadas para el examen. La máxima calificación posible en el examen es 4.0. Determina la calificación promedio recibida por la persona que estudió durante **a)** 15 horas y **b)** 55 horas.



87. Retención de aprendizaje Samanta acaba de terminar un curso de física. El porcentaje del curso que recordará t meses después, puede aproximarse mediante la función

$$R(t) = 94 - 46.8 \log(t + 1)$$

para $0 \le t \le 48$. Determina el porcentaje del curso que Samanta recordará **a)** 2 meses después y **b)** 48 meses después.

88. Retención de aprendizaje Karen acaba de terminar un curso de psicología. El porcentaje del curso que recordará t meses después, puede aproximarse mediante la función

$$R(t) = 85 - 41.9 \log(t + 1)$$

para $0 \le t \le 48$. Determina el porcentaje del curso que recordará **a)** 10 meses después y **b)** 25 meses después.

89. Terremoto ¿Cuántas veces más intenso es un terremoto que tiene un número de 3.8, en la escala Richter, que la actividad medible más pequeña? Consulta el ejemplo 6.

90. Terremoto El terremoto más intenso jamás registrado, tuvo lugar en Chile el 22 de mayo de 1960. Midió 9.5 en la escala Richter. ¿Cuántas veces más intenso fue este terremoto, que la actividad medible más pequeña?

91. Energía de un terremoto Una fórmula que a veces se utiliza para estimar la energía sísmica liberada por un terremoto, es $\log E = 11.8 + 1.5m_s$, donde E es la energía sísmica y m_s es la magnitud de la onda superficial.

a) Determina la energía liberada en un terremoto, cuya magnitud de onda superficial es 6.

b) Si la energía liberada durante un terremoto es 1.2×10^{15}, ¿cuál es la magnitud de la onda superficial?

92. Presión sonora El nivel de presión sonora, s_p, está dado por la fórmula $s_p = 20 \log \dfrac{p_r}{0.0002}$, donde p_r es la presión sonora en dinas/cm^2.

a) Determina el nivel de presión sonora si la presión sonora es 0.0036 dinas/cm^2.

b) Si el nivel de presión sonora es 10.0, determina la presión sonora.

93. Terremoto La escala Richter, usada para medir la intensidad de los terremotos, relaciona la magnitud, M, del

terremoto, con la liberación de energía, E, en ergios, mediante la fórmula

$$M = \frac{\log E - 11.8}{1.5}$$

Un terremoto libera 1.259×10^{21} ergios de energía. ¿Cuál es la magnitud de tal terremoto en la escala Richter?

94. pH de una solución El pH es una medida de la acidez o alcalinidad de una solución. El pH del agua, por ejemplo, es 7. En general, los ácidos tienen números pH menores que 7 y las soluciones alcalinas tienen números pH mayores que 7. El pH de una solución se define como $\text{pH} = -\log[H_3O^+]$, donde H_3O^+ representa la concentración de iones hidronio de la solución. Determina el pH de una solución, cuya concentración de iones hidronio es de 2.8×10^{-3}.



Ejercicios conceptuales y de redacción

95. Con tu calculadora, aproxima log 462 y obtén el valor 1.6646. ¿Este valor es correcto? Explica.

96. Con tu calculadora, aproxima log 6250 y obtén el valor 2.7589. ¿Este valor es correcto? Explica.

97. Con tu calculadora, aproxima log 0.163 y obtén el valor −2.7878. ¿Este valor es correcto? Explica.

98. Con tu calculadora, aproxima log (−1.23) y obtén el valor 0.08991. ¿Este valor es correcto? Explica.

99. ¿$\log \dfrac{y}{4x} = \log y - \log 4 + \log x$? Explica.

100. ¿$\log \dfrac{5x^2}{3} = 2(\log 5 + \log x) - \log 3$? Explica.

Problemas de desafío

101. Resuelve la fórmula $R = \log I$, en términos de I.

102. Resuelve la fórmula $\log E = 11.8 + 1.5m$, en términos de E.

103. Resuelve la fórmula $R = 26 - 41.9 \log (t + 1)$, en términos de t.

104. Resuelve la fórmula $f = 76 - \log x$, en términos de x.

Actividad grupal

105. En la sección 9.7, se introdujo la *fórmula de cambio de base*, $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, donde a y b son bases y x es un número positivo.

a) Miembro 1 del equipo: usa la fórmula de cambio de base para evaluar $\log_3 45$. (*Sugerencia:* sea $b = 10$.)

b) Miembro 2 del equipo: repite el inciso **a)** para $\log_5 30$.

c) Miembro 3 del equipo: repite el inciso **a)** para $\log_6 40$.

d) Como equipo, usen el hecho de que $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, donde $b = 10$, para graficar la ecuación $y = \log_2 x$ en términos de $x > 0$. Usen calculadora graficadora si es posible.

Ejercicios de repaso acumulativo

[4.3] **106. Automóviles** Dos automóviles parten desde el mismo punto en Alexandria, Virginia, y viajan en direcciones opuestas. Un automóvil viaja a 5 millas por hora más rápido que el otro. Después de 4 horas, los dos automóviles están apartados por 420 millas. Determina la rapidez de cada automóvil.

[4.5] **107.** Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$3r = -4s - 6$$
$$3s = -5r + 1$$

[5.8] **108.** Resuelve $3x^3 + 3x^2 - 36x = 0$ en términos de x.

[7.1] **109.** Escribe $\sqrt{(3x^2 - y)^2}$ como un valor absoluto.

[8.6] **110.** Resuelve $(x - 5)(x + 4)(x - 2) \leq 0$ y proporciona la solución en notación de intervalo.

9.6 Ecuación exponencial y logarítmica

1 Resolución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas
2 Resolución de problemas aplicados

1 Resolución de ecuaciones exponenciales y logarítmicas

En esta sección, se estudiarán más las *ecuaciones exponenciales* y las *ecuaciones logarítmicas*. A continuación, se mencionan algunas de las propiedades que se usarán cuando se resuelvan dichas ecuaciones.

Propiedades para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas

a. Si $x = y$, entonces $a^x = a^y$. Propiedad 6a
b. Si $a^x = a^y$, entonces $x = y$. Propiedad 6b
c. Si $x = y$, entonces $\log_b x = \log_b y \quad (x > 0, y > 0)$. Propiedad 6c
d. Si $\log_b x = \log_b y$, entonces $x = y \quad (x > 0, y > 0)$. Propiedad 6d

Los dos primeros ejemplos, involucrarán la resolución de ecuaciones exponenciales.

EJEMPLO 1 Resuelve la ecuación $8^x = \frac{1}{2}$.

Solución Para resolver esta ecuación, se escribirán ambos lados de la ecuación con la misma base, 2, y, luego, se usará la propiedad 6b.

$$8^x = \frac{1}{2}$$
$$(2^3)^x = \frac{1}{2} \quad \text{Escribe 8 como } 2^3.$$
$$2^{3x} = 2^{-1} \quad \text{Escribe } \frac{1}{2} \text{ como } 2^{-1}.$$

Con la propiedad 6b, puedes escribir:

$$3x = -1$$
$$x = -\frac{1}{3}$$

Ahora resuelve el ejercicio 13

En este texto, cuando una ecuación exponencial involucre expresiones que no se puedan reescribir fácilmente como potencias de la misma base, se comenzará por tomar el logaritmo común de ambos lados de la ecuación, como se muestra en los ejemplos 2 y 3. Se usará una calculadora para obtener aproximaciones que involucren logaritmos. Los logaritmos se aproximarán a la diezmilésima más cercana y las respuestas finales se tomarán a la centésima más cercana.

EJEMPLO 2 Resuelve la ecuación $3^{x+2} = 17$.

Solución Dado que 17 no se puede escribir fácilmente como una potencia de 3, comienza por tomar el logaritmo común de ambos lados de la ecuación. Luego, usa la regla de potencia.

$$3^{x+2} = 17$$
$$\log 3^{x+2} = \log 17 \quad \text{Toma el logaritmo de ambos lados.}$$
$$(x + 2)\log 3 = \log 17 \quad \text{Regla de potencia.}$$
$$\frac{(x + 2)\log 3}{\log 3} = \frac{\log 17}{\log 3} \quad \text{Divide ambos lados entre log 3.}$$
$$x + 2 = \frac{\log 17}{\log 3}$$
$$x = \frac{\log 17}{\log 3} - 2 \quad \text{Resta 2 de ambos lados.}$$
$$x \approx \frac{1.2304}{0.4771} - 2 \approx 0.58 \quad \text{Aproximación de una calculadora.}$$

Ahora resuelve el ejercicio 23

Comprende el Álgebra

Para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas, recuerda que, cualquier cosa que hagas en un lado de la ecuación, debes hacerlo en el otro. Por tanto, en el ejemplo 2, debes tomar el logaritmo común de *ambos* lados de la ecuación.

EJEMPLO 3 Resuelve la ecuación $2^{x+3} = 5^x$.

Solución Comienza por tomar el logaritmo común de ambos lados y después usa la regla de potencia.

$$2^{x+3} = 5^x$$
$$\log 2^{x+3} = \log 5^x \quad \text{Toma el logaritmo de ambos lados.}$$
$$(x+3)\log 2 = x \log 5 \quad \text{Regla de potencia.}$$
$$x \log 2 + 3 \log 2 = x \log 5 \quad \text{Uso de la propiedad distributiva.}$$
$$3 \log 2 = x \log 5 - x \log 2 \quad \text{Resta } x \log 2 \text{ de ambos lados.}$$
$$3 \log 2 = x(\log 5 - \log 2) \quad \text{Factoriza } x \text{ de los términos en el lado derecho.}$$
$$\frac{3 \log 2}{(\log 5 - \log 2)} = \frac{x(\log 5 - \log 2)}{(\log 5 - \log 2)} \quad \text{Divide ambos lados entre } \log 5 - \log 2.$$

La solución exacta es $x = \dfrac{3 \log 2}{(\log 5 - \log 2)}$. Usa una calculadora para obtener una aproximación.

$$x = \frac{3 \log 2}{(\log 5 - \log 2)} \approx \frac{3(0.3010)}{(0.6990 - 0.3010)} \approx \frac{0.9030}{0.3980} \approx 2.27$$

Ahora resuelve el ejercicio 29

Los siguientes cuatro ejemplos involucrarán la resolución de ecuaciones logarítmicas. Recuerda, de párrafos anteriores de este capítulo, que, el argumento de un logaritmo debe ser un número positivo. *Por tanto, es necesario verificar las soluciones aparentes de las ecuaciones logarítmicas en la ecuación original. Si una solución aparente produce un argumento no positivo, entonces es una solución extraña.*

La primera ecuación logarítmica puede resolverse al expresar la ecuación en forma exponencial.

EJEMPLO 4 Resuelve la ecuación $\log_3(2x - 7) = 4$.

Solución Comienza por escribir la ecuación en forma exponencial.

$$2x - 7 = 3^4 \quad \text{Ecuación escrita en forma exponencial.}$$
$$2x - 7 = 81$$
$$2x = 88$$
$$x = 44$$

Se verificará $x = 44$, en la ecuación original.

Verifica
$$\log_3(2x - 7) = 4$$
$$\log_3[2(44) - 7] \stackrel{?}{=} 4$$
$$\log_3(88 - 7) \stackrel{?}{=} 4$$
$$\log_3 81 \stackrel{?}{=} 4$$
$$4 = 4 \quad \text{Verdadero}$$

Ahora resuelve el ejercicio 41

Otras ecuaciones logarítmicas pueden resolverse usando las propiedades de los logaritmos, dados en secciones anteriores.

EJEMPLO 5 Resuelve la ecuación $\log_5 2 + \log_5(2x - 5) = \log_5(3x + 1)$.

Solución
$$\log_5 2 + \log_5(2x - 5) = \log_5(3x + 1)$$
$$\log_5[2(2x - 5)] = \log_5(3x + 1) \quad \text{Regla del producto.}$$
$$2(2x - 5) = (3x + 1) \quad \text{Propiedad 6d.}$$

$$4x - 10 = 3x + 1 \quad \text{Propiedad distributiva.}$$
$$x - 10 = 1$$
$$x = 11$$

Verifica $x = 11$

$$\log_5 2 + \log_5 [2(11) - 5] \stackrel{?}{=} \log_5 [3(11) + 1]$$
$$\log_5 2 + \log_5 17 \stackrel{?}{=} \log_5 34$$
$$\log_5 (2 \cdot 17) \stackrel{?}{=} \log_5 34 \quad \text{Regla del producto.}$$
$$\log_5 34 = \log_5 34 \quad \text{Verdadero}$$

Ahora resuelve el ejercicio 53

Recuerda, de la sección 9.5, que, un logaritmo común tiene una base de 10, y cuando la base de un logaritmo no se indique, se supondrá que la base es 10. En los siguientes dos ejemplos se usarán logaritmos comunes.

EJEMPLO 6 Resuelve la ecuación $x + \log(x + 1) = \log 12$.

Solución

$$\log x + \log(x + 1) = \log 12$$
$$\log x(x + 1) = \log 12 \quad \text{Regla del producto.}$$
$$x(x + 1) = 12 \quad \text{Propiedad 6d.}$$
$$x^2 + x = 12$$
$$x^2 + x - 12 = 0$$
$$(x + 4)(x - 3) = 0$$
$$x + 4 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0$$
$$x = -4 \qquad x = 3$$

Comprende el Álgebra

Recuerda, de la sección 9.3, que, el dominio de las funciones logarítmicas es $(0,\infty)$. En otras palabras, *no se puede tomar el logaritmo de cero o un número negativo*. En consecuencia, debes comprobar tus resultados al resolver ecuaciones logarítmicas, para asegurarte de que el argumento del logaritmo es positivo.

Verifica

$x = -4$

$$\log x + \log(x + 1) = \log 12$$
$$\log(-4) + \log(-4 + 1) \stackrel{?}{=} \log 12$$
$$\log(-4) + \log(-3) \stackrel{?}{=} \log 12$$

Alto. ↑ ↑ Los logaritmos de los números negativos no son números reales.

$x = 3$

$$\log x + \log(x + 1) = \log 12$$
$$\log 3 + \log(3 + 1) \stackrel{?}{=} \log 12$$
$$\log 3 + \log 4 \stackrel{?}{=} \log 12$$
$$\log[(3)(4)] \stackrel{?}{=} \log 12$$
$$\log 12 = \log 12 \quad \text{Verdadero}$$

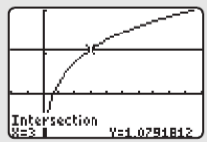
Por tanto, -4 es una solución extraña. La única solución es 3.

Ahora resuelve el ejercicio 63

USA TU CALCULADORA GRAFICADORA

Anteriormente, se mostró cómo resolver ecuaciones en una variable con el uso de una calculadora graficadora. Para resolver la ecuación $\log x + \log(x + 1) = \log 12$ (consulta el ejemplo 6) usando una TI-84 plus, puedes graficar:

$Y_1 = \log(x) + \log(x + 1)$
$Y_2 = \log(12)$



$[-2, 10, 1, -1, 2, 1]$

FIGURA 9.21

El punto de intersección de estas gráficas, se puede determinar usando la función *intersect* del menú CALC. La **Figura 9.21**, muestra que la coordenada x del punto de intersección, 3, es la solución a la ecuación.

EJEMPLO 7 Resuelve la ecuación $(5x - 3) - \log(2x) = 1$.

Solución

$$\log(5x - 3) - \log(2x) = 1$$

$$\log\left(\frac{5x - 3}{2x}\right) = 1 \qquad \text{Regla del cociente.}$$

$$\left(\frac{5x - 3}{2x}\right) = 10^1 \qquad \text{Escribe en forma exponencial.}$$

$$\frac{5x - 3}{2x} = 10$$

$$5x - 3 = 20x \qquad \text{Multiplica ambos lados por } 2x.$$

$$-3 = 15x \qquad \text{Resta } 5x \text{ de ambos lados.}$$

$$x = -\frac{3}{15} = -\frac{1}{5} = -0.2$$

Verifica

$$\log(5x - 3) - \log(2x) = 1$$

$$\log[5(-0.2) - 3] - \log[2(-0.2)] = 1$$

$$\log(-4) - \log(-0.4) = 1$$

Dado que se obtienen los logaritmos de números negativos, -0.2 es una solución extraña. En consecuencia, la ecuación no tiene solución. Su conjunto solución es el conjunto vacío, $\varnothing$.

Ahora resuelve el ejercicio 67

2 Resolución de problemas aplicados

Ahora, observarás una aplicación que involucra una ecuación exponencial.

EJEMPLO 8 **Bacterias** Si inicialmente hay 1 000 bacterias en un cultivo, y el número de bacterias se duplica cada hora, el número de bacterias después de t horas puede determinarse mediante la fórmula

$$N = 1\,000(2)^t$$

¿Cuánto tiempo transcurrirá para que el cultivo crezca a 30 000 bacterias?

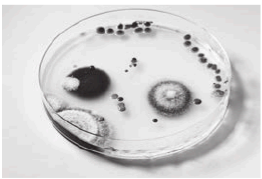
Solución

$$N = 1\,000(2)^t$$

$$30\,000 = 1\,000(2)^t \qquad \text{Sustituye 30 000 por } N.$$

$$30 = (2)^t \qquad \text{Divide ambos lados entre 1 000.}$$

Se quiere determinar el valor para t. Para lograr esto, se usarán logaritmos. Comienza por tomar el logaritmo de ambos lados de la ecuación.



$$\log 30 = \log(2)^t$$

$$\log 30 = t \log 2 \qquad \text{Regla de potencia.}$$

$$\frac{\log 30}{\log 2} = t \qquad \text{Divide ambos lados por log 2.}$$

$$\frac{1.4771}{0.3010} \approx t$$

$$4.91 \approx t$$

Se requerirán aproximadamente 4.91 horas para que el cultivo crezca a 30 000 bacterias.

Ahora resuelve el ejercicio 69

9.6 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

extrañas exponencial base logaritmo cociente suma producto diferencia

1. Para resolver la ecuación $9^x = \frac{1}{3}$, escribe ambos lados de la ecuación con la misma _____, 3, y después usa la propiedad 6b.
2. Para resolver la ecuación $3^x = 41$, toma el _____ común de ambos lados de la ecuación.
3. Es necesario verificar las ecuaciones logarítmicas para evitar soluciones _____.
4. Para resolver la ecuación $\log_3(x + 1) = 2$, primero escribe la ecuación en forma _____.
5. Para resolver la ecuación $\log_3 x + \log_3(x - 2) = 1$, primero reescribe el lado izquierdo de la ecuación como un solo logaritmo, usando la regla del _____ para logaritmos.
6. Para resolver la ecuación $\log_3 x - \log_3(x - 2) = 1$, primero reescribe el lado izquierdo de la ecuación como un solo logaritmo, usando la regla del _____ para logaritmos.

Practica tus habilidades

Resuelve cada ecuación exponencial sin usar una calculadora.

7. $3^x = 81$ **8.** $4^x = 256$ **9.** $64^x = 8$ **10.** $81^x = 3$

11. $7^{-x} = \frac{1}{49}$ **12.** $6^{-x} = \frac{1}{216}$ **13.** $27^x = \frac{1}{3}$ **14.** $25^x = \frac{1}{5}$

15. $2^{x+2} = 64$ **16.** $3^{x-7} = 81$ **17.** $27^x = 3^{2x+3}$ **18.** $64^x = 4^{4x+1}$

19. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 16$ **20.** $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 243$

Resuelve cada ecuación exponencial. Usa una calculadora y redondea tus respuestas a la centésima más cercana.

21. $7^x = 50$ **22.** $13^x = 137$ **23.** $4^{x-1} = 35$ **24.** $7^{x+3} = 95$

25. $5^{x+9} = 392$ **26.** $7^{x+5} = 273$ **27.** $2^{x+1} = 3^x$ **28.** $5^{x+1} = 7^x$

29. $3^{x+4} = 6^x$ **30.** $5^x = 2^{x+5}$

Resuelve cada ecuación logarítmica. Usa una calculadora cuando sea apropiado.

31. $\log_{36} x = \frac{1}{2}$ **32.** $\log_{81} x = \frac{1}{2}$ **33.** $\log_{125} x = \frac{1}{3}$ **34.** $\log_{81} x = \frac{1}{4}$

35. $\log_2 x = -4$ **36.** $\log_7 x = -2$ **37.** $\log x = 2$ **38.** $\log x = 4$

39. $\log_5(6x - 11) = 2$ **40.** $\log_4(3x + 7) = 3$ **41.** $\log_7(2x + 13) = 2$ **42.** $\log_5(3x - 1) = 3$

43. $\log(x + 8) = 2$ **44.** $\log(3x - 8) = 1$ **45.** $\log_5(x + 1)^2 = 2$ **46.** $\log_3(a - 2)^2 = 2$

47. $\log_2 x + \log_2 5 = 2$ **48.** $\log_3 7 + \log_3 x = 4$ **49.** $\log_5 x - \log_5 3 = 2$ **50.** $\log_2 x - \log_2 5 = 3$

51. $\log(r + 2) = \log(3r - 1)$ **52.** $\log_6(s + 5) = \log_6(4s - 3)$

53. $\log(2x + 1) + \log 4 = \log(7x + 8)$ **54.** $\log(x - 5) + \log 3 = \log(2x)$

55. $\log_{11} x + \log_{11}(2x - 5) = \log_{11} 3$ **56.** $\log n + \log(3n - 5) = \log 2$

57. $\log(x + 4) - \log x = \log(x + 1)$ **58.** $\log_8(y + 9) - \log_8(y + 1) = \log_8 y$

59. $2 \log x - \log 9 = 2$ **60.** $2 \log_4 x - \log_4 25 = 2$

61. $\log x + \log(x - 3) = 1$ **62.** $\log_2 y + \log_2(y - 7) = 3$

63. $\log_5(x + 3) + \log_5(x - 2) = \log_5 6$ **64.** $\log_{13}(x + 5) + \log_{13}(x - 3) = \log_{13} 48$

65. $\log_2(x + 3) - \log_2(x - 6) = \log_2 4$ **66.** $\log_7(x + 6) - \log_7(x - 3) = \log_7 4$

67. $\log_9(y - 1) - \log_9(y + 5) = \log_9 4$ **68.** $\log(x - 7) - \log(x + 3) = \log 6$

Resolución de problemas

Resuelve cada problema. Redondea tus respuestas a la centésima más cercana.

69. Bacterias Si el número inicial de bacterias en el cultivo del ejemplo 8 es 4500, ¿en cuánto tiempo llegará el número de bacterias en el cultivo a 50000? Usa $N = 4500(2)^t$.

70. Bacterias Si después de 4 horas, el cultivo del ejemplo 8 contiene 2224 bacterias, ¿cuántas bacterias estaban presentes inicialmente?

71. Decaimiento radiactivo La cantidad, A, de 200 gramos de cierto material radiactivo que permanecen después de t años, se puede determinar mediante la ecuación $A = 200(0.75)^t$. ¿En cuánto tiempo quedarán 80 gramos?

72. Decaimiento radiactivo La cantidad, A, de 70 gramos de cierto material radiactivo que permanecen después de t años, se puede determinar mediante la ecuación $A = 70(0.62)^t$. ¿En cuánto tiempo quedarán 10 gramos?

73. Cuenta de ahorros Paulo invierte \$2000 en una cuenta de ahorros, que gana interés a una tasa de 5% compuesto anualmente. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que los \$2000 aumenten a \$4600? Usa la fórmula de interés compuesto, $A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$, que se estudió en la página 620.



74. Cuenta de ahorros Si Tadeo invierte \$600 en una cuenta de ahorros, que gana interés a una tasa de 6% compuesto semestralmente, ¿cuánto tiempo transcurrirá para que los \$600 aumenten a \$1800?

75. Cuenta de mercado de dinero Si Jazmín invierte \$2500 en una cuenta de mercado de dinero, que gana interés a una tasa de 4% compuesto trimestralmente, ¿cuánto tiempo transcurrirá para que los \$2500 aumenten a \$4000?

76. Cuenta de cooperativa de crédito Carlota invierte \$1000 en una participación en cuenta de ahorros en su cooperativa de crédito. Si su dinero gana interés a una tasa de 3% compuesto mensualmente, ¿cuánto tiempo transcurrirá para que los \$1000 aumenten a \$1500?

77. Depreciación Una máquina comprada para uso empresarial, puede depreciarse para reducir el ingreso sobre la renta. El valor de la máquina, al final de su vida útil, se llama *valor residual*. Cuando la máquina se deprecia anualmente por un porcentaje constante, su valor residual, S, es $S = c(1 - r)^n$, donde c es el costo original, r es la tasa anual de depreciación como decimal, y n es la vida útil en años. Determina el valor residual de una máquina que cuesta \$50000, tiene una vida útil de 12 años y tiene una tasa de depreciación anual de 15%.

78. Depreciación Si la máquina del ejercicio 77, cuesta \$100000, tiene una vida útil de 15 años y tiene una tasa de depreciación anual de 8%, determina su valor residual.

79. Ganancia de un amplificador La ganancia, P, de un amplificador, se define como

$$P = 10 \log\left(\frac{P_{\text{salida}}}{P_{\text{entrada}}}\right)$$

donde P_{salida} es la potencia de salida en watts y P_{entrada} es la potencia de entrada en watts. Si un amplificador tiene una potencia de salida de 12.6 watts y una potencia de entrada de 0.146 watts, determina la ganancia.



80. Terremoto Medida en la escala Richter, la magnitud, R, de un terremoto con intensidad I, se define mediante $R = \log I$, donde I es el número de veces que el terremoto es más intenso que el nivel mínimo de comparación.

a) ¿Cuántas veces más intenso fue el terremoto de San Francisco en el año 1906, que midió 8.25 en la escala Richter, que el nivel mínimo de comparación?

b) ¿Cuántas veces más intenso es un terremoto que mide 8.3 en la escala Richter, que uno que mide 4.7?

81. Magnitud del sonido La escala decibel se usa para medir la magnitud del sonido. La magnitud, d, en decibeles, de un sonido, se define como $d = 10 \log I$, donde I es el número de veces mayor (o más intenso) que el sonido es comparado con la intensidad mínima del sonido audible.

a) Un motor de avión (casi) mide 120 decibeles. ¿Cuántas veces mayor que el nivel mínimo de sonido audible, es el motor de avión?

b) La intensidad del ruido en una calle citadina transitada, es de 50 decibles. ¿Cuántas veces mayor es la intensidad del sonido del motor de avión, que el sonido de la calle citadina?



82. En el siguiente procedimiento, se comienza con un enunciado verdadero y termina con un enunciado falso. ¿Puedes determinar el error?

$2 < 3$	Verdadero
$2 \log (0.1) < 3 \log (0.1)$	Multiplica ambos lados por log (0.1).
$\log (0.1)^2 < \log (0.1)^3$	Propiedad 3
$(0.1)^2 < (0.1)^3$	Propiedad 6d
$0.01 < 0.001$	Falso

83. Resuelve $8^x = 16^{x-2}$.

84. Resuelve $27^x = 81^{x-3}$.

85. Usa ecuaciones que tengan forma cuadrática, para resolver la ecuación $2^{2x} - 6(2^x) + 8 = 0$.

86. Usa ecuaciones que tengan forma cuadrática, para resolver la ecuación $2^{2x} - 18(2^x) + 32 = 0$.

Cambia la ecuación exponencial o logarítmica a la forma $ax + by = c$, y después resuelve el sistema de ecuaciones.

87. $2^x = 8^y$
$x + y = 4$

88. $3^{2x} = 9^{y+1}$
$x - 2y = -3$

89. $\log (x + y) = 2$
$x - y = 8$

90. $\log (x + y) = 3$
$2x - y = 5$

Usa tu calculadora para estimar las soluciones a la décima más cercana. Si no existe una solución real, indícalo.

91. $\log (x + 3) + \log x = \log 16$

92. $\log (3x + 5) = 2.3x - 6.4$

93. $5.6 \log (5x - 12) = 2.3 \log (x - 5.4)$

94. $5.6 \log (x + 12.2) - 1.6 \log (x - 4) = 20.3 \log (2x - 6)$

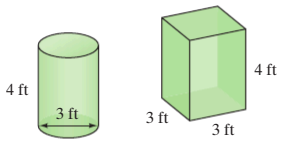
Ejercicios conceptuales y de redacción

95. ¿Cómo puedes decir rápidamente que $\log (x + 4) = \log (-2)$ no tiene solución real?

96. En las propiedades 6c y 6d, se especifica que, tanto x como y, deben ser positivas. Explica por qué.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **97.** Considera las dos figuras siguientes. ¿Cuál tiene mayor volumen y por cuánto?



[3.6] **98.** Sea $f(x) = x^2 - x$ y $g(x) = x - 1$. Determina $(g - f)(3)$.

[4.6] **99.** Determina la solución al sistema de desigualdades.

$$3x - 4y \leq 6$$
$$y > -x + 4$$

[7.5] **100.** Simplifica $\dfrac{2\sqrt{xy} - \sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$.

[8.3] **101.** Resuelve $E = mc^2$ en términos de c.

[8.5] **102.** Determina la función para la parábola que tiene la forma $f(x) = 2x^2$ y tiene su vértice en $(3, -5)$.

9.7 Función exponencial natural y logarítmica natural

1. **Identificación de la función exponencial natural**
2. **Identificación de la función logarítmica natural**
3. **Aproximación de logaritmos naturales y potencias de *e* en una calculadora**
4. **Uso de la fórmula de cambio de base**
5. **Resolución de ecuaciones logarítmicas naturales y exponenciales naturales**
6. **Resolución de problemas aplicados**

En esta sección, estudiarás la *función exponencial natural* y su inversa, *la función logarítmica natural*. Estas funciones se usan, frecuentemente, para describir eventos que ocurren de manera natural, de ahí el adjetivo *natural*. Estas dos funciones dependen de un número irracional, designado mediante la letra e.

La base natural, *e*

La **base natural, *e***, es un número irracional que sirve como la base para la *función exponencial natural* y la *función logarítmica natural*.

$$e \approx 2.7183$$

1 Identificación de la función exponencial natural

En la sección 9.2, estudiaste las funciones exponenciales. Recuerda que, las funciones exponenciales, son de la forma $f(x) = a^x, a > 0$ y $a \neq 1$. Ahora, se presenta la *función exponencial natural.*

La función exponencial natural

La **función exponencial natural** es

$$f(x) = e^x$$

donde e es la base natural.

2 Identificación de la función logarítmica natural

Se comienza por definir los logaritmos naturales.

Logaritmos naturales

Los **logaritmos naturales**, son logaritmos con base e, la base natural. Los logaritmos naturales se indican con la notación ln.

$$\log_e x = \ln x \qquad (x > 0)$$

ln x se lee "el logaritmo natural de x".

Comprende el Álgebra

Existen dos tipos de logaritmos muy importantes, cuya notación difiere de otros logaritmos.

- Los logaritmos *comunes*, tienen una base de 10 y se escriben usando la notación log x. En consecuencia,

$$\log_{10} x = \log x$$

- Los logaritmos *naturales*, tienen una base de e, la base natural, y se escriben usando la notación ln x. En consecuencia,

$$\log_e x = \ln x$$

En la sección 9.3, estudiaste las funciones logarítmicas. Recuerda que, las funciones logarítmicas, tienen la forma $f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1, x > 0$. Ahora se presenta la *función logarítmica natural*.

La función logarítmica natural

La **función logarítmica natural** es

$$f(x) = \ln x \qquad (x > 0)$$

donde $\ln x = \log_e x$ y e es la base natural.

Cuando cambias un logaritmo natural a la forma exponencial, la base de la expresión exponencial es la base natural, e.

Logaritmo natural en forma exponencial

Para $x > 0$, si $y = \ln x$, entonces $e^y = x$.

EJEMPLO 1 Determina el valor de la expresión, al cambiar el logaritmo natural a la forma exponencial.

a) $\ln 1$ **b)** $\ln e$ **c)** $\ln \frac{1}{e}$ **d)** $\ln \sqrt{e}$

Solución

a) Sea $y = \ln 1$; entonces $e^y = 1$. Dado que cualquier valor distinto de cero a la 0 potencia es igual a 1, y debe ser igual a 0. En consecuencia, $\ln 1 = 0$.

b) Sea $y = \ln e$; entonces $e^y = e$. Para que e^y sea igual a e, y debe ser igual a 1. En consecuencia, $\ln e = 1$.

c) Sea $y = \ln \frac{1}{e}$; entonces $e^y = \frac{1}{e}$. Dado que $\frac{1}{e} = e^{-1}$, y debe ser igual a -1. En consecuencia, $\ln \frac{1}{e} = -1$.

d) Sea $y = \ln \sqrt{e}$; entonces $e^y = \sqrt{e}$. Dado que $\sqrt{e} = e^{1/2}$, y debe ser igual a $\frac{1}{2}$. En consecuencia, $\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$.

Ahora resuelve el ejercicio 11

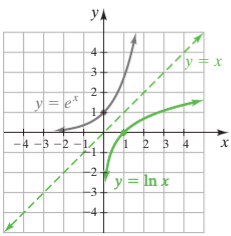


FIGURA 9.22

Recuerda, de la sección 9.3, que, las funciones $y = a^x$ y $y = \log_a x$, son funciones inversas. Por tanto, $y = e^x$ y $y = \ln x$, son funciones inversas. Las gráficas se muestran en la **Figura 9.22**. Observa que, las gráficas son simétricas en torno a la recta $y = x$. Observa también que, la gráfica de $y = e^x$, es similar a la gráfica de $y = a^x$, donde $a > 1$, y la gráfica de $y = \ln x$ es similar a la gráfica de $y = \log_a x$, donde $a > 1$.

3 Aproximación de logaritmos naturales y potencias de *e* en una calculadora

En forma similar, a como se aproximan los logaritmos comunes y las potencias de 10 en la sección 9.5, se puede usar una calculadora científica, o graficadora, para aproximar los logaritmos naturales y las potencias de *e*.

USA TU CALCULADORA

Aproximación de logaritmos naturales

Calculadora científica

Para aproximar logaritmos naturales en muchas calculadoras científicas, ingresa el argumento, luego, presiona la tecla LN.

EJEMPLO	TECLAS A OPRIMIR	RESPUESTA MOSTRADA
Aproxima ln 31	31 LN	3.433987204

Calculadora graficadora

Para aproximar logaritmos naturales en una calculadora graficadora, y en muchas calculadoras científicas, primero oprime LN y después ingresa el número. Por ejemplo, en la TI-84 Plus, harías lo siguiente:

EJEMPLO	TECLAS A OPRIMIR	RESPUESTA MOSTRADA
Aproxima ln 31	LN (31) ENTER ↑ Generada por la calculadora	3.433987204

Recuerda que, *un logaritmo es un exponente*. Por ende, el logaritmo natural de un número, es el exponente al cual debe elevarse la base natural *e* para obtener dicho número. Por ejemplo:

$\ln 242 \approx 5.488937726$ por tanto, $e^{5.488937726} \approx 242$

$\ln 0.85 \approx -0.1625189295$ por tanto, $e^{-0.1625189295} \approx 0.85$

USA TU CALCULADORA

Aproximación de potencias de *e*

Para evaluar potencias de la base natural *e* en tu calculadora, usa la función e^x, la cual se ubica directamente arriba de la tecla LN. Para acceder a esta función, presiona la tecla; 2ND, INV o SHIFT, antes de oprimir la tecla LN.

EJEMPLO 2 Aproxima las siguientes potencias de la base natural *e*. Redondea tus respuestas a la diezmilésima más cercana.

a) $e^{1.394}$ **b)** $e^{2.827}$ **c)** $e^{-0.356}$

Solución Usa una calculadora para aproximar cada potencia de *e*.

a) $e^{1.394} \approx 4.0309$ **b)** $e^{2.827} \approx 16.8947$ **c)** $e^{-0.356} \approx 0.7005$

Ahora resuelve el ejercicio 19

Recuerda, de la sección 9.6, que, no se puede tomar el logaritmo de cero o de un número negativo. En consecuencia, debes verificar tus resultados de resolver ecuaciones logarítmicas, para asegurarte de que el argumento del logaritmo es positivo.

EJEMPLO 3 Resuelve en términos de x, en cada una de las siguientes ecuaciones. Redondea tus respuestas a la diezmilésima más cercana.

a) $\ln x = 0.132$ **b)** $\ln x = -1.203$

Solución

a) Con la definición de logaritmo, se sabe que:

$\ln x = 0.132$ significa $x = e^{0.132} \approx 1.1411$

Si sustituyes 1.1411 de vuelta en la ecuación original, se tiene un argumento positivo. En consecuencia, 1.1411 no es una solución extraña. Al usar una calculadora, se ve que $\ln 1.1411 \approx 0.132$.

b) $\ln x = -1.203$ significa $x = e^{-1.203} \approx 0.3003$

Si sustituyes 0.3003 en la ecuación original, se tiene un argumento positivo. En consecuencia, 0.3003 no es una solución extraña. Con una calculadora, se ve que $0.3003 \approx -1.203$.

Ahora resuelve el ejercicio 23

4 Uso de la fórmula de cambio de base

Si te proporcionan un logaritmo en una base distinta a 10 o e, no podrás evaluarlo directamente en tu calculadora. Cuando esto ocurra, puedes usar la **fórmula de cambio de base**.

Fórmula de cambio de base

Para cualquier base de logaritmo a y b, y número positivo x,

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

En la fórmula de cambio de base, con frecuencia, se usa 10 en lugar de la base b, porque se pueden aproximar logaritmos comunes en una calculadora. Al sustituir la base b con 10, se obtiene:

$$\log_a x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} a} \quad \text{o} \quad \log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

EJEMPLO 4 Usa la fórmula de cambio de base para aproximar $\log_2 39$. Redondea tu respuesta a la diezmilésima más cercana.

Solución Se usarán logaritmos comunes y la fórmula de cambio de base. Al sustituir 2 por a y 39 por x, se obtiene:

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

$$\log_2 39 = \frac{\log 39}{\log 2} \approx 5.2854$$

Observa que, $2^{5.2854} \approx 39$.

Ahora resuelve el ejercicio 31

Comprende el Álgebra

En el ejemplo 4, se usó la fórmula de cambio de base y los logaritmos comunes para evaluar $\log_2 39$. También se podrían usar logaritmos naturales de la siguiente manera:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_2 39 = \frac{\log_e 39}{\log_e 2} = \frac{\ln 39}{\ln 2} \approx 5.2854$$

5 Resolución de ecuaciones logarítmicas naturales y exponenciales naturales

Las propiedades de los logaritmos discutidas en la sección 9.4, también son verdaderas para los logaritmos naturales.

Propiedades de los logaritmos naturales

$\ln xy = \ln x + \ln y$	$(x > 0 \text{ y } y > 0)$	Regla del producto
$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$	$(x > 0 \text{ y } y > 0)$	Regla del cociente
$\ln x^n = n \ln x$	$(x > 0)$	Regla de potencia

Las propiedades 4 y 5 de la página 636, también se pueden escribir usando logaritmos naturales. Por tanto, $\ln e^x = x$ y $e^{\ln x} = x$. A estas propiedades se les referirá como las propiedades 7 y 8, respectivamente.

Propiedades adicionales para expresiones logarítmicas naturales y exponenciales naturales

$\ln e^x = x$		Propiedad 7
$e^{\ln x} = x,$	$x > 0$	Propiedad 8

Con la propiedad 7, $\ln e^x = x$, se puede afirmar, por ejemplo, que $\ln e^{kt} = kt$, y $\ln e^{-2.06t} = -2.06t$. Con la propiedad 8, $e^{\ln x} = x$, se puede afirmar, por ejemplo, que $e^{\ln(t+2)} = t + 2$ y $e^{\ln kt} = kt$.

EJEMPLO 5 Resuelve la ecuación $\ln(x + 7) + \ln(x - 1) = \ln 9$.

Solución Comienza por usar la regla del producto para reescribir el lado izquierdo de la ecuación, como un solo logaritmo natural.

$$\ln(x + 7) + \ln(x - 1) = \ln 9$$
$$\ln[(x + 7)(x - 1)] = \ln 9 \quad \text{Regla del producto.}$$
$$\ln(x^2 + 6x - 7) = \ln 9$$

Recuerda, de la sección 9.6, que, la propiedad 6d establece que, si dos expresiones logarítmicas son iguales, entonces los argumentos deben ser iguales. Por tanto:

$$x^2 + 6x - 7 = 9 \quad \text{Propiedad 6d de la sección 9.6.}$$
$$x^2 + 6x - 16 = 0 \quad \text{Resta 9 de ambos lados.}$$
$$(x + 8)(x - 2) = 0 \quad \text{Factoriza polinomio.}$$
$$x + 8 = 0 \quad \text{or} \quad x - 2 = 0 \quad \text{Propiedad factor cero.}$$
$$x = -8 \qquad x = 2$$

Recuerda, de la sección 9.6, que, debes comprobar, tanto $x = -8$ como $x = 2$, en la ecuación original, para garantizar que tienes un argumento positivo.

Verifica

$x = -8$

$$\ln(x + 7) + \ln(x - 1) = \ln 9$$
$$\ln(-8 + 7) + \ln(-8 - 1) \stackrel{?}{=} \ln 9$$
$$\ln(-1) + \ln(-9) \stackrel{?}{=} \ln 9$$

Alto. ↑ ↑ Los logaritmos de números negativos no son números reales.

$x = 2$

$$\ln(x + 7) + \ln(x - 1) = \ln 9$$
$$\ln(2 + 7) + \ln(2 - 1) \stackrel{?}{=} \ln 9$$
$$\ln 9 + \ln 1 \stackrel{?}{=} \ln 9$$
$$\ln(9 \cdot 1) \stackrel{?}{=} \ln 9$$
$$\ln 9 = \ln 9 \quad \text{Verdadero}$$

Por tanto, -8 es una solución extraña y la única solución es 2.

Ahora resuelve el ejercicio 39

EJEMPLO 6 Resuelve la ecuación $225 = 450e^{-0.4t}$ en términos de t.

Solución Comienza por dividir ambos lados de la ecuación por 450, para despejar $e^{-0.4t}$.

$$\frac{225}{450} = \frac{450e^{-0.4t}}{450}$$
$$0.5 = e^{-0.4t}$$

Ahora toma el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación, para eliminar la expresión exponencial del lado derecho de la ecuación.

$$\begin{aligned} \ln 0.5 &= \ln e^{-0.4t} \\ \ln 0.5 &= -0.4t && \text{Propiedad 7.} \\ -0.6931472 &\approx -0.4t && \text{De una calculadora.} \\ \frac{-0.6931472}{-0.4} &\approx t \\ 1.732868 &\approx t \end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 53

EJEMPLO 7 Resuelve la ecuación $P = P_0e^{kt}$, en términos de t.

Solución Puedes seguir el mismo procedimiento utilizado en el ejemplo 6.

$$\begin{aligned} P &= P_0e^{kt} \\ \frac{P}{P_0} &= \frac{P_0e^{kt}}{P_0} && \text{Divide ambos lados entre } P_0. \\ \frac{P}{P_0} &= e^{kt} \\ \ln \frac{P}{P_0} &= \ln e^{kt} && \text{Toma el logaritmo natural de ambos lados.} \\ \ln P - \ln P_0 &= \ln e^{kt} && \text{Regla del cociente.} \\ \ln P - \ln P_0 &= kt && \text{Propiedad 7.} \\ \frac{\ln P - \ln P_0}{k} &= t && \text{Resuelve en términos de } t. \end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 63

6 Resolución de problemas aplicados

Ahora, se presentan algunas aplicaciones que involucran la base natural y los logaritmos naturales. Se comienza con una fórmula que se utiliza cuando una cantidad aumenta o disminuye, como una *razón exponencial*.

Fórmula de crecimiento o decaimiento exponencial

Cuando una cantidad P aumenta (crece) o disminuye (decae) a una razón exponencial, el valor de P, después del tiempo t, se puede determinar usando la fórmula

$$P = P_0e^{kt},$$

donde P_0 es el valor inicial o de partida de la cantidad P, y k es la razón de crecimiento o razón de decaimiento constante.

Cuando $k > 0$, P aumenta conforme t aumenta.

Cuando $k < 0$, P disminuye y se acerca más a 0, conforme t aumenta.

EJEMPLO 8 **Interés compuesto continuo** Cuando el interés se compone continuamente, el saldo, P, en la cuenta en cualquier tiempo, t, puede calcularse mediante la fórmula de crecimiento exponencial $P = P_0e^{kt}$, donde P_0 es el principal invertido inicialmente y k es la tasa de interés.

a) Supón que la tasa de interés es 6% compuesto continuo y se invierten inicialmente $1 000. Determina el saldo en la cuenta después de 3 años.

b) ¿Cuánto tardará la cuenta en duplicar su valor?

Solución

a) Entiende y Traduce Se indica que el principal invertido inicialmente, P_0, es $1 000. También se indica que el tiempo, t, es 3 años y que la tasa de interés, k,

es 6% o 0.06. Sustituye estos valores en la fórmula dada y resuelve en términos de P.

$$P = P_0 e^{kt}$$
$$P = 1\,000 e^{(0.06)(3)}$$

Realiza
$$= 1\,000 e^{0.18} \approx 1\,000\,(1.1972174) \quad \text{De una calculadora.}$$
$$\approx 1\,197.22$$

Responde Después de 3 años, el saldo en la cuenta es ≈ \$1197.22.

b) Entiende y Traduce Para que el valor de la cuenta se duplique, el saldo en la cuenta tendría que llegar a \$2000. En consecuencia, sustituye 2000 por P y resuelve en términos de t.

$$P = P_0 e^{kt}$$
$$2\,000 = 1\,000 e^{0.06t}$$
$$2 = e^{0.06t} \quad \text{Divide ambos lados entre 1 000.}$$

Realiza
$$\ln 2 = \ln e^{0.06t} \quad \text{Toma el logaritmo natural de ambos lados.}$$
$$\ln 2 = 0.06t \quad \text{Propiedad 7.}$$
$$\frac{\ln 2}{0.06} = t$$
$$\frac{0.6931472}{0.06} \approx t$$
$$11.552453 \approx t$$

Responde En consecuencia, con una tasa de interés de 6% compuesto continuo, la cuenta se duplicará en aproximadamente 11.6 años.

Ahora resuelve el ejercicio 73

EJEMPLO 9 **Decaimiento radiactivo** El estroncio 90, es un isótopo radiactivo que decae exponencialmente a 2.8% por año. Supón que, inicialmente, hay 1 000 gramos de estroncio 90 en una sustancia.

a) Determina el número de gramos de estroncio 90 que quedan después de 50 años.
b) Determina la vida media del estroncio 90.

Solución

a) Entiende Dado que el estroncio 90 decae con el tiempo, el valor de k, en la fórmula $P = P_0 e^{kt}$, es negativo. Como la tasa de decaimiento es de 2.8% al año, usa $k = -0.028$. En consecuencia, la fórmula que se usa es $P = P_0 e^{-0.028t}$.

Traduce
$$P = P_0 e^{-0.028t}$$
$$= 1\,000 e^{-0.028(50)}$$

Realiza
$$= 1\,000 e^{-1.4} \approx 1\,000\,(0.246597) \approx 246.597$$

Responde En consecuencia, después de 50 años, quedan aproximadamente 246.597 gramos de estroncio 90.

b) Para determinar la vida media, es necesario determinar cuándo quedan 500 gramos de estroncio 90.

$$P = P_0 e^{-0.028t}$$
$$500 = 1\,000 e^{-0.028t}$$
$$0.5 = e^{-0.028t} \quad \text{Divide ambos lados entre 1 000.}$$
$$\ln 0.5 = \ln e^{-0.028t} \quad \text{Toma el logaritmo natural de ambos lados.}$$
$$-0.6931472 \approx -0.028t \quad \text{Propiedad 7.}$$
$$\frac{-0.6931472}{-0.028} \approx t$$
$$24.755257 \approx t$$

En consecuencia, la vida media del estroncio 90 es de aproximadamente 24.8 años.

Ahora resuelve el ejercicio 75

EJEMPLO 10 **Venta de juguetes** La fórmula para estimar la cantidad de dinero, A, gastado en publicitar cierto juguete, es $A = 350 + 650 \ln n$, donde n es el número esperado de juguetes vendidos.

a) Si la compañía quiere vender 2200 juguetes, ¿cuánto dinero espera gastar la compañía en publicidad?

b) ¿Cuántos juguetes esperarían vender si gastan $6000 en publicidad?



Solution

a) $A = 350 + 650 \ln n$

$= 350 + 650 \ln 2200$ Sustituye 2200 por n.

$\approx 350 + 650(7.6962126)$

≈ 5352.54

En consecuencia, se espera un gasto de $5352.54 en publicidad.

c) Entiende y Traduce Se pide determinar el número de juguetes que se esperan vender, n, si se gastan $6000 en publicidad. Sustituye los valores dados en la ecuación y resuelve para n.

$$A = 350 + 650 \ln n$$

Realiza

$$6000 = 350 + 650 \ln n \quad \text{Sustituye 6000 por } A.$$

$$5650 = 650 \ln n \quad \text{Resta 350 de ambos lados.}$$

$$\frac{5650}{650} = \ln n \quad \text{Divide ambos lados entre 650.}$$

$$8.69231 \approx \ln n$$

$$e^{8.69231} \approx n \quad \text{Cambia a forma exponencial.}$$

$$5957 \approx n \quad \text{Obtén la respuesta de una calculadora.}$$

Responde En consecuencia, podrían esperar vender 5957 juguetes, si gastan $6000 en publicidad.

Ahora resuelve el ejercicio 81

USA TU CALCULADORA GRAFICADORA

Para aproximar las soluciones a la ecuación $4e^{0.3x} - 5 = x + 3$, usando la TI-84 Plus, puedes graficar:

$$Y_1 = 4e\text{^}(0.3x) - 5$$
$$Y_2 = x + 3$$

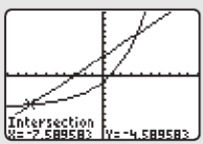


FIGURA 9.23

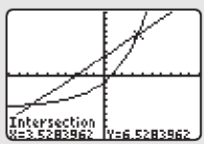


FIGURA 9.24

Los puntos de intersección de estas gráficas, pueden estimarse usando la función *intersect* del menú CALC. La **Figura 9.23**, muestra que una solución, es la coordenada x de un punto de intersección, $x \approx -7.5896$. La **Figura 9.24**, muestra que otra solución es la coordenada x del otro punto de intersección, $x \approx 3.5284$.

9.7 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

inversas	trimestralmente	exponencial	compuesta	logarítmica
base	cambio	comunes	crecimiento	continuamente

1. La _____ natural, e, es un número irracional que sirve como la base para la función exponencial natural y la función logarítmica natural.
2. La función exponencial natural y la función logarítmica natural, son funciones _____.
3. La función _____ natural, es $f(x) = e^x$, donde e es la base natural.
4. La función _____ natural, es $f(x) = \ln x$, $x > 0$, donde e es la base natural.
5. La fórmula $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ es la fórmula de _____ de base.
6. En la fórmula de cambio de base, con frecuencia, se usa 10 en lugar de b, porque se pueden aproximar los logaritmos _____ usando una calculadora.
7. La fórmula de _____ o decaimiento exponencial, afirma que, cuando una cantidad P aumenta o disminuye a una razón exponencial, el valor de P, después del tiempo t, se puede determinar usando la fórmula $P = P_0 e^{kt}$.
8. Cuando el interés se compone _____, el saldo en la cuenta puede calcularse usando la fórmula de crecimiento exponencial.

Practica tus habilidades

Determina el valor de cada expresión, al cambiar el logaritmo natural a forma exponencial.

9. $\ln e^2$ **10.** $\ln \dfrac{1}{e^2}$ **11.** $\ln \sqrt[3]{e}$ **12.** $\ln \sqrt[4]{e}$

Aproxima los siguientes valores. Redondea tus respuestas a la diezmilésima más cercana.

13. $\ln 27$ **14.** $\ln 810$ **15.** $\ln 0.415$ **16.** $\ln 0.000176$

Aproxima los siguientes valores. Redondea tus respuestas a la diezmilésima más cercana.

17. $e^{1.2}$ **18.** $e^{4.8}$ **19.** $e^{-0.56}$ **20.** $e^{-2.6}$

Aproxima el valor de x. Redondea tus respuestas a la diezmilésima más cercana.

21. $\ln x = 1.6$ **22.** $\ln x = 5.2$ **23.** $\ln x = -2.85$ **24.** $\ln x = -0.674$

Aproxima el valor de x. Redondea tus respuestas a la diezmilésima más cercana.

25. $e^x = 98$ **26.** $e^x = 2\,010$ **27.** $e^x = 0.0574$ **28.** $e^x = 0.000231$

Usa la fórmula de cambio de base, para aproximar el valor de los siguientes logaritmos. Redondea tus respuestas a la diezmilésima más cercana.

29. $\log_2 21$ **30.** $\log_2 89$ **31.** $\log_4 11$ **32.** $\log_4 316$

33. $\log_2 0.8512$ **34.** $\log_7 0.0478$ **35.** $\log_5 0.463$ **36.** $\log_3 0.0365$

Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

37. $\ln x + \ln (x - 1) = \ln 12$ **38.** $\ln x + \ln (x + 4) = \ln 5$ **39.** $\ln (x + 4) + \ln (x - 2) = \ln 16$

40. $\ln (x + 3) + \ln (x - 3) = \ln 40$ **41.** $\ln x = 5 \ln 2 - \ln 8$ **42.** $\ln x = 2 \ln 9 - \ln 27$

43. $\ln (x^2 - 4) - \ln (x + 2) = \ln 4$ **44.** $\ln (9x^2 - 25) - \ln (3x - 5) = \ln 14$

45. $\ln (3x - 7) - \ln (x + 4) = \ln 2$ **46.** $\ln (x + 12) - \ln (x - 4) = \ln 5$

47. $\ln (6x^2 + x - 15) - \ln (3x + 5) = \ln (5x + 15)$ **48.** $\ln (10x^2 - 9x - 7) - \ln (2x + 1) = \ln (7x + 1)$

Cada una de las siguientes ecuaciones, está en la forma $P = P_0e^{kt}$. Resuelve cada ecuación para la variable restante. Redondea tus respuestas a la diezmilésima más cercana.

49. $P = 120e^{2.3(1.6)}$

50. $P = 300e^{0.035(2.5)}$

51. $50 = P_0e^{-0.5(3)}$

52. $725 = P_0e^{-0.025(5)}$

53. $60 = 20e^{1.4t}$

54. $18 = 9e^{2t}$

55. $29 = 58e^{-0.5t}$

56. $51 = 68e^{-0.04t}$

57. $86 = 43e^{k(3)}$

58. $52 = 13e^{k(5)}$

59. $20 = 40e^{k(2.4)}$

60. $15 = 75e^{k(4)}$

Resuelve para la variable indicada.

61. $V = V_0e^{kt}$, para V_0

62. $P = P_0e^{kt}$, para P_0

63. $P = 150e^{7t}$, para t

64. $361 = P_0e^{kt}$, para t

65. $A = A_0e^{kt}$, para k

66. $P = P_0e^{kt}$, para k

67. $\ln y - \ln x = 2.3$, para y

68. $\ln w - \ln t = 5.4$, para w

69. $\ln y + 9 \ln x = \ln 2$, para y

70. $\ln w + 7 \ln t = \ln 11$

Resolución de problemas

Usa una calculadora para resolver.

71. Interés compuesto continuo Si $5000 se invierten a 6% compuesto continuamente,

a) determina el saldo en la cuenta después de 2 años.

b) ¿Cuánto tardaría en duplicarse el valor de la cuenta? (Consulta el ejemplo 8.)

72. Interés compuesto continuo Si $3000 se invierten a 3% compuesto continuamente,

a) determina el saldo en la cuenta después de 30 años.

b) ¿Cuánto tardaría en duplicarse el valor de la cuenta?

73. Cuenta de cooperativa de crédito Diana invierte $2500 en su cuenta de ahorros de cooperativa de crédito, que gana 4% de interés compuesto continuo.

a) Determina el saldo en la cuenta de Diana, después de 3 años.

b) ¿Cuánto tardará en duplicarse el valor en la cuenta de Diana?

74. Cuenta para el retiro Alonso invierte $10000 en una cuenta de ahorros para el retiro, que gana 5% de interés compuesto continuo.

a) Determina el saldo en la cuenta de Alonso, después de 25 años.

b) ¿Cuánto tardará en triplicarse el valor de la cuenta de Alonso?

75. Decaimiento radiactivo Consulta el ejemplo 9. Determina la cantidad de estroncio 90 restante, después de 20 años, si originalmente había 70 gramos.

76. Estroncio 90 Consulta el ejemplo 9. Determina la cantidad de estroncio 90 restante, después de 40 años, si originalmente había 200 gramos.

77. Bebidas gaseosas Para cierta bebida gaseosa, el porcentaje de un mercado específico, $f(t)$, que compra la gaseosa, es una función del número de días, t, que la bebida se publicita. La función que describe esta relación, es $f(t) = 1 - e^{-0.04t}$.

a) ¿Qué porcentaje del mercado específico compra la bebida, después de 50 días de publicidad?

b) ¿Cuántos días de publicidad se necesitan, si 75% del mercado específico debe comprar la gaseosa?

78. Publicidad Para cierto tipo de corbata, el número de corbatas vendidas, $N(a)$, es una función del monto en dólares gastado en publicidad, a (en miles de dólares). La función que describe esta relación, es $N(a) = 800 + 300 \ln a$.



a) ¿Cuántas corbatas se venderán después de gastar $1500 (o $1.5 mil) en publicidad?

b) ¿Cuánto dinero debe gastarse en publicidad para vender 1000 corbatas?

79. Supón que, el valor de la isla de Manhattan, ha crecido a una tasa exponencial de 8% anual desde 1626, cuando Peter Minuet, de la Compañía Dutch West India, la compró por $24. Entonces, el valor de Manhattan puede determinarse mediante la ecuación $V = 24e^{0.08t}$, donde t es el número de años desde 1626. Determina el valor de la isla de Manhattan en 2018, esto es: cuando $t = 392$ años.

80. Truchas en un lago En 2018, el Lago Thomas Pearse tenía 300 truchas. El crecimiento en el número de truchas, se estima mediante la función $g(t) = 300e^{0.07t}$, donde t es el número de años después de 2018. ¿Cuántas truchas habrá en el lago en **a)** 2023? **b)** 2028?



81. Rapidez de caminata En un estudio psicológico, se determinó que la rapidez de caminata promedio, $f(P)$, de una persona que vive en una ciudad, es una función de la población de la ciudad. Para una ciudad con población P, la rapidez de caminata promedio, en pies por segundo, está dada por $f(P) = 0.37 \ln P + 0.05$. La población de Nashville, Tennessee, es de 660 000.

a) ¿Cuál es la rapidez de caminata promedio, de una persona que vive en Nashville?

b) ¿Cuál es la rapidez de caminata promedio, de una persona que vive en la ciudad de Nueva York, con una población de 8 538 000 habitantes?

c) Si la rapidez de caminata promedio, de las personas en cierta ciudad, es de 5.0 pies por segundo, ¿cuál es la población de la ciudad?

82. Prescripción de un medicamento El porcentaje de médicos que prescriben un nuevo medicamento, está dado por la función $P(t) = 1 - e^{-0.22t}$, donde, t, es el tiempo en meses desde que el medicamento se coloca en el mercado. ¿Qué porcentaje de médicos prescriben un nuevo medicamento 2 meses después de que se coloca en el mercado?

83. Población mundial La población mundial esperada, $P(t)$, en miles de millones de personas, t años después del año 2017, está dada por la función $P(t) = 7.51e^{0.011t}$, Supón que esta tendencia continúa.

a) Usa la función para estimar la población mundial en el año 2025.

b) ¿Cuánto tardará en duplicarse la población mundial?

84. Población de China La población esperada de China, $P(t)$, en miles de millones de personas, t años después del año 2017, está dada por la función $P(t) = 1.39e^{0.005t}$. Supón que esta tendencia continúa.

a) Usa la función para estimar la población de China en el año 2025.

b) ¿Cuánto tardará en duplicarse la población de China?

85. Población de Estados Unidos La población esperada de Estados Unidos, $P(t)$, en miles de millones de personas, t años después del año 2017, está dada por la función $P(t) = 326.33e^{0.0073t}$. Supón que esta tendencia continúa.

a) Usa la función para estimar la población de Estados Unidos en el año 2025.

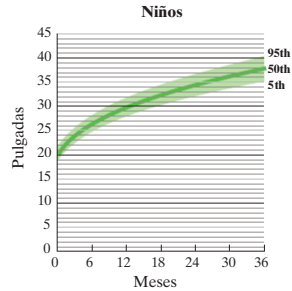
b) ¿Cuánto tardará en duplicarse la población de Estados Unidos?

86. Población de México La población esperada de México, $P(t)$, en miles de millones de personas, t años después del año 2017, está dada por la función $P(t) = 130.12e^{0.0124t}$. Supón que esta tendencia continúa.

a) Usa la función para estimar la población de México en el año 2025.

b) ¿Cuánto tardará en duplicarse la población de México?

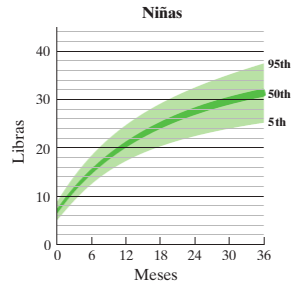
87. Estaturas de niños El área sombreada de la siguiente gráfica, muestra el rango normal (de los percentiles 5 al 95) de estaturas para niños, desde el nacimiento hasta los 36 meses de edad. La mediana, o percentil 50, de estaturas, se indica mediante la recta central verde. La función $y = 15.29 + 5.93 \ln x$ puede usarse para estimar la estatura mediana de los niños de 3 meses a 36 meses. Usa esta función para estimar la estatura mediana para niños, con edades de **a)** 18 meses y **b)** 30 meses.



Fuente: Newsweek.



88. Pesos de niñas El área sombreada de la siguiente gráfica, muestra el rango normal (de los percentiles 5 al 95) de pesos para niñas, desde el nacimiento hasta los 36 meses de edad. La mediana, o percentil 50, de pesos, se indica mediante la recta central naranja. La función $y = 3.17 + 7.32 \ln x$ puede usarse para estimar la mediana del peso de niñas de 3 meses a 36 meses. Usa esta función para estimar la mediana del peso para niñas, con edades de **a)** 18 meses y **b)** 30 meses.



Fuente: Newsweek.



89. Decaimiento radiactivo El uranio 234 (U-234) decae exponencialmente, a una razón de 0.0003% al año. En consecuencia, la fórmula $A = A_0e^{-0.000003t}$ puede usarse para determinar la cantidad de U-234 restante, de una cantidad inicial, A_0, después de t años.

a) Si en el año 2018, están presentes 1000 gramos de U-234, ¿cuántos gramos permanecerán en el año 2118, 100 años después?

b) Determina la vida media del U-234.

90. Decaimiento radiactivo El plutonio, que usualmente se utiliza en reactores nucleares, decae exponencialmente, a una razón de 0.003% al año. La fórmula $A = A_0e^{kt}$ puede usarse para determinar la cantidad de plutonio restante, de una cantidad inicial, A_0, después de t años. En la fórmula, la k se sustituye con -0.00003.

a) Si en el año 2018, están presentes 1000 gramos de plutonio, ¿cuántos gramos de plutonio permanecerán en el año 2118, 100 años después?

b) Determina la vida media del plutonio.

91. Datación con carbono La datación con carbono se usa para estimar la edad de plantas y objetos antiguos. El elemento radiactivo, carbono 14, se usa con mucha frecuencia para este propósito. El carbono 14, decae exponencialmente, a una razón de 0.01205% al año. La cantidad de carbono 14, restante en un objeto, después de t años, puede determinarse mediante la función $f(t) = v_0e^{-0.0001205t}$, donde v_0 es la cantidad inicial presente.

a) Si un antiguo hueso animal, originalmente tenía 20 gramos de carbono 14, y cuando se descubrió tenía 9 gramos de carbono 14, ¿qué tan antiguo es el hueso?

b) ¿Qué tan antiguo es un objeto que tiene 50% restante de su carbono 14 original?

92. Interés compuesto ¿A qué tasa, compuesta continuamente, debe invertirse una suma de dinero, si debe duplicarse en 13 años?

93. Interés compuesto ¿Cuánto dinero debe depositarse hoy, para convertirse en $20000 en 18 años, si se invirtió a 6% compuesto continuamente?

94. Radioisótopo El suministro de potencia de un satélite, es un radioisótopo. La potencia P, en watts, restante en el suministro de potencia, es una función del tiempo que el satélite está en el espacio.

a) Si originalmente hay 50 gramos del isótopo, la potencia restante después de t días, es $P = 50e^{-0.002t}$. Determina la potencia restante después de 50 días.

b) ¿Cuándo caerá la potencia restante a 10 watts?

95. Decaimiento radiactivo Durante el accidente nuclear en Chernobyl, Ucrania, en el año 1986, dos de los materiales radiactivos que escaparon a la atmósfera, fueron cesio 137, con una razón de decaimiento de 2.3%; y estroncio 90, con una razón de decaimiento de 2.8%.

a) ¿Cuál material se descompondrá más rápidamente? Explica.

b) ¿Qué porcentaje de cesio permanecerá en el año 2036, 50 años después del accidente?

96. Datación radiométrica En el estudio de datación radiométrica que utiliza isótopos radiactivos, para determinar la edad de los objetos, con frecuencia, se usa la fórmula:

$$t = \frac{t_h}{0.693}\ln\left(\frac{N_0}{N}\right)$$

En la fórmula, t es la edad del objeto, t_h es la vida media del isótopo radiactivo empleado, N_0 es el número original de átomos radiactivos presentes, y N es el número restante en el tiempo t. Supón, que una roca originalmente contenía 5×10^{12} átomos de uranio 238. El uranio 238, tiene una vida media de 4.5×10^9 años. Si en la actualidad hay 4×10^{12} átomos, ¿qué tan antigua es la roca?

Problemas de desafío

En los ejercicios 97-100, cuando resuelvas para la variable dada, escribe la respuesta sin usar el logaritmo natural.

97. Velocidad La distancia recorrida por un tren que, inicialmente, se mueve con velocidad v_0, después de que el motor se apaga, puede calcularse mediante la fórmula $x = \frac{1}{k}\ln(kv_0t + 1)$. Resuelve esta ecuación en términos de v_0.

98. Intensidad de luz La intensidad de luz, que pasa a través de cierto medio, se determina mediante la fórmula $x = k(\ln I_0 - \ln I)$. Resuelve la ecuación en términos de I_0.

99. Circuito eléctrico Una ecuación que relaciona la corriente y el tiempo en un circuito eléctrico, es $\ln i - \ln I = \frac{-t}{RC}$. Resuelve esta ecuación en términos de t.

100. Molécula Una fórmula que se utiliza en el estudio de la acción de una molécula proteica, es $\ln M = \ln Q - \ln (1 - Q)$. Resuelve esta ecuación en términos de Q.

Ejercicios de repaso acumulativo

[3.2] **101.** Sea $h(x) = \frac{x^2 + 4x}{x + 6}$. Determina **a)** $h(-4)$. **b)** $h\left(\frac{2}{5}\right)$.

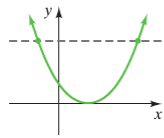
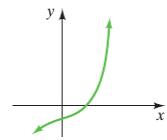
[4.3] **102. Boletos** La admisión a un juego de hockey sobre hielo, es de \$15 para adultos y \$11 para niños. Se vendió un total de 550 boletos. Determina cuántos boletos de niños y cuántos boletos de adulto se vendieron, si se recaudó un total de \$7290.

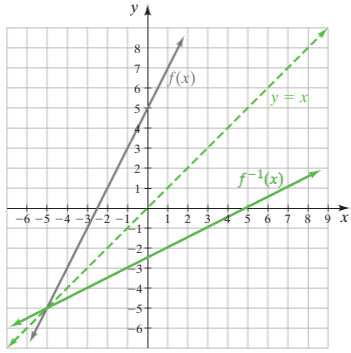
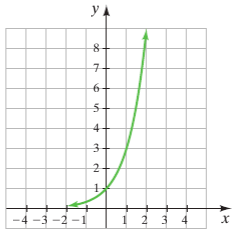
[5.2] **103.** Multiplica $(3xy^2 + y)(4x - 3xy)$.

[5.6] **104.** Determina dos valores de b que convertirán $4x^2 + bx + 25$ en un trinomio cuadrado perfecto.

[7.4] **105.** Multiplica $\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^5}\right)$.

Capítulo 9 Resumen

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 1.2	
La **función compuesta** $(f \circ g)(x)$ se define como $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$	Dado $f(x) = x^2 + 3x - 1$ y $g(x) = x - 4$, entonces: $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = (x - 4)^2 + 3(x - 4) - 1$ $= x^2 - 8x + 16 + 3x - 12 - 1$ $= x^2 - 5x + 3$ $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = (x^2 + 3x - 1) - 4$ $= x^2 + 3x - 5$
Una función es una **función uno a uno**, si cada elemento en el rango corresponde con exactamente un elemento en el dominio.	El conjunto $\{(1, 3), (-2, 5), (6, 2), (4, -1)\}$, es una función uno a uno, porque cada elemento en el rango corresponde con exactamente un elemento en el dominio.
Para que una función sea una función uno a uno, su gráfica debe pasar la **prueba de la recta vertical** (la prueba para garantizar que es una función) y la **prueba de la recta horizontal** (para probar que sea uno a uno).	 Función, mas no una función uno a uno  Función uno a uno
Si $f(x)$ es una función uno a uno con pares ordenados de la forma (x, y), su **función inversa**, $f^{-1}(x)$, es una función uno a uno con pares ordenados de la forma (y, x). Solamente las funciones uno a uno tienen funciones inversas. **Para determinar la función inversa de una función uno a uno** **1.** Sustituye $f(x)$ con y. **2.** Intercambia las dos variables x y y.	Determina la función inversa para $f(x) = 2x + 5$. Grafica $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ sobre el mismo conjunto de ejes. Solución: $f(x) = 2x + 5$ $y = 2x + 5$ $x = 2y + 5$ $x - 5 = 2y$

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 9.1 (Continuación)	
3. Resuelve la ecuación para y. **4.** Sustituye y con $f^{-1}(x)$ (esto produce la función inversa al usar notación de función inversa).	$\frac{1}{2}x - \frac{5}{2} = y$ o $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ 
Si dos funciones $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son inversas una de otra, $(f \circ f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.	Para el ejemplo anterior, con $f(x) = 2x + 5$ y $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$, entonces $(f \circ f^{-1})(x) = f[f^{-1}(x)] = 2\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\right) + 5$ $= x - 5 + 5 = x$ y $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] = \frac{1}{2}(2x + 5) - \frac{5}{2}$ $= x + \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = x$
Sección 9.2	
Para cualquier número real $a > 0$ y $a \neq 1$, $f(x) = a^x$ o $y = a^x$ es una **función exponencial**. Para todas las funciones exponenciales de la forma $y = a^x$ o $f(x) = a^x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$, **1.** El dominio de la función es $(-\infty,\infty)$. **2.** El rango de la función es $(0,\infty)$. **3.** La gráfica de la función pasa a través de los puntos $\left(-1, \frac{1}{a}\right)$, $(0,1)$ y $(1,a)$.	Elabora la gráfica de $y = 3^x$. x | y -2 | $1/9$ -1 | $1/3$ 0 | 1 1 | 3 2 | 9 

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES — EJEMPLOS

Sección 9.3

Logaritmos

Para $x > 0$ y $a > 0, a \neq 1$

$$y = \log_a x \text{ significa } x = a^y$$

logaritmo (exponente) — número — exponente

$y = \log_a x$ significa $x = a^y$

base — número — base

Forma exponencial

$9^2 = 81$

$\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$

Forma logarítmica

$\log_9 81 = 2$

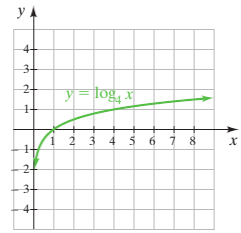
$\log_{1/4} \frac{1}{64} = 3$

Funciones logarítmicas

Para todas las funciones logarítmicas de la forma $y = \log_a x$ o $f(x) = \log_a x$, donde $a > 0, a \neq 1$ y $x > 0$,

1. El dominio de la función es $(0, \infty)$.
2. El rango de la función es $(-\infty, \infty)$.
3. La gráfica de la función pasa a través de los puntos $\left(\frac{1}{a}, -1\right)$, $(1, 0)$ y $(a, 1)$.

Elabora la gráfica de $y = \log_4 x$.



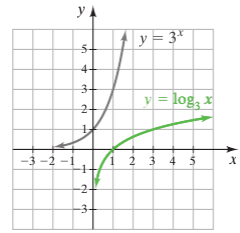
Características de la función exponencial y la función logarítmica

$y = a^x$ y $y = \log_a x$ son funciones inversas.

Función exponencial	Función logarítmica
$y = a^x \ (a > 0, a \neq 1)$	$y = \log_a x \ (a > 0, a \neq 1)$
Dominio: $(-\infty, \infty)$	$(0, \infty)$
Rango: $(0, \infty)$	$(-\infty, \infty)$

Puntos sobre gráfica: $\left(-1, \frac{1}{a}\right)$, $(0, 1)$, $(1, a)$ — x se convierte en y, y se convierte en x — $\left(\frac{1}{a}, -1\right)$, $(1, 0)$, $(a, 1)$

Elabora la gráfica de $y = 3^x$ y $y = \log_3 x$ sobre el mismo conjunto de ejes.



Sección 9.4

Regla del producto para logaritmos

Para números reales positivos x, y y a, $a \neq 1$,

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \quad \text{Propiedad 1}$$

$$\log_5 (9 \cdot 13) = \log_5 9 + \log_5 13$$

$$\log_7 mn = \log_7 m + \log_7 n$$

Regla del cociente para logaritmos

Para números reales positivos x, y y a, $a \neq 1$,

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad \text{Propiedad 2}$$

$$\log_3 \frac{15}{4} = \log_3 15 - \log_3 4$$

$$\log_8 \frac{z+1}{z+3} = \log_8 (z+1) - \log_8 (z+3)$$

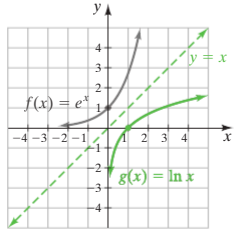
Regla de potencia para logaritmos

Si x y a son números reales positivos, $a \neq 1$ y n es cualquier número real, entonces

$$\log_a x^n = n \log_a x \quad \text{Propiedad 3}$$

$$\log_9 23^5 = 5 \log_9 23$$

$$\log_6 \sqrt[3]{x+4} = \log_6 (x+4)^{1/3} = \frac{1}{3} \log_6 (x+4)$$

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 9.4 (Continuación)	
Propiedades adicionales de los logaritmos Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces: $\log_a a^x = x$ Propiedad 4 y $a^{\log_a x} = x \ (x > 0)$ Propiedad 5	$\log_4 16 = \log_4 4^2 = 2$ $7^{\log_7 3} = 3$
Sección 9.5	
Logaritmo común Los logaritmos con base 10 se llaman logaritmos comunes: $\log x$ significa $\log_{10} x$ El **logaritmo común** de un número real positivo, es el *exponente* al cual debe elevarse la base 10, para obtener el número. Si $\log N = L$, entonces $10^L = N$. Para determinar un logaritmo común, usa una calculadora científica o graficadora. En este texto, se redondea la respuesta a la diezmilésima más cercana.	$\log 17$ significa $\log_{10} 17$ $\log (b + c)$ significa $\log_{10} (b + c)$ Si $\log 14 \approx 1.1461$, entonces $10^{1.1461} \approx 14$. Si $\log 0.6 \approx -0.2218$, entonces $10^{-0.2218} \approx 0.6$. $\log 183 \approx 2.2625$ $\log 0.42 \approx -0.3768$
Potencias de 10 Si $\log x = y$ entonces $x = 10^y$ Para determinar potencias de 10, usa una calculadora científica o graficadora.	Si $\log 1\,890.1662 \approx 3.2765$, entonces $10^{3.2765} \approx 1\,890.1662$. Si $\log 0.0143 \approx -1.8447$, entonces $10^{-1.8447} \approx 0.0143$.
Sección 9.6	
Propiedades para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas **a)** Si $x = y$, entonces $a^x = a^y$. Propiedad 6a **b)** Si $a^x = a^y$, entonces $x = y$. Propiedad 6b **c)** Si $x = y$, entonces $\log_b x = \log_b y \ (x > 0, y > 0)$. Propiedad 6c **d)** Si $\log_b x = \log_b y$, entonces $x = y \ (x > 0, y > 0)$. Propiedad 6d	**a)** Si $x = 5$, entonces $3^x = 3^5$. **b)** Si $3^x = 3^5$, entonces $x = 5$. **c)** Si $x = 2$, entonces $\log x = \log 2$. **d)** Si $\log x = \log 2$, entonces $x = 2$.
Sección 9.7	
La **función exponencial natural** es $f(x) = e^x$ donde $e \approx 2.7183$. Los **logaritmos naturales**, son logaritmos a la base e. Los logaritmos naturales se indican mediante la notación ln. $\log_e x = \ln x$ Para $x > 0$, si $y = \ln x$, entonces $e^y = x$. La **función logarítmica natural** es $g(x) = \ln x$ donde la base $e \approx 2.7183$. Para aproximar valores exponencial natural y logarítmico natural, usa una calculadora científica o graficadora. La función exponencial natural, $f(x) = e^x$, y la función logarítmica natural, $f(x) = \ln x$ son inversas una de otra.	Elabora la gráfica de $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln x$ sobre el mismo conjunto de ejes.  $\ln 5.83 \approx 1.7630$ Si $\ln x = -2.09$, entonces $x = e^{-2.09} \approx 0.1237$.
Fórmula de cambio de base Para cualquier logaritmo con bases a y b, y número positivo x, $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$	$\log_5 98 = \dfrac{\log 98}{\log 5} \approx 2.8488$

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES			EJEMPLOS
Sección 9.7 (Continuación)			
Propiedades de los logaritmos naturales			
$\ln xy = \ln x + \ln y$	$(x > 0 \text{ y } y > 0)$	Regla del producto	$\ln 7 \cdot 30 = \ln 7 + \ln 30$
$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$	$(x > 0 \text{ y } y > 0)$	Regla del cociente	$\ln \frac{x+1}{x+8} = \ln (x+1) - \ln (x+8)$
$\ln x^n = n \ln x$	$(x > 0)$	Regla de potencia	$\ln m^5 = 5 \ln m$
Propiedades adicionales de expresiones logarítmicas naturales y exponenciales naturales			
$\ln e^x = x$		Propiedad 7	$\ln e^{19} = 19$
$e^{\ln x} = x, \quad x > 0$		Propiedad 8	$e^{\ln 2} = 2$

Capítulo 9 Ejercicios de repaso

[9.1] *Dado* $f(x) = x^2 - 3x + 4$ *y* $g(x) = 2x - 5$, *determina lo siguiente.*

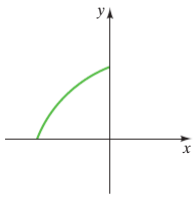
1. $(f \circ g)(x)$ **2.** $(f \circ g)(3)$ **3.** $(g \circ f)(x)$ **4.** $(g \circ f)(-3)$

Dado $f(x) = 6x + 7$ *y* $g(x) = \sqrt{x-3}, x \geq 3$, *determina lo siguiente.*

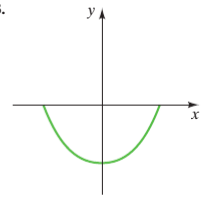
5. $(f \circ g)(x)$ **6.** $(g \circ f)(x)$

En los ejercicios 7-12, determina si cada función es una función uno a uno.

7.



8.



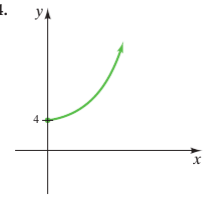
9. $\{(6,2), (4,0), (-5,7), (3,8)\}$

10. $\left\{(0,-2), (6,1), (3,-2), \left(\frac{1}{2}, 4\right)\right\}$ **11.** $y = \sqrt{x+8}, x \geq -8$ **12.** $y = x^2 - 9$

En los ejercicios 13 y 14, para cada función, determina el dominio y el rango, tanto de $f(x)$ *como de* $f^{-1}(x)$.

13. $\{(5,3), (6,2), (-4,-3), (-1,8)\}$

14.



En los ejercicios 15 y 16, determina $f^{-1}(x)$, *y elabora la gráfica de* $f(x)$ *y* $f^{-1}(x)$ *sobre los mismos ejes.*

15. $y = f(x) = 4x - 2$

16. $y = f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

17. Yardas a pulgadas La función $f(x) = 36x$ convierte yardas, x, en pulgadas. Determina la función inversa que convierte pulgadas a yardas. En la función inversa, ¿qué representa x y $f^{-1}(x)$?

18. Galones a cuartos La función $f(x) = 4x$ convierte galones, x, en cuartos. Determina la función inversa que convierte cuartos a galones. En la función inversa, ¿qué representan x y $f^{-1}(x)$?

[9.2] *Elabora la gráfica de las siguientes funciones.*

19. $y = 2^x$

20. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

21. Interés compuesto Para ahorrar dinero para comprar un bote nuevo, Daniel invirtió $1 500 en una cuenta de ahorros que obtiene 4% de interés compuesto trimestralmente. Usa la fórmula de interés compuesto $A = p\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$, para determinar el monto en la cuenta de Daniel después de 5 años.



Consulta el ejercicio 21.

[9.3] *Escribe cada ecuación en forma logarítmica.*

22. $8^2 = 64$

23. $81^{1/4} = 3$

24. $5^{-3} = \frac{1}{125}$

Escribe cada ecuación en forma exponencial.

25. $\log_2 32 = 5$

26. $\log_{1/4} \frac{1}{16} = 2$

27. $\log_6 \frac{1}{36} = -2$

Escribe cada ecuación en forma exponencial y determina el valor faltante.

28. $3 = \log_4 x$

29. $4 = \log_a 81$

30. $-3 = \log_{1/5} x$

Elabora la gráfica de las siguientes funciones.

31. $y = \log_3 x$

32. $y = \log_{1/2} x$

[9.4] *Usa las propiedades de los logaritmos para expandir cada expresión.*

33. $\log_5 17^8$

34. $\log_3 \sqrt{x - 9}$

35. $\log \frac{6(a + 1)}{19}$

36. $\log \frac{x^4}{7(2x + 3)^5}$

Escribe lo siguiente, como el logaritmo de una sola expresión.

37. $5 \log x - 3 \log (x + 1)$

38. $4(\log 2 + \log x) - \log y$

39. $\frac{1}{3}[\ln x - \ln (x + 2)] - \ln 2$

40. $3 \ln x + \frac{1}{2} \ln (x + 1) - 6 \ln (x + 4)$

Evalúa.

41. $8^{\log_8 10}$

42. $\log_4 4^5$

43. $11^{\log_9 81}$

44. $9^{\log_8 \sqrt{8}}$

[9.5, 9.7] *Usa una calculadora para aproximar cada logaritmo. Redondea tus respuestas a la diezmilésima más cercana.*

45. $\log 819$

46. $\ln 0.0281$

Usa una calculadora para aproximar cada potencia de 10. Redondea tus respuestas a la diezmilésima más cercana.

47. 103.159

48. $10^{-3.157}$

Usa una calculadora para resolver la ecuación. Redondea tus respuestas a la diezmilésima más cercana.

49. $\log x = 4.063$

50. $\log x = -1.2262$

Evalúa.

51. $\log 10^5$

52. $10^{\log 9}$

53. $7 \log 10^{3.2}$

54. $2(10^{\log 4.7})$

[9.6] *Resuelve sin usar calculadora.*

55. $625 = 5^x$

56. $49^x = \frac{1}{7}$

57. $2^{3x-1} = 32$

58. $27^x = 3^{2x+5}$

Resuelve usando calculadora. Redondea tus respuestas a la centésima más cercana.

59. $7^x = 152$

60. $3.1^x = 856$

61. $12.5^{x+1} = 381$

62. $3^{x+2} = 8^x$

Resuelve la ecuación logarítmica.

63. $\log_7 (2x - 3) = 2$

64. $\log x + \log (4x - 19) = \log 5$

65. $\log_3 x + \log_3 (2x + 1) = 1$

66. $\ln (x + 1) - \ln (x - 2) = \ln 4$

10 Secciones cónicas

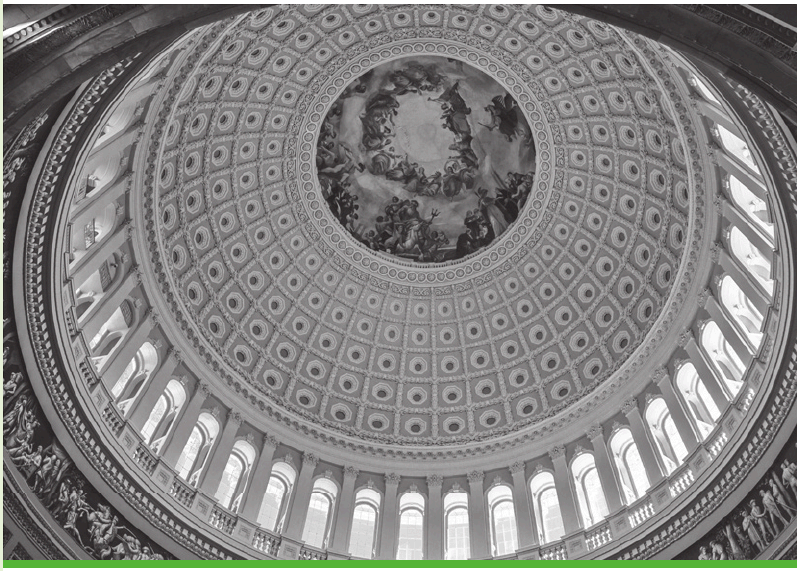
10.1 La parábola y la circunferencia

10.2 La elipse

Examen de mitad de capítulo: secciones 10.1-10.2

10.3 La hipérbola

10.4 Sistemas de ecuaciones no lineales y sus aplicaciones



La forma de una elipse, le da una característica poco común. Cualquier objeto que sea lanzado desde un punto focal hacía una pared con forma elíptica, rebotará hacia el otro punto focal. Esta característica se ha usado en la arquitectura y en la medicina. Un ejemplo, es el National Statuary Hall en el edificio del capitolio estadounidense, que tiene un techo con forma de domo elíptico, como se muestra arriba. Si susurraras en un punto focal, tu susurro se podría escuchar en el otro punto focal. De igual manera, una pelota golpeada desde un foco de una mesa de billar elíptica, rebotará hacia el otro punto focal. En el ejercicio 54 de la página 692, determinarás la ubicación de los focos de una mesa de billar elíptica.

Objetivos del capítulo

Las secciones cónicas incluyen circunferencias, elipses, parábolas e hipérbolas. En este capítulo, estudiarás las ecuaciones, gráficas y aplicaciones de las secciones cónicas. También se resolverán sistemas de ecuaciones no lineales, que incluyen las ecuaciones de las secciones cónicas.

10.1 La parábola y la circunferencia

1. **Identificación y descripción de las secciones cónicas**
2. **Repaso sobre las parábolas**
3. **Gráficas de las parábolas con la forma $x = a(y - k)^2 + h$.**
4. **Fórmulas de distancia y de punto medio**
5. **Gráficas de circunferencias con centro en el origen**
6. **Gráficas de circunferencias con centro en (h, k)**

1 Identificación y descripción de las secciones cónicas

Una *parábola* es un tipo de sección cónica. Otras secciones cónicas son las circunferencias, las elipses y las hipérbolas. Cada una de estas formas, se llama sección cónica, porque cada una de estas se puede formar al rebanar un cono y observar la forma de la rebanada. Los métodos usados para rebanar el cono, para obtener cada sección cónica, se ilustran en la **Figura 10.1**.



FIGURA 10.1 Parábola Circunferencia Elipse Hipérbola

2 Repaso sobre las parábolas

Estudiamos las parábolas por primera vez en la sección 8.5. En el ejemplo 1, se revisará la manera de graficar parábolas, cuyas ecuaciones están escritas en las formas $y = ax^2 + bx + c$ y $y = a(x - h)^2 + k$. Recuerda, de la sección 8.5, que la gráfica de una ecuación de la forma $y = a(x - h)^2 + k$ será una parábola con vértice en (h, k), con la ecuación del eje de simetría $x = h$. La parábola abrirá hacia arriba cuando $a > 0$ y hacia abajo cuando $a < 0$.

EJEMPLO 1 Considera $y = 2x^2 + 4x - 6$.

a) Escribe la ecuación en la forma $y = a(x - h)^2 + k$.
b) Determina si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.
c) Determina el vértice de la parábola.
d) Determina la ecuación del eje de simetría.
e) Determina la intersección con el eje de las y de la parábola.
f) Determina las intersecciones con el eje de las x de la parábola.
g) Grafica la parábola.

Solución

a) Primero, factoriza 2 de los dos términos que contienen la variable para hacer 1 el coeficiente del término al cuadrado. No factorices 2 de la constante, -6.

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + 4x - 6 \\ &= 2(x^2 + 2x) - 6 && \text{Se factorizó el 2 de los primeros dos términos.} \\ &= 2(x^2 + 2x + 1) + 2(-1) - 6 && \text{Completa el cuadrado.} \\ &= 2(x + 1)^2 - 8 && \text{Simplifica.} \end{aligned}$$

b) La parábola abre hacia arriba porque $a = 2$, que es mayor que 0.

c) El vértice de la gráfica de una ecuación en la forma $y = a(x - h)^2 + k$, es (h, k). La ecuación $y = 2(x + 1)^2 - 8$, se puede reescribir como $y = 2[x - (-1)]^2 - 8$.

Comprende el Álgebra

Para una parábola de la forma $y = a(x - h)^2 + k$.

- Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba.
- Si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo.
- El vértice de la parábola es el punto (h, k).

En consecuencia, el vértice de la gráfica de $y = 2(x + 1)^2 - 8$ es $(-1, -8)$. El vértice de una parábola también se puede determinar usando

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) \quad \text{o} \quad \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

Ahora muestra que estos dos procedimientos producen $(-1, -8)$ como el vértice de la parábola.

d) El eje de simetría de una parábola que abre hacia arriba o hacia abajo, es la recta vertical que pasa a través del vértice. En consecuencia, la ecuación del eje de simetría de esta parábola es $x = -1$.

e) Para determinar la intersección con el eje de las y, sea $x = 0$ y resuelve en términos de y.

$$\begin{aligned} y &= 2(x + 1)^2 - 8 \\ &= 2(0 + 1)^2 - 8 \\ &= -6 \end{aligned}$$

La intersección con el eje de las y es $(0, -6)$.

f) Para determinar las intersecciones con el eje de las x, sea $y = 0$ y resuelve en términos de x.

$$\begin{aligned} y &= 2(x + 1)^2 - 8 \\ 0 &= 2(x + 1)^2 - 8 && y \text{ se sustituyó por 0.} \\ 8 &= 2(x + 1)^2 && \text{Se sumó 8 a ambos lados.} \\ 4 &= (x + 1)^2 && \text{Ambos lados se dividieron por 2.} \\ \pm 2 &= x + 1 && \text{Propiedad de la raíz cuadrada.} \\ -1 \pm 2 &= x && \text{Se restó 1 de ambos lados.} \end{aligned}$$

$$x = -1 - 2 \quad \text{o} \quad x = -1 + 2$$
$$x = -3 \qquad\quad x = 1$$

Las intersecciones con el eje de las x son $(-3, 0)$ y $(1, 0)$. Las intersecciones con el eje de las x también se podrían determinar al sustituir 0 por y en $y = 2x^2 + 4x - 6$, y resolver en términos de x usando factorización o la fórmula cuadrática. Ahora haz esto y muestra que obtienes las mismas intersecciones con el eje de las x.

g) Usa el vértice y las intersecciones con el eje de las x y las y, para dibujar la gráfica, como se muestra en la **Figura 10.2**.

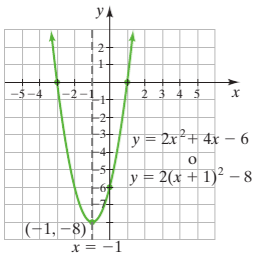


FIGURA 10.2

Ahora resuelve el ejercicio 31

3 Gráficas de las parábolas con la forma $x = a(y - k)^2 + h$

Las parábolas también se pueden abrir hacia la derecha o hacia la izquierda. La gráfica de una ecuación de la forma $x = a(y - k)^2 + h$, será una parábola cuyo vértice es el punto (h, k). El eje de simetría, de esta parábola, será la recta horizontal con ecuación $y = k$. Si a es un número positivo, la parábola abrirá hacia la derecha, y si a es un número negativo, la parábola abrirá hacia la izquierda.

En la **Figura 10.3**, se muestran cuatro formas diferentes que puede tomar una parábola.

Comprende el Álgebra

Para una parábola de la forma $x = a(y - k)^2 + h$.

- Si $a > 0$, la parábola *abre a la derecha.*
- Si $a < 0$, la parábola *abre a la izquierda.*
- El vértice de la parábola es el punto (h, k).

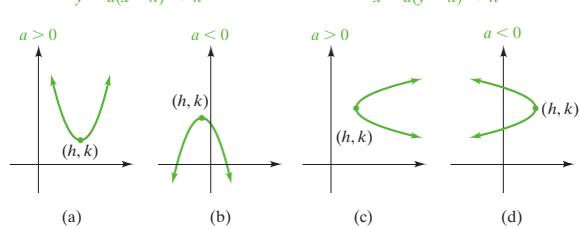


FIGURA 10.3

Ecuaciones de parábolas con vértice en (h, k)

1. $y = a(x - h)^2 + k$, $a > 0$ (abre hacia arriba) Figura 10.3a
2. $y = a(x - h)^2 + k$, $a < 0$ (abre hacia abajo) Figura 10.3b
3. $x = a(y - k)^2 + h$, $a > 0$ (abre hacia la derecha) Figura 10.3c
4. $x = a(y - k)^2 + h$, $a < 0$ (abre hacia la izquierda) Figura 10.3d

Observa que, las ecuaciones de la forma $y = a(x - h)^2 + k$, son funciones, ya que sus gráficas pasan la prueba de la recta vertical. Sin embargo, las ecuaciones de la forma $x = a(y - k)^2 + h$no son funciones, pues sus gráficas no pasan la prueba de la recta vertical.

EJEMPLO 2

Bosqueja la gráfica de $x = -2(y + 4)^2 - 1$.

Solución La gráfica abre hacia la izquierda, pues la ecuación es de la forma $x = a(y - k)^2 + h$ y $a = -2$, que es menor que 0. La ecuación puede expresarse como $x = -2[y - (-4)]^2 - 1$. Por tanto, $h = -1$ y $k = -4$. El vértice de la gráfica es $(-1, -4)$. El eje de simetría de una parábola que abre hacia la izquierda o hacia la derecha, es la recta horizontal que pasa a través del vértice. Por tanto, la ecuación del eje de simetría de esta parábola es $y = -4$. Observa la **Figura 10.4**.

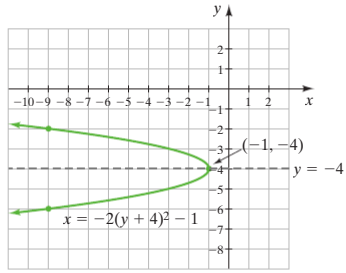


FIGURA 10.4

Si se establece $y = 0$, se ve que la intersección con el eje de las x está en $-2(0 + 4)^2 - 1 = -2(16) - 1$ o -33. Al sustituir valores para y, puedes determinar los valores correspondientes de x. En el caso de $y = -2$, $x = -9$, y cuando $y = -6$, $x = -9$. Estos puntos se marcan en la gráfica. Observa que esta gráfica no tiene intersección con el eje de las y.

Ahora resuelve el ejercicio 19

EJEMPLO 3

a) Escribe la ecuación $x = 2y^2 + 12y + 13$ en la forma $x = a(y - k)^2 + h$.

b) Elabora la gráfica de $x = 2y^2 + 12y + 13$.

Solución

a) Primero factoriza el 2 de los dos primeros términos. Luego completa el cuadrado en la expresión dentro de los paréntesis.

$$
\begin{aligned}
x &= 2y^2 + 12y + 13 \\
&= 2(y^2 + 6y) + 13 && \text{Factoriza el 2 de los dos primeros términos.} \\
&= 2(y^2 + 6y + 9) + (2)(-9) + 13 && \text{Completa el cuadrado.} \\
&= 2(y^2 + 6y + 9) - 18 + 13 && \text{Simplifica.} \\
&= 2(y + 3)^2 - 5
\end{aligned}
$$

b) Dado que $a > 0$, la parábola abre hacia la derecha. Observa que, cuando $y = 0$, $x = 2(0)^2 + 12(0) + 13 = 13$. En consecuencia, la intersección con el eje de las x, es $(13, 0)$.

El vértice de la parábola es $(-5, -3)$ y la ecuación del eje de simetría es $y = -3$. Cuando $y = -6$, se determina que $x = 13$. En consecuencia, otro punto sobre la gráfica es $(13, -6)$.

Con la fórmula cuadrática puedes determinar que las intersecciones con el eje de las y, son aproximadamente $(0, -4.6)$ y $(0, -1.4)$. La gráfica se muestra en la **Figura 10.5**.

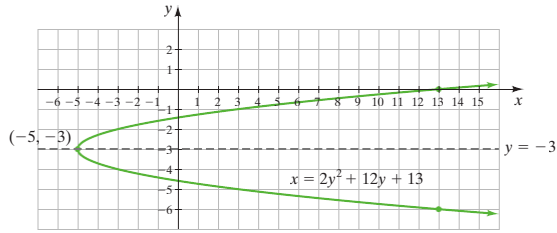


FIGURA 10.5

Ahora resuelve el ejercicio 35

4 Fórmulas de distancia y de punto medio

Ahora se derivará una fórmula para determinar la *distancia* entre dos puntos sobre una recta. Considera la **Figura 10.6**.

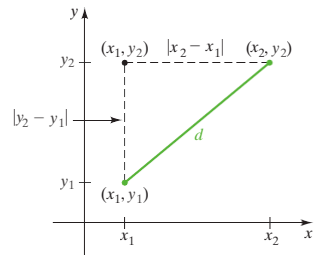


FIGURA 10.6

La distancia horizontal entre los dos puntos (x_1, y_2) y (x_2, y_2), indicada mediante la recta punteada negra, es $|x_2 - x_1|$.

La distancia vertical entre los puntos (x_1, y_1) y (x_1, y_2), indicada mediante la recta punteada gris, es $|y_2 - y_1|$.

Con el teorema de Pitágoras, donde d es la distancia entre los dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), se obtiene:

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

Dado que cualquier número distinto de cero elevado al cuadrado es positivo, no se necesitan signos de valor absoluto. Por tanto, se puede escribir

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Con la propiedad de la raíz cuadrada, con la raíz cuadrada principal, se obtiene que la distancia entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), es $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Fórmula de distancia

La distancia, d, entre cualesquier dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) puede determinarse usando la fórmula de distancia:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

EJEMPLO 4 Determina la distancia entre los puntos $(-3, 4)$ y $(2, -1)$. Escribe tu respuesta en la forma radical más simple y, luego, aproxima tu respuesta a la centésima más cercana.

Solución Los dos puntos $(-3, 4)$ y $(2, -1)$, se trazan en la **Figura 10.7**. Se hará $(x_1, y_1) = (-3, 4)$ y $(x_2, y_2) = (2, -1)$ y se sustituirán estos valores en la fórmula de distancia.

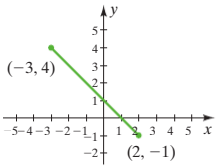


FIGURA 10.7

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{[2 - (-3)]^2 + (-1 - 4)^2} \\ &= \sqrt{5^2 + (-5)^2} \\ &= \sqrt{25 + 25} \\ &= \sqrt{50} \\ &= \sqrt{25}\sqrt{2} \\ &= 5\sqrt{2} \approx 7.07 \end{aligned}$$

En consecuencia, la distancia entre los dos puntos $(-3, 4)$ y $(2, -1)$, es de aproximadamente 7.07 unidades.

Ahora resuelve el ejercicio 47

Comprende el Álgebra

Cuando uses la fórmula de distancia y evalúes la raíz cuadrada, recuerda que

$$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b.$$

En consecuencia, en el ejemplo 5,

$$\sqrt{25 + 25} \neq \sqrt{25} + \sqrt{25}.$$

SUGERENCIA ÚTIL

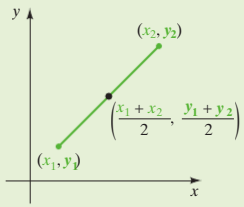
Cuando se usa la fórmula de distancia, no hay diferencia en qué punto se toma como (x_1, y_1), y qué punto se toma como (x_2, y_2). En el ejemplo 4, se hace $(x_1, y_1) = (-3, 4)$ y $(x_2, y_2) = (2, -1)$. Repite el ejemplo 4, pero esta vez, toma $(x_1, y_1) = (2, -1)$ y $(x_2, y_2) = (-3, 4)$. Con esto, debes obtener la misma respuesta de aproximadamente 7.07 unidades.

Con frecuencia, es necesario determinar el *punto medio* de un segmento de recta entre dos puntos finales dados.

Fórmula del punto medio

Dados cualesquier dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), el punto en el segmento de la recta, a la mitad de los puntos dados, puede determinarse mediante la fórmula del punto medio:

$$\text{punto medio} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



Para determinar el punto medio, toma el promedio (la media) de las coordenadas x y de las coordenadas y.

EJEMPLO 5 Un segmento de recta, a través del centro de una circunferencia, interseca la circunferencia en los puntos $(-3, 6)$ y $(4, 1)$. Determina el centro de la circunferencia.

Solución Para determinar el centro de la circunferencia, determina el punto medio del segmento de recta entre $(-3, 6)$ y $(4, 1)$. No hay diferencia en cuáles puntos se tomen como (x_1, y_1) y (x_2, y_2). Se hará que $(-3, 6)$ sea (x_1, y_1) y $(4, 1)$ sea (x_2, y_2). Observa la **Figura 10.8.**

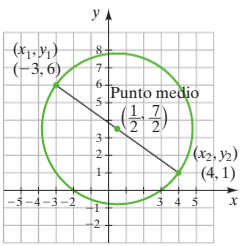


FIGURA 10.8

$$\begin{aligned} \text{punto medio} &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{-3 + 4}{2}, \frac{6 + 1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right) \end{aligned}$$

El punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$ está a la mitad de los puntos $(-3, 6)$ y $(4, 1)$, y también coincide con el centro de la circunferencia.

Ahora resuelve el ejercicio 59

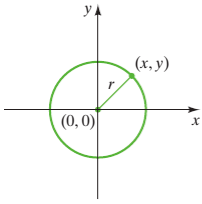


FIGURA 10.9

5 Gráficas de circunferencias con centro en el origen

La circunferencia

Una **circunferencia** es el conjunto de puntos en un plano que están a la misma distancia, llamada **radio**, desde un punto fijo, llamado **centro**.

La *forma general* de la ecuación de una circunferencia, cuyo centro está en el origen, puede derivarse usando la fórmula de distancia. Sea (x, y) un punto sobre una circunferencia de radio r con centro en $(0, 0)$. Observa la **Figura 10.9**. Con la fórmula de distancia se tiene

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ Fórmula de distancia.

o $$r = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}$$ Sustituye r por d, (x, y) por (x_2, y_2), y $(0, 0)$ por (x_1, y_1).

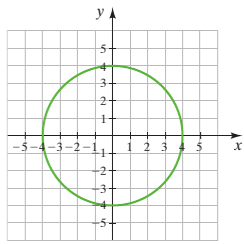
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$ Simplifica el radicando.

$$r^2 = x^2 + y^2$$ Eleva ambos lados al cuadrado.

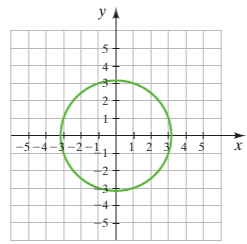
Ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio *r*

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Por ejemplo, $x^2 + y^2 = 16$ es una circunferencia con su centro en el origen y radio 4, y $x^2 + y^2 = 10$ es una circunferencia con su centro en el origen y radio $\sqrt{10}$. Observa que $4^2 = 16$ y $\left(\sqrt{10}\right)^2 = 10$. Ambas circunferencias se ilustran a continuación.



$x^2 + y^2 = 16$



$x^2 + y^2 = 10$

EJEMPLO 6 Elabora la gráfica de las siguientes ecuaciones.

a) $x^2 + y^2 = 64$ **b)** $y = \sqrt{64 - x^2}$ **c)** $y = -\sqrt{64 - x^2}$

Solución

a) Si reescribes la ecuación como:

$$x^2 + y^2 = 8^2$$

se ve que esta es la ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio 8. La gráfica se ilustra en la **Figura 10.10** de la siguiente página.

b) Si resuelves la ecuación $x^2 + y^2 = 64$ para y, se obtiene:

$$y^2 = 64 - x^2$$
$$y = \pm\sqrt{64 - x^2}$$

En la ecuación $y = \pm\sqrt{64 - x^2}$, la ecuación $y = +\sqrt{64 - x^2}$ o, simplemente, $y = \sqrt{64 - x^2}$, representa la mitad superior de la circunferencia, mientras que la ecuación $y = -\sqrt{64 - x^2}$, representa la mitad inferior de la circunferencia. En consecuencia, la gráfica de $y = \sqrt{64 - x^2}$, donde y es la raíz cuadrada principal, se encuentra por arriba y sobre el eje x. La gráfica es la semicircunferencia que se muestra en la **Figura 10.11**.

c) La gráfica de $y = -\sqrt{64 - x^2}$, también es la semicircunferencia. Sin embargo, esta gráfica se encuentra por debajo y sobre el eje x. La gráfica se muestra en la **Figura 10.12**.

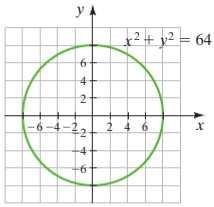


FIGURA 10.10

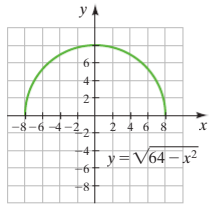


FIGURA 10.11

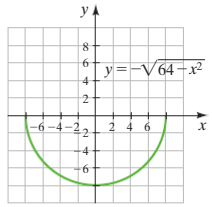


FIGURA 10.12

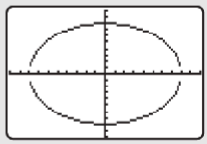
Ahora resuelve el ejercicio 91

Considera las ecuaciones $y = \sqrt{64 - x^2}$ y $y = -\sqrt{64 - x^2}$ en el ejemplo 6 **b)** y 6 **c)**. Si elevas al cuadrado ambos lados de las ecuaciones y reordenas los términos, obtendrás $x^2 + y^2 = 64$.

USA TU CALCULADORA GRAFICADORA

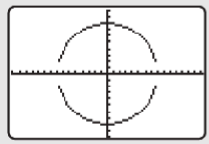
Al usar tu calculadora, se inserta la función que quieres graficar a la derecha de $y=$. Las circunferencias no son funciones, porque no pasan la prueba de la recta vertical. Para graficar la ecuación $x^2 + y^2 = 64$, que es una circunferencia de radio 8, debes resolver la ecuación en términos de y para obtener $y = \pm\sqrt{64 - x^2}$. Luego, grafica las dos funciones $Y_1 = \sqrt{64 - x^2}$ y $Y_2 = -\sqrt{64 - x^2}$, sobre los mismos ejes para obtener la circunferencia. Estas gráficas se ilustran en la **Figura 10.13**.

Dado a la distorsión debida a las escalas desiguales sobre los ejes, la gráfica parecería no ser una circunferencia. Cuando uses la función Zsquare de la calculadora, que se encuentra en el menú ZOOM, la figura aparecerá como una circunferencia (observa la **Figura 10.14**).



$[-10, 10, 1, -10, 10, 1]$

FIGURA 10.13



$[\approx -15.2, \approx 15.2, 1, -10, 10, 1]$

FIGURA 10.14

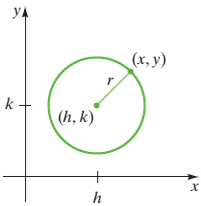


FIGURA 10.15

6 Gráficas de circunferencias con centro en (h, k)

La ecuación, en su forma general, de una circunferencia con centro en (h, k) y radio r, puede derivarse usando la fórmula de distancia. Sea (h, k) el centro de la circunferencia y (x, y) cualquier punto sobre la circunferencia (observa la **Figura 10.15**). Si el radio, r, representa la distancia entre un punto, (x, y), sobre la circunferencia y su centro, (h, k), entonces, por la fórmula de distancia:

$$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

Ahora eleva al cuadrado ambos lados de la ecuación para obtener la ecuación, en la forma general, de una circunferencia con centro en (h, k) y radio r.

$$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$$

Ecuación de una circunferencia con centro en (h, k) y radio r

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

EJEMPLO 7 Determina la ecuación de la circunferencia, que se muestra en la **Figura 10.16.**

Solución El centro es $(-3, 2)$ y el radio es 3.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$
$$[x - (-3)]^2 + (y - 2)^2 = 3^2$$
$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$$

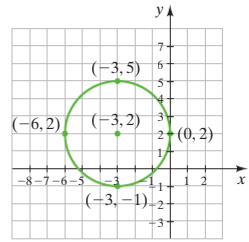


FIGURA 10.16

Ahora resuelve el ejercicio 79

En el ejemplo 8, se determinará el área de una circunferencia. La fórmula para el área, A, de una circunferencia con radio r, es $A = \pi r^2$.

EJEMPLO 8

a) Muestra que la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 = 0$, es una circunferencia.

b) Determina el centro y el radio de la circunferencia y, luego, grafica la ecuación.

c) Determina el área dentro de la circunferencia.

Solución

a) Esta ecuación se escribirá en la forma general, completando el cuadrado. Primero reescribe la ecuación y junta todos los términos que contengan x, así como todos los que contengan y.

$$x^2 + 6x + y^2 - 2y - 6 = 0$$

Luego, reescribe la ecuación con la constante en el lado derecho de la ecuación.

$$x^2 + 6x + y^2 - 2y = 6 \quad \text{Reescribe la ecuación.}$$

Ahora, completa el cuadrado dos veces, una vez para cada variable.

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y = 6 + 9 \quad \text{Completa el cuadrado en los términos de } x.$$
$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 6 + 9 + 1 \quad \text{Completa el cuadrado en los términos de } y.$$

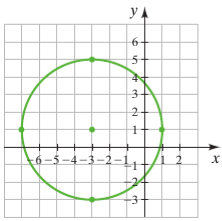
o

$$\underbrace{x^2 + 6x + 9} + \underbrace{y^2 - 2y + 1} = 16$$
$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$$
$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4^2$$

b) El centro de la circunferencia está en $(-3, 1)$ y el radio es 4. La circunferencia se bosqueja en la **Figura 10.17**.

c) El área dentro de la circunferencia es:

$$A = \pi r^2 = \pi(4)^2 = 16\pi \approx 50.3 \text{ unidades cuadradas}$$



$x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 = 0$

FIGURA 10.17

Ahora resuelve el ejercicio 97

10.1 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

distancia $(0, 0)$ una parábola circunferencia (k, h) (h, k) (x, y) punto medio

1. La fórmula, punto medio $= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$, se llama fórmula del _____.
2. La fórmula, $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, se llama fórmula de _____.
3. La ecuación $y = a(x - h)^2 + k$, es la ecuación de _____.
4. La ecuación $x^2 + y^2 = r^2$, es la ecuación de una circunferencia con centro en _____ y radio r.
5. La ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, es la ecuación de una circunferencia con centro en _____ y radio r.
6. Las cuatro secciones cónicas son parábola, _____, elipse e hipérbola.

Practica tus habilidades

Elabora la gráfica de cada ecuación.

7. $y = (x - 2)^2 - 1$ **8.** $y = (x + 3)^2 - 4$ **9.** $y = (x + 3)^2 + 2$ **10.** $y = (x - 2)^2 + 3$

11. $y = -(x - 1)^2 + 1$ **12.** $y = -(x + 3)^2 + 4$ **13.** $y = -(x - 2)^2 - 1$ **14.** $y = -(x + 4)^2 - 5$

15. $y = 2(x - 2)^2 - 8$ **16.** $y = 2(x + 1)^2 - 3$ **17.** $y = -3(x - 5)^2 + 3$ **18.** $y = -2(x + 1)^2 + 8$

19. $x = -(y - 5)^2 + 4$ **20.** $x = -(y - 2)^2 + 1$ **21.** $x = (y - 4)^2 - 3$ **22.** $x = (y - 1)^2 + 1$

23. $x = 3(y + 1)^2 + 5$ **24.** $x = -2(y + 4)^2 - 3$ **25.** $y = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 6$ **26.** $y = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$

En los ejercicios 27-42, **a)** *escribe la ecuación con la forma* $y = a(x - h)^2 + k$ *o* $x = a(y - k)^2 + h$. **b)** *Elabora la gráfica de la ecuación.*

27. $y = x^2 + 2x$ **28.** $y = x^2 - 4x$ **29.** $x = y^2 - 6y$

30. $x = y^2 + 4y$ **31.** $y = x^2 + 4x + 5$ **32.** $y = x^2 + 2x - 7$

33. $x = y^2 + 6y + 8$ **34.** $x = y^2 + 4y + 3$ **35.** $x = -y^2 + 6y - 9$

36. $y = -x^2 + 4x - 4$ **37.** $x = -y^2 - 2y + 5$ **38.** $x = -y^2 + 6y - 5$

39. $y = x^2 + 7x + 10$ **40.** $x = -y^2 + 3y - 4$ **41.** $x = 3y^2 - 12y - 36$

42. $y = 2x^2 - 4x - 4$

Determina la distancia entre cada par de puntos. Escribe tu respuesta en la forma radical más simple y, después, cuando sea apropiado, aproxima tu respuesta a la centésima más cercana.

43. $(4, 7)$ y $(7, 11)$ **44.** $(1, 3)$ y $(6, 15)$ **45.** $(-1, -3)$ y $(4, 9)$

46. $(-4, -7)$ y $(2, 1)$ **47.** $(-4, -5)$ y $(5, -2)$ **48.** $(6, 7)$ y $(11, 0)$

49. $(3, -1)$ y $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ **50.** $\left(-\frac{1}{4}, 2\right)$ y $\left(-\frac{3}{2}, 6\right)$ **51.** $(-1.6, 3.5)$ y $(-4.3, -1.7)$

52. $(5.2, -3.6)$ y $(-1.6, 2.3)$ **53.** $(\sqrt{7}, \sqrt{3})$ y $(0, 0)$ **54.** $(-\sqrt{2}, -\sqrt{5})$ y $(0, 0)$

Determina el punto medio del segmento de recta entre cada par de puntos.

55. $(1, 3)$ y $(5, 7)$ **56.** $(4, 7)$ y $(6, 11)$ **57.** $(-8, 3)$ y $(4, -15)$

58. $(-8, -9)$ y $(-6, -3)$ **59.** $(-1, 4)$ y $(4, 6)$ **60.** $(4, 9)$ y $(1, -5)$

61. $\left(3, \frac{1}{2}\right)$ y $(2, -4)$

62. $\left(\frac{5}{2}, 1\right)$ y $\left(2, \frac{9}{2}\right)$

63. $(\sqrt{3}, 2)$ y $(\sqrt{2}, 5)$

64. $(-\sqrt{7}, 8)$ y $(\sqrt{5}, \sqrt{3})$

Escribe la ecuación de cada círculo con el centro y radio dados.

65. Centro $(0, 0)$, radio 5

66. Centro $(0, 0)$, radio 9

67. Centro $(2, 0)$, radio 8

68. Centro $(-3, 0)$, radio 7

69. Centro $(0, -6)$, radio 10

70. Centro $(0, 5)$, radio 2

71. Centro $(7, -6)$, radio 12

72. Centro $(-5, 2)$, radio 3

73. Centro $(-6, -5)$, radio 11

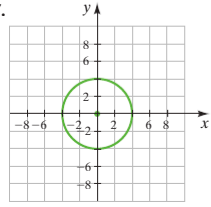
74. Centro $(-6, -1)$, radio 15

75. Centro $(-7, -2)$, radio $\sqrt{13}$

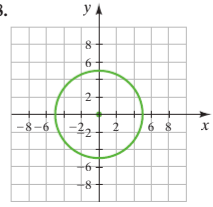
76. Centro $(1, 2)$, radio $\sqrt{5}$

Determina la ecuación de cada circunferencia. Supón que el radio es un número entero no negativo.

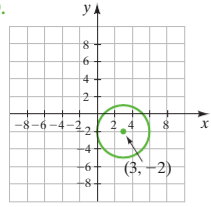
77.



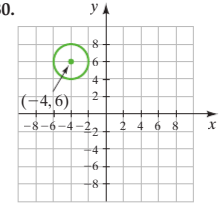
78.



79.



80.



Elabora la gráfica de cada ecuación.

81. $x^2 + y^2 = 16$

82. $x^2 + y^2 = 9$

83. $x^2 + y^2 = 10$

84. $x^2 + y^2 = 5$

85. $(x + 4)^2 + y^2 = 25$

86. $x^2 + (y + 1)^2 = 9$

87. $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 9$

88. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$

89. $(x + 8)^2 + (y + 2)^2 = 9$

90. $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 36$

91. $y = \sqrt{25 - x^2}$

92. $y = \sqrt{16 - x^2}$

93. $y = -\sqrt{4 - x^2}$

94. $y = -\sqrt{49 - x^2}$

En los ejercicios 95-102, **a)** *usa el método de completar el cuadrado, para escribir cada ecuación en forma general y* **b)** *elabora la gráfica de la ecuación.*

95. $x^2 + y^2 + 8x + 15 = 0$

96. $x^2 + y^2 + 4y = 0$

97. $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$

98. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$

99. $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$

100. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

101. $x^2 + y^2 + 3x - y - \frac{13}{2} = 0$

102. $x^2 + y^2 - x + 3y - \frac{3}{2} = 0$

Resolución de problemas

103. Determina el área dentro de la circunferencia del ejercicio 85.

104. Determina el área dentro de la circunferencia del ejercicio 87.

En los ejercicios 105-108, determina las intersecciones con el eje de las x y las intersecciones con el eje de las y, en caso de existir, de la gráfica de cada ecuación.

105. $x = y^2 - 6y - 7$

106. $x = -y^2 + 8y - 12$

107. $x = 2(y - 3)^2 + 6$

108. $x = -(y + 2)^2 - 8$

109. Determina la longitud del segmento de recta, cuyo punto medio es $(4, -6)$ con un punto extremo en $(7, -2)$.

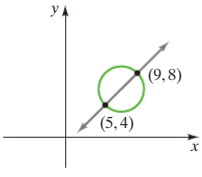
110. Determina la longitud del segmento de recta, cuyo punto medio es $(-2, 4)$ con un punto extremo en $(3, 6)$.

111. Determina la ecuación de una circunferencia con centro en $(-6, 2)$, que es tangente al eje x (es decir, la circunferencia toca el eje x en un solo punto).

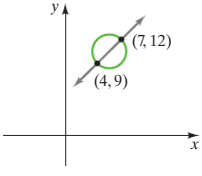
112. Determina la ecuación de una circunferencia con centro en $(-3, 5)$, que es tangente al eje y.

En los ejercicios 113 y 114, determina **a)** *el radio de la circunferencia cuyo diámetro está dado a lo largo de la recta mostrada,* **b)** *el centro de la circunferencia y* **c)** *la ecuación de la circunferencia.*

113.



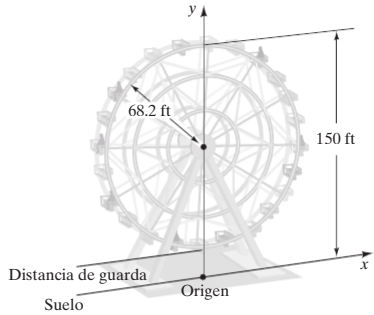
114.



115. Puntos de intersección ¿Cuál es el número máximo y el número mínimo de puntos de intersección posibles para las gráficas de $y = a(x - h_1)^2 + k_1$ y $x = a(y - k_2)^2 + h_2$? Explica.

116. Puntos de intersección Considera las ecuaciones $x^2 + y^2 = 16$ y $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 16$. Al considerar el centro y el radio de cada circunferencia, determina el número de puntos de intersección de las dos circunferencias.

117. Rueda de la fortuna La rueda de la fortuna en Navy Pier, en Chicago, mide 150 pies de alto. El radio de la rueda en sí, es de 68.2 pies.

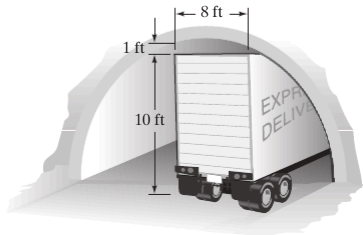


a) ¿Cuál es la distancia de guarda bajo la rueda?

b) ¿Qué tan alto está el centro de la rueda del suelo?

c) Determina la ecuación de la rueda. Supón que, el origen está en el suelo directamente abajo del centro de la rueda.

118. Túnel Un departamento de autopistas planea construir un túnel unidireccional semicircular, a través de una montaña. El túnel debe ser suficientemente grande, para que un camión de 8 pies de ancho y 10 pies de alto, pase a través del centro del túnel con 1 pie de espacio directamente arriba de la esquina del camión, cuando se conduce por el centro del túnel (como se muestra en la siguiente figura). Determina el radio mínimo del túnel.



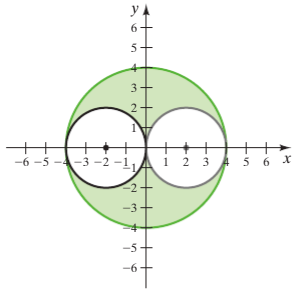
119. Área sombreada Considera la figura en la parte superior de la siguiente página. Escribe una ecuación para

a) la circunferencia verde,

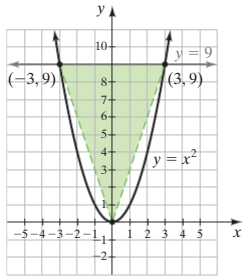
b) la circunferencia gris, y

c) la circunferencia negra.

d) Determina el área sombreada.



120. Triángulo Considera la siguiente figura.

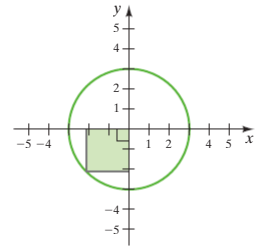


a) Determina el área del triángulo resaltada en verde.

b) Cuando un triángulo se inscribe dentro de una parábola, como en la figura, el área dentro de la parábola desde la base del triángulo es $\frac{4}{3}$ el área del triángulo. Determina el área dentro de la parábola desde $x = -3$ hasta $x = 3$.

121. Circunferencias concéntricas Determina el área entre las dos circunferencias concéntricas, cuyas ecuaciones son $(x-2)^2+(y+4)^2=16$ y $(x-2)^2+(y+4)^2=64$. *Circunferencias concéntricas*, son circunferencias que tienen el mismo centro.

122. Área sombreada Determina el área sombreada del cuadrado en la figura. La ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 = 9$.



Ejercicios conceptuales y de redacción

123. Si conoces un punto extremo de un segmento de recta y la longitud del segmento de recta, ¿puedes determinar el otro punto extremo? Explica.

124. Si conoces el punto medio de un segmento de recta, ¿es posible determinar la longitud del segmento de recta? Explica.

125. ¿Todas las parábolas de la forma $y = a(x - h)^2 + k, a > 0$, serán funciones? explica. ¿Cuál será el dominio y el rango de $y = a(x - h)^2 + k, a > 0$?

126. ¿Todas las parábolas de la forma $x = a(y - k)^2 + h, a > 0$, serán funciones? Explica. ¿Cuál será el dominio y el rango de $x = a(y - k)^2 + h, a > 0$?

127. ¿Cómo se comparan las gráficas de $y = 2(x - 3)^2 + 4$ y $y = -2(x - 3)^2 + 4$?

128. ¿Cuál es la definición de una circunferencia?

129. ¿$x^2 - y^2 = 9$ es la ecuación de una circunferencia? Explica.

130. ¿$-x^2 + y^2 = 25$ es la ecuación de una circunferencia? Explica.

131. ¿$2x^2 + 3y^2 = 6$ es la ecuación de una circunferencia? Explica.

132. ¿$x = y^2 - 6y + 3$ es la ecuación de una parábola? Explica.

133. ¿$x^2 = y^2 - 6y + 3$ es la ecuación de una parábola? Explica.

134. ¿$x = y + 2$ es la ecuación de una parábola? Explica.

Actividad grupal

Discute y responde el ejercicio 135, en equipo.

135. Ecuación de una parábola La ecuación de una parábola puede determinarse si se conocen tres puntos de la parábola. Para hacer esto, comienza con $y = ax^2 + bx + c$. Después, sustituye las coordenadas x y y del primer punto en la ecuación. Esto resultará en una ecuación en términos de a, b y c. Repite el procedimiento para los otros dos puntos. Este proceso, produce un sistema de tres ecuaciones con tres variables. A continuación, resuelve el sistema para a, b y c. Para determinar la ecuación de la

parábola, sustituye los valores determinados para a, b y c en la ecuación $y = ax^2 + bx + c$.

Tres puntos sobre la parábola, son $(0, 12)$, $(3, -3)$ y $(-2, 32)$.

a) Individualmente, determina un sistema de ecuaciones en tres variables que puedan usarse para determinar la ecuación de la parábola. Luego, comparen sus respuestas. Si cada miembro del equipo no tiene el mismo sistema, determina por qué.

b) Individualmente, resuelve el sistema y determina los valores de a, b y c. Luego, comparen sus respuestas.

c) Individualmente, escribe la ecuación de la parábola que pasa a través de $(0, 12)$, $(3, -3)$ y $(-2, 32)$. Luego, comparen sus respuestas.

d) Individualmente, escribe la ecuación en la forma:

$$y = a(x - h)^2 + k$$

Luego, comparen sus respuestas.

e) Individualmente, grafica la ecuación del inciso **d)**. Luego, comparen sus respuestas.

Ejercicios de repaso acumulativo

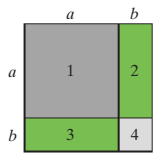
[1.5] **136.** Simplifica $\dfrac{6x^{-3}y^4}{18x^{-2}y^3}$.

[2.5] **137.** Resuelve la desigualdad $-4 < 3x - 4 < 17$. Escribe la solución en notación de intervalo.

[4.5] **138.** Evalúa el determinante.

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

[5.2] **139. a)** Escribe expresiones para representar cada una de las cuatro áreas mostradas en la figura.



b) Expresa el área total mostrada como el cuadrado de un binomio.

[10.1] **140.** Grafica $y = (x - 4)^2 + 1$.

10.2 La elipse

1. **Gráficas de elipses**
2. **Gráficas de elipses con centro en (h, k)**

La siguiente sección cónica que estudiarás, es la *elipse*. La **Figura 10.1** de la página 674, muestra cómo puede formarse una elipse al rebanar un cono y observar la forma de la rebanada.

1 Gráficas de elipses

Elipse

Una **elipse,** es un conjunto de puntos en un plano, cuya suma de distancias, desde dos puntos fijos, es una constante. Los dos puntos fijos se llaman **focos** de la elipse.

En la **Figura 10.18**, F_1 y F_2 representan los dos focos de una elipse.

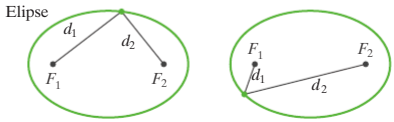


FIGURA 10.18

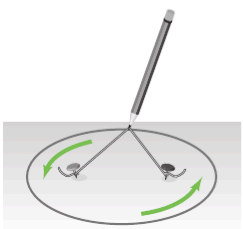


FIGURA 10.19

Se puede construir una elipse, usando un trozo de cuerda y dos tachuelas. Coloca las dos tachuelas muy juntas (**Figura 10.19**). Luego, amarra los extremos de la cuerda a las tachuelas. Con un lápiz tensa la cuerda y, mientras la mantienes tensa, dibuja la elipse moviendo el lápiz alrededor de las tachuelas.

En la **Figura 10.20**, el segmento de recta desde $-a$ hasta a sobre el eje x, es el **eje mayor** o el *más largo*; y el segmento de recta desde $-b$ hasta b, es el **eje menor** o el *más corto* de la elipse. El eje mayor de una elipse, también puede estar sobre el eje y. En la **Figura 10.20**, también se muestra el *centro* de la elipse y los dos vértices (los puntos grises). Los vértices son los puntos extremos del eje mayor.

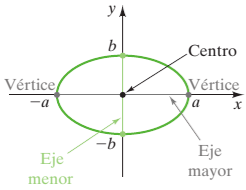


FIGURA 10.20

Ecuación de una elipse con su centro en el origen

La forma general de la ecuación de una elipse con centro en el origen, es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, son las intersecciones con el eje de las x; y $(0, b)$ y $(0, -b)$, son las intersecciones con el eje de las y.

Observa que:

- Las intersecciones con el eje de las x, se obtienen a partir de la constante en el denominador del término x.
- Las intersecciones con el eje de las y, se obtienen a partir de la constante en el denominador del término y.
- Si $a^2 > b^2$, el eje mayor está a lo largo del eje x.
- Si $b^2 > a^2$, el eje mayor está a lo largo del eje y.

En el ejemplo 1, el eje mayor de la elipse está a lo largo del eje x.

EJEMPLO 1 Elabora la gráfica de $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Solución La ecuación se puede reescribir como:

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

En consecuencia, $a = 3$ y las intersecciones con el eje de las x, son $(3, 0)$ y $(-3, 0)$. Dado que $b = 2$, las intersecciones con el eje de las y son $(0, 2)$ y $(0\ -2)$. La elipse se ilustra en la **Figura 10.21**.

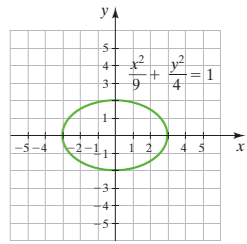


FIGURA 10.21

Ahora resuelve el ejercicio 15

Una ecuación puede estar escrita, de modo que pueda no ser obvio que su gráfica es un elipse, como se ilustra en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Elabora la gráfica de $25x^2 + 16y^2 = 400$.

Solución Comienza por dividir ambos lados de la ecuación entre 400, para obtener un 1 en el lado derecho de la ecuación.

$$25x^2 + 16y^2 = 400$$
$$\frac{25x^2 + 16y^2}{400} = \frac{400}{400}$$
$$\frac{25x^2}{400} + \frac{16^2}{400} = 1$$
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$
$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$$

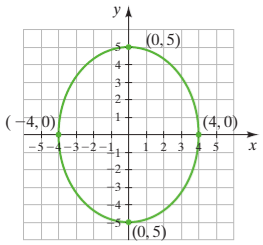


FIGURA 10.22

Ahora, la ecuación está en la forma general para una elipse con el centro en el origen. En consecuencia, $a = 4$ y $b = 5$. Las intersecciones con el eje de las x, son $(4, 0)$ y $(-4, 0)$; las intersecciones con el eje de las y, son $(0, 5)$ y $(0, -5)$. La gráfica se ilustra en la **Figura 10.22**. Observa que, el eje mayor se encuentra a lo largo del eje y.

Ahora resuelve el ejercicio 23

En el ejemplo 1, dado que $a^2 = 9$ y $b^2 = 4$, y $a^2 > b^2$, el eje mayor está a lo largo del eje x. En el ejemplo 2, dado que $a^2 = 16$ y $b^2 = 25$, y $b^2 > a^2$, el eje mayor está a lo largo del eje y. En el caso específico donde $a^2 = b^2$, la figura es una circunferencia. *Por tanto, la circunferencia es un caso particular de una elipse.*

EJEMPLO 3

Escribe la ecuación de la elipse mostrada en la **Figura 10.23**.

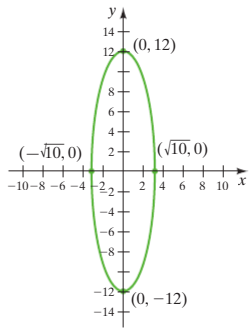


FIGURA 10.23

Solución Las intersecciones con el eje de las x, son $(-\sqrt{10}, 0)$ y $(\sqrt{10}, 0)$; en consecuencia, $a = \sqrt{10}$ y $a^2 = 10$. Las intersecciones con el eje de las y, son $(0,-12)$ y $(0,12)$; por tanto, $b = 12$ y $b^2 = 144$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{144} = 1$$

Ahora resuelve el ejercicio 45

A continuación, se presenta una fórmula que se usa para determinar el *área de una elipse*.

Área de una elipse

Para una elipse, cuya ecuación es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, el área, A, dentro de la elipse, puede determinarse usando la fórmula:

$$A = \pi ab$$

EJEMPLO 4

Determina el área dentro de la elipse dada por cada ecuación. Redondea tu respuesta a la centésima más cercana.

a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ **b)** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ **c)** $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{144} = 1$

Solución

a) Para la ecuación $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, $a = 3$ y $b = 2$. En consecuencia:

$$A = \pi ab = \pi(3)(2) = 6\pi \approx 18.85 \text{ unidades cuadradas}$$

b) Para la ecuación $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$, $a = 4$ y $b = 5$. En consecuencia:

$$A = \pi ab = \pi(4)(5) = 20\pi \approx 62.83 \text{ unidades cuadradas.}$$

c) Para la ecuación $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{144} = 1$, $a = \sqrt{10}$ y $b = 12$. En consecuencia:

$$A = \pi ab = \pi(\sqrt{10})(12) \approx 119.22 \text{ unidades cuadradas.}$$

Ahora resuelve el ejercicio 41

En el ejemplo 4, se determinó el área de las elipses dadas en los ejemplos 1, 2 y 3, respectivamente.

2 Gráficas de elipses con centros en (h, k)

Es posible usar traslaciones horizontales y verticales, similares a las utilizadas en el capítulo 8, para obtener la ecuación de una elipse con centro en (h, k).

Ecuación de una elipse con centro en (h, k)

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

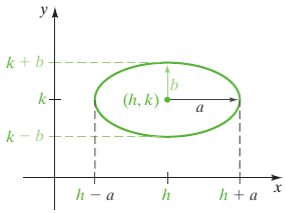


FIGURA 10.24

En la fórmula, h desplaza la gráfica hacia la izquierda o hacia la derecha desde el origen, y k desplaza la gráfica hacia arriba o hacia abajo desde el origen, como se muestra en la **Figura 10.24**.

EJEMPLO 5 Elabora la gráfica de $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$.

Solución Esta es la gráfica de $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ o $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ trasladada de modo que su centro está en $(2, -3)$. Observa que, $a = 5$ y $b = 4$. La gráfica se muestra en la **Figura 10.25.**

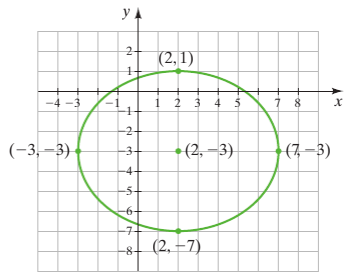


FIGURA 10.25

Ahora resuelve el ejercicio 33

Comprender las elipses es útil en muchas áreas. Los astrónomos saben que los planetas giran en órbitas elípticas alrededor del Sol. Los satélites de comunicaciones se mueven en órbitas elípticas alrededor de la Tierra (observa la **Figura 10.26** en la página 690).

Las elipses se usan en la medicina para romper cálculos renales. Cuando una señal sale desde un foco de una elipse, la señal se refleja hacia el otro foco. En las máquinas de cálculos renales, la persona se sitúa de modo que el cálculo a romper se ubica en un foco de una cámara elíptica llamada litotriptor (consulta la **Figura 10.27** y los ejercicios 57 y 58).

En ciertos edificios con techos elipsoidales, una persona que se coloca en un foco, puede susurrar algo y otra persona parada en el otro foco, puede escuchar claramente lo que la persona susurró. Existen muchos otros usos para las elipses, incluidas lámparas que se fabrican para concentrar luz en un punto específico.



FIGURA 10.26

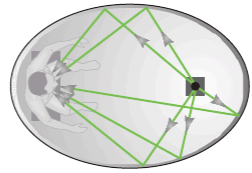


FIGURA 10.27

USA TU CALCULADORA GRAFICADORA

Las elipses no son funciones. Para graficar elipses en una calculadora graficadora, resuelve la ecuación en términos de y. Esto producirá las dos ecuaciones que se usan para graficar la elipse.

En el ejemplo 1, se graficó $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Al resolver esta ecuación en términos de y, se obtiene

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$36 \cdot \frac{x^2}{9} + 36 \cdot \frac{y^2}{4} = 1 \cdot 36 \qquad \text{Multiplica por el MCD.}$$

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

$$9y^2 = 36 - 4x^2$$

$$y^2 = \frac{36 - 4x^2}{9}$$

$$y^2 = \frac{4(9 - x^2)}{9} \qquad \text{Factoriza 4 del numerador.}$$

$$y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2} \qquad \text{Propiedad de la raíz cuadrada.}$$

Para graficar la elipse, sea $Y_1 = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$ y $Y_2 = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$, y grafica ambas ecuaciones. Las gráficas de Y_1 y Y_2, se ilustran en la **Figura 10.28**.

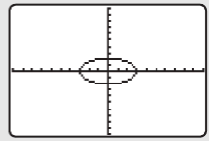


FIGURA 10.28

10.2 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

mayor	intersecciones con el eje de las y	focos	dividir	restar	$(0, 0)$
multiplicar	menor	intersecciones con el eje de las x	(k, h)	elipse	(h, k)

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, es la ecuación de una elipse con centro en _____.
2. $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, es la ecuación de una elipse con centro en _____.
3. Un conjunto de puntos, cuya suma de distancias desde dos puntos fijos es una constante, es una _____.
4. Una elipse, es el conjunto de puntos en un plano, cuya suma de distancias, desde dos puntos fijos, llamados _____, es una constante.
5. Para la elipse $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{16} = 1$, los puntos $(-9, 0)$ y $(9, 0)$, son las _____.
6. Para la elipse $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{16} = 1$, los puntos $(0, -4)$ y $(0, 4)$, son las _____.
7. Para la elipse $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$, la recta desde -7 hasta 7, sobre el eje x, es el eje _____.
8. Para la elipse $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$, la recta desde -5 hasta 5, sobre el eje y, es el eje _____.

9. El primer paso para graficar la elipse $25x^2 + 50y^2 = 100$, es _____ ambos lados de la ecuación entre 100.

10. El primer paso para graficar la elipse $-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$, es _____ ambos lados de la ecuación por -1.

Practica tus habilidades

Elabora la gráfica de cada ecuación.

11. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ **12.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ **13.** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ **14.** $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1$

15. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ **16.** $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{16} = 1$ **17.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ **18.** $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{64} = 1$

19. $49x^2 + y^2 = 49$ **20.** $x^2 + 25y^2 = 25$ **21.** $x^2 + 16y^2 = 16$ **22.** $9x^2 + y^2 = 9$

23. $4x^2 + 9y^2 = 36$ **24.** $9x^2 + 16y^2 = 144$ **25.** $25x^2 + 100y^2 = 400$ **26.** $100x^2 + 25y^2 = 400$

27. $x^2 + 2y^2 = 8$ **28.** $3x^2 + y^2 = 12$ **29.** $\frac{x^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ **30.** $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1$

31. $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$ **32.** $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-4)^2}{25} = 1$ **33.** $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

34. $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{49} = 1$ **35.** $(x+3)^2 + 9(y+1)^2 = 81$ **36.** $18(x-1)^2 + 2(y+3)^2 = 72$

37. $(x-5)^2 + 4(y+4)^2 = 4$ **38.** $4(x-2)^2 + 9(y+2)^2 = 36$ **39.** $12(x+4)^2 + 3(y-1)^2 = 48$

40. $25(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 225$

Resolución de problemas

En los ejercicios 41-44, determina el área de la elipse del ejercicio dado. Redondea tus respuestas a la centésima más cercana.

41. **a)** Ejercicio 11
b) Ejercicio 13

42. **a)** Ejercicio 15
b) Ejercicio 17

43. **a)** Ejercicio 19
b) Ejercicio 21

44. **a)** Ejercicio 23
b) Ejercicio 25

En los ejercicios 45-48, determina la ecuación de la elipse que tiene los cuatro puntos, como puntos extremos de los ejes mayor y menor.

45. $(5, 0), (-5, 0), (0, 4), (0, -4)$

46. $(6, 0), (-6, 0), (0, 5), (0, -5)$

47. $(2, 0), (-2, 0), (0, 3), (0, -3)$

48. $(1, 0), (-1, 0), (0, 9), (0, -9)$

En los ejercicios 49 y 50, escribe la ecuación en forma general. Determina el centro de cada elipse.

49. $x^2 + 4y^2 + 6x + 16y - 11 = 0$

50. $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 92 = 0$

51. **Galería de arte** Una galería de arte tiene un salón elíptico. La distancia máxima desde un foco hacia la pared, es de 90.2 pies y la distancia mínima es de 20.7 pies. Determina la distancia entre los focos.



52. **Satélite de comunicaciones** Un satélite viaja en una órbita elíptica alrededor de la Tierra. La distancia máxima del satélite desde la Tierra, es de 23 200 millas y la distancia mínima, es de 22 800 millas. La Tierra está en un foco de la elipse. Determina la distancia desde la Tierra hasta el otro foco.

53. Túnel a través de una montaña El túnel en la fotografía, es la mitad superior de una elipse. El ancho del túnel es de 20 pies y la altura es de 24 pies.

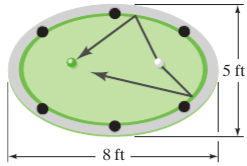


a) Si dibujaras una elipse completa, con el centro de la elipse en el centro del camino, determina la ecuación de la elipse.

b) Determina el área de la elipse determinada en el inciso **a)**.

c) Determina el área de la abertura del túnel.

54. Mesa de billar Una mesa de billar elíptica, mide 8 pies de largo por 5 pies de ancho. Determina la ubicación de los focos. En dicha mesa, si una bola se pone en cada uno de los focos y una bola se golpea con suficiente fuerza, golpearía la bola en el otro foco sin importar dónde rebote sobre la mesa.



55. Comprueba en tu calculadora graficadora tu respuesta al ejercicio 17.

56. Comprueba en tu calculadora graficadora tu respuesta al ejercicio 13.

57. Litotriptor Supón, que el litotriptor descrito en la página 689, mide 6 pies de largo y 4 pies de ancho. Describe la ubicación de los focos.

Ejercicios conceptuales y de redacción

58. Litotriptor En la página 689, se ofreció una breve introducción al litotriptor, que usa ondas de ultrasonido para romper cálculos renales. Realiza una investigación y escribe un reporte detallado donde describas el procedimiento utilizado para romper cálculos renales. Asegúrate de explicar la manera en que las ondas se direccionan a los cálculos.

59. Galería susurrante El National Statuary Hall, en el edificio del Capitolio, en Washington, DC, es una "galería susurrante". Realiza una investigación y explica por qué, una persona parada en un cierto punto puede susurrar algo, y alguien, parado a una distancia considerable, puede escucharla.

60. Discute la gráfica de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ cuando $a > b$, $a < b$ y $a = b$.

61. Explica por qué la circunferencia es un caso especial de elipse.

62. ¿$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{49} = 1$ es la ecuación de una elipse? Explica.

63. ¿$-\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{81} = 1$ es la ecuación de una elipse? Explica.

64. ¿Cuántos puntos hay sobre la gráfica de $16x^2 + 25y^2 = 0$? Explica.

65. Considera la gráfica de la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Explica qué ocurrirá con la forma de la gráfica, conforme el valor de b se acerque cada vez más al valor de a. ¿Cuál es la forma de la gráfica, cuando $a = b$?

66. ¿Cuántos puntos de intersección tendrán las gráficas de las ecuaciones $x^2 + y^2 = 49$ y $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$? Explica.

67. ¿Cuántos puntos de intersección tendrán las gráficas de las ecuaciones $y = 2(x - 2)^2 - 3$ y $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$? Explica.

Problemas de desafío

Determina la ecuación de la elipse que tiene los siguientes cuatro puntos, como puntos extremos de los ejes mayor y menor.

68. $(-7, 3), (5, 3), (-1, 5), (-1, 1)$

69. $(-3, 2), (11, 2), (4, 5), (4, -1)$

Actividad grupal

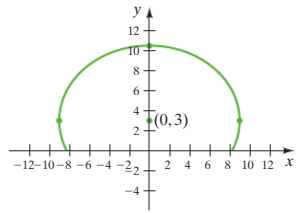
Trabajen el ejercicio 70, individualmente. Luego comparen sus respuestas.

70. Túnel La fotografía muestra un túnel elíptico (no se muestra la parte inferior de la elipse), cerca del Rockefeller Center, en la ciudad de Nueva York. El ancho máximo del túnel, es de 18 pies y la altura máxima *desde el suelo hasta la parte superior*, es de 10.5 pies.



a) Si la *elipse completa* tuviera una altura máxima de 15 pies, ¿qué tan alto, desde el suelo, se encuentra el centro del túnel elíptico?

b) Considera la siguiente gráfica, la cual podría usarse para representar el túnel.



Si la elipse se continuara, ¿cuál sería la otra intersección con el eje de las y de la gráfica?

c) Escribe la ecuación de la elipse, si se completara, en el inciso **b)**.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **71.** Resuelve la fórmula $S = \frac{n}{2}(f + l)$ para l.

[5.3] **72.** Divide $\frac{2x^2 + 2x - 7}{2x - 3}$.

[7.6] **73.** Resuelve $\sqrt{3b - 2} = 10 - b$.

[8.6] **74.** Resuelve $\frac{3x + 5}{x - 4} \leq 0$, y proporciona la solución en notación de intervalo.

[9.7] **75.** Determina $\log_8 321$.

EXAMEN DE MITAD DE CAPÍTULO: SECCIONES 10.1-10.2

Para descubrir qué tan bien entiendes el material del capítulo hasta este punto, resuelve esta breve evaluación. Las respuestas, y la sección donde el material se discutió inicialmente, se proporcionan en la parte final del libro. Revisa cualquier pregunta que respondas de manera incorrecta.

Elabora la gráfica de cada ecuación.

1. $y = (x - 2)^2 - 1$

2. $y = -(x + 1)^2 + 3$

3. $x = -(y - 4)^2 + 1$

4. $x = 2(y + 3)^2 - 2$

5. $y = x^2 + 6x + 10$

Determina la distancia entre cada par de puntos. Donde sea apropiado, redondea tus respuestas a la centésima más cercana.

6. $(-7, 4)$ y $(-2, -8)$

7. $(5, -3)$ y $(2, 9)$

Determina el punto medio del segmento de recta, entre cada par de puntos.

8. $(9, -1)$ y $(-11, 6)$

9. $\left(-\frac{5}{2}, 7\right)$ y $\left(8, \frac{1}{2}\right)$

10. Escribe la ecuación de la circunferencia, con centro en $(-3, 2)$ y un radio de 5 unidades.

Elabora la gráfica de cada ecuación.

11. $x^2 + (y - 1)^2 = 16$

12. $y = \sqrt{36 - x^2}$

13. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

14. ¿Cuál es la definición de circunferencia?

Elabora la gráfica de cada ecuación.

15. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

16. $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} = 1$

17. $\frac{(x - 1)^2}{49} + \frac{(y + 2)^2}{4} = 1$

18. $36(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 36$.

19. Determina el área de la elipse en el ejercicio 15.

20. Determina la ecuación de la elipse que tiene los cuatro puntos $(8, 0)$, $(-8, 0)$, $(0, 5)$ y $(0, -5)$ como los puntos extremos de los ejes mayor y menor.

10.3 La hipérbola

1. **Elabora la gráfica de las hipérbolas**
2. **Repaso de las secciones cónicas**

La última sección cónica que estudiarás, es la *hipérbola*. La **Figura 10.1** de la página 674, muestra cómo puede elaborarse una hipérbola al rebanar un cono y observar la forma de la rebanada.

1 Elaboras la gráfica de las hipérbolas

Hipérbola

Una **hipérbola**, es el conjunto de puntos en un plano, cuya diferencia de distancias desde dos puntos fijos, llamados **focos**, es una constante.

En la **Figura 10.29a**, se ilustra una hipérbola. En la figura, para cada punto sobre la hipérbola, la diferencia $M - N$, es la misma constante. Una hipérbola podría parecerse a un par de parábolas. Sin embargo, las formas son en realidad muy diferentes. Una hipérbola tiene dos **vértices**. Los vértices son los puntos donde la gráfica cruza el eje x (**Figura 10.29b**) o el eje y (**Figura 10.29c**). El punto que está a la mitad de los dos vértices, es el **centro** de la hipérbola. La recta que pasa a través de los vértices, se llama **eje transversal**. En la **Figura 10.29b**, el eje transversal se encuentra a lo largo del eje x; y en la **Figura 10.29c**, el eje transversal se encuentra a lo largo del eje y.

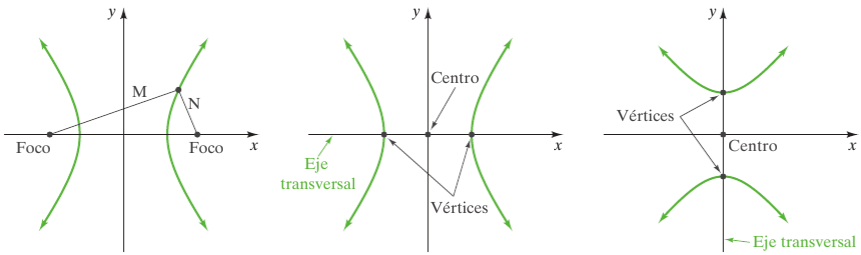


FIGURA 10.29

La **Figura 10.30**, muestra las gráficas de las formas generales de las ecuaciones para ambas hipérbolas. En la **Figura 10.30a**, ambos vértices están a a unidades del origen. En la **Figura 10.30b**, ambos vértices están a b unidades del origen. Observa que, en la forma general de la ecuación, el denominador del término x^2, siempre es a^2; y el denominador del término y^2, siempre es b^2.

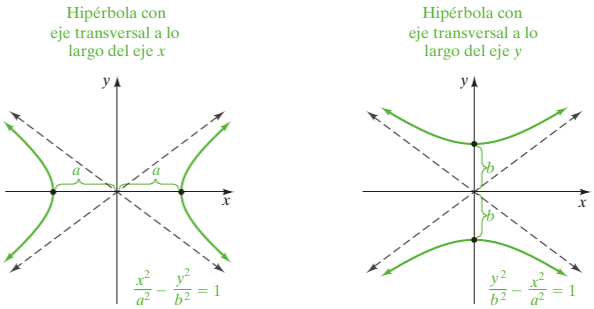


FIGURA 10.30

- Hipérbola con centro en el origen.
- Vértices $(-a, 0)$ y $(a, 0)$.
- Eje transversal a lo largo del eje x.

- Hipérbola con centro en el origen.
- Vértices $(0, -b)$. y $(0, b)$.
- Eje transversal a lo largo del eje y.

Cuando se escribe la ecuación en la forma general, las intersecciones con los ejes estarán en el eje que se indica por la variable con el coeficiente positivo. Las intersecciones estarán en la raíz cuadrada positiva y negativa del denominador del término positivo.

Ejemplos	Intersecciones con	Intersecciones
$\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$	eje x	$(-7, 0)$ y $(7, 0)$
$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{49} = 1$	eje y	$(0, -4)$ y $(0, 4)$

Las rectas punteadas en la **Figura 10.30**, se llaman **asíntotas**. Las asíntotas no son parte de la hipérbola, pero se utilizan como un auxiliar para graficar hipérbolas. Las asíntotas, son dos rectas que pasan por el centro de la hipérbola (observa la **Figura 10.30**). Conforme los valores de x y y se vuelven más grandes, la gráfica de la hipérbola se aproxima a las asíntotas. Las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola, cuyo centro es el origen, son:

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

Comprende el Álgebra

Las asíntotas *no* son parte de la gráfica, pero se utilizan para mostrar los valores a los que se aproxima la gráfica, más nunca la toca.

Las ecuaciones de las asíntotas son las mismas, sin importar si el eje transversal está a lo largo del eje x o a lo largo del eje y. Las asíntotas se pueden dibujar rápidamente al trazar los cuatro puntos (a, b), $(-a, b)$, $(a, -b)$ y $(-a, -b)$, y después conectar estos puntos con una recta punteada para formar un rectángulo. A continuación, dibuja rectas punteadas a través de las esquinas opuestas del rectángulo, para obtener las asíntotas.

Ecuación de una hipérbola con centro en el origen

Eje transversal a lo largo del eje x (abre hacia la derecha y hacia la izquierda)	Eje transversal a lo largo del eje y (abre hacia arriba y hacia abajo)
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

Asíntotas

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

EJEMPLO 1

a) Determina las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola, con ecuación:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

b) Elabora la gráfica de la ecuación de la hipérbola usando las asíntotas.

Solución

a) El valor de a^2 es 9; la raíz cuadrada positiva de 9 es 3. El valor de b^2 es 16; la raíz cuadrada positiva de 16 es 4. Las asíntotas son:

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

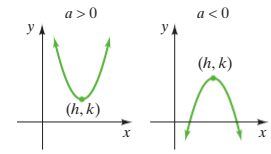
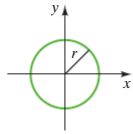
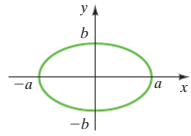
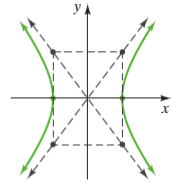
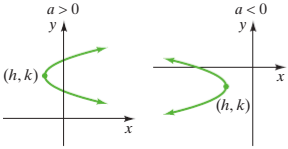
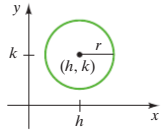
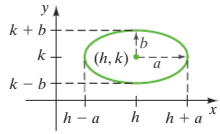
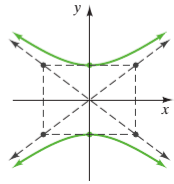
o

$$y = \frac{4}{3}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{4}{3}x$$

b) Para graficar la hipérbola, primero grafica las asíntotas. Inicia trazando los puntos $(3, 4)$, $(-3, 4)$, $(3, -4)$ y $(-3, -4)$, y dibuja el rectángulo, como se ilustra en la **Figura 10.31** de la página 696. Las asíntotas, son las rectas punteadas que pasan a través de las esquinas opuestas del rectángulo.

2 Repaso de las secciones cónicas

La siguiente tabla, resume las secciones cónicas.

Parábola	Círculo	Elipse	Hipérbola
$y = a(x - h)^2 + k$ o $y = ax^2 + bx + c$ 	$x^2 + y^2 = r^2$ 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 
$x = a(y - k)^2 + h$ o $x = ay^2 + by + c$ 	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ 	$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ 	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$  Asíntotas $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$

EJEMPLO 3 Indica, si cada ecuación representa una parábola, una circunferencia, una elipse o una hipérbola.

a) $6x^2 = -6y^2 + 48$ **b)** $x - y^2 = 9y + 3$ **c)** $2x^2 = 8y^2 + 72$

Solución

a) Esta ecuación tiene un término x al cuadrado y un término y al cuadrado. Todos los términos al cuadrado, se colocarán en el lado izquierdo de la ecuación.

$$6x^2 = -6y^2 + 48$$
$$6x^2 + 6y^2 = 48 \qquad \text{Suma } 6y^2 \text{ a ambos lados.}$$

Dado que los coeficientes de ambos términos al cuadrado, son el mismo número, divide ambos lados de la ecuación entre este número. Divide ambos lados entre 6.

$$\frac{6x^2 + 6y^2}{6} = \frac{48}{6}$$
$$x^2 + y^2 = 8$$

Esta ecuación es de la forma $x^2 + y^2 = r^2$, donde $r^2 = 8$.

La ecuación $6x^2 = -6y^2 + 48$, representa una circunferencia.

b) Esta ecuación tiene un término y al cuadrado, mas no tiene un término x al cuadrado. Se resolverá la ecuación en términos de x.

$$x - y^2 = 9y + 3$$
$$x = y^2 + 9y + 3 \qquad \text{Suma } y^2 \text{ a ambos lados.}$$

Esta ecuación es de la forma $x = ay^2 + by + c$, donde $a = 1$, $b = 9$, y $c = 3$.

La ecuación $x - y^2 = 9y + 3$ representa una parábola que abre hacia la derecha.

c) Esta ecuación tiene un término x al cuadrado y un término y al cuadrado. Se colocarán todos los términos al cuadrado en el lado izquierdo de la ecuación.

$$2x^2 = 8y^2 + 72$$
$$2x^2 - 8y^2 = 72 \qquad \text{Resta } 8y^2 \text{ de ambos lados.}$$

Dado que los coeficientes de ambos términos al cuadrado, son números diferentes, se quiere dividir la ecuación entre la constante en el lado derecho. Divide ambos lados entre 72.

$$\frac{2x^2 - 8y^2}{72} = \frac{72}{72}$$
$$\frac{2x^2}{72} - \frac{8y^2}{72} = 1$$
$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Esta ecuación es de la forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a^2 = 36$ (o $a = 6$) y $b^2 = 9$ (o $b = 3$).

La ecuación $2x^2 = 8y^2 + 72$, representa una hipérbola.

Ahora resuelve el ejercicio 47

10.3 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

dividir	asíntotas	x	y	focos	transversal
horizontal	centro	vertical	vértices	hipérbola	multiplicar

1. Un conjunto de puntos, cuya diferencia de distancias, desde dos puntos fijos, sea una constante, es una _____.

2. Los puntos fijos de una hipérbola que se mencionan en el ejercicio 1, se llaman _____.

3. Para la hipérbola con la ecuación $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{100} = 1$, el _____ está en $(0, 0)$.

4. Para la hipérbola con la ecuación $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$, los _____ están en los puntos $(-3, 0)$ y $(3, 0)$.

5. La recta que pasa a través de los vértices de una hipérbola, es el eje _____.

6. Para la hipérbola con la ecuación $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{4} = 1$, los vértices están sobre el eje _____.

7. Para la hipérbola con la ecuación $\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{121} = 1$, los vértices están sobre el eje _____.

8. Para la hipérbola con la ecuación $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$, las rectas $y = \frac{5}{2}x$ y $y = -\frac{5}{2}x$, son _____.

9. El primer paso para graficar la hipérbola con la ecuación $25x^2 - 9y^2 = 225$, es _____ ambos lados de la ecuación entre 225.

10. El primer paso para graficar la hipérbola con la ecuación $-\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{50} = -\frac{1}{2}$, es _____ ambos lados de la ecuación por -2.

Practica tus habilidades

a) *Determina las ecuaciones de las asíntotas para cada ecuación y* **b)** *elabora la gráfica de la ecuación.*

11. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$

12. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

13. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$

14. $\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{4} = 1$

15. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$

16. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

17. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

18. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{25} = 1$

19. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{36} = 1$

20. $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$

21. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{36} = 1$

22. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{81} = 1$

23. $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{16} = 1$

24. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

25. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

26. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$

En los ejercicios 27-36, **a)** *escribe cada ecuación en forma general y determina las ecuaciones de las asíntotas y* **b)** *elabora la gráfica de la ecuación.*

27. $16x^2 - 4y^2 = 64$

28. $4y^2 - 16x^2 = 64$

29. $25y^2 - x^2 = 25$

30. $x^2 - 25y^2 = 25$

31. $9y^2 - x^2 = 9$

32. $x^2 - 9y^2 = 9$

33. $25x^2 - 9y^2 = 225$

34. $4y^2 - 25x^2 = 100$

35. $4y^2 - 36x^2 = 144$

36. $25x^2 - 16y^2 = 400$

En los ejercicios 37-60, indica si la ecuación representa una parábola, una circunferencia, una elipse o una hipérbola. Consulta el ejemplo 3.

37. $10x^2 + 10y^2 = 40$

38. $5x^2 + 5y^2 = 80$

39. $y = x^2 + 5x - 6$

40. $x = 5y^2 + 15y + 1$

41. $x^2 + 16y^2 = 64$

42. $9x^2 + 25y^2 = 225$

43. $16x^2 - 36y^2 = 576$

44. $12x^2 - 3y^2 = 48$

45. $4x^2 = 100 - 25y^2$

46. $36y^2 = 144 - 16x^2$

47. $4x^2 - 144 = 36y^2$

48. $25y^2 = 400 + 16x^2$

49. $-3x^2 - 3y^2 = -27$

50. $4x^2 = -4y^2 + 400$

51. $x + y = 2y^2 + 6$

52. $y - x + 12 = x^2$

53. $2y = 12x^2 - 8x + 16$

54. $3x = -2y^2 + 9y - 30$

55. $6x^2 + 6y^2 = 36$

56. $11x^2 = -11y^2 + 77$

57. $13x^2 = 7y^2 + 91$

58. $-8x^2 = -9y^2 - 72$

59. $9x^2 = -18y^2 + 36$

60. $17x^2 = -2y^2 + 34$

Resolución de problemas

61. Determina la ecuación de la hipérbola, cuyos vértices están en $(0, 2)$ y $(0, -2)$, y cuyas asíntotas son $y = \frac{1}{2}x$ y $y = -\frac{1}{2}x$.

62. Determina la ecuación de la hipérbola, cuyos vértices están en $(0, 6)$ y $(0, -6)$, y cuyas asíntotas son $y = \frac{3}{2}x$ y $y = -\frac{3}{2}x$.

63. Determina la ecuación de la hipérbola, cuyos vértices están en $(-3, 0)$ y $(3, 0)$, y cuyas asíntotas son $y = 2x$ y $y = -2x$.

64. Determina la ecuación de la hipérbola, cuyos vértices están en $(7, 0)$ y $(-7, 0)$, y cuyas asíntotas son $y = \frac{4}{7}x$ y $y = -\frac{4}{7}x$.

65. Determina la ecuación de una hipérbola, cuyo eje transversal esté a lo largo del eje x, y cuyas ecuaciones de las asíntotas sean $y = \frac{5}{3}x$ y $y = -\frac{5}{3}x$. ¿Esta es la única respuesta posible? Explica.

66. Determina la ecuación de una hipérbola, cuyo eje transversal esté a lo largo del eje y, y cuyas ecuaciones de las asíntotas sean $y = \frac{2}{3}x$ y $y = -\frac{2}{3}x$. ¿Esta es la única respuesta posible? Explica.

67. Considera la gráfica de $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$, y determina el dominio y el rango de la relación.

68. Considera la gráfica de $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{9} = 1$, y determina el dominio y el rango de la relación.

69. Verifica, en tu calculadora graficadora, tu respuesta al ejercicio 15.

70. Verifica, en tu calculadora graficadora, tu respuesta al ejercicio 21.

71. ¿Algunas hipérbolas de la forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, son funciones? Explica.

72. ¿Algunas hipérbolas de la forma $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ son funciones? Explica.

73. Si elaboras la gráfica de la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a > b$, y luego intercambias los valores de a y b, y graficas la nueva ecuación, ¿cómo se compararán las dos gráficas? Explica tu respuesta.

74. Si elaboras la gráfica de la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a > b$, y luego cambias los signos de cada término en el lado izquierdo de la ecuación, y graficas la nueva ecuación, ¿cómo se compararán las dos gráficas? Explica tu respuesta.

Ejercicios conceptuales y de redacción

75. Discute la gráfica de $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, para números reales a y b distintos de cero. Incluye el eje transversal, los vértices y las asíntotas.

76. Discute la gráfica de $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ para números reales a y b distintos de cero. Incluye el eje transversal, los vértices y las asíntotas.

77. ¿$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{64} = 1$, es la ecuación de una hipérbola? Explica.

78. ¿$-\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{64} = 1$, es la ecuación de una hipérbola? Explica.

79. ¿$4x^2 - 25y^2 = 100$, es la ecuación de una hipérbola? Explica.

80. ¿$36x^2 - 9y^2 = -324$, es la ecuación de una hipérbola? Explica.

Ejercicios de repaso acumulativo

[3.4] **81.** Escribe la ecuación, en forma pendiente-intersección con el eje de las y, de la recta que pasa a través de los puntos $(-6, 4)$ y $(-2, 2)$.

[3.6] **82.** Sea $f(x) = 3x^2 - x + 5$ y $g(x) = 6 - 4x^2$. Determina $(f + g)(x)$.

[4.4] **83.** Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$-4x + 9y = 7$$
$$5x + 6y = -3$$

[6.2] **84.** Suma $\frac{3x}{2x - 3} + \frac{2x + 4}{2x^2 + x - 6}$.

[8.3] **85.** Resuelve la fórmula $E = \frac{1}{2}mv^2$, en términos de v.

[9.6] **86.** Resuelve la ecuación $\log(x + 4) = \log 5 - \log x$.

10.4 Sistemas de ecuaciones no lineales y sus aplicaciones

1. **Resolución de sistemas no lineales por sustitución**
2. **Resolución de sistemas no lineales por adición**
3. **Resolución de problemas aplicados**

En el capítulo 4, estudiaste sistemas de ecuaciones lineales. Aquí estudiarás sistemas de ecuaciones no lineales.

Sistemas de ecuaciones no lineales

Un **sistema de ecuaciones no lineal**, es un sistema de ecuaciones en el cual, al menos una ecuación, no es lineal; es decir: una cuya gráfica no es una recta.

La solución a un sistema de ecuaciones, es el punto, o puntos, que satisface(n) todas las ecuaciones del sistema. Considera el sistema de ecuaciones

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$3x + 4y = 0$$

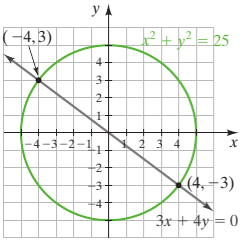


FIGURA 10.35

En la **Figura 10.35**, se grafican ambas ecuaciones sobre los mismos ejes. Observa que, las gráficas parecen intersecar en los puntos (−4, 3) y (4, −3). La verificación muestra que, estos puntos, satisfacen ambas ecuaciones del sistema. Por tanto, (−4, 3) y (4, −3), son soluciones al sistema.

Verifica (−4, 3)

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ (-4)^2 + 3^2 &\stackrel{?}{=} 25 \\ 16 + 9 &\stackrel{?}{=} 25 \\ 25 &= 25 \quad \text{Verdadero} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x + 4y &= 0 \\ 3(-4) + 4(3) &\stackrel{?}{=} 0 \\ -12 + 12 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \quad \text{Verdadero} \end{aligned}$$

Verifica (4, −3)

$$\begin{aligned} 4^2 + (-3)^2 &= 25 \\ 16 + 9 &\stackrel{?}{=} 25 \\ 25 &= 25 \quad \text{Verdadero} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3(4) + 4(-3) &= 0 \\ 12 - 12 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \quad \text{Verdadero} \end{aligned}$$

El procedimiento gráfico para resolver un sistema de ecuaciones, puede ser impreciso, pues se tiene que estimar el punto o puntos de intersección. Una respuesta exacta, puede obtenerse algebraicamente.

1 Resolución de sistemas no lineales mediante sustitución

Para resolver algebraicamente un sistema de ecuaciones, con frecuencia, se resuelve una o más de las ecuaciones en términos de las variables y, luego, se usa la *sustitución*. El objetivo, al usar sustitución, es obtener una sola ecuación que contenga solamente una variable.

EJEMPLO 1 Resuelve algebraicamente el sistema de ecuaciones anterior, usando el método de sustitución.

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$3x + 4y = 0$$

Solución Primero, resuelve la ecuación lineal $3x + 4y = 0$, en términos de x o y. Aquí se resolverá en términos de y.

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 0 \\ 4y &= -3x \\ y &= -\frac{3x}{4} \end{aligned}$$

Ahora, sustituye $-\frac{3x}{4}$ por y en la ecuación $x^2 + y^2 = 25$, y resuelve en términos de la variable restante, x.

Comprende el Álgebra

Recuerda que, la gráfica de una ecuación, es el conjunto de pares ordenados que son soluciones a la ecuación. Por tanto, las soluciones de un sistema de ecuaciones, son los pares ordenados que corresponden a los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones en el sistema.

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= 25 \\
x^2 + \left(-\frac{3x}{4}\right)^2 &= 25 && \text{Sustituye } -\frac{3x}{4} \text{ por } y. \\
x^2 + \frac{9x^2}{16} &= 25 \\
16\left(x^2 + \frac{9x^2}{16}\right) &= 16(25) && \text{Multiplica ambos lados por 16.} \\
16x^2 + 9x^2 &= 400 \\
25x^2 &= 400 \\
x^2 &= \frac{400}{25} = 16 && \text{Ambos lados se dividen entre 25.} \\
x &= \pm\sqrt{16} = \pm 4 && \text{Propiedad de la raíz cuadrada.}
\end{aligned}
$$

A continuación, se determina el valor correspondiente de y para cada valor de x, al sustituir cada valor de x (uno a la vez) en la ecuación resuelta en términos de y.

$x = 4$	$x = -4$
$y = -\frac{3x}{4}$	$y = -\frac{3x}{4}$
$= -\frac{3(4)}{4}$	$= -\frac{3(-4)}{4}$
$= -3$	$= 3$

Las soluciones son $(4, -3)$ y $(-4, 3)$. Esto verifica la solución obtenida gráficamente en la **Figura 10.35** de la página 702.

Ahora resuelve el ejercicio 9

SUGERENCIA ÚTIL

Consejo de estudio

En esta sección, se usarán los métodos de sustitución y de adición para resolver sistemas de ecuaciones no lineales. Si no recuerdas cómo usar ambos métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales, ahora es buen momento para revisar el capítulo 4.

En los ejemplos 1 y 2, los sistemas se resuelven usando el método de sustitución; mientras que en los ejemplos 3 y 4, los sistemas se resuelven usando el método de adición.

Puedes elegir resolver un sistema mediante el método de sustitución, si la adición de las dos ecuaciones no conduce a una ecuación que pueda resolverse fácilmente, como es el caso de los sistemas en los ejemplos 1 y 2.

EJEMPLO 2 Resuelve el sistema no lineal, usando el método de sustitución.

$$
\begin{aligned}
y &= x^2 - 5 \\
x^2 + y^2 &= 25
\end{aligned}
$$

Solución Dado que ambas ecuaciones contienen x^2, primero se resolverá la ecuación en términos de x^2.

$$
\begin{aligned}
y &= x^2 - 5 \\
y + 5 &= x^2 \\
\text{o} \quad x^2 &= y + 5
\end{aligned}
$$

Ahora, sustituye $y + 5$ por x^2 en la segunda ecuación.

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= 25 \\
y + 5 + y^2 &= 25 \\
y^2 + y - 20 &= 0 && \text{Escribe la ecuación cuadrática en forma estándar.} \\
(y + 5)(y - 4) &= 0 && \text{Factoriza.} \\
y + 5 = 0 \quad \text{o} \quad y - 4 &= 0 && \text{Propiedad del factor cero.} \\
y = -5 \qquad y &= 4
\end{aligned}
$$

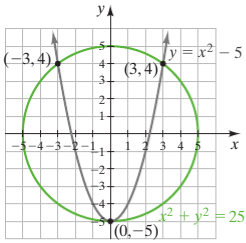


FIGURA 10.36

A continuación, determina los valores correspondientes para x, al sustituir estos valores de y en la ecuación $x^2 = y + 5$.

$y = -5$	$y = 4$
$x^2 = y + 5$	$x^2 = y + 5$
$x^2 = -5 + 5$	$x^2 = 4 + 5$
$x^2 = 0$	$x^2 = 9$
$x = 0$	$x = \pm 3$

El sistema tiene tres soluciones: $(0, -5)$, $(3, 4)$, y $(-3, 4)$ La gráfica de la ecuación $y = x^2 - 5$, es una parábola; y la gráfica de $x^2 + y^2 = 25$, es un círculo. En la **Figura 10.36**, se presentan las gráficas de ambas ecuaciones y las soluciones al sistema no lineal.

Ahora resuelve el ejercicio 19

SUGERENCIA ÚTIL

En ocasiones, los estudiantes resuelven en términos de una variable y suponen que tienen la solución. Recuerda que la solución, si existe, para un sistema de ecuaciones en dos variables, consiste en uno o más pares ordenados.

2 Resolución de sistemas no lineales mediante adición

Con frecuencia, puedes resolver sistemas de ecuaciones más fácilmente usando el método de adición. Como con el método de sustitución, el objetivo es obtener una sola ecuación que contenga solamente una variable.

EJEMPLO 3 Resuelve el sistema de ecuaciones no lineales, usando el método de adición.

$$4x^2 + y^2 = 25$$
$$x^2 - y^2 = -5$$

Solución Si sumas las dos ecuaciones, obtendrás una ecuación que contiene solamente una variable.

$$\begin{array}{rr} 4x^2 + y^2 = & 25 \\ x^2 - y^2 = & -5 \\ \hline 5x^2 = & 20 \\ x^2 = & 4 \\ x = & \pm 2 \end{array}$$

A continuación, sustituye estos valores en *cualquiera* de las ecuaciones originales. Los valores $x = 2$ y $x = -2$, se sustituirán en la ecuación $4x^2 + y^2 = 25$.

$x = 2$	$x = -2$
$4x^2 + y^2 = 25$	$4x^2 + y^2 = 25$
$4(2)^2 + y^2 = 25$	$4(-2)^2 + y^2 = 25$
$4(4) + y^2 = 25$	$4(4) + y^2 = 25$
$16 + y^2 = 25$	$16 + y^2 = 25$
$y^2 = 9$	$y^2 = 9$
$y = \pm 3$	$y = \pm 3$

En consecuencia, hay cuatro soluciones al sistema de ecuaciones no lineales: $(2, 3)$, $(2, -3)$, $(-2, 3)$ y $(-2, -3)$ La gráfica de la ecuación $4x^2 + y^2 = 25$ es una elipse; y la gráfica de la ecuación $x^2 - y^2 = -5$, es una hipérbola. En la **Figura 10.37**, se muestran las gráficas de estas dos ecuaciones y las soluciones al sistema no lineal.

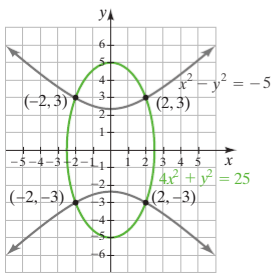


FIGURA 10.37

Ahora resuelve el ejercicio 25

Es posible que un sistema de ecuaciones no lineales no tenga solución real. Las gráficas de las ecuaciones, de dichos sistemas, no se intersecan. El siguiente ejemplo, involucrará uno de tales sistemas.

EJEMPLO 4 Resuelve el sistema de ecuaciones, usando el método de adición.

$$x^2 + 4y^2 = 16 \quad \text{(ec. 1)}$$
$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{(ec. 2)}$$

Solución Multiplica (ec. 2) por -1 y suma la ecuación resultante a (ec. 1).

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 &= 16 \\ -x^2 - y^2 &= -1 \quad \text{(ec. 2) multiplicada por } -1. \\ \hline 3y^2 &= 15 \\ y^2 &= 5 \\ y &= \pm\sqrt{5} \end{aligned}$$

Ahora resuelve en términos de x.

$y = \sqrt{5}$	$y = -\sqrt{5}$
$x^2 + y^2 = 1$	$x^2 + y^2 = 1$
$x^2 + (\sqrt{5})^2 = 1$	$x^2 + (-\sqrt{5})^2 = 1$
$x^2 + 5 = 1$	$x^2 + 5 = 1$
$x^2 = -4$	$x^2 = -4$
$x = \pm\sqrt{-4}$	$x = \pm\sqrt{-4}$
$x = \pm 2i$	$x = \pm 2i$

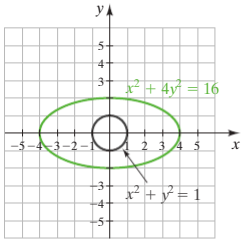


FIGURA 10.38

Dado que x es un número imaginario para ambos valores de y, este sistema de ecuaciones, no tiene solución real. Al resolver sistemas de ecuaciones no lineales, se está interesado en determinar todas las soluciones reales.

En la **Figura 10.38**, se muestran las gráficas de las ecuaciones. Observa que, las dos gráficas, no intersecan; en consecuencia, no hay solución real. Esto concuerda con la respuesta obtenida algebraicamente.

Ahora resuelve el ejercicio 39

3 Resolución de problemas aplicados

EJEMPLO 5 **Jardín de flores** Alfredo y Judith quieren construir un jardín rectangular de flores detrás de su casa. Alfredo, fue al vivero local y compró suficiente mantillo para cubrir 150 metros cuadrados de terreno. Judith, fue a la ferretería y compró 50 metros de cerca para el perímetro del jardín. ¿Cómo deberían construir el jardín, para usar todo el mantillo y toda la cerca que compraron?

Solución Entiende y Traduce Comienza bosquejando el problema (observa la **Figura 10.39**).

Sea x = longitud del jardín.
Sea y = ancho del jardín.



FIGURA 10.39

Dado que $A = xy$, y Alfredo compró mantillo para cubrir 150 metros cuadrados, se tiene:

$$xy = 150$$

Dado que $P = 2x + 2y$, y Judith compró 50 metros de cerca para el perímetro del jardín, se tiene:

$$2x + 2y = 50$$

El sistema de ecuaciones, es:

$$\begin{aligned} xy &= 150 \\ 2x + 2y &= 50 \end{aligned}$$

Realiza El sistema se resolverá usando la sustitución. La ecuación $2x + 2y = 50$, es una ecuación lineal. Se resolverá la ecuación en términos de y.

$$2x + 2y = 50$$
$$2y = 50 - 2x$$
$$y = \frac{50 - 2x}{2} = \frac{50}{2} - \frac{2x}{2} = 25 - x$$

Ahora sustituye $25 - x$ por y, en la ecuación $xy = 150$.

$$xy = 150$$
$$x(25 - x) = 150$$
$$25x - x^2 = 150$$
$$0 = x^2 - 25x + 150$$
$$0 = (x - 10)(x - 15)$$
$$x - 10 = 0 \quad \text{o} \quad x - 15 = 0$$
$$x = 10 \qquad x = 15$$

Responde Si $x = 10$, entonces: $y = 25 - 10 = 15$. Y si $x = 15$, entonces; $y = 25 - 15 = 10$. En consecuencia, para cualquier caso, las dimensiones del jardín de flores son de 10 metros por 15 metros.

Ahora resuelve el ejercicio 41

EJEMPLO 6 **Bicicletas** La compañía Hike'n'Bike, produce y vende bicicletas. Su ecuación de costo semanal, es $C = 50x + 400$, $0 \le x \le 160$, y su ecuación de ingreso semanal, es $R = 100x - 0.3x^2$, $0 \le x \le 160$, donde x es el número de bicicletas producidas y vendidas cada semana. Determina el número de bicicletas que deben producirse y venderse para que Hike'n'Bike alcance su punto de equilibrio.

Solución Entiende y Traduce Una compañía alcanza su punto de equilibrio, cuando su costo es igual a su ingreso. Cuando su costo es mayor que su ingreso, la compañía tiene una pérdida. Cuando su ingreso supera a su costo, la compañía tiene una ganancia.

El sistema de ecuaciones, es:

$$C = 50x + 400$$
$$R = 100x - 0.3x^2$$

Para que Hike'n'Bike alcance su punto de equilibrio, su costo debe ser igual a su ingreso. En consecuencia, escribe:

$$C = R$$
$$50x + 400 = 100x - 0.3x^2$$

Realiza Al escribir esta ecuación en forma general, se obtiene:

$$0.3x^2 - 50x + 400 = 0, \quad 0 \le x \le 160$$

Esta ecuación se resolverá usando la fórmula cuadrática.

$$a = 0.3, \quad b = -50, \quad c = 400$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-(-50) \pm \sqrt{(-50)^2 - 4(0.3)(400)}}{2(0.3)}$$
$$= \frac{50 \pm \sqrt{2020}}{0.6}$$
$$x = \frac{50 + \sqrt{2020}}{0.6} \approx 158.2 \quad \text{o} \quad x = \frac{50 - \sqrt{2020}}{0.6} \approx 8.4$$

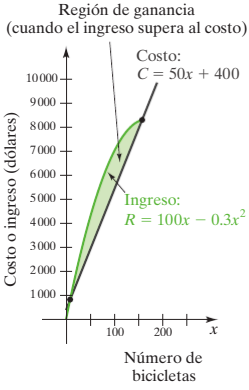


FIGURA 10.40

Responde El costo igualará al ingreso y la compañía alcanzará su punto de equilibrio, cuando se vendan aproximadamente 8 bicicletas o 158 bicicletas. La compañía tendrá una ganancia cuando se vendan entre 9 y 158 bicicletas. Cuando se vendan menos de 9 o más de 158 bicicletas, la compañía tendrá una pérdida (observa la **Figura 10.40**).

Ahora resuelve el ejercicio 53

10.4 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

intersección sustitución 1 adición 2 3 no lineales no

1. Un sistema de ecuaciones, en el cual, al menos una ecuación es no lineal, es un sistema de ecuaciones _____.
2. La forma más sencilla de resolver algebraicamente el sistema de ecuaciones no lineales,
$$x^2 + y^2 = 100$$
$$6x + 8y = 0$$
es usar el método de _____.
3. La forma más sencilla de resolver algebraicamente el sistema de ecuaciones no lineales,
$$x^2 + y^2 = 25$$
$$4x^2 - y^2 = 100$$
es usar el método de _____.
4. Si las gráficas de las ecuaciones, en el sistema de ecuaciones no lineales, no intersecan, el sistema _____ tiene soluciones reales.
5. Si las gráficas de las ecuaciones, en el sistema de ecuaciones no lineales, tiene tres puntos de intersección, el sistema tiene _____ soluciones reales.
6. Gráficamente, la solución a un sistema de ecuaciones no lineales, ocurre en el punto o puntos de _____ de las gráficas de las ecuaciones.

Practica tus habilidades

Determina todas las soluciones reales de cada sistema de ecuaciones, usando el método de sustitución.

7. $x^2 + y^2 = 18$, $x + y = 0$
8. $x^2 + y^2 = 18$, $x - y = 0$
9. $x^2 + y^2 = 5$, $y = 3x - 5$
10. $x^2 + y^2 = 10$, $y = 2x + 5$
11. $x + y^2 = 3$, $x = y^2 + 1$
12. $x^2 + y = 6$, $y = x^2 + 4$
13. $y - x = 2$, $x^2 - y^2 = 4$
14. $y^2 - x^2 = 5$, $x - y = -5$
15. $x^2 + y^2 = 73$, $y = x^2 - 1$
16. $x^2 + y^2 = 82$, $y = x^2 + 8$
17. $x^2 + y^2 = 4$, $y = x^2 - 6$
18. $x^2 - 6y^2 = 36$, $x^2 + 2y^2 = 9$
19. $x^2 + y^2 = 169$, $y = x^2 - 13$
20. $x^2 + y^2 = 25$, $x = y^2 - 5$
21. $x^2 + y^2 = 25$, $y = x^2 - 19$
22. $x + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 6$

Determina todas las soluciones reales a cada sistema de ecuaciones, usando el método de adición.

23. $x^2 - y^2 = 4$, $2x^2 + y^2 = 8$
24. $x^2 + y^2 = 36$, $x^2 - y^2 = 36$
25. $x^2 + y^2 = 25$, $x^2 - 2y^2 = -2$
26. $3x^2 + 2y^2 = 30$, $x^2 + y^2 = 13$
27. $4x^2 + 9y^2 = 36$, $2x^2 - 9y^2 = 18$
28. $x^2 + 4y^2 = 16$, $-9x^2 + y^2 = 4$
29. $2x^2 - y^2 = 7$, $x^2 + 2y^2 = 6$
30. $5x^2 - 2y^2 = -13$, $3x^2 + 4y^2 = 39$
31. $x^2 + y^2 = 25$, $2x^2 - 3y^2 = -30$
32. $x^2 - 2y^2 = 7$, $x^2 + y^2 = 34$
33. $3x^2 + 5y^2 = 23$, $2x^2 + 3y^2 = 14$
34. $7x^2 + 3y^2 = 55$, $2x^2 + 5y^2 = 53$
35. $3x^2 - y^2 = 4$, $x^2 + 4y^2 = 10$
36. $x^2 + y^2 = 25$, $x^2 - 2y^2 = 7$

51. Interés simple El interés simple se calcula usando su propia fórmula, interés = principal · tasa · tiempo o $i = prt$. Si Bruno invierte cierto principal a una tasa de interés específica durante 1 año, el interés que obtiene es de \$7.50. Si aumenta el principal en \$25 y la tasa de interés disminuye en 1%, el interés permanece igual. Determina el principal y la tasa de interés.

52. Interés simple Si Luisa invierte cierto principal a una tasa de interés específica durante 1 año, el interés que obtiene es de \$72. Si ella aumenta el principal en \$120 y la tasa de interés disminuye en 2%, el interés permanece igual. Determina el principal y la tasa de interés. Usa $i = prt$.

Para las ecuaciones dadas de costo e ingreso, determina los puntos de equilibrio.

53. $C = 10x + 300, R = 30x - 0.1x^2$

54. $C = 0.6x^2 + 9, R = 12x - 0.2x^2$

55. $C = 12.6x + 150, R = 42.8x - 0.3x^2$

56. $C = 80x + 900, R = 120x - 0.2x^2$

Resuelve los siguientes sistemas usando tu calculadora graficadora. Redondea tus respuestas a la centésima más cercana.

57. $3x - 5y = 12$
$x^2 + y^2 = 10$

58. $y = 2x^2 - x + 2$
$4x^2 + y^2 = 36$

Ejercicios conceptuales y de redacción

59. Construye tu propio sistema de ecuaciones no lineales, cuya solución sea el conjunto vacío. Explica, cómo sabes que el sistema no tiene solución.

60. Si un sistema de ecuaciones consiste de una elipse y una hipérbola, ¿cuál es el número máximo de puntos de intersección? Elabora un diagrama para ilustrar esto.

61. ¿Puede un sistema de ecuaciones no lineales, tener exactamente una solución real? Si es así, proporciona un ejemplo y explica.

62. ¿Puede un sistema de ecuaciones no lineales, tener exactamente dos soluciones reales? Si ese así, proporciona un ejemplo y explica.

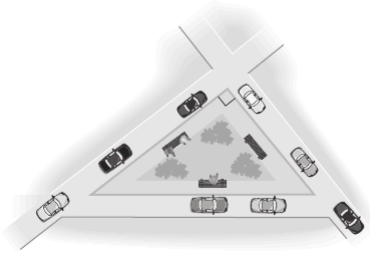
63. ¿Puede un sistema de ecuaciones no lineales, tener exactamente tres soluciones reales? Si es así, proporciona un ejemplo y explica.

64. ¿Puede un sistema de ecuaciones no lineales, no tener soluciones reales? Si es así, proporciona un ejemplo y explica.

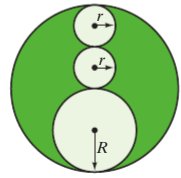
Problemas de desafío

65. Intersección de caminos La intersección de tres caminos forma un triángulo recto, como se muestra en la figura.

Si la hipotenusa mide 26 yardas y el área es de 120 yardas cuadradas, determina la longitud de los dos catetos del triángulo.



66. En la figura que se muestra, R representa el radio del círculo central más grande y r representa el radio de los círculos más pequeños. Si $R = 2r$ y si el área sombreada azul es de 122.5π, determina r y R.



Ejercicios de repaso acumulativo

[1.4] **67.** Indica el orden de las operaciones que se sigue cuando se evalúa una expresión.

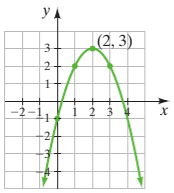
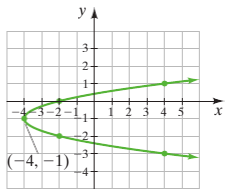
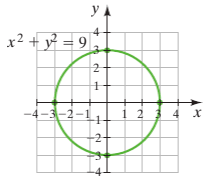
[5.6] **68.** Factoriza $(x + 1)^3 + 1$.

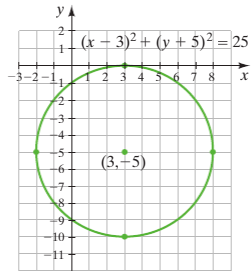
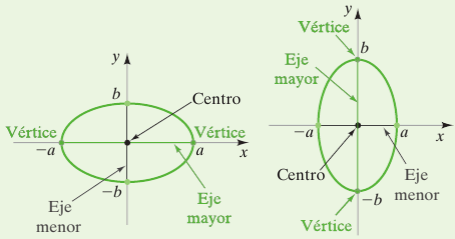
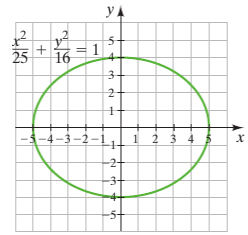
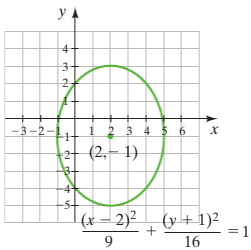
[6.6] **69.** x varía inversamente con el cuadrado de P. Si $x = 10$ cuando P es 6, determina x cuando $P = 20$.

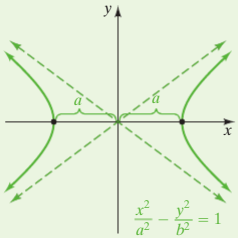
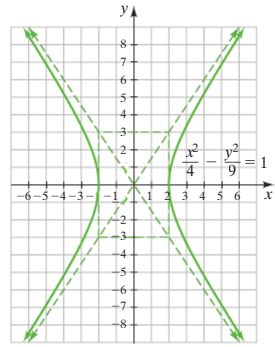
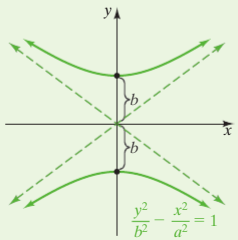
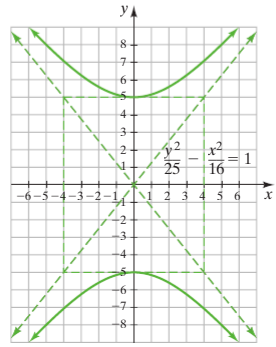
[7.5] **70.** Simplifica $\dfrac{5}{\sqrt{x+2} - 3}$.

[9.7] **71.** Resuelve $A = A_0 e^{kt}$ para k.

Capítulo 10 Resumen

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 10.1	
Las cuatro **secciones cónicas** son la parábola, la circunferencia, la elipse y la hipérbola, que se obtienen al rebanar un cono.	 Parábola Circunferencia Elipse Hipérbola
A continuación, se resumen las cuatro formas diferentes de las ecuaciones de parábolas. **Parábola con vértice en (h, k)** **1.** $y = a(x - h)^2 + k, a > 0$ (abre hacia arriba) **2.** $y = a(x - h)^2 + k, a < 0$ (abre hacia abajo) **3.** $x = a(y - k)^2 + h, a > 0$ (abre hacia la derecha) **4.** $x = a(y - k)^2 + h, a < 0$ (abre hacia la izquierda)	$y = -(x - 2)^2 + 3$  $x = 2(y + 1)^2 - 4$ 
Fórmula de distancia La distancia, d, entre cualesquier dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), puede determinarse mediante la fórmula de distancia: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	La distancia entre $(-1, 3)$ y $(4, 15)$, es: $d = \sqrt{[4 - (-1)]^2 + (15 - 3)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$
Fórmula del punto medio Dados cualesquier dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), el punto a la mitad del camino entre los puntos dados, puede determinarse mediante la fórmula del punto medio: $\text{punto medio} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$	El punto medio del segmento de recta que une $(7, 6)$ y $(-11, 10)$, es: $\text{punto medio} = \left(\frac{7 + (-11)}{2}, \frac{6 + 10}{2}\right) = \left(\frac{-4}{2}, \frac{16}{2}\right) = (-2, 8)$
Una circunferencia, es un conjunto de puntos, en un plano, que están a la misma distancia, llamada radio, de un punto fijo, llamado centro. **Ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio r** $x^2 + y^2 = r^2$	Elabora la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 9$. La gráfica es una circunferencia con centro en $(0, 0)$ y radio $r = 3$. 

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 10.1 (Continuación)	
Ecuación de una circunferencia con centro en (h, k) y radio r $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$	Elabora la gráfica de la ecuación $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 25$. La gráfica es una circunferencia con centro en $(3, -5)$ y radio $r = 5$. 
Sección 10.2	
Una **elipse**, es un conjunto de puntos en un plano, cuya suma de distancias, desde dos puntos fijos (llamados **focos**), es una constante.	
Ecuación de una elipse con centro en el origen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ donde $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ son las intersecciones con el eje de las x, y $(0, b)$ y $(0, -b)$ son las intersecciones con el eje de las y. 	Elabora la gráfica de la ecuación $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. La gráfica es una elipse. Dado que $a = 5$, las intersecciones con el eje de las x, son $(-5, 0)$ y $(5, 0)$. Dado que $b = 4$, las intersecciones con el eje de las y, son $(0, -4)$ y $(0, 4)$. 
Ecuación de una elipse con centro en (h, k) $\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$	Elabora la gráfica de la ecuación $\frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y + 1)^2}{16} = 1$. La gráfica es una elipse con su centro en $(2, -1)$, donde $a = 3$ y $b = 4$. 

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 10.2 (Continuación)	
El área A de una elipse, es $A = \pi ab$.	El área de la elipse en la parte inferior de la página 711, es: $A = \pi ab = \pi \cdot 3 \cdot 4 = 12\pi \approx 37.70$ unidades cuadradas.
Sección 10.3	
Una **hipérbola**, es un conjunto de puntos en un plano, cuya diferencia de distancias, desde dos puntos fijos (llamados **focos**), es una constante.	Determina las ecuaciones de las asíntotas y grafica la ecuación $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$. La gráfica es una hipérbola con $a = 2$ y $b = 3$. Las ecuaciones para las asíntotas, son $y = \frac{3}{2}x$ y $y = -\frac{3}{2}x$.
Ecuación de una hipérbola con su centro en el origen Hipérbola con eje transversal a lo largo del eje x  **Asíntotas** $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$	
Hipérbola con su eje transversal a lo largo del eje y  **Asíntotas** $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$	Determina las ecuaciones de las asíntotas y grafica la ecuación $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$. La gráfica es una hipérbola con $a = 4$ y $b = 5$. Las ecuaciones de las asíntotas, son $y = \frac{5}{4}x$ y $y = -\frac{5}{4}x$. 

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 10.4	
Un **sistema de ecuaciones no lineales**, es un sistema de ecuaciones donde al menos una ecuación no es lineal. La solución a un sistema de ecuaciones no lineales, es el punto o puntos que satisfacen todas las ecuaciones del sistema.	Resuelve el sistema de ecuaciones. $x^2 + y^2 = 14$ $5x^2 - y^2 = -2$ Este sistema se resolverá usando el método de adición. $x^2 + y^2 = 14$ $5x^2 - y^2 = -2$ $6x^2 = 12$ $x^2 = 2$ $x = \pm\sqrt{2}$ Para obtener el(los) valor(es) para y, usa la ecuación $x^2 + y^2 = 14$. $x = \sqrt{2}$: $x^2 + y^2 = 14$; $(\sqrt{2})^2 + y^2 = 14$; $2 + y^2 = 14$; $y^2 = 12$; $y = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$ $x = -\sqrt{2}$: $x^2 + y^2 = 14$; $(-\sqrt{2})^2 + y^2 = 14$; $2 + y^2 = 14$; $y^2 = 12$; $y = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$ El sistema tiene cuatro soluciones: $(\sqrt{2}, 2\sqrt{3}), (\sqrt{2}, -2\sqrt{3}), (-\sqrt{2}, 2\sqrt{3}), (-\sqrt{2}, -2\sqrt{3})$

Capítulo 10 Ejercicios de repaso

[10.1] *Determina la longitud y el punto medio del segmento de recta entre cada par de puntos.*

1. $(0, 0), (5, -12)$ **2.** $(-4, 1), (-1, 5)$ **3.** $(-9, -5), (-1, 10)$ **4.** $(-4, 3), (-2, 5)$

Elabora la gráfica de cada ecuación.

5. $y = (x - 2)^2 + 1$ **6.** $y = (x + 3)^2 - 2$ **7.** $x = (y - 1)^2 + 4$ **8.** $x = -2(y - 4)^2 + 4$

En los ejercicios 9–12, **a)** *escribe cada ecuación en la forma* $y = a(x - h)^2 + k$ *o* $x = a(y - k)^2 + h$. **b)** *Elabora la gráfica de la ecuación.*

9. $y = x^2 - 8x + 22$ **10.** $x = -y^2 - 5y - 4$ **11.** $x = y^2 + 5y + 4.$ **12.** $y = 2x^2 - 8x - 24$

En los ejercicios 13-18, **a)** *escribe la ecuación de cada circunferenciaen forma general y* **b)** *elabora la gráfica de la ecuación.*

13. Centro $(0, 0)$, radio 4 **14.** Centro $(-3, 4)$, radio 1 **15.** $x^2 + y^2 - 4y = 0$

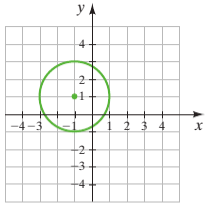
16. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$ **17.** $x^2 - 8x + y^2 - 10y + 40 = 0$ **18.** $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 17 = 0$

Elabora la gráfica de cada ecuación.

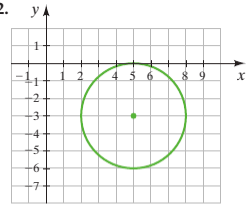
19. $y = \sqrt{9 - x^2}$ **20.** $y = -\sqrt{36 - x^2}$

Determina la ecuación de cada circunferencia.

21.



22.



[10.2] *En los ejercicios 23-29, elabora la gráfica de cada ecuación.*

23. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ **24.** $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{49} = 1$ **25.** $9x^2 + 16y^2 = 144$ **26.** $25x^2 + 4y^2 = 100$

27. $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$ **28.** $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$ **29.** $16(x-2)^2 + 4(y+3)^2 = 16$

30. Para la elipse del ejercicio 23, determina el área.

[10.3] *En los ejercicios 31-34,* **a)** *determina las ecuaciones de las asíntotas para cada ecuación y* **b)** *elabora la gráfica de la ecuación.*

31. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$ **32.** $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$ **33.** $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ **34.** $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$

En los ejercicios 35-38, **a)** *escribe cada ecuación en forma general,* **b)** *determina las ecuaciones de las asíntotas y* **c)** *elabora la gráfica de la ecuación.*

35. $x^2 - 9y^2 = 9$ **36.** $64y^2 - 25x^2 = 1600$

37. $9y^2 - 25x^2 = 225$ **38.** $49y^2 - 9x^2 = 441$

[10.1–10.3] *Identifica la gráfica de cada ecuación, como un círculo, elipse, parábola o hipérbola.*

39. $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$ **40.** $4x^2 + 8y^2 = 32$ **41.** $6x^2 + 6y^2 = 96$ **42.** $4x^2 - 36y^2 = 36$

43. $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ **44.** $y = (x-3)^2 + 4$ **45.** $12x^2 + 9y^2 = 108$ **46.** $x = -y^2 + 8y - 9$

[10.4] *Determina todas las soluciones reales a cada sistema de ecuaciones, usando el método de sustitución.*

47. $2x^2 + y^2 = 16$
$x^2 - y^2 = -4$

48. $x^2 - y^2 = 4$
$x + y = 4$

49. $x^2 + y^2 = 9$
$x + 2y = 3$

50. $x^2 + 2y^2 = 5$
$x^2 - 4y^2 = 36$

Determina todas las soluciones reales a cada sistema de ecuaciones, usando el método de adición.

51. $x^2 + y^2 = 36$
$x^2 - y^2 = 36$

52. $x^2 + y^2 = 16$
$2x^2 - 5y^2 = 25$

53. $x^2 + y^2 = 81$
$25x^2 + 4y^2 = 100$

54. $3x^2 + 4y^2 = 35$
$2x^2 + 5y^2 = 42$

55. Mesa de billar Jonás y Roberto tienen una mesa de billar en su casa. Ésta tiene un área de 45 pies cuadrados y un perímetro de 28 pies. Determina las dimensiones de la mesa de billar.



56. Botellas de pegamento La compañía Dip and Dap, tiene una ecuación de costo de $C = 20.3x + 120$ y una ecuación de ingreso de $R = 50.2x - 0.2x^2$, donde x es el número de botellas de pegamento vendidas. Determina el número de botellas de pegamento que la compañía debe vender, para alcanzar el punto de equilibrio.

57. Cuenta de ahorros Si Karen invierte cierto principal a una tasa de interés específica durante 1 año, el interés es de $120. Si ella aumenta el principal en $2000 y la tasa de interés disminuye en 1%, el interés permanece igual. Determina el principal y la tasa de interés. Usa $i = prt$.

Capítulo 10 Examen de práctica

1. ¿Por qué se les llama secciones cónicas a las parábolas, circunferencias, elipses e hipérbolas?

2. Determina la longitud del segmento de recta, cuyos puntos extremos son $(-1, 8)$ y $(6, 7)$.

3. Determina el punto medio del segmento de recta, cuyos puntos extremos son $(-9, 4)$ y $(7, -1)$.

4. Determina el vértice de la gráfica de $y = -2(x + 3)^2 + 1$, y, posteriormente, grafica la ecuación.

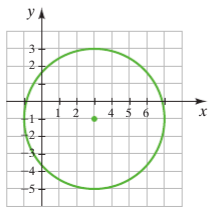
5. Elabora la gráfica de $x = y^2 - 2y + 4$.

6. Escribe la ecuación $x = -y^2 - 4y - 5$ en la forma $x = a(y - k)^2 + h$, y, posteriormente, elabora la gráfica de la ecuación.

7. Escribe la ecuación de con centro en $(2, 4)$ y radio 3, posteriormente, elabora la gráfica de la ecuación.

8. Determina el área dentro de la circunferencia, cuya ecuación es $(x + 2)^2 + (y - 8)^2 = 9$.

9. Escribe la ecuación de la circunferencia que se muestra.

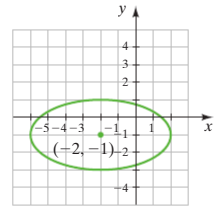


10. Elabora la gráfica de $y = -\sqrt{16 - x^2}$.

11. Escribe la ecuación $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 1 = 0$ en forma general y después, elabora la gráfica de la ecuación.

12. Elabora la gráfica de $4x^2 + 25y^2 = 100$.

13. ¿Corresponde la siguiente gráfica a $\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$? Explica tu respuesta.



14. Elabora la gráfica de $4(x - 4)^2 + 36(y + 2)^2 = 36$.

15. Determina el centro de la elipse, dada por la ecuación $3(x - 8)^2 + 6(y + 7)^2 = 18$.

16. Explica cómo determinas si el eje transversal de una hipérbola se encuentra sobre el eje x o sobre el eje y.

17. ¿Cuáles son las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica de $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{49} = 1$?

18. Elabora la gráfica de $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{1} = 1$.

19. Elabora la gráfica de $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.

En los ejercicios 20 y 21, determina si la gráfica de la ecuación es una parábola, una circunferencia, una elipse o una hipérbola.

20. $4x^2 - 15y^2 = 30$

21. $25x^2 + 4y^2 = 100$

Resuelve cada sistema de ecuaciones.

22. $x^2 + y^2 = 7$
$2x^2 - 3y^2 = -1$

23. $x + y = 8$
$x^2 + y^2 = 4$

24. Jardín de vegetales Tom tiene un jardín rectangular de vegetales en su granja, que tiene un área de 1500 metros cuadrados. Determina las dimensiones del jardín, si el perímetro es de 160 metros.

25. Plataforma de remolque Regina posee un remolque. La plataforma rectangular del remolque tiene un área de 60 pies cuadrados, y la diagonal, a través de la plataforma, mide 13 pies. Determina las dimensiones de la plataforma del remolque.



Ver ejercicio 24.

Examen de repaso acumulativo

Resuelve la siguiente evaluación y verifica tus respuestas con las proporcionadas en la parte final del libro. Revisa cualquier pregunta que respondas de manera incorrecta. Después de la respuesta, se indica la sección donde se cubrió el material.

1. Simplifica $(9x^2y^5)(-3xy^4)$.

2. Resuelve $4x - 2(3x - 7) = 2x - 5$.

3. Determina el conjunto solución: $2(x - 5) + 2x = 4x - 7$.

4. Determina el conjunto solución: $|3x + 1| > 4$

5. Elabora la gráfica de $y = -2x + 2$.

6. Si $f(x) = x^2 + 3x + 9$, , determina $f(10)$.

7. Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 2$$
$$\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}y = 6$$

8. Factoriza $x^4 - x^2 - 42$.

9. Un gran señalamiento triangular, tiene una altura que es 6 pies menos que su base. Si el área del señalamiento es de 56 pies cuadrados, determina la longitud de la base y la altura del señalamiento.



10. Multiplica $\dfrac{3x^2 - x - 4}{4x^2 + 7x + 3} \cdot \dfrac{2x^2 - 5x - 12}{6x^2 + x - 12}$.

11. Resta $\dfrac{x}{x + 3} - \dfrac{x + 5}{2x^2 - 2x - 24}$.

12. Resuelve $\dfrac{3}{x + 3} + \dfrac{5}{x + 4} = \dfrac{12x + 19}{x^2 + 7x + 12}$.

13. Simplifica $\left(\dfrac{18x^{1/2}y^3}{2x^{3/2}}\right)^{1/2}$.

14. Simplifica $\dfrac{6\sqrt{x}}{\sqrt{x} - y}$.

15. Resuelve $3\sqrt[3]{2x + 2} = \sqrt[3]{80x - 24}$.

16. Resuelve $3x^2 - 4x + 5 = 0$, mediante la fórmula cuadrática

17. Resuelve $\log(3x - 4) + \log 4 = \log(x + 6)$.

18. Resuelve $35 = 70e^{-0.3t}$.

19. Elabora la gráfica de $9x^2 + 4y^2 = 36$.

20. Elabora la gráfica de $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{16} = 1$.

11.1 Sucesiones y series

1. **Determinación de los términos de una sucesión**
2. **Escritura de una serie**
3. **Determinación de sumas parciales**
4. **Uso de la notación de sumatoria, Σ**

1 Determinación de los términos de una sucesión

Muchas veces, se ven patrones en los números. Por ejemplo, supón que te ofrecen un empleo con un salario inicial de $30 000. Te ofrecen dos opciones para tu aumento de salario anual. Una opción es un aumento salarial anual de $2 000 por año. El salario que recibirías bajo esta opción se muestra a continuación.

Año	1	2	3	4	. . .
	↓	↓	↓	↓	↓
Salario	$30 000	$32 000	$34 000	$36 000	. . .

Cada año, el salario es $2 000 mayor que el año previo. Los tres puntos suspensivos, a la derecha de las listas de números, indican que la lista continúa de la misma manera.

La segunda opción, es un aumento salarial de 5% cada año. El salario que recibirías bajo esta opción se muestra a continuación.

Año	1	2	3	4	. . .
	↓	↓	↓	↓	↓
Salario	$30 000	$31 500	$33 075	$34 728.75	. . .

Con esta opción, el salario en un año dado, después el año 1, es 5% mayor que el salario del año previo.

Las dos listas de números que ilustran los salarios son ejemplos de sucesiones. Una **sucesión** de números, es una lista de números ordenados en un orden específico. Considera la lista de números que se proporciona a continuación, que es una sucesión.

$$5, 10, 15, 20, 25, 30, \ldots$$

Cada número, se llama **término** de la sucesión. El primer término es 5. Esto se indica al escribir $a_1 = 5$. Dado que el segundo término es 10, $a_2 = 10$, etcétera.

$$\begin{array}{cccccccc} 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 30 \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \ldots \end{array}$$

Los tres puntos, llamados **elipsis** o **puntos suspensivos**, indican que la sucesión continúa indefinidamente y es una *sucesión infinita*.

Sucesión infinita

Una **sucesión infinita**, es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales.

Considera la sucesión infinita 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, ...

$$\begin{array}{lccccccccccc} \text{Dominio:} & \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \ldots, & n, & \ldots\} & \text{Números naturales} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{Rango:} & \{5, & 10, & 15, & 20, & 25, & 30, & 35, & \ldots, & 5n, & \ldots\} & \text{Valor de la función} \end{array}$$

Observa que, los términos de la sucesión 5, 10, 15, 20, . . . se determinan al multiplicar cada número natural por 5. Para cualquier número natural, n, el término correspondiente en la sucesión es $5 \cdot n$, o $5n$. El **término general de la sucesión**, a_n, que define la sucesión, es $a_n = 5n$.

$$a_n = f(n) = 5n$$

Para determinar el doceavo término de la sucesión, sustituye 12 por n en el término general de la sucesión: $a_{12} = 5 \cdot 12 = 60$. En consecuencia, el doceavo término de la sucesión es 60. Observa que los términos en la sucesión son los valores de la función, o los números en el rango de la función. La forma general de una sucesión es:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

n	$a_n = 2^n$
1	$a_1 = 2^1 = 2$
2	$a_2 = 2^2 = 4$
3	$a_3 = 2^3 = 8$
4	$a_4 = 2^4 = 16$
5	$a_5 = 2^5 = 32$
6	$a_6 = 2^6 = 64$
⋮	⋮ ⋮ ⋮

Para la sucesión infinita 2, 4, 8, 16, 32, 64, . . . , 2^n, . . . puedes escribir:

$$a_n = f(n) = 2^n$$

La tabla a la izquierda, muestra los primeros seis términos de esta sucesión.

Sucesión finita

Una **sucesión finita**, es una función cuyo dominio incluye solamente los primeros n números naturales. Una sucesión finita tiene solamente un número finito de términos.

Ejemplos de sucesiones finitas

5, 10, 15, 20	el dominio es {1, 2, 3, 4}
2, 4, 8, 16, 32	el dominio es {1, 2, 3, 4, 5}

EJEMPLO 1 Escribe la sucesión finita definida por $a_n = 3n - 1$, para $n = 1, 2, 3, 4$.

Solución

$$a_n = 3n - 1$$
$$a_1 = 3(1) - 1 = 2$$
$$a_2 = 3(2) - 1 = 5$$
$$a_3 = 3(3) - 1 = 8$$
$$a_4 = 3(4) - 1 = 11$$

En consecuencia, la sucesión finita es 2, 5, 8, 11.

Ahora resuelve el ejercicio 13

Comprende el Álgebra

Una sucesión es *creciente*, cuando cada término es mayor que el término precedente.

Dado que, cada término de la sucesión en el ejemplo 1 es mayor que el término precedente, se llama **sucesión creciente.**

EJEMPLO 2 Dado $a_n = \dfrac{2n + 3}{n^2}$,

a) determina el primer término de la sucesión.
b) determina el tercer término de la sucesión.
c) determina el quinto término de la sucesión.
d) determina el décimo término de la sucesión.

Solución

a) Cuando $n = 1$, $a_1 = \dfrac{2(1) + 3}{1^2} = \dfrac{5}{1} = 5$.

b) Cuando $n = 3$, $a_3 = \dfrac{2(3) + 3}{3^2} = \dfrac{9}{9} = 1$.

c) Cuando $n = 5$, $a_5 = \dfrac{2(5) + 3}{5^2} = \dfrac{13}{25} = 0.52$.

d) Cuando $n = 10$, $a_{10} = \dfrac{2(10) + 3}{10^2} = \dfrac{23}{100} = 0.23$.

Ahora resuelve el ejercicio 31

Observa, en el ejemplo 2, que, puesto que no hay restricción sobre n, a_n es el término general de una sucesión infinita.

Comprende el Álgebra

Una sucesión es *decreciente*, cuando cada término es menor que el término precedente.

En el ejemplo 2, los primeros cuatro términos de la sucesión son $5, \dfrac{7}{4} = 1.75, 1, 1, \dfrac{11}{16} = 0.6875$. Dado que cada término de la sucesión generada por $a_n = \dfrac{2n + 3}{n^2}$, será menor que el término precedente, la sucesión se llama **sucesión decreciente.**

EJEMPLO 3 Determina los primeros cuatro términos de la sucesión, cuyo término general es $a_n = (-1)^n(n + 2)$.

Solución

$$a_n = (-1)^n(n + 2)$$
$$a_1 = (-1)^1(1 + 2) = (-1)(3) = -3$$
$$a_2 = (-1)^2(2 + 2) = (1)(4) = 4$$
$$a_3 = (-1)^3(3 + 2) = (-1)(5) = -5$$
$$a_4 = (-1)^4(4 + 2) = (1)(6) = 6$$

En consecuencia, los primeros cuatro términos de esta sucesión, son –3, 4, –5, 6.

Ahora resuelve el ejercicio 21

Comprende el Álgebra

Una sucesión es *alternante*, cuando los términos alternan negativo, positivo, negativo, positivo, ... o cuando los términos alternan positivo, negativo, positivo, negativo...

En el ejemplo 3, observa que los términos alternan en signo: negativo, positivo, negativo, positivo. Una sucesión, en la cual los términos alternan en signo, se llama **sucesión alternante**.

2 Escritura de una serie

Serie

Una **serie**, es la suma expresada de los términos de una sucesión.

Una serie puede ser finita o infinita, dependiendo si la sucesión sobre la que se basa es finita o infinita.

Ejemplos

Sucesión finita

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5

Serie finita

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

Sucesión infinita

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n, \ldots$

Serie infinita

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_n + \ldots$

Comprende el Álgebra

Una *serie*, se obtiene al sumar los términos de su *sucesión* correspondiente.

EJEMPLO 4 Escribe los primeros ocho términos de la sucesión dada por cada término general, luego escribe la serie que representa la suma de dicha sucesión.

a) $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ **b)** $a_n = (-2)^n$

Solución

a) Comienza con $n = 1$; en consecuencia, los primeros ocho términos de la sucesión, cuyo término general es $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, son:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4, \left(\frac{1}{2}\right)^5, \left(\frac{1}{2}\right)^6, \left(\frac{1}{2}\right)^7, \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

o

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}$$

La serie que representa la suma de la sucesión, es:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} = \frac{255}{256}$$

b) Nuevamente, comienza con $n = 1$; en consecuencia, los primeros ocho términos de la sucesión, cuyo término general es $a_n = (-2)^n$, son:

$$(-2)^1, (-2)^2, (-2)^3, (-2)^4, (-2)^5, (-2)^6, (-2)^7, (-2)^8$$

o

$$-2, 4, -8, 16, -32, 64, -128, 256$$

La serie que representa la suma de esta sucesión, es:

$$-2 + 4 + (-8) + 16 + (-32) + 64 + (-128) + 256 = 170$$

Ahora resuelve el ejercicio 17

3 Determinación de sumas parciales

Suma parcial

Para una sucesión infinita con los términos a_1, a_2, a_3, . . . , a_n, . . . , una **suma parcial**, es la suma de un número finito de términos consecutivos de la sucesión, comenzando con el primer término.

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 && \text{Primera suma parcial.} \\ s_2 &= a_1 + a_2 && \text{Segunda suma parcial.} \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 && \text{Tercera suma parcial.} \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n && \text{Enésima suma parcial.} \end{aligned}$$

La suma de todos los términos de la sucesión infinita, se llama **serie infinita** y está dada del modo siguiente:

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

EJEMPLO 5 Dada la sucesión infinita definida por $a_n = \dfrac{3 + n^2}{n}$, determina las sumas parciales indicadas.

a) s_1 **b)** s_4

Solución

a) $s_1 = a_1 = \dfrac{3 + 1^2}{1} = \dfrac{3 + 1}{1} = 4$

b) $s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

$$= \frac{3 + 1^2}{1} + \frac{3 + 2^2}{2} + \frac{3 + 3^2}{3} + \frac{3 + 4^2}{4}$$

$$= 4 + \frac{7}{2} + \frac{12}{3} + \frac{19}{4}$$

$$= \frac{48}{12} + \frac{42}{12} + \frac{48}{12} + \frac{57}{12}$$

$$= \frac{195}{12} \quad \text{o} \quad 16\frac{1}{4}$$

Ahora resuelve el ejercicio 35

4 Uso de la notación de sumatoria, Σ

Cuando se conoce el término general de una sucesión, puede usarse la letra griega *sigma* mayúscula, Σ, para escribir una serie. La suma de los primeros n términos de la sucesión, cuyo *enésimo* término es a_n, se representa mediante:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

donde i se llama **índice de la suma** o simplemente **índice**, n es el **límite superior de la suma** y 1 es el **límite inferior de la suma**. En esta representación, se usó i para el índice; sin embargo, puede usarse cualquier letra para el índice.

Considera la sucesión $7, 9, 11, 13, \ldots, 2n + 5, \ldots$. La suma de los primeros cinco términos, puede representarse usando **notación de sumatoria** o **de suma**.

$$\sum_{i=1}^{5} (2i + 5)$$

Esta notación se lee "la suma cuando i va de 1 a 5 de $2i + 5$".

Para evaluar la serie representada por $\sum_{i=1}^{5} (2i + 5)$,

1. Primero, sustituye 1 por i en $2i + 5$, para obtener el valor 7.
2. Luego, sustituye 2 por i en $2i + 5$, para obtener el valor 9.
3. Continúa este procedimiento para $i = 3$, $i = 4$ e $i = 5$.
4. Finalmente, suma estos valores para evaluar la serie. Los resultados se resumen a continuación:

$$\begin{array}{lccccc} & i=1 & i=2 & i=3 & i=4 & i=5 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{5} (2i + 5) = & (2\cdot 1 + 5) & + (2\cdot 2 + 5) & + (2\cdot 3 + 5) & + (2\cdot 4 + 5) & + (2\cdot 5 + 5) \end{array}$$

$$= 7 + 9 + 11 + 13 + 15$$
$$= 55$$

EJEMPLO 6 Escribe y evalúa la serie $\sum_{k=1}^{5} (k^3 - 1)$.

Solución

$$\sum_{k=1}^{5} (k^3 - 1) = (1^3 - 1) + (2^3 - 1) + (3^3 - 1) + (4^3 - 1) + (5^3 - 1)$$
$$= (1 - 1) + (8 - 1) + (27 - 1) + (64 - 1) + (125 - 1)$$
$$= 0 + 7 + 26 + 63 + 124$$
$$= 220$$

Ahora resuelve el ejercicio 59

EJEMPLO 7 Considera el término general de una sucesión $a_n = 2n^2 - 9$. Representa la tercera suma parcial, s_3, en notación de sumatoria.

Solución La tercera suma parcial será la suma de los primeros tres términos, $a_1 + a_2 + a_3$. Puedes representar la tercera suma parcial como $\sum_{i=1}^{3} (2i^2 - 9)$.

Ahora resuelve el ejercicio 65

EJEMPLO 8 Para el siguiente conjunto de valores, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$, $x_4 = 6$ y $x_5 = 7$, ¿$\sum_{i=1}^{5} (x_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^2$?

Solución

$$\sum_{i=1}^{5} (x_i)^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + (x_4)^2 + (x_5)^2$$
$$= 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2$$
$$= 9 + 16 + 25 + 36 + 49 = 135$$
$$\left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2$$
$$= (3 + 4 + 5 + 6 + 7)^2 = (25)^2 = 625$$

Como $135 \neq 625$, $\sum_{i=1}^{5} (x_i)^2 \neq \left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^2$.

Ahora resuelve el ejercicio 71

Cuando un símbolo de sumatoria se escribe sin límites superior e inferior, significa que se deben sumar todos los datos dados.

EJEMPLO 9 Una fórmula que se usa para determinar la media aritmética, $\bar{x}$ (léase x barra), de un conjunto de datos, es $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x}{n}$, donde n es el número de piezas de datos. Las cinco calificaciones de examen de Johana son 70, 95, 83, 74 y 92. Determina la media aritmética de sus calificaciones.

Solución

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{70 + 95 + 83 + 74 + 92}{5} = \frac{414}{5} = 82.8$$

Ahora resuelve el ejercicio 75

11.1 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

finita	serie	mayor	superior	sucesión	menor
constante	infinita	alternante	índice	inferior	

1. Una lista de números ordenados en un orden específico, es una _____.
2. Una sucesión _____, es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales.
3. Una sucesión _____, es una función cuyo dominio incluye solamente los primeros n números naturales.
4. En una sucesión creciente, cada término es _____ que el término precedente.
5. En una sucesión decreciente, cada término es _____ que el término precedente.
6. Una sucesión, en la cual, cada término tiene el signo opuesto del término precedente, se llama sucesión _____.
7. La suma de los términos de una sucesión, es una _____.
8. Considera la suma $\sum_{k=1}^{50}(k^2 + 3)$. El número 1 es el límite _____.
9. Considera la suma $\sum_{k=1}^{50}(k^2 + 3)$. El número 50 es el límite _____.
10. Considera la suma $\sum_{k=1}^{50}(k^2 + 3)$. La variable k es el _____.

Practica tus habilidades

Escribe los primeros cinco términos de la sucesión, cuyo enésimo término es mostrado.

11. $a_n = n + 3$ **12.** $a_n = n - 4$ **13.** $a_n = 4n - 1$

14. $a_n = 2n + 5$ **15.** $a_n = \dfrac{8}{n^2}$ **16.** $a_n = \dfrac{n^2}{2}$

17. $a_n = \dfrac{n+2}{n+1}$ **18.** $a_n = \dfrac{n-3}{n+6}$ **19.** $a_n = (-1)^n$

20. $a_n = (-1)^{n+1}$ **21.** $a_n = (-2)^{n+1}$ **22.** $a_n = (-2)^n$

Determina el término indicado de la sucesión, cuyo enésimo término es mostrado.

23. $a_n = 2n + 7$, duodécimo término **24.** $a_n = 3n + 2$, sexto término **25.** $a_n = \dfrac{n}{4} + 8$, decimosexto término

26. $a_n = \dfrac{n}{2} - 13$, decimocuarto término **27.** $a_n = (-1)^n$, octavo término **28.** $a_n = (-2)^n$, séptimo término

29. $a_n = n^2 - 2n + 3$, sexto término **30.** $a_n = 3n^2 + 5n - 2$, séptimo término **31.** $a_n = \dfrac{n^2}{2n+7}$, noveno término

32. $a_n = \dfrac{3n-4}{n^3}$, quinto término

Determina la primera y tercera suma parcial, s_1 and s_3, para cada sucesión.

33. $a_n = 3n - 1$

34. $a_n = 2n + 5$

35. $a_n = 2^n + 1$

36. $a_n = 3^n - 8$

37. $a_n = \dfrac{n-1}{n+2}$

38. $a_n = \dfrac{n}{n+4}$

39. $a_n = (-2)^n$

40. $a_n = (-3)^n$

41. $a_n = \dfrac{n-3}{n^2}$

42. $a_n = \dfrac{n^2}{n+4}$

Escribe los siguientes tres términos de cada sucesión.

43. 7, 9, 11, 13, . . .

44. 7, 12, 17, 22, . . .

45. 2, 4, 8, 16, . . .

46. 3, 9, 27, 81, . . .

47. $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots$

48. $\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6}, \ldots$

49. $1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{27}, \ldots$

50. $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \ldots$

51. $1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{8}, \ldots$

52. $\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12}, -\dfrac{1}{24}, \ldots$

53. $-2, \dfrac{3}{4}, -\dfrac{4}{9}, \dfrac{5}{16}$

54. $\dfrac{1}{2}, -\dfrac{4}{3}, \dfrac{9}{4}, -\dfrac{16}{5}$

55. 3 072, 768, 192, 48,. . .

56. 1 215, 405, 135, 45,. . .

Escribe y evalúa cada serie.

57. $\sum_{i=1}^{5} (3i - 1)$

58. $\sum_{j=1}^{7} (2j + 5)$

59. $\sum_{i=1}^{6} (i^2 + 1)$

60. $\sum_{m=1}^{6} (2m^2 - 5)$

61. $\sum_{i=1}^{4} \dfrac{i^2}{3}$

62. $\sum_{i=1}^{3} \dfrac{i^2}{4}$

63. $\sum_{i=4}^{9} \dfrac{i^2 + i}{i + 1}$

64. $\sum_{i=2}^{5} \dfrac{i^3}{i + 1}$

Para el término general dado, a_n, escribe una expresión usando $\sum$ para representar la suma parcial indicada.

65. $a_n = n + 10$, quinta suma parcial

66. $a_n = n^2 + 5$, cuarta suma parcial

67. $a_n = \dfrac{n^2}{4}$, tercera suma parcial

68. $a_n = \dfrac{n^2 + 7}{n + 9}$, tercera suma parcial

Para el conjunto de valores $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, $x_4 = -1$, y $x_5 = 4$, determina cada uno de los siguientes.

69. $\sum_{i=1}^{5} x_i$

70. $\sum_{i=1}^{5} (x_i + 5)$

71. $\left(\sum_{i=1}^{5} x_i \right)^2$

72. $\sum_{i=1}^{5} (x_i)^2$

73. $\sum_{i=1}^{4} (x_i^2 + 3)$

74. $\left(\sum_{i=1}^{4} x_i \right)^2 + 3$

Determina la media aritmética, $\bar{x}$, de los siguientes conjuntos de datos.

75. 15, 20, 25, 30, 35

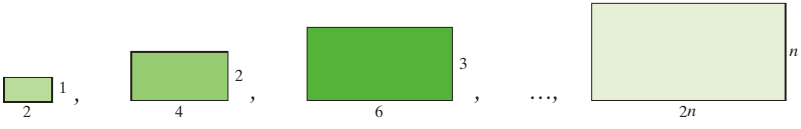
76. 16, 22, 96, 18, 48

77. 72, 83, 4, 60, 18, 20

78. 12, 13, 9, 19, 23, 36, 70

Resolución de problemas

En los ejercicios 79 y 80, considera los siguientes rectángulos. Para el enésimo rectángulo, la longitud es 2n y el ancho es n.



79. Perímetro

a) Determina los perímetros para los primeros cuatro rectángulos y, luego, indica los perímetros en una sucesión.

b) Determina el término general para el perímetro del *enésimo* rectángulo en la sucesión. Usa p_n para perímetro.

80. Área

a) Determina las áreas para los cuatro rectángulos y, luego, indica las áreas en una sucesión.

b) Determina el término general para el área del *enésimo* rectángulo en la sucesión. Usa a_n para área.

81. Escribe

a) $\sum_{i=1}^{n} x_i$, como una suma de términos.

b) $\sum_{j=1}^{n} x_j$, como una suma de términos.

c) Para un conjunto dado de valores de x, desde x_1 hasta x_n, ¿$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$? Explica.

82. Resuelve $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x}{n}$, en términos de Σx

83. Resuelve $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x}{n}$, en términos de n.

84. ¿$\sum_{i=1}^{n} 4x_i = 4\sum_{i=1}^{n} x_i$? Ilustra tu respuesta con un ejemplo.

85. ¿$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{3} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n} x_i$? Ilustra tu respuesta con un ejemplo.

86. Sea $x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = 2$ y $y_1 = 4, y_2 = 1, y_3 = 6$. Determina lo siguiente. Observa que $\Sigma x = x_1 + x_2 + x_3$, $\Sigma y = y_1 + y_2 + y_3$ y $\Sigma xy = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

a) Σx

b) Σy

c) $\Sigma x \cdot \Sigma y$

d) Σxy

e) ¿$\Sigma x \cdot \Sigma y = \Sigma xy$?

Ejercicios conceptuales y de redacción

87. ¿Qué es la enésima suma parcial de una serie?

88. Escribe la siguiente notación con palabras: $\sum_{i=1}^{5} (i + 4)$.

89. Sea $a_n = 2n - 1$. ¿Es esta una sucesión creciente o una sucesión decreciente? Explica.

90. Sea $a_n = -3n + 7$. ¿Es esta una sucesión creciente o una sucesión decreciente? Explica.

91. Sea $a_n = 1 + (-2)^n$. ¿Es esta una sucesión alternante? Explica.

92. Sea $a_n = (-1)^{2n}$. ¿Es esta una sucesión alternante? Explica.

93. Crea tu propia sucesión creciente y menciona los primeros cinco términos.

94. Crea tu propia sucesión decreciente y menciona los primeros cinco términos.

95. Crea tu propia sucesión alternante y menciona los primeros cinco términos.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.6] **96.** Resuelve $\left|\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}\right| = \left|\frac{1}{2}x - 1\right|$.

[5.6] **97.** Factoriza $8y^3 - 64x^6$.

[7.6] **98.** Resuelve $\sqrt{x + 5} - 1 = \sqrt{x - 2}$.

[8.3] **99.** Resuelve $V = \pi r^2 h$, en términos de r.

11.2 Sucesiones y series aritméticas

1 **Determinación de la diferencia común en una sucesión aritmética**

2 **Determinación del *enésimo* término de una sucesión aritmética**

3 **Determinación de la *enésima* suma parcial de una sucesión aritmética**

1 Determinación de la diferencia común en una sucesión aritmética

En la sección anterior, se comenzó una discusión con una suposición, en la cual, obtenías un empleo con un salario inicial de $30 000. Una opción para los aumentos en el salario era la de un aumento de $2 000 cada año. Esto resultaría en la sucesión:

$$\$30\,000,\ \$32\,000,\ \$34\,000,\ \$36\,000,\ \ldots$$

Este, es un ejemplo de una *sucesión aritmética*.

Sucesión aritmética

Una sucesión aritmética, es una sucesión en donde cada término después del primero, difiere del término precedente por una cantidad constante. La cantidad constante, por la cual difiere cada par de términos sucesivos, se llama diferencia común, d.

La diferencia común, puede determinarse al restar cualquier término del término que le sigue directamente.

Sucesión aritmética	Diferencia común
$1, 3, 5, 7, 9, \ldots$	$d = 3 - 1 = 2$
$5, 1, -3, -7, -11, -15, \ldots$	$d = 1 - 5 = -4$
$\frac{7}{2}, \frac{2}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{8}{2}, -\frac{13}{2}, -\frac{18}{2}, \ldots$	$d = \frac{2}{2} - \frac{7}{2} = -\frac{5}{2}$

Observa que, la diferencia común, puede ser un número positivo o un número negativo. Si la sucesión es creciente, entonces d es un número positivo. Si la sucesión es decreciente, entonces d es un número negativo.

EJEMPLO 1 Escribe los primeros cinco términos de la sucesión aritmética, con primer término a_1 y diferencia común d.

a) $a_1 = 3, d = 5$ **b)** $a_1 = 27, d = -4$

c) $a_1 = -7, d = 3$ **d)** $a_1 = 17, d = -6$

Comprende el Álgebra

Para obtener los términos en una sucesión aritmética, comienza con el primer término, a_1, y, después, *suma* continuamente la diferencia común, d.

Solución En cada caso, se comenzará con el primer término dado, a_1, y se *sumará* continuamente la diferencia común, d, hasta obtener cinco términos.

a) $a_1 = 3, a_2 = 3 + 5 = 8, a_3 = 8 + 5 = 13, a_4 = 13 + 5 = 18, a_5 = 18 + 5 = 23$. En consecuencia, los primeros cinco términos de la sucesión aritmética son 3, 8, 13, 18 y 23.

b) $a_1 = 27, a_2 = 27 + (-4) = 23, a_3 = 23 + (-4) = 19, a_4 = 19 + (-4) = 15, a_5 = 15 + (-4) = 11$. En consecuencia, los primeros cinco términos de la sucesión aritmética son 27, 23, 19, 15 y 11.

c) $a_1 = -7, a_2 = -7 + 3 = -4, a_3 = -4 + 3 = -1, a_4 = -1 + 3 = 2, a_5 = 2 + 3 = 5$. En consecuencia, los primeros cinco términos de la sucesión aritmética son $-7, -4, -1, 2$ y 5.

d) $a_1 = 17, a_2 = 17 + (-6) = 11, a_3 = 11 + (-6) = 5, a_4 = 5 + (-6) = -1, a_5 = -1 + (-6) = -7$. En consecuencia, los primeros cinco términos de la sucesión aritmética son 17, 11, 5, -1 y -7.

Ahora resuelve el ejercicio 9

2 Determinación del *enésimo* término de una sucesión aritmética

En general, una sucesión aritmética con primer término, a_1, y diferencia común, d, tiene los siguientes términos:

$$a_1 = a_1, \quad a_2 = a_1 + d, \quad a_3 = a_1 + 2d, \quad a_4 = a_1 + 3d, \quad \text{etcétera}$$

Si continúas este proceso, puedes ver que el *enésimo* término, a_n, se puede determinar mediante la siguiente fórmula:

***enésimo* término de una sucesión aritmética**

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

EJEMPLO 2

a) Escribe una expresión para el término general (o *enésimo*), a_n, de la sucesión aritmética, cuyo primer término es -3 y cuya diferencia común es 2.

b) Determina el duodécimo término de la sucesión.

Solución

a) El *enésimo* término de la sucesión, es $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d && \text{Enésimo término de la sucesión.} \\ &= -3 + (n-1)2 && \text{Sustituye } a_1 = -3 \text{ y } d = 2. \\ &= -3 + 2(n-1) && \text{Propiedad conmutativa.} \\ &= -3 + 2n - 2 && \text{Propiedad distributiva.} \\ &= 2n - 5 && \text{Simplifica.} \end{aligned}$$

En consecuencia, $a_n = 2n - 5$.

b) $a_n = 2n - 5$

$a_{12} = 2(12) - 5 = 24 - 5 = 19$

El duodécimo término en la sucesión es 19.

Ahora resuelve el ejercicio 17

EJEMPLO 3 Determina el número de términos en la sucesión aritmética 5, 9, 13, 17, . . ., 41.

Solución El primer término, a_1, es 5; el *enésimo* término, a_n, es 41; y la diferencia común, d, es 4. Sustituye los valores apropiados en la fórmula, para el *enésimo* término y resuelve en términos de n.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ 41 &= 5 + (n-1)4 \\ 41 &= 5 + 4n - 4 \\ 41 &= 4n + 1 \\ 40 &= 4n \\ 10 &= n \end{aligned}$$

La sucesión tiene 10 términos.

Ahora resuelve el ejercicio 51

3 Determinación de la *enésima* suma parcial de una sucesión aritmética

Una **serie aritmética**, es la suma de los términos de una sucesión aritmética. Una serie aritmética infinita, puede escribirse

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + \ldots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n$$

Si consideras el último término como a_n, el término, antes del último término, será $a_n - d$; el segundo término, antes del último término, será $a_n - 2d$, etcétera.

Una fórmula para la *enésima* suma parcial, s_n, puede obtenerse al sumar el inverso de s_n a sí mismo.

$$\begin{array}{rcl} s_n &=& a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n \\ s_n &=& a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \\ \hline 2s_n &=& (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) \end{array}$$

Dado que el lado derecho de la ecuación contiene n términos de $(a_1 + a_n)$, puedes escribir:

$$2s_n = n(a_1 + a_n)$$

Ahora, divide ambos lados de la ecuación entre 2, para obtener la siguiente fórmula.

***Enésima* suma parcial de una sucesión aritmética**

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

EJEMPLO 4 Determina la suma de los primeros 25 números naturales.

Solución La sucesión aritmética es 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . . , 25. El primer término, a_1, es 1; el último término, a_n, es 25. Hay 25 términos; por tanto, $n = 25$. Con la fórmula para la *enésima* suma parcial, se tiene:

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \\ &= \frac{25(1 + 25)}{2} \\ &= \frac{25(26)}{2} \\ &= 25(13) = 325 \end{aligned}$$

La suma de los primeros 25 números naturales, es 325. En consecuencia, $s_{25} = 325$.

Ahora resuelve el ejercicio 57

EJEMPLO 5 El primer término de una sucesión aritmética es 4, y el último término es 31. Si $s_n = 175$, determina el número de términos en la sucesión y la diferencia común.

Solución Sustituye los valores apropiados, $a_1 = 4$, $a_n = 31$ y $s_n = 175$, en la fórmula para la *enésima* suma parcial y resuelve en términos de n.

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \\ 175 &= \frac{n(4 + 31)}{2} \\ 175 &= \frac{35n}{2} \\ 350 &= 35n \\ 10 &= n \end{aligned}$$

Hay 10 términos en la sucesión. Ahora, puedes determinar la diferencia común usando la fórmula para el *enésimo* término de una sucesión aritmética.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1)d \\ 31 &= 4 + (10 - 1)d \\ 31 &= 4 + 9d \\ 27 &= 9d \\ 3 &= d \end{aligned}$$

La diferencia común es 3. La sucesión es 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31.

Ahora resuelve el ejercicio 31

EJEMPLO 6 **Técnico de turbinas eólicas** Samanta, recibe un salario inicial de $35 000 como técnica de turbinas eólicas. A Samanta le prometen un aumento de $1 200, al final de cada año. Determina el salario de Samanta durante sus ocho años en el empleo.



Solución Entiende Sus salarios durante los primeros años serían:

$$\$35\,000,\ \$36\,200,\ \$37\,400,\ \$38\,600,\ \ldots$$

Dado que se suma una cantidad constante cada año, esta es una sucesión aritmética. El término general de una sucesión aritmética, es $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

Traduce En este ejemplo, $a_1 = 35000$ y $d = 1200$. En consecuencia, para $n = 8$, el salario de Samanta sería de

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1)\ d \\ a_8 &= 35000 + (8 - 1)1200 \end{aligned}$$

Realiza
$$= 35\,000 + 7(1\,200)$$
$$= 35\,000 + 8400$$
$$= 43\,400$$

Responde Durante su octavo año de trabajo, el salario de Samanta sería de \$43 400. Si se enlistan todos los salarios para el periodo de 8 años, serían \$35 000, \$36 200, \$37 400, \$38 600, \$39 800, \$41 000, \$42 200, \$43 400.

Ahora resuelve el ejercicio 81

EJEMPLO 7 **Péndulo** Cada oscilación de un péndulo (izquierda a derecha o derecha a izquierda) es 3 pulgadas más corto que la oscilación precedente. La primer oscilación es de 8 pies.

a) Determina la longitud de la décima oscilación.

b) Determina la distancia recorrida por el péndulo, durante las primeras 10 oscilaciones.

Solución

a) Entiende Dado que cada vaivén disminuye por una cantidad constante, este problema se puede representar como una serie aritmética. Ya que la primer oscilación se proporciona en pies y la reducción en oscilación está en pulgadas, se cambiarán 3 pulgadas a 0.25 pies $(3 \div 12 = 0.25)$. La décima oscilación, puede considerarse a_{10}. La diferencia, d, es negativa, pues la distancia disminuye con cada oscilación.

Traduce
$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$
$$a_{10} = 8 + (10 - 1)(-0.25)$$

Realiza
$$= 8 + 9(-0.25)$$
$$= 8 - 2.25$$
$$= 5.75 \text{ pies}$$

Responde La décima oscilación es de 5.75 pies.

b) Entiende y Traduce La distancia recorrida durante las primeras 10 oscilaciones, puede encontrarse usando la fórmula para la *enésima* suma parcial. La primera oscilación, a_1, es de 8 pies y la décima oscilación, a_{10}, es de 5.75 pies.

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$
$$s_{10} = \frac{10(a_1 + a_{10})}{2}$$

Realiza
$$= \frac{10(8 + 5.75)}{2} = \frac{10(13.75)}{2} = 5(13.75) = 68.75 \text{ pies}$$

Responde El péndulo recorre 68.75 pies durante sus primeras 10 oscilaciones.

Ahora resuelve el ejercicio 79

11.2 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

constante	1	positivo	diferencia	-1	n
sumar	restar	d	a_n	negativo	aritmética

1. Una sucesión, donde cada término después del primer término, difiere del término precedente por una cantidad constante, es una sucesión _____.
2. La cantidad constante, por la cual, difiere cada par de términos sucesivos en una sucesión aritmética, se llama _____ común.
3. La diferencia común en una sucesión aritmética, se identifica mediante la letra _____.
4. La diferencia común, puede determinarse al _____ cualquier término del siguiente término en la sucesión.

5. Si una sucesión aritmética es creciente, el valor de d es un número _____.

6. Si los términos de una sucesión aritmética son decrecientes, el valor de d es un número _____.

Practica tus habilidades

Escribe los primeros cinco términos de la sucesión aritmética, con primer término a_1 y diferencia común d.

7. $a_1 = 6, d = 4$

8. $a_1 = -9, d = 5$

9. $a_1 = 5, d = -3$

10. $a_1 = 21, d = -4$

Escribe los primeros cinco términos de la sucesión aritmética, con el primer término y diferencia común dados. Escribe la expresión para el término general (o enésimo), a_n, de la sucesión aritmética.

11. $a_1 = 4, d = 3$

12. $a_1 = -8, d = 4$

13. $a_1 = 7, d = -2$

14. $a_1 = 3, d = -5$

15. $a_1 = -7, d = -2$

16. $a_1 = -4, d = -3$

17. $a_1 = \frac{1}{2}, d = \frac{3}{2}$

18. $a_1 = \frac{7}{4}, d = -\frac{3}{4}$

Determina la cantidad indicada de la sucesión aritmética.

19. $a_1 = 3, d = 7$; determina a_{23}.

20. $a_1 = -4, d = 6$; determina a_{31}.

21. $a_1 = 1, d = -5$; determina a_{42}.

22. $a_1 = -2, d = -8$; determina a_{55}.

23. $a_1 = 3, a_9 = 51$; determina d.

24. $a_1 = 4, a_{21} = 144$; determina d.

25. $a_1 = -\frac{11}{2}, a_9 = \frac{21}{2}$, determina d.

26. $a_1 = \frac{1}{2}, a_7 = \frac{19}{2}$; determina d.

27. $a_1 = 4, a_n = 28, d = 3$; determina n.

28. $a_1 = 1, a_n = -17, d = -3$; determina n.

29. $a_1 = 82, a_n = 42, d = -8$; determina n.

30. $a_1 = -\frac{4}{3}, a_n = -\frac{14}{3}, d = -\frac{2}{3}$; determina n.

Determina la suma, s_n, y la diferencia común, d, de cada sucesión.

31. $a_1 = 1, a_{10} = 19, n = 10$

32. $a_1 = 11, a_8 = 46, n = 8$

33. $a_1 = -7, a_{11} = -37, n = 11$

34. $a_1 = 12, a_9 = -28, n = 9$

35. $a_1 = -5, a_6 = 13.5, n = 6$

36. $a_1 = 14.25, a_{31} = 18.75, n = 31$

37. $a_1 = -\frac{3}{5}, a_5 = \frac{13}{5}, n = 5$

38. $a_1 = \frac{3}{5}, a_8 = 2, n = 8$

Escribe los primeros cuatro términos de cada sucesión; luego, determina a_{10} y s_{10}.

39. $a_1 = 4, d = 3$

40. $a_1 = 1, d = 7$

41. $a_1 = -6, d = 2$

42. $a_1 = 7, d = -4$

43. $a_1 = -8, d = -5$

44. $a_1 = -7, d = -4$

45. $a_1 = 100, d = -7$

46. $a_1 = -17, d = 9$

47. $a_1 = \frac{7}{2}, d = \frac{5}{2}$

48. $a_1 = \frac{9}{5}, d = \frac{3}{5}$

Determina el número de términos, n, en cada sucesión y determina s_n.

49. $1, 4, 7, 10, \ldots, 43$

50. $6, 13, 20, 27, \ldots, 55$

51. $-9, -5, -1, 3, \ldots, 31$

52. $-10, -8, -6, -4, \ldots, 40$

53. $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, \frac{17}{2}$

54. $-\frac{5}{6}, -\frac{7}{6}, -\frac{9}{6}, -\frac{11}{6}, \ldots, -\frac{21}{6}$

55. $7, 10, 13, 16, \ldots, 91$

56. $-11, -15, -19, \ldots, -51$

Resolución de problemas

57. Determina la suma de los primeros 50 números naturales.

58. Determina la suma de los primeros 75 números naturales.

59. Determina la suma de los primeros 50 números impares.

60. Determina la suma de los primeros 50 números pares.

61. Determina la suma de los primeros 30 múltiplos de 3.

62. Determina la suma de los primeros 40 múltiplos de 5

63. Determina la suma de los números entre 50 y 150, incluyendo los extremos.

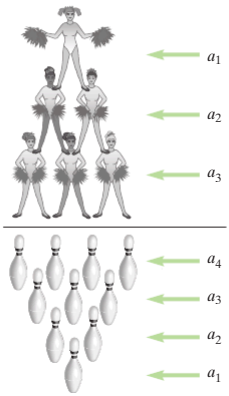
64. Determina la suma de los números entre 150 y 250, incluyendo los extremos.

65. Determina cuántos números, entre 7 y 1610, son divisibles entre 6.

66. Determina cuántos números, entre 14 y 1470, son divisibles entre 8.

Pirámides *En todas partes hay pirámides. La siguiente ilustración, muestra una pirámide con 1 porrista en la fila superior, 2 porristas en la fila de en medio y 3 porristas en la fila del fondo. Observa que* $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ y $a_3 = 3$. *Además, observa que* $d = 1$, $n = 3$ y $s_3 = 6$.

En un boliche, los pinos forman una pirámide. La primera fila tiene 1 pino, la segunda fila tiene 2 pinos, la tercera fila tiene 3 pinos, y la cuarta fila tiene 4 pinos. En consecuencia $a_1 = 1$, $d = 1$, $n = 4$ *y* $s_4 = 10$.

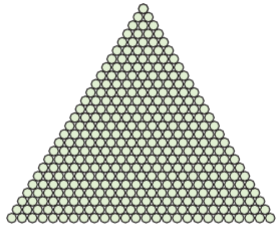


Usa la idea de una pirámide, para resolver los ejercicios 67-72.

67. Auditorio Un auditorio tiene 20 asientos en la primera fila. Cada fila sucesiva tiene dos asientos más que la fila previa. ¿Cuántos asientos hay en la duodécima fila? ¿Cuántos asientos hay en las primeras 12 filas?

68. Auditorio Un auditorio tiene 22 asientos en la primera fila. Cada fila sucesiva tiene cuatro asientos más que la fila previa. ¿Cuántos asientos hay en la novena fila? ¿Cuántos asientos hay en las primeras nueve filas?

69. Troncos Gustavo apila troncos, de modo que hay 26 troncos en la capa inferior, y cada capa contiene un tronco menos que la capa debajo de ella. ¿Cuántos troncos hay en la pila?



70. Troncos Supón que Gustavo, del ejercicio 69, dejó de apilar troncos después de completar la capa que contiene ocho troncos. ¿Cuántos troncos hay en la pila?

71. Copas en una pila En su quincuagésimo aniversario de bodas, el señor y la señora Carlson, están a punto de verter champaña en la copa superior de la siguiente fotografía. La fila superior tiene 1 copa, la segunda fila tiene 3 copas, la tercera fila tiene 5 copas, etcétera. Cada fila tiene 2 copas más que la fila sobre ella. Esta pirámide tiene 14 filas.

a) ¿Cuántas copas hay en la decimocuarta fila (la fila inferior)?

b) ¿Cuántas copas hay en total?



72. Dulces en una pila Dulces envueltos individualmente, se apilan en filas, de tal modo que, la fila superior tiene 1 dulce, la segunda fila tiene 3 dulces, la tercera fila tiene 5 dulces, etcétera. Cada fila tiene 2 dulces más que la fila sobre ella. Hay 7 filas de dulces.

a) ¿Cuántos dulces hay en la séptima fila (fila inferior)?

b) ¿Cuántos dulces hay en total?

73. Suma de números Karl Friedrich Gauss (1777-1855), un famoso matemático, cuando era niño, determinó la suma de los primeros 100 números naturales rápidamente en su cabeza $(1 + 2 + 3 + \ldots + 100)$. Explica cómo pudo hacer esto y determina la suma de los primeros 100 números naturales en la forma que creas que Gauss lo hizo. (Sugerencia: $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, etcétera).



Karl Friedrich Gaus

74. Suma de números Usa el mismo proceso del ejercicio 73, para determinar la suma de los números del 101 al 150.

75. Suma de números impares Determina una fórmula, para la suma de los primeros n números impares consecutivos, a partir del 1.

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$$

76. Suma de números pares Determina una fórmula, para la suma de los primeros n números pares consecutivos, a partir del 2.

$$2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n$$

77. Balanceo sobre una liana Una liana larga está unida a la rama de un árbol. Jane se balancea desde la liana, y cada vaivén (izquierda a derecha o derecha a izquierda), es $\frac{1}{2}$ pie menos que el vaivén previo. Si su primer vaivén es de 22 pies, determina:



a) la longitud del séptimo vaivén, y

b) la distancia recorrida durante sus siete vaivenes.

78. Péndulo Cada oscilación de un péndulo, es 2 pulgadas más corto que la oscilación previa (izquierda a derecha o derecha a izquierda). La primer oscilación es de 6 pies. Determina:

a) la longitud de la octava oscilación, y

b) la distancia recorrida por el péndulo durante las ocho oscilación.

79. Bola rebotadora Raquel suelta una bola desde una ventana del segundo piso. Cada vez que la bola rebota, la altura alcanzada es 6 pulgadas menor que en el rebote previo. Si el primer rebote alcanza una altura de 6 pies, determina la altura que logra en el noveno rebote.

80. Pelota de ping-pong Una pelota de ping-pong, cae desde una mesa y rebota hasta una altura de 3 pies. Si cada rebote sucesivo es 3 pulgadas menor que el rebote previo, determina la altura alcanzada en el décimo rebote.



81. Paquetes El lunes 17 de marzo, Bruno comienza un nuevo empleo en una compañía empacadora. Ese día, él pudo preparar 105 paquetes para embarque. Su jefe espera que Bruno sea más productivo conforme adquiere experiencia. Cada día, durante seis días, se espera que Bruno prepare 10 paquetes más que el total del día previo.

a) ¿Cuántos paquetes se espera que Bruno prepare el 22 de marzo?

b) ¿Cuántos paquetes se espera que Bruno prepare durante sus seis primeros días de empleo?

82. Salario Marion, obtiene un salario anual de $37 500 en la fábrica Thompson Frozen Food. Su jefe le prometió un aumento salarial de $1 500 cada año durante los próximos 10 años.

a) ¿Cuál será el salario de Marion dentro de 10 años?

b) ¿Cuál será su salario total durante estos 11 años?

83. Dinero Si Carlos ahorra $1 el día 1, $2 el día 2, $3 el día 3, etcétera, ¿cuánto dinero, en total, habrá ahorrado el día 31?

84. Dinero Si Bernard ahorra 50¢ el día 1, $1.00 el día 2, $1.50 el día 3, etcétera, ¿cuánto, en total, habrá ahorrado al cabo de 1 año (365 días)?

85. Dinero Mercedes se jubiló recientemente y se reunió con su planificador financiero. Ella hizo planes para

recibir \$42 000 el primer año. Debido a la inflación, cada año recibirá \$400 más de lo que recibió el año previo.

a) ¿Qué ingreso recibirá en su décimo año de retiro?

b) ¿Cuánto dinero recibirá en total durante sus primeros 10 años de retiro?

86. Salario Sofía recibe un salario inicial de \$25 000 y le dicen que recibirá un aumento de \$1 000, al final de cada año.

a) Determina su salario durante el duodécimo año.

b) ¿Cuánto recibirá, en total, durante sus primeros 12 años?

87. Ángulos La suma de los ángulos interiores de un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono y un hexágono, son 180°, 360°, 540° y 720°, respectivamente. Usa este patrón, para determinar la fórmula para la suma de los ángulos interiores de un polígono con n lados.

88. Otra fórmula que puedes usar, para determinar la *enésima* suma parcial de una serie aritmética, es:

$$s_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$$

Deriva esta fórmula, usando las dos fórmulas presentadas en esta sección.

Ejercicios conceptuales y de redacción

89. ¿Una sucesión aritmética, puede consistir solamente de números negativos? explica.

90. ¿Una sucesión aritmética, puede consistir solamente de números impares? Explica.

91. ¿Una sucesión aritmética, puede consistir solamente de números pares? Explica.

92. ¿Una sucesión alternante, puede ser una sucesión aritmética? Explica.

Actividad grupal

En cálculo, un tema de importancia es el de los límites. Considera $a_n = \frac{1}{n}$. *Los primeros cinco términos de esta sucesión, son* $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$. *Dado que el valor de* $\frac{1}{n}$ *se acerca cada vez más a 0, conforme n se hace cada vez más grande, se dice que el límite de* $\frac{1}{n}$, *conforme n tiende a infinito, es 0. Esto se escribe de la forma* $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ *o* $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$. *Observa que,* $\frac{1}{n}$ *nunca puede ser igual a 0, pero su valor se aproxima a 0, conforme n se vuelve cada vez más grande.*

a) *Miembro 1 del equipo: determina* $\lim_{n \to +\infty} a_n$ *para los ejercicios 93 y 94.*

b) *Miembro 2 del equipo: determina* $\lim_{n \to +\infty} a_n$ *para los ejercicios 95 y 96.*

c) *Miembro 3 del equipo: determina* $\lim_{n \to +\infty} a_n$ *para los ejercicios 97 y 98.*

d) *Intercambien trabajos y verifiquen las respuestas de los demás.*

93. $a_n = \frac{1}{n - 2}$

94. $a_n = \frac{n}{n + 1}$

95. $a_n = \frac{1}{n^2 + 2}$

96. $a_n = \frac{2n + 1}{n}$

97. $a_n = \frac{4n - 3}{3n + 1}$

98. $a_n = \frac{n^2}{n + 1}$

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.2] **99.** Resuelve $A = P + Prt$ para r.

[4.1] **100.** Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$y = 2x + 1$$
$$3x - 2y = 1$$

[5.4] **101.** Factoriza $12n^2 - 6n - 30n + 15$.

[10.1] **102.** Elabora la gráfica de $(x + 4)^2 + y^2 = 25$.

11.3 Sucesiones y series geométricas

1. **Determinación de la razón común en una sucesión geométrica**
2. **Determinación del *enésimo* término de una sucesión geométrica**
3. **Determinación de la enésima suma parcial de una sucesión geométrica**
4. **Identificación de series geométricas infinitas**
5. **Determinación de la suma de una serie geométrica infinita**
6. **Problemas aplicados de las sucesiones y series geométricas**

Comprende el Álgebra

En una sucesión geométrica, para obtener el valor de la razón común, r, divide un término entre el término previo.

1 Determinación de la razón común en una sucesión geométrica

En la sección 11.1, se creó la suposición de que conseguías un empleo con un salario inicial de \$30 000. También, se mencionó que una opción para aumentos salariales era un aumento salarial de 5% cada año. Esto resultaría en la siguiente sucesión.

$$\$30\,000,\quad \$31\,500,\quad \$33\,075,\quad \$34\,728.75,\ldots$$

Este es un ejemplo de una sucesión geométrica.

Sucesión geométrica

Una **sucesión geométrica**, es una sucesión en donde cada término, después del primero, es un múltiplo común del término precedente. El múltiplo común se llama **razón común**.

La razón común, r, en cualquier sucesión geométrica, puede determinarse al dividir cualquier término, excepto el primero, entre el término precedente. La razón común de la sucesión geométrica anterior, es $\dfrac{31\,500}{30\,000} = 1.05$ (o 105%).

Considera la sucesión geométrica:

$$1, 3, 9, 27, 81, \ldots, 3^{n-1}, \ldots$$

La razón común es 3, pues $3 \div 1 = 3, 9 \div 3 = 3, 27 \div 9 = 3$, etcétera.

Sucesión geométrica	Razón común
$4, 8, 16, 32, 64, \ldots, \mathbf{4}(2)^{n-1}, \ldots$	2
$3, 12, 48, 192, 768, \ldots, \mathbf{3}(4)^{n-1}, \ldots$	4
$7, \frac{7}{2}, \frac{7}{4}, \frac{7}{8}, \frac{7}{16}, \ldots, 7\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \ldots$	$\frac{1}{2}$
$5, -\frac{5}{3}, \frac{5}{9}, -\frac{5}{27}, \frac{5}{81}, \ldots, 5\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \ldots$	$-\frac{1}{3}$

EJEMPLO 1 Escribe los cinco primeros términos de la sucesión geométrica, con primer término a_1 y razón común r.

a) $a_1 = 3, r = 5$ **b)** $a_1 = 2, r = -3$

c) $a_1 = -16, r = \dfrac{1}{2}$ **d)** $a_1 = -27, r = -\dfrac{1}{3}$

Solución En cada caso, se comenzará con el primer término dado, a_1, y se *multiplicará* de manera continua por la razón común, r, hasta obtener cinco términos.

Comprende el Álgebra

Para obtener los términos en una sucesión geométrica, comienza con el primer término, a_1, y luego *multiplica*, de forma continua, por la razón común, r.

a) $a_1 = 3$, $a_2 = 3 \cdot 5 = 15$, $a_3 = 15 \cdot 5 = 75$, $a_4 = 75 \cdot 5 = 375$, $a_5 = 375 \cdot 5 = 1\,875$. En consecuencia, los cinco primeros términos de la sucesión geométrica, son 3, 15, 75, 375 y 1875.

b) $a_1 = 2$, $a_2 = 2 \cdot (-3) = -6$, $a_3 = (-6) \cdot (-3) = 18$, $a_4 = 18 \cdot (-3) = -54$, $a_5 = (-54) \cdot (-3) = 162$. En consecuencia, los cinco primeros términos de la sucesión geométrica, son 2, −6, 18, −54 y 162.

c) $a_1 = -16$, $a_2 = (-16) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = -8$, $a_3 = (-8) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = -4$, $a_4 = (-4) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = -2$, $a_5 = (-2) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = -1$. En consecuencia, los cinco primeros términos de la sucesión geométrica, son −16, −8, −4, −2 y −1.

d) $a_1 = -27$, $a_2 = (-27) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 9$, $a_3 = 9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -3$, $a_4 = (-3) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 1$, $a_5 = 1 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$. En consecuencia, los cinco primeros términos de la sucesión geométrica, son −27, 9, −3, 1 y $-\frac{1}{3}$.

Ahora resuelve el ejercicio 19

2 Determinación del *enésimo* término de una sucesión geométrica

En general, una sucesión geométrica con primer término, a_1, y razón común, r, tiene los siguientes términos:

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{1er término, } a_1}}{a_1},\quad \underset{\substack{\uparrow\\ \text{2º término, } a_2}}{a_1 r},\quad \underset{\substack{\uparrow\\ \text{3er término, } a_3}}{a_1 r^2},\quad \underset{\substack{\uparrow\\ \text{4º término, } a_4}}{a_1 r^3},\quad \underset{\substack{\uparrow\\ \text{5º término, } a_5}}{a_1 r^4}, \ldots, \quad \underset{\substack{\uparrow\\ \text{enésimo término, } a_n}}{a_1 r^{n-1}}, \ldots$$

En consecuencia, puedes ver que el *enésimo* término de una sucesión geométrica, está dado por la siguiente fórmula:

Enésimo término de una sucesión geométrica

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

EJEMPLO 2

a) Escribe una expresión para el término general (o *enésimo*), a_n, de la sucesión geométrica con $a_1 = 3$ y $r = -2$.

b) Determina el duodécimo término de esta sucesión, a_{12}.

Solución

a) El *enésimo* término de la sucesión, es $a_n = a_1 r^{n-1}$. Al sustituir $a_1 = 3$ y $r = -2$, obtienes

$$a_n = a_1 r^{n-1} = 3(-2)^{n-1}$$

En consecuencia, $a_n = 3(-2)^{n-1}$.

b) Para determinar el duodécimo término de la sucesión, sustituye 12 por n en la ecuación para el *enésimo* término.

$$a_n = 3(-2)^{n-1}$$

$$a_{12} = 3(-2)^{12-1} = 3(-2)^{11} = 3(-2048) = -6144$$

El duodécimo término de la sucesión es -6144. Los primeros 12 términos de la sucesión, son $3, -6, 12, -24, 48, -96, 192, -384, 768, -1536, 3072, -6144$.

Ahora resuelve el ejercicio 33

SUGERENCIA ÚTIL

Consejo de estudio

En este capítulo, trabajarás con exponentes y usarás las reglas de los exponentes. Las reglas para exponentes se estudiaron en la sección 1.5, y, nuevamente, en el capítulo 6. Si no recuerdas las reglas para exponentes, ahora es un buen momento para repasar la sección 1.5.

EJEMPLO 3

Determina r y a_1 para la sucesión geométrica con $a_2 = 12$ y $a_5 = 324$.

Solución La sucesión se puede representar con espacios vacíos para los términos faltantes.

$$\underset{}{\_\_},\ \underset{\substack{\uparrow\\ a_2}}{12},\ \_\_,\ \_\_,\ \underset{\substack{\uparrow\\ a_5}}{324}$$

Si supones que a_2 es el primer término de una sucesión con la misma razón común, se obtiene

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{1er término}}}{12},\ \_\_,\ \_\_,\ \underset{\substack{\uparrow\\ \text{4º término}}}{324}$$

Ahora, usa la fórmula para el *enésimo* término de una sucesión geométrica para determinar r. El primer término, a_1, es 12 y el número de términos, n, es 4.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 r^{n-1} \\ 324 &= 12r^{4-1} \\ 324 &= 12r^3 \\ \frac{324}{12} &= r^3 \\ 27 &= r^3 \\ 3 &= r \end{aligned}$$

En consecuencia, la razón común es 3.

El primer término de la sucesión original debe ser $12 \div 3$ o 4. En consecuencia, $a_1 = 4$. El primer término, a_1, también se podría determinar usando la fórmula $a_n = a_1 r^{n-1}$ con $a_n = 324$, $r = 3$ y $n = 5$.

Ahora resuelve el ejercicio 83

3 Determinación de la *enésima* suma parcial de una sucesión geométrica

Serie geométrica

Una **serie geométrica**, es la suma de los términos de una sucesión geométrica.

La suma de los primeros n términos, s_n, de una sucesión geométrica, se puede expresar como:

$$s_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1} \quad (ec.\ 1)$$

Si multiplicas ambos lados de la ecuación por r, obtienes:

$$rs_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n \quad (ec.\ 2)$$

Ahora, resta los lados correspondientes de *(ec. 2)* a la *(ec. 1)*. Los términos en color rojo se eliminan, y queda:

$$s_n - rs_n = a_1 - a_1 r^n$$

Ahora, resuelve la ecuación para s_n.

$$\begin{aligned} s_n(1 - r) &= a_1(1 - r^n) && \text{Factoriza.} \\ s_n &= \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} && \text{Divide ambos lados entre } 1 - r. \end{aligned}$$

En consecuencia, se tiene la siguiente fórmula para la *enésima* suma parcial de una sucesión geométrica.

***Enésima* suma parcial de una sucesión geométrica**

$$s_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}, \qquad r \neq 1$$

EJEMPLO 4 Determina la séptima suma parcial, s_7, de una sucesión geométrica, cuyo primer término es 16 y cuya razón común es $-\frac{1}{2}$.

Solución Sustituye el valor apropiado para a_1, r y n.

$$s_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$s_7 = \frac{16\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^7\right]}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{16\left(1 + \frac{1}{128}\right)}{\frac{3}{2}} = \frac{16\left(\frac{129}{128}\right)}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{129}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{129}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{43}{4}$$

En consecuencia, $s_7 = \frac{43}{4}$.

Ahora resuelve el ejercicio 41

EJEMPLO 5 Dado $s_n = 93$, $a_1 = 3$ y $r = 2$, determina n.

Solución Para determinar n, ésta se sustituirá en la fórmula de la *enésima* suma parcial.

$$s_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$93 = \frac{3(1 - 2^n)}{1 - 2} \quad \text{Sustituye valores para } s_n, a_1 \text{ y } r.$$

$$93 = \frac{3(1 - 2^n)}{-1}$$

$$-93 = 3(1 - 2^n) \quad \text{Multiplica ambos lados por } -1.$$

$$-31 = 1 - 2^n \quad \text{Divide ambos lados entre 3.}$$

$$-32 = -2^n \quad \text{Resta 1 de ambos lados.}$$

$$32 = 2^n \quad \text{Divide ambos lados entre } -1.$$

$$2^5 = 2^n \quad \text{Escribe 32 como } 2^5.$$

Por tanto, $n = 5$.

Ahora resuelve el ejercicio 65

Cuando trabajes con una serie geométrica, r puede ser un número positivo, como se vio en el ejemplo 5; o un número negativo, como se vio en el ejemplo 4.

4 Identificación de series geométricas infinitas

La siguiente sucesión, es un ejemplo de una *sucesión geométrica infinita*.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \ldots$$

Observa que, los tres puntos suspensivos al final de la sucesión, indican que la sucesión continúa indefinidamente.

Serie geométrica infinita

Una **serie geométrica infinita**, es la suma de los términos en una sucesión geométrica infinita.

Por ejemplo,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \ldots$$

es una serie geométrica infinita. A continuación, se determinarán algunas sumas parciales.

Suma parcial	Series	Suma
Segunda	$1 + \frac{1}{2}$	1.5
Tercera	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	1.75
Cuarta	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	1.875
Quinta	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$	1.9375
Sexta	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$	1.96875

Con cada suma parcial sucesiva, la cantidad a sumar es menor que con la suma parcial previa. Además, la suma parece acercarse cada vez más a 2. En el ejemplo 6, se demostrará que la suma de esta serie geométrica infinita, de hecho, es 2.

5 Determinación de la suma de una serie geométrica infinita

Considera la fórmula para la suma de los primeros n términos de una serie geométrica infinita:

$$s_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}, \qquad r \neq 1$$

¿Qué ocurre con r^n, si $|r| < 1$ y n se vuelve cada vez más grande? Supón que $r = \frac{1}{2}$; entonces:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0.5, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.25, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.125, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \approx 0.000001$$

Se puede ver que, cuando $|r| < 1$, el valor de r^n se vuelve extremadamente cercano a 0, conforme n se vuelve cada vez más grande. En consecuencia, cuando consideras la *suma de una serie geométrica infinita*, simbolizada s_∞, la expresión r^n tiende a 0, cuando $|r| < 1$. Por tanto, al sustituir r^n con 0, en la fórmula $s_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$, conduce a la siguiente fórmula.

Suma de una serie geométrica infinita

$$s_\infty = \frac{a_1}{1 - r} \quad \text{donde} \quad |r| < 1$$

EJEMPLO 6 Determina la suma de la serie geométrica infinita, s_∞.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \ldots$$

Solution $a_1 = 1$ y $r = \frac{1}{2}$. Observa que, $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$.

$$\begin{aligned} s_\infty &= \frac{a_1}{1 - r} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

En consecuencia, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \ldots = 2$.

Ahora resuelve el ejercicio 71

EJEMPLO 7 Determina la suma de la serie geométrica infinita.

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243} + \ldots$$

Solución El primer término, a_1, es 1. Para determinar la razón común, r, divide el segundo término, $-\frac{1}{3}$, entre el primer término, 1.

$$r = \frac{-\frac{1}{3}}{1} = -\frac{1}{3}$$

Observa que, $|r| = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$.

$$\begin{aligned} s_\infty &= \frac{a_1}{1 - r} \\ &= \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{3}{4}$$

En consecuencia, la suma de la serie infinita, es $\frac{3}{4}$.

Ahora resuelve el ejercicio 73

EJEMPLO 8 Escribe 0.343434. . . como una razón de enteros.

Solución Puedes escribir este número decimal como

$$0.34 + 0.0034 + 0.000034 + \ldots + (0.34)(0.01)^{n-1} + \ldots$$

Esta es una serie geométrica infinita, con $r = 0.01$. Dado que $|r| < 1$,

$$s_\infty = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{0.34}{1 - 0.01} = \frac{0.34}{0.99} = \frac{34}{99}$$

Si divides 34 entre 99, obtienes 0.343434...

Ahora resuelve el ejercicio 79

Comprende el Álgebra

Para una serie geométrica infinita:

- Si $|r| < 1$, entonces, $s_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$.
- Si $|r| \geq 1$, entonces, s_∞ no existe.

¿Cuál es la suma de una serie geométrica, cuando $|r| \geq 1$? Considera la sucesión geométrica, en la que $a_1 = 1$ y $r = 2$.

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots, 2^{n-1}, \ldots$$

La suma de sus términos, es:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots + 2^{n-1} + \ldots$$

¿Cuál es la suma de esta serie? Conforme n se vuelve cada vez más grande, la suma se vuelve cada vez más grande. En consecuencia, se dice que la suma "no existe". Para $|r| \geq 1$, la suma de una serie geométrica infinita, no existe.

6 Problemas aplicados de sucesiones y series geométricas

EJEMPLO 9 **Cuenta de ahorros** Paulo invierte $1000 a 5% de interés compuesto anualmente, en una cuenta de ahorros. Determina el monto en su cuenta y el monto de interés obtenido al cabo de 10 años.

Solución Entiende Supón que P representa cualquier principal invertido. Al comienzo del segundo año, el monto crece a $P + 0.05P$ o $1.05P$. Este monto será el principal invertido para el año 2. Al comienzo del tercer año, el principal del segundo año crecerá en 5% a $(1.05P)(1.05)$ o $(1.05)^2P$. El monto en la cuenta de Paulo, al comienzo de años sucesivos, es:



Año 1	Año 2	Año 3	Año 4
P	$1.05P$	$(1.05)^2P$	$(1.05)^3P$

etcétera. Esta es una sucesión geométrica con $r = 1.05$. El monto en su cuenta, al cabo de 10 años, será el mismo que el monto en su cuenta al comienzo del año 11. Por tanto, se usará la fórmula:

$$a_n = a_1 r^{n-1}, \quad \text{con} \quad r = 1.05 \quad \text{y} \quad n = 11$$

Traduce Se tiene una sucesión geométrica con $a_1 = 1\,000$, $r = 1.05$ y $n = 11$. Al sustituir estos valores en la fórmula, se obtiene lo siguiente.

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Realiza

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1\,000(1.05)^{11-1} \\ &= 1\,000(1.05)^{10} \\ &\approx 1\,000(1.62889) \\ &\approx 1\,628.89 \end{aligned}$$

Responde Después de 10 años, el monto en la cuenta, es de aproximadamente \$1 628.89. El monto de interés es de \$1 628.89 − \$1 000 = \$628.89.

Ahora resuelve el ejercicio 97

EJEMPLO 10 **Dinero** Supón, que alguien te ofrece \$1 000 al día, cada día, durante un mes de 30 días; o, alternativamente, podrías elegir recibir un centavo el día 1, 2¢ el día 2, 4¢ el día 3, 8¢ el día 4, etcétera. El monto seguiría duplicándose cada día durante 30 días.

a) Sin hacer cálculos, realiza una suposición de cuál de los dos ofrecimientos proporcionaría mayor rendimiento total, durante 30 días.

b) Calcula el monto total que recibirías al elegir recibir \$1 000 al día, durante 30 días.

c) Calcula el monto que recibirías el día 30, al elegir recibir 1¢ el día 1 y duplicar el monto cada día, durante 30 días.

d) Calcula el monto total que recibirías durante 30 días, al elegir 1¢ el día 1 y duplicar el monto cada día, durante 30 días.

Solución

a) Cada uno de ustedes, tendrá una respuesta particular al inciso **a)**.

b) Si recibes \$1 000 al día, durante 30 días, recibirías 30(\$1 000) = \$30 000.

c) Entiende Dado que el monto se duplica cada día, esto representa una sucesión geométrica con $r = 2$. La siguiente tabla, muestra el monto que recibirías en cada uno de los primeros 7 días. También muestra los montos escritos con base 2, la razón común.

Día	1	2	3	4	5	6	7
Monto (centavos)	1	2	4	8	16	32	64
Monto (centavos)	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6

Observa que, para cualquier día dado, el exponente en 2 es 1 menos que el día dado. Por ejemplo, el día 7, el monto es 2^6. En general, el monto el día n es 2^{n-1}.

Traduce Para determinar el monto recibido el día 30, evalúa $a_n = a_1 r^{n-1}$ para $n = 30$.

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Realiza

$$\begin{aligned} a_{30} &= 1(2)^{30-1} \\ a_{30} &= 1(2)^{29} \\ &= 1(536{,}870{,}912) \\ &= 536{,}870{,}912 \end{aligned}$$

Responde El día 30, el monto que recibirías es de 536 870 912 centavos, o \$5 368 709.12

d) Entiende y Traduce Para determinar el monto total recibido durante los 30 días, determina la trigésima suma parcial.

$$s_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

$$s_{30} = \frac{1(1 - 2^{30})}{1 - 2}$$

Realiza

$$= \frac{1\,(1 - 1\,073\,741\,824)}{-1}$$

$$= 1\,073\,741\,823$$

e) Responde En consecuencia, durante 30 días, el monto total que recibirías mediante este método, sería 1 073 741 823 centavos, o \$10 737 418.23. El monto recibido mediante este método, sobrepasa enormemente los \$30 000 recibidos al seleccionar \$1 000 al día, durante 30 días.

Ahora resuelve el ejercicio 87

EJEMPLO 11 **Péndulo** En cada oscilación (izquierda a derecha o derecha a izquierda), cierto péndulo recorre 90% de su oscilación previa. Por ejemplo, si la oscilación a la derecha es de 10 pies, la oscilación de vuelta hacia la izquierda es de $0.9 \times 10 = 9$ pies (observa la **Figura 11.1**). Si la primera oscilación es de 10 pies, determina la distancia total recorrida por el péndulo, para cuando llegue al reposo.

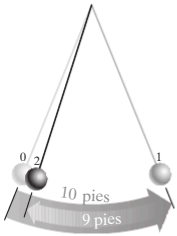


FIGURA 11.1

Solución Entiende Este problema puede considerarse como una serie geométrica infinita, con $a_1 = 10$ y $r = 0.9$. En consecuencia, puedes usar la fórmula $s_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$ para determinar la distancia total recorrida por el péndulo.

Traduce y Realiza

$$s_\infty = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{10}{1 - 0.9} = \frac{10}{0.1} = 100 \text{ pies}$$

Responde Para cuando el péndulo llegue al reposo, habrá recorrido 100 pies.

Ahora resuelve el ejercicio 107

11.3 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

suma	diferencia	d	r	infinita	término	razón	menor
0	1	dividir	multiplicar	geométrica	serie	mayor	

1. Una sucesión en donde cada término, después del primero, es un múltiplo común del término precedente, es una sucesión _____.
2. El múltiplo común de una sucesión geométrica, se llama _____ común.
3. La razón común de una sucesión geométrica, se identifica mediante la letra _____.
4. La razón común puede determinarse al _____ cualquier término, excepto el primer término, entre el término precedente.
5. La fórmula $a_n = a_1 r^{n-1}$, se usa para determinar el *enésimo* _____ de una sucesión geométrica.
6. La suma de los términos de una sucesión geométrica, es una _____ geométrica.
7. La fórmula $s_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$, se usa para determinar la *enésima* _____ parcial de una sucesión geométrica.
8. Si los términos de una sucesión geométrica aumentan, el valor para r es _____ que 1.
9. Si los términos de una sucesión geométrica son iguales, el valor de r es _____.
10. La fórmula $s_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$, $|r| < 1$, se usa para determinar la suma de una serie geométrica _____.

Practica tus habilidades

Determina los cinco primeros términos de cada sucesión geométrica.

11. $a_1 = 2, r = 5$

12. $a_1 = 5, r = 2$

13. $a_1 = 7, r = -2$

14. $a_1 = 20, r = -5$

15. $a_1 = -1, r = 3$

16. $a_1 = -3, r = 2$

17. $a_1 = 5, r = -1$

18. $a_1 = -13, r = -1$

19. $a_1 = 72, r = \frac{1}{3}$

20. $a_1 = 6, r = \frac{1}{2}$

21. $a_1 = 90, r = -\frac{1}{3}$

22. $a_1 = 32, r = -\frac{1}{4}$

23. $a_1 = \frac{1}{3}, r = \frac{1}{2}$

24. $a_1 = \frac{7}{8}, r = \frac{2}{3}$

25. $a_1 = \frac{5}{16}, r = -\frac{2}{5}$

26. $a_1 = \frac{1}{2}, r = -\frac{1}{3}$

Determina el término indicado de cada sucesión geométrica.

27. $a_1 = 4, r = 2$; determina a_6.

28. $a_1 = 3, r = 3$; determina a_5.

29. $a_1 = 5, r = -3$; determina a_7.

30. $a_1 = 4, r = -2$; determina a_6.

31. $a_1 = -3, r = -2$; determina a_{12}.

32. $a_1 = -10, r = -2$; determina a_4.

33. $a_1 = 2, r = \frac{1}{2}$; determina a_8.

34. $a_1 = 3, r = \frac{1}{3}$; determina a_9.

35. $a_1 = -6, r = -\frac{2}{3}$; determina a_9.

36. $a_1 = -7, r = -\frac{3}{4}$; determina a_7.

37. $a_1 = \frac{1}{8}, r = 2$; determina a_{10}.

38. $a_1 = \frac{2}{3}, r = 6$; determina a_8.

Determina la suma indicada.

39. $a_1 = 5, r = 2$; determina s_5.

40. $a_1 = 2, r = 5$; determina s_6.

41. $a_1 = 7, r = -3$; determina s_4.

42. $a_1 = 2, r = -2$; determina s_{12}.

43. $a_1 = 80, r = -1$; determina s_{100}.

44. $a_1 = 100, r = -1$; determina s_{200}.

45. $a_1 = \frac{1}{3}, r = 5$; determina s_7.

46. $a_1 = \frac{3}{4}, r = 3$; determina s_7.

47. $a_1 = -15, r = -\frac{1}{2}$; determina s_9.

48. $a_1 = -9, r = -\frac{1}{3}$; determina s_6.

Para cada sucesión geométrica, determina la razón común, r, y luego escribe una expresión para el término general (o enésimo), a_n.

49. 9, 18, 36, 72, . . .

50. 2, 6, 18, 54, . . .

51. 2, −6, 18, −54, . . .

52. −3, 6, −12, 24, . . .

53. $-5, \frac{5}{4}, -\frac{5}{16}, \frac{5}{64}$

54. $3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \ldots$

55. $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$

56. $\frac{2}{3}, \frac{10}{3}, \frac{50}{3}, \frac{250}{3}, \ldots$

Determina la suma de los términos en cada sucesión geométrica infinita.

57. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

58. $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \ldots$

59. $1, -\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, -\frac{1}{125}, \ldots$

60. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$

61. $5, 2, \frac{4}{5}, \frac{8}{25}, \ldots$

62. $7, 3, \frac{9}{7}, \frac{27}{7}, \ldots$

63. $-\frac{3}{4}, -\frac{3}{16}, -\frac{3}{64}, -\frac{3}{256}, \ldots$

64. $-\frac{4}{3}, -\frac{4}{9}, -\frac{4}{27}, -\frac{4}{81}, \ldots$

Dado s_n, a_1 y r, determina n en cada serie geométrica.

65. $s_n = 93, a_1 = 3$ y $r = 2$

66. $s_n = 80, a_1 = 2$ y $r = 3$

67. $s_n = \frac{189}{32}, a_1 = 3$ y $r = \frac{1}{2}$

68. $s_n = \frac{104}{9}, a_1 = 8$ y $r = \frac{1}{3}$

Determina la suma de cada serie geométrica infinita.

69. $4 + \frac{8}{3} + \frac{16}{9} + \frac{32}{27} + \cdots$

70. $16 + 8 + 4 + 2 + \cdots$

71. $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$

72. $2 + \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \frac{16}{27} + \cdots$

73. $-60 + 20 - \frac{20}{3} + \frac{20}{9} - \cdots$

74. $-12 - \frac{12}{5} - \frac{12}{25} - \frac{12}{125} - \cdots$

75. $6 - 2 + \frac{2}{3} - \frac{2}{9} + \cdots$

76. $7 - 1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{49} + \cdots$

Escribe cada número decimal periódico, como una razón de enteros.

77. 0.7777...

78. 0.9999...

79. 0.242424...

80. 0.454545...

81. 0.375375...

82. 0.742742...

Resolución de problemas

83. En una sucesión geométrica, $a_2 = 15$ y $a_5 = 405$; determina r y a_1.

84. En una sucesión geométrica, $a_2 = 27$ y $a_5 = 1$; determina r y a_1.

85. En una sucesión geométrica, $a_3 = 28$ y $a_5 = 112$; determina r y a_1.

86. En una sucesión geométrica, $a_2 = 12$ y $a_5 = -324$; determina r y a_1.

87. Hogaza de pan Una hogaza de pan, actualmente, cuesta \$1.40. La inflación hace que el costo de la hogaza de pan aumente 3% al año. En consecuencia, en el año 2, el costo de una hogaza de pan será de $\$1.40(1.03)$. En el año 3, el costo de una hogaza de pan será de $\$1.40(1.03)^2$. En el año 4, el costo de una hogaza de pan será de $\$1.40(1.03)^3$, etcétera. Determina el costo de una hogaza de pan en el año 9.

88. Bicicleta Una bicicleta particular, actualmente cuesta \$300. Determina el costo de la bicicleta en el año 13, si la inflación creciera a una tasa constante de 4% al año. Consulta el ejercicio 87.

89. Masa Cierta sustancia química, pierde la mitad de su masa cada día. Para esta sustancia química, hay 1600 gramos restantes, después del primer día; 800 gramos restantes, después del segundo día; 400 gramos restantes, después del tercer día, etcétera.

a) Determina la cantidad de la sustancia restante, después de 6 días.

b) ¿Después de cuántos días, habrá 6.25 gramos restantes de la sustancia?

90. Masa Cierta sustancia química, pierde un cuarto de su masa cada día. En consecuencia, la sustancia mantiene tres cuartos de su masa cada día. Para esta sustancia química, hay 256000 gramos restantes, después del primer día; 192000 gramos restantes, después del segundo día; 144000 gramos restantes, después del tercer día, etcétera.

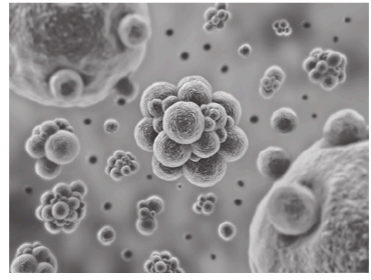
a) Determina la cantidad de la sustancia restante, después de 5 días.

b) ¿Después de cuántos días, habrá 45562.5 gramos restantes de la sustancia?

91. Bacterias El número de bacterias en cierto cultivo, se duplica cada hora. En este cultivo, hay 500 bacterias, después de 1 hora; 1000 bacterias, después de 2 horas; 2000 bacterias, después de 3 horas, etcétera.

a) Determina el número de bacterias en el cultivo, después de 8 horas.

b) ¿Después de cuántas horas, habrá 512000 bacterias en el cultivo?



92. Bacterias El número de bacterias en cierto cultivo, se triplica cada hora. En este cultivo, hay 100 bacterias, después de 1 hora; 300 bacterias, después de 2 horas; 900 bacterias, después de 3 horas, etcétera.

a) Determina el número de bacterias en el cultivo, después de 6 horas.

b) ¿Después de cuántas horas, habrá 656100 bacterias en el cultivo?

93. Horno de una panadería Un nuevo horno comercial para una panadería, cuesta $39 000. El horno pierde 8% de su valor, anualmente. En consecuencia, en el año 2, el valor del horno será de $39 000(0.92). En el año 3, el valor será de $39 000(0.92)^2. En el año 4, el valor será de $39 000(0.92)^3, etcétera. Determina el valor del horno en el año 10.

94. Equipo de granja Una pieza de equipo de granja, que cuesta $105 000, disminuye en valor 15% al año. Determina el valor del equipo en 5 años. Consulta el ejercicio 93.

95. Luz filtrada La cantidad de luz que se filtra, a través de un lago, disminuye por la mitad por cada metro de profundidad.

a) Determina una sucesión que indique la cantidad de luz restante, a profundidades de 1, 2, 3, 4 y 5 metros.

b) ¿Cuál es el término general para esta sucesión?

c) ¿Cuál es la luz restante, a una profundidad de 7 metros?

96. Inyección de tinte Durante un angiograma coronario, un tinte médico se inyecta en la vena de un paciente, para monitorizar el flujo de sangre a través del corazón. Después de cada hora, permanecen cuatro quintos del tinte de la hora previa. Durante un angiograma, Ricardo tiene 125 centímetros cúbicos (cc) de tinte inyectados en la vena.

a) Determina una sucesión, que indique la cantidad de tinte restante después de 1, 2, 3, 4 y 5 horas.

b) ¿Cuál es el término general para la sucesión determinada en el inciso **a)**?

c) ¿Cuánto tinte permanece después de 24 horas?

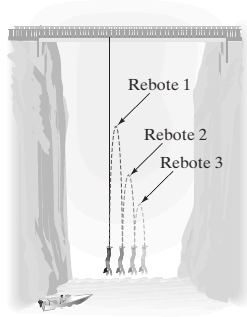
97. Inversión Tú inviertes $10 000 en una cuenta de ahorros, que paga 6% de interés compuesto, anualmente. Determina el monto en tu cuenta al cabo de 8 años.

98. Inversión Micaela invierte $6 000 en un certificado de depósito (CD), que paga 2.5% de interés compuesto, anualmente. Determina el valor del CD al cabo de 5 años.

99. Salto en bungee Sara salta en bungee desde un puente sobre un río. En el salto inicial, la cuerda bungee se estira a 220 pies. Supón, que el primer rebote alcanza una altura de 60% del salto original, y que cada rebote adicional, alcanza una altura de 60% del rebote previo.

a) ¿Cuál será la altura del cuarto rebote?

b) Teóricamente, Sara nunca dejaría de rebotar, pero en realidad, lo hará. Usa la serie geométrica infinita, para estimar la distancia total que recorre Sara en sentido *decreciente*.



100. Salto en bungee Repite el ejercicio 99 **b)**, pero esta vez, determina la distancia total recorrida en dirección *ascendente*.



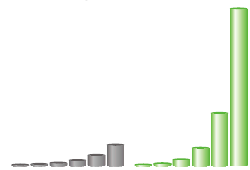
101. Pelota de ping-pong Una pelota de ping-pong, cae de una mesa de 30 pulgadas de alto. Supón, que el primer rebote alcanza un altura de 70% de la distancia que cae la pelota, y que cada rebote adicional, alcanza una altura de 70% del rebote previo.

a) ¿Qué tan alto rebotará la pelota en el tercer rebote?

b) Teóricamente, la pelota nunca dejaría de rebotar, pero en realidad, lo hará. Estima la distancia total que la pelota recorre en sentido *decreciente*.

102. Pelota de ping-pong Repite el ejercicio 101 **b)**, pero esta vez, determina la distancia total recorrida en sentido *ascendente*.

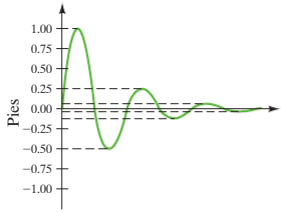
103. Pilas de fichas Supón, que tú formas pilas de fichas grises, de modo tal, que hay una ficha gris en la primera pila, y en cada pila sucesiva, duplicas el número de fichas. En consecuencia, tienes pilas de 1, 2, 4, 8, etcétera, fichas grises. También, formas pilas de fichas verdes y comienzas con una ficha verde, y, después, triplicas el número en cada pila sucesiva. En consecuencia, las pilas contendrán 1, 3, 9, 27, etcétera, fichas verdes. ¿Cuántas más fichas tendrá la sexta pila de fichas verdes, que la sexta pila de fichas grises?



104. Pila de dinero Si comienzas con \$1 y duplicas tu dinero cada día, ¿cuántos días tardarás en sobrepasar \$1 000 000?

105. Rebote de bola Una bola se suelta desde una altura de 10 pies. La bola rebota hasta una altura de 9 pies. En cada rebote sucesivo, la bola se eleva a 90% de su altura previa. Determina la *distancia vertical total* recorrida por la bola, cuando llega al reposo.

106. Acción ondulatoria Una partícula, sigue la trayectoria indicada por la onda que se muestra. Determina la *distancia vertical total* recorrida por la partícula.



107. Péndulo En cada oscilación (izquierda a derecha o derecha a izquierda), un péndulo recorre 80% de su oscilación previa. Si la primera oscilación es de 10 pies, determina la distancia total recorrida por el péndulo, para cuando llegue al reposo.

108. Péndulo En cada oscilación, un péndulo recorre 90% de su oscilación previa. Si la primera oscilación es de 4 pies, determina la distancia total recorrida por el péndulo, para cuando llegue al reposo.

Ejercicios conceptuales y de redacción

109. En una serie geométrica, si $|r| < 1$, ¿a qué se aproxima r^n, a medida que n se vuelve cada vez más grande?

110. ¿Existe la suma de una serie geométrica infinita, cuando $|r| > 1$?

111. En una sucesión geométrica, ¿puede el valor de r ser un número negativo?

112. En una sucesión geométrica, ¿puede el valor de r ser un número positivo?

113. En una serie geométrica, si $a_1 = 6$ y $r = \frac{1}{4}$, ¿existe s_∞? Si existe, ¿cuál es su valor? Explica.

114. En una serie geométrica, si $a_1 = 6$ y $r = -2$, ¿existe s_∞? Si existe, ¿cuál es su valor? Explica.

Problema de desafío

115. Determina la suma de la sucesión 1, 2, 4, 8, …, 1 048 576, así como el número de términos en la sucesión.

Ejercicios de repaso acumulativo

[3.6] **116.** Sea $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = x - 3$. Determina $(f \cdot g)(4)$.

[5.2] **117.** Multiplica $(2x - 3y)(3x^2 + 4xy - 2y^2)$.

[6.4] **118.** Resuelve $S = \dfrac{2a}{1 - r}$ en términos de r.

[9.1] **119.** Sea $g(x) = x^3 + 9$. Determina $g^{-1}(x)$.

[9.6] **120.** Resuelve $\log x + \log (x - 1) = \log 20$.

[10.4] **121. Vela de un velero** Una vela en un velero, tiene forma de triángulo recto, con un perímetro de 36 metros y una hipotenusa de 15 metros. Determina la longitud de cada cateto del triángulo.



EXAMEN DE MITAD DE CAPÍTULO: SECCIONES 11.1-11.3

Para descubrir qué tan bien entiendes el material del capítulo hasta este punto, resuelve esta breve evaluación. Las respuestas, y la sección donde el material se discutió inicialmente, se proporcionan en la parte final del libro. Revisa cualquier pregunta que respondas de manera incorrecta.

1. Escribe los cinco primeros términos de la sucesión, cuyo *enésimo* término es $a_n = -3n + 7$.
2. Si $a_n = n(n + 6)$, determina el séptimo término.
3. Determina la primera y la tercera suma parcial, s_1 y s_3, para la sucesión, cuyo *enésimo* término, es $a_n = 2^n - 1$.
4. Escribe los siguientes tres términos de la sucesión 5, 1, -3, -7, -11, ...
5. Evalúa la serie $\sum_{i=1}^{5} (4i - 3)$.
6. Si el término general de una sucesión, es $a_n = \frac{1}{4}n + 9$, escribe una expresión usando Σ, para representar la quinta suma parcial.
7. Escribe los cuatro primeros términos de la sucesión aritmética, con $a_1 = -6$ y $d = 5$. Determina una expresión para el término general a_n.
8. Determina d para la sucesión aritmética, con $a_1 = \frac{11}{2}$ y $a_7 = -\frac{1}{2}$.
9. Determina n para la sucesión aritmética, con $a_1 = 22$, $a_n = -3$ y $d = -5$.
10. Determina la diferencia común, d, y la suma, s_6, para la sucesión aritmética, con $a_1 = -8$ y $a_6 = 7$.
11. Determina s_{10} para la sucesión aritmética, con $a_1 = \frac{5}{2}$ y $d = \frac{1}{2}$.
12. Determina el número de términos en la sucesión aritmética $-7, 0, 7, 14, \ldots, 70$.
13. Se colocan troncos en una pila con 16 troncos en la fila inferior, 15 en la siguiente fila, 14 en la siguiente, etcétera, hasta la parte superior, donde hay un tronco. Cada fila tiene un tronco menos que la fila bajo ella. ¿Cuántos troncos hay en la pila?
14. Escribe los cinco primeros términos de la serie geométrica, con $a_1 = 100$ y $r = -\frac{1}{2}$.
15. Determina a_7 para la sucesión geométrica, con $a_1 = 27$ y $r = \frac{1}{3}$.
16. Determina s_6 para la sucesión geométrica, con $a_1 = 5$ y $r = 2$.
17. Para la sucesión geométrica $8, -\frac{16}{3}, \frac{32}{9}, -\frac{64}{27}, \ldots$, determina r.
18. Determina la suma de los términos, en la serie infinita $12, 4, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \ldots$.
19. Escribe el número decimal periódico $0.878787\ldots$ como una razón de dos enteros.
20. **a)** ¿Qué es una sucesión?
    b) ¿Qué es una sucesión aritmética?
    c) ¿Qué es una sucesión geométrica?
    d) ¿Qué es una serie?

11.4 El teorema del binomio

1. **Evaluación de factoriales**
2. **Uso del triángulo de Pascal**
3. **Uso del teorema del binomio**

En esta sección, estudiarás un método para expandir potencias de binomios. Este método, se usará para reescribir expresiones como $(2x + 3)^6$, en forma expandida. Este método, se llama *teorema del binomio*.

1 Evaluación de factoriales

Para entender el teorema del binomio, debes comprender los *factoriales*.

n factorial

La notación $n!$ se lee **"n factorial"**.

$$n! = n(n - 1)(n - 2)(n - 3) \cdots (1)$$

para cualquier entero positivo n. Más aún, por definición,

$$0! = 1$$

Ejemplos

$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$



USA TU CALCULADORA

Calculadora científica

Los factoriales, pueden evaluarse en calculadoras que contengan una tecla [n!] o [x!] Con frecuencia, la tecla de factorial es una tecla de segunda función.

En los siguientes ejemplos, las respuestas aparecen después de [n!].

Evalúa 6!	6 [2nd] [n!]	720
Evalúa 9!	9 [2nd] [n!]	362880

Calculadora graficadora

En la mayoría de las calculadoras graficadoras, los factoriales se encuentran bajo la tecla [MATH], en el menú de función de Probabilidad (PRB).
En la calculadora TI-84 Plus, oprime [MATH] y después desplaza las opciones hacia la derecha, usando la tecla de la flecha derecha, [▶], tres veces, hasta que llegues a PRB. La *n*! (o !), es el cuarto ítem en el menú.

Para determinar 5! o 6!, la secuencia de teclas es la siguiente:

SECUENCIAS DE TECLAS	RESPUESTA
5 [MATH] [▶] [▶] [▶] 4 [ENTER]	120
6 [MATH] [▶] [▶] [▶] 4 [ENTER]	720

2 Uso del triángulo de Pascal

Mediante la multiplicación polinomial, puedes obtener las siguientes potencias del binomio $a + b$. Estas multiplicaciones, se llaman *expansiones del binomio*.

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a + b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$



Blaise Pascal
Al matemático francés, Blaise Pascal (1623-1662), se le atribuye el desarrollo del arreglo de números del triángulo de Pascal.

Observa que, cuando expandes un binomio de la forma $(a + b)^n$,

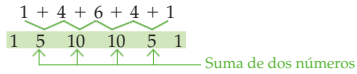
1. Hay $n + 1$ términos en la expansión.
2. El primer término, es a^n; y el último término, es b^n.
3. Al leer de izquierda a derecha, los exponentes de a, disminuyen por 1, de término a término; mientras que los exponentes de b, aumentan por 1, de término a término.
4. La suma de los exponentes en las variables en cada término, es n.
5. Los coeficientes de los términos equidistantes, desde los extremos, son iguales.

Si examinas sólo las variables en $(a + b)^5$, tienes $a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4$, y b^5.

Los coeficientes numéricos de cada término, en la expansión de $(a + b)^n$, pueden determinarse usando el **triángulo de Pascal**. Por ejemplo, si $n = 5$, puedes determinar los coeficientes numéricos de $(a + b)^5$, de la manera siguiente.

Exponente en el binomio	Triángulo de Pascal
$n = 0$	1
$n = 1$	1 1
$n = 2$	1 2 1
$n = 3$	1 3 3 1
$n = 4$	1 4 6 4 1
$n = 5$	1 5 10 10 5 1
$n = 6$	1 6 15 20 15 6 1

Examina la quinta fila $(n = 4)$ y la sexta fila $(n = 5)$.



Observa que, el primer y el último número en cada fila, es el 1; y los números interiores, se obtienen al sumar los dos números en la fila superior (a derecha e izquierda). Los coeficientes numéricos de $(a + b)^5$, son 1, 5, 10, 10, 5 y 1. En consecuencia, puedes escribir la expansión de $(a + b)^5$, usando la información de los inciso 1 al 5 de la página anterior para las variables y sus exponentes, y usando el triángulo de Pascal para los coeficientes.

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Este método de expandir un binomio, no es práctico cuando n es grande.

3 Uso del teorema del binomio

Dentro de poco, se presentará un método más práctico, llamado teorema del binomio, para expandir expresiones de la forma $(a+b)^n$. Sin embargo, antes de presentar esta fórmula, es necesario explicar cómo determinar *coeficientes binomiales* de la forma $\binom{n}{r}$.

Coeficientes binomiales

Para n y r enteros no negativos, $n \geq r$,

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n - r)!}$$

El coeficiente binomial $\binom{n}{r}$, se lee "el número de *combinaciones* de n objetos, tomados de r a la vez". Las combinaciones se usan en muchas áreas de las matemáticas, incluyendo el estudio de la probabilidad.

EJEMPLO 1 Evalúa cada uno de los siguientes.

a) $\binom{5}{2}$ **b)** $\binom{6}{3}$ **c)** $\binom{7}{5}$

Solución Para evaluar, en cada caso se usará la definición de coeficientes binomiales.

a) $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1)} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = \frac{20}{2} = 10$

b) $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1)} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{120}{6} = 20$

c) $\binom{7}{5} = \frac{7!}{5! \cdot (7-5)!} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1)} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = \frac{42}{2} = 21$

Ahora resuelve el ejercicio 11

En el siguiente ejemplo, debes recordar que $0! = 1$ y $1! = 1$.

EJEMPLO 2 Evalúa cada uno de los siguientes.

a) $\binom{5}{0}$ **b)** $\binom{5}{1}$ **c)** $\binom{5}{4}$ **d)** $\binom{5}{5}$

Solución

a) $\binom{5}{0} = \frac{5!}{0! \cdot (5-0)!} = \frac{5!}{0! \cdot 5!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = \frac{1}{1} = 1$

b) $\binom{5}{1} = \frac{5!}{1! \cdot (5-1)!} = \frac{5!}{1! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = \frac{5}{1} = 5$

c) $\binom{5}{4} = \frac{5!}{4! \cdot (5-4)!} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot 1} = \frac{5}{1} = 5$

d) $\binom{5}{5} = \frac{5!}{5! \cdot (5-5)!} = \frac{5!}{5! \cdot 0!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot 1} = \frac{1}{1} = 1$

Ahora resuelve el ejercicio 19

Comprende el Álgebra

Cuando evalúes combinaciones, lo siguiente es verdadero para cualquier entero positivo n.

$$\binom{n}{0} = 1$$
$$\binom{n}{1} = n$$
$$\binom{n}{n-1} = n$$
$$\binom{n}{n} = 1$$

Al estudiar el ejemplo 2, puedes razonar que, para cualquier entero positivo n:

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n-1} = n, \quad \binom{n}{n} = 1$$

Saber cómo evaluar tales coeficientes binomiales, puede ayudarte cuando uses el teorema del binomio.

USA TU CALCULADORA GRAFICADORA

En la mayoría de las calculadoras graficadoras, se usa la notación ${}_nC_r$ en lugar de $\binom{n}{r}$. Por ende, $\binom{7}{4}$ se representaría como ${}_7C_4$.

En la calculadora TI-84 Plus, la notación ${}_nC_r$ puede encontrarse abajo del menú PRB. Esta vez, es la opción 3, ${}_nC_r$. Para determinar ${}_7C_4$ u ${}_8C_2$, usa las siguientes secuencias de teclas:

	SECUENCIAS DE TECLAS	RESPUESTA
${}_7C_4$	7 MATH ▶ ▶ ▶ 3 4 ENTER	35
${}_8C_2$	8 MATH ▶ ▶ ▶ 3 2 ENTER	28

Si usas una calculadora graficadora diferente, consulta el manual para aprender cómo evaluar combinaciones.

Ahora se presenta el teorema del binomio.

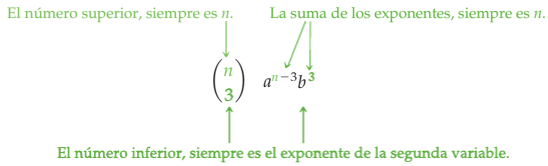
Teorema del binomio

Para cualquier entero positivo n,

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

Observa, en el teorema del binomio, que, la suma de los exponentes en las variables de cada término, es n. En la combinación, el número superior siempre es n, y el número inferior siempre es el mismo que el exponente en la segunda variable del término.

Por ejemplo, considera el término $\binom{n}{3}a^{n-3}b^3$.



Ahora se expandirá $(a + b)^5$, usando el teorema del binomio y verás si consigues la misma expresión que obtuviste cuando se usó la multiplicación polinomial y el triángulo de Pascal, para conseguir la expansión.

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= \binom{5}{0}a^5b^0 + \binom{5}{1}a^{5-1}b^1 + \binom{5}{2}a^{5-2}b^2 + \binom{5}{3}a^{5-3}b^3 + \binom{5}{4}a^{5-4}b^4 + \binom{5}{5}a^{5-5}b^5\\ &= \binom{5}{0}a^5b^0 + \binom{5}{1}a^4b^1 + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}a^1b^4 + \binom{5}{5}a^0b^5\\ &= \frac{5!}{0!\cdot 5!}a^5 + \frac{5!}{1!\cdot 4!}a^4b + \frac{5!}{2!\cdot 3!}a^3b^2 + \frac{5!}{3!\cdot 2!}a^2b^3 + \frac{5!}{4!\cdot 1!}ab^4 + \frac{5!}{5!\cdot 0!}b^5\\ &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\end{aligned}$$

Esta es la misma expresión que se obtuvo anteriormente.

EJEMPLO 3 Usa el teorema del binomio para expandir $(2x + 3)^6$.

Solución Si usas $2x$ como a y 3 como b, obtienes:

$$\begin{aligned}(2x+3)^6 &= \binom{6}{0}(2x)^6(3)^0 + \binom{6}{1}(2x)^5(3)^1 + \binom{6}{2}(2x)^4(3)^2 + \binom{6}{3}(2x)^3(3)^3 + \binom{6}{4}(2x)^2(3)^4 + \binom{6}{5}(2x)^1(3)^5 + \binom{6}{6}(2x)^0(3)^6\\ &= 1(2x)^6 + 6(2x)^5(3) + 15(2x)^4(9) + 20(2x)^3(27) + 15(2x)^2(81) + 6(2x)(243) + 1(729)\\ &= 64x^6 + 576x^5 + 2160x^4 + 4320x^3 + 4860x^2 + 2916x + 729\end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 21

EJEMPLO 4 Usa el teorema del binomio para expandir $(5x - 2y)^4$.

Solución Escribe $(5x - 2y)^4$ como $[5x + (-2y)]^4$. En el teorema del binomio, usa $5x$ en lugar de a y $-2y$ en lugar de b.

$$\begin{aligned}[5x + (-2y)]^4 &= \binom{4}{0}(5x)^4(-2y)^0 + \binom{4}{1}(5x)^3(-2y)^1 + \binom{4}{2}(5x)^2(-2y)^2 + \binom{4}{3}(5x)^1(-2y)^3 + \binom{4}{4}(5x)^0(-2y)^4\\ &= 1(5x)^4 + 4(5x)^3(-2y) + 6(5x)^2(-2y)^2 + 4(5x)(-2y)^3 + 1(-2y)^4\\ &= 625x^4 - 1000x^3y + 600x^2y^2 - 160xy^3 + 16y^4\end{aligned}$$

Ahora resuelve el ejercicio 29

11.4 SERIE DE EJERCICIOS

Ejercicios de calentamiento

Llena los espacios en blanco con la palabra, frase o símbolo(s) adecuado(s) de la siguiente lista.

binomiales	0	1	2	4	producto
de Pascal	10	20	factorial	suma	cociente

1. La notación $n!$, se lee como "n _____".
2. El valor de $n!$ $(n \neq 0)$, es la(el) _____ de los números enteros no negativos, desde n hasta 1.
3. El valor de 0!, es _____.
4. El valor de 2!, es _____.
5. El número de términos en la expansión de $(a + b)^{19}$, es _____.
6. La fórmula $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n - r)!}$, se usa para determinar los coeficientes _____ en la expansión de $(a + b)^n$.
7. El valor de $\binom{5}{3}$, es _____.
8. Los coeficientes numéricos de los términos en la expansión de $(a + b)^n$, pueden determinarse usando el triángulo _____.

Practica tus habilidades

Evalúa cada combinación.

9. $\binom{5}{3}$
10. $\binom{7}{3}$
11. $\binom{8}{4}$
12. $\binom{11}{8}$
13. $\binom{7}{4}$
14. $\binom{8}{5}$
15. $\binom{9}{5}$
16. $\binom{10}{6}$
17. $\binom{12}{10}$
18. $\binom{14}{10}$
19. **a)** $\binom{10}{0}$ **b)** $\binom{10}{1}$ **c)** $\binom{10}{9}$ **d)** $\binom{10}{10}$
20. **a)** $\binom{11}{0}$ **b)** $\binom{11}{1}$ **c)** $\binom{11}{10}$ **d)** $\binom{11}{11}$

Usa el teorema del binomio para expandir cada expresión.

21. $(x + 2)^3$
22. $(x + 3)^3$
23. $(x - 5)^3$
24. $(x - 4)^3$
25. $(2x - 3)^3$
26. $(2x + 3)^3$
27. $(a + b)^4$
28. $(a - b)^4$
29. $(3a - b)^5$
30. $(x + 2y)^5$
31. $\left(\frac{x}{2} - 3\right)^4$
32. $\left(2x + \frac{1}{2}\right)^4$

Escribe los cuatro primeros términos de cada expansión.

33. $(x + 5)^9$
34. $(x - 8)^{11}$
35. $(3x - y)^7$
36. $(2x + 3)^8$
37. $(x^2 - 3y)^8$
38. $(x^3 + 2y)^7$

Resolución de problemas

39. ¿Cuáles son el primer, segundo, penúltimo y último término de la expansión $(x + 3)^8$?
40. ¿Cuáles son el primer, segundo, penúltimo y último término de la expansión $(x + 2)^{10}$?
41. ¿Cuáles son el primer, segundo, penúltimo y último término de la expansión $(2x + 5)^6$?
42. ¿Cuáles son el primer, segundo, penúltimo y último término de la expansión $(3x - 4)^5$?

Ejercicios conceptuales y de redacción

43. ¿$n!$, es igual a $n \cdot (n-1)!$? Explica y proporciona un ejemplo para respaldar tu respuesta.

44. ¿$(n+1)!$, es igual a $(n+1) \cdot n!$? Explica y proporciona un ejemplo para respaldar tu respuesta.

45. ¿$(n-3)!$, es igual a $(n-3)(n-4)(n-5)!$ para $n \geq 5$? Explica y proporciona un ejemplo para respaldar tu respuesta.

46. ¿$(n+2)!$, es igual a $(n+2)(n+1)(n)(n-1)!$ para $n \geq 1$? Explica y proporciona un ejemplo para respaldar tu respuesta.

47. ¿Bajo qué condiciones $\binom{n}{m}$, donde n y m son enteros no negativos, tendrá un valor de 1?

48. ¿Podría $\binom{n}{m}$, tener un valor de 0? Explica.

49. Escribe el teorema del binomio, usando notación de sumatoria.

50. Demuestra que $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$, para cualquier número entero no negativo n y r, y $r \leq n$.

Ejercicios de repaso acumulativo

[3.4] **51.** Determina la intersección con el eje de las y, para la gráfica de $2x + y = 10$.

[4.1] **52.** Resuelve el sistema de ecuaciones

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y = 4$$
$$\frac{2}{3}x - y = \frac{8}{3}$$

[5.8] **53.** Resuelve $x(x-11) = -18$.

[7.4] **54.** Simplifica $\sqrt{20xy^4}\sqrt{6x^5y^7}$.

[9.1] **55.** Determina $f^{-1}(x)$ si $f(x) = 3x + 8$.

Capítulo 11 Resumen

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 11.1	
Una **sucesión** de números, es una lista de números colocados en un orden específico. Cada número se llama **término** de la sucesión.	2, 6, 10, 14, 18, 22, . . . es una sucesión 7, 14, 21, 28, 35, 42, . . . es una sucesión
Una **sucesión infinita**, es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales.	Dominio: $\{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}$ $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \qquad \downarrow$ Rango : $\{7, 14, 21, 28, \ldots, 7n, \ldots\}$ La sucesión infinita es 7, 14, 21, 28, . . .
Una **sucesión finita**, es una función cuyo dominio incluye solamente los primeros n números naturales.	Dominio: $\{1, 2, 3, 4\}$ $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$ Rango: $\{4, 8, 12, 16\}$ La sucesión finita es 4, 8, 12, 16.
El **término general de una sucesión**, a_n, define la sucesión.	Sea $a_n = n^2 - 3$. Escribe los primeros tres términos de esta sucesión: $a_1 = 1^2 - 3 = -2$ $a_2 = 2^2 - 3 = 1$ $a_3 = 3^2 - 3 = 6$ Los tres primeros términos de la sucesión, son −2, 1, 6.

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 11.1 (Continuación)	
Una **sucesión creciente,** es una sucesión donde cada término es mayor que el término precedente. Una **sucesión decreciente,** es una sucesión donde cada término es menor que el término precedente.	$-4, -1, 2, 5$, es una sucesión creciente. $50, 48, 46, 44$, es una sucesión decreciente.
Una **serie**, es la suma de los términos de una sucesión. Una serie puede ser finita o infinita.	Si la sucesión es $1, 3, 5, 7, 9$, entonces la serie es $1+3+5+7+9=25$. Si la sucesión es $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \cdots, \left(\frac{1}{3}\right)^n, \ldots$ entonces la serie es $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^n+\cdots$
Una **suma parcial**, s_n, de una sucesión infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, es la suma de los primeros n términos. Esto es: $s_1 = a_1$ $s_2 = a_1 + a_2$ $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$ $\vdots$ $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$	Sea $a_n = \frac{5+n}{n^2}$. Calcula s_1 y s_3. $s_1 = a_1 = \frac{5+1}{1^2} = \frac{6}{1} = 6$ $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$ $= \frac{5+1}{1^2} + \frac{5+2}{2^2} + \frac{5+3}{3^2}$ $= \frac{6}{1} + \frac{7}{4} + \frac{8}{9} = 8\frac{23}{36}$
Una serie puede escribirse usando **notación de sumatoria** o **de suma**: $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ i es el **índice de la suma**, n es el **límite superior de la suma** y 1 es el **límite inferior de la suma**.	$\sum_{i=1}^{4}(3i-7) = (3\cdot 1-7)+(3\cdot 2-7)+(3\cdot 3-7)+(3\cdot 4-7)$ $= -4-1+2+5=2$ Si $a_n = 6n^2+11$, la tercera suma parcial, s_3, en notación de sumatoria, se escribe como $\sum_{i=1}^{3}(6i^2+11)$.
Sección 11.2	
Una **sucesión aritmética**, es una sucesión en donde cada término, después del primero, difiere del término precedente por una **diferencia común**, d.	Sucesión aritmética — Diferencia común, d $3, 8, 13, 18, 23, \ldots$ — $d = 8-3 = 5$ $20, 14, 8, 2, -4, \ldots$ — $d = 14-20 = -6$
El *enésimo* **término**, a_n, de una sucesión aritmética, es: $a_n = a_1 + (n-1)d$	El *enésimo* término de la sucesión aritmética con $a_1 = 7$ y $d = -5$, es: $a_n = 7 + (n-1)(-5)$ $= 7 - 5n + 5$ $= -5n + 12$ Para esta sucesión, el vigésimo término, es: $a_{20} = -5(20) + 12 = -100 + 12$ $= -88$

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 11.2 (Continuación)	
Una **serie aritmética**, es la suma de los términos de una sucesión aritmética. La suma de los primeros n términos, s_n, de una sucesión aritmética, también conocida como la ***enésima* suma parcial**, es: $$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$ Para una serie aritmética, esta suma se determina mediante la fórmula: $$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$	Determina la suma de los primeros 30 números naturales. Es decir, determina la suma de: $$1 + 2 + 3 + \cdots + 30$$ Dado que $a_1 = 1$, $a_{30} = 30$ y $n = 30$, la suma es: $$s_{30} = \frac{30(1 + 30)}{2} = \frac{30(31)}{2} = 465$$
Sección 11.3	
Una **sucesión geométrica**, es una sucesión en donde cada término, después del primero, es un múltiplo común del término precedente. El múltiplo común se llama **razón común, *r***.	Sucesión geométrica — Razón común, r $2, 6, 18, 54, 162, \ldots$ — $r = \frac{6}{2} = 3$ $8, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \ldots$ — $r = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$
El ***enésimo* término**, a_n, de una sucesión geométrica, es: $$a_n = a_1 r^{n-1}$$	Para la sucesión geométrica con $a_1 = 5$, $r = \frac{1}{2}$ y $n = 6$, a_6 se determina del modo siguiente. $$a_6 = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{6-1} = 5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32}$$
Una **serie geométrica**, es la suma de los términos de una sucesión geométrica. La suma de los primeros n términos, s_n, de una sucesión geométrica, también conocida como la ***enésima* suma parcial**, es: $$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$ Para una serie geométrica, esta suma se determina mediante la fórmula: $$s_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}, r \neq 1$$	Para determinar la suma de los seis términos de una sucesión geométrica con $a_1 = 12$ y $r = \frac{1}{3}$, usa la fórmula con $n = 6$, para obtener: $$s_6 = \frac{12\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^6\right]}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{12\left[1 - \frac{1}{729}\right]}{\frac{2}{3}} = \frac{12\left(\frac{728}{729}\right)}{\frac{1}{3}}$$ $$= 12\left(\frac{728}{729}\right)\left(\frac{3}{1}\right) = \frac{2\,912}{81} \text{ o } 35\frac{77}{81}$$
La suma de una serie geométrica infinita, es: $$s_\infty = \frac{a_1}{1 - r} \text{ donde } \lvert r \rvert < 1$$	Para determinar la suma de la serie infinita $4 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$, usa la fórmula con $a_1 = 4$ y $r = -\frac{1}{2}$ para obtener: $$s_\infty = \frac{4}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{\frac{3}{2}} = 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \text{ o } 2\frac{2}{3}$$
Sección 11.4	
***n* Factorial** $$n! = n(n - 1)(n - 2)(n - 3) \cdots (1)$$ para cualquier entero positivo n. Más aún, por definición, $0! = 1$.	$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$

DATOS Y CONCEPTOS IMPORTANTES	EJEMPLOS
Sección 11.4 (Continuación)	
Coeficientes binomiales Para enteros no negativos n y r, $n \geq r$: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$ $\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n, \binom{n}{n-1} = n, \binom{n}{n} = 1$	$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!} = \frac{7! \cdot}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = 35$ $\binom{7}{0} = 1, \binom{7}{1} = 7, \binom{7}{6} = 7, \binom{7}{7} = 1$
Teorema del binomio Para cualquier entero positivo n: $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \cdots + \binom{n}{n}a^0 b^n$	$(x+2y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3(2y) + \binom{4}{2}x^2(2y)^2 + \binom{4}{3}x(2y)^3 + \binom{4}{4}(2y)^4$ $= 1 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3(2y) + 6 \cdot x^2(4y^2) + 4 \cdot x(8y^3) + 1 \cdot 16y^4$ $= x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 + 32xy^3 + 16y^4$

Capítulo 11 Ejercicios de repaso

[11.1] *Escribe los cinco primeros términos de cada sucesión.*

1. $a_n = n + 5$ **2.** $a_n = n^2 + n - 3$ **3.** $a_n = \frac{12}{n}$ **4.** $a_n = \frac{n^2}{n+4}$

Determina el término indicado de cada sucesión.

5. $a_n = 3n - 10$, séptimo término **6.** $a_n = (-1)^n + 5$, décimo término

7. $a_n = \frac{n+17}{n^2}$, noveno término **8.** $a_n = (n)(n-3)$, undécimo término

Para cada sucesión, determina la primera y tercera suma parcial, s_1 y s_3.

9. $a_n = 2n + 5$ **10.** $a_n = n^2 + 11$

11. $a_n = \frac{n+3}{n+2}$ **12.** $a_n = (-1)^n(n+8)$

Escribe los siguientes tres términos de cada sucesión. Luego, escribe una expresión para el término general, a_n.

13. $2, 4, 8, 16, \ldots$ **14.** $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$

15. $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}, \ldots$ **16.** $13, 9, 5, 1, \ldots$

Escribe cada serie. Luego, determina la suma de la serie.

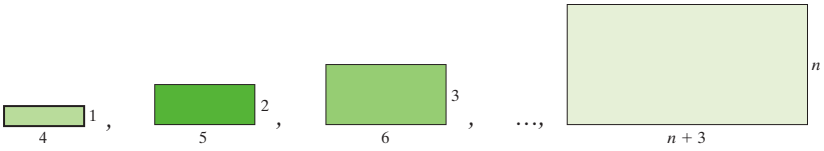
17. $\sum_{i=1}^{3}(i^2 + 10)$ **18.** $\sum_{i=1}^{4} i(i+5)$

19. $\sum_{i=1}^{5} \frac{i^2}{6}$ **20.** $\sum_{i=1}^{4} \frac{i}{i+1}$

Para el conjunto de valores $x_1 = 3, x_2 = 9, x_3 = 7, x_4 = 10$, evalúa la suma indicada.

21. $\sum_{i=1}^{4} x_i$ **22.** $\sum_{i=1}^{4} (x_i)^2$ **23.** $\sum_{i=2}^{3} (x_i^2 + 1)$ **24.** $\left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2$

En los ejercicios 25 y 26, considera los siguientes rectángulos. Para el enésimo rectángulo, la longitud es $n + 3$ y el ancho es n.



25. Perímetro

a) Determina los perímetros de los primeros cuatro rectángulos y, después, escribe los perímetros en una sucesión.

b) Determina el término general para el perímetro del *enésimo* rectángulo en la sucesión. Usa p_n para perímetro.

26. Área

a) Determina las áreas para los primeros cuatro rectángulos y, después, escribe las áreas en una sucesión.

b) Determina el término general para el área del *enésimo* rectángulo en la sucesión. Usa a_n para área.

[11.2] *Escribe los primeros cinco términos de la sucesión aritmética, con el primer término y la diferencia común indicados.*

27. $a_1 = 5, d = 3$

28. $a_1 = 5, d = -\frac{1}{3}$

29. $a_1 = \frac{1}{2}, d = -2$

30. $a_1 = -20, d = \frac{1}{5}$

Para cada sucesión aritmética, determina el valor indicado.

31. $a_1 = 6, d = 3$; determina a_9

32. $a_1 = 26, a_8 = -9$; determina d

33. $a_1 = -3, a_{11} = 2$; determina d

34. $a_1 = 22, a_n = -3, d = -5$; determina n

Determina s_n y d, para cada sucesión aritmética.

35. $a_1 = 7, a_8 = 21, n = 8$

36. $a_1 = -2, a_7 = -38, n = 7$

37. $a_1 = \frac{3}{5}, a_6 = \frac{13}{5}, n = 6$

38. $a_1 = -\frac{10}{3}, a_9 = -6, n = 9$

Escribe los primeros cuatro términos de cada sucesión aritmética. Luego, determina a_{10} y s_{10}.

39. $a_1 = -7, d = 4$

40. $a_1 = 8, d = -3$

41. $a_1 = \frac{5}{6}, d = \frac{2}{3}$

42. $a_1 = -60, d = 5$

Determina el número de términos, n, en cada sucesión aritmética. Luego, determina s_n.

43. $4, 9, 14, \ldots, 64$

44. $-7, -4, -1, \ldots, 14$

45. $\frac{6}{10}, \frac{9}{10}, \frac{12}{10}, \ldots, \frac{36}{10}$

46. $-9, -3, 3, 9, \ldots, 45$

[11.3] *Determina los primeros cinco términos de cada sucesión geométrica.*

47. $a_1 = 6, r = 2$

48. $a_1 = -28, r = \frac{1}{2}$

49. $a_1 = 20, r = -\frac{2}{3}$

50. $a_1 = -20, r = \frac{1}{5}$

Determina el término indicado de cada sucesión geométrica.

51. $a_1 = 12, r = \frac{1}{3}$; determina a_5

52. $a_1 = 15, r = 2$; determina a_6

53. $a_1 = -8, r = -3$; determina a_4

54. $a_1 = \frac{1}{12}, r = \frac{2}{3}$; determina a_5

Determina cada suma.

55. $a_1 = 7, r = 2$; determina s_6

56. $a_1 = -84, r = -\frac{1}{4}$; determina s_5

57. $a_1 = 9, r = \frac{3}{2}$; determina s_4

58. $a_1 = 8, r = \frac{1}{2}$; determina s_7

Para cada sucesión geométrica, determina la razón común, r; y, después, escribe una expresión para el término general, a_n.

59. $6, 12, 24, \ldots$

60. $-6, -30, -150, \ldots$

61. $10, \frac{10}{3}, \frac{10}{9}, \ldots$

62. $\frac{9}{5}, \frac{18}{15}, \frac{36}{45}, \ldots$

Determina la suma de los términos en cada sucesión geométrica infinita.

63. $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$

64. $\frac{7}{2}, 1, \frac{2}{7}, \frac{4}{49}, \ldots$

65. $-8, \frac{8}{3}, -\frac{8}{9}, \frac{8}{27} \cdots$

66. $-6, -4, -\frac{8}{3}, -\frac{16}{9}, \ldots$

Determina la suma de cada serie infinita.

67. $16 + 8 + 4 + 2 + 1 + \cdots$

68. $11 + \frac{11}{3} + \frac{11}{9} + \frac{11}{27} + \cdots$

69. $5 - 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \cdots$

70. $-4, -\frac{8}{3}, -\frac{16}{9}, -\frac{32}{27}, \ldots$

Escribe el número decimal periódico, como una razón de enteros.

71. $0.363636 \ldots$

72. 0.783783783...

[11.4] *Usa el teorema del binomio para expandir la expresión.*

73. $(3x + y)^4$

74. $(2x - 3y^2)^3$

Escribe los cuatro primeros términos de la expansión.

75. $(x - 2y)^9$

76. $(2a^2 + 3b)^8$

[11.2]

77. Suma de enteros Determina la suma de los enteros entre 101 y 200, incluyendo los extremos.

78. Barriles de petróleo Se colocan barriles de petróleo en una pila, con 21 barriles en la fila inferior, 20 barriles en la segunda fila, 19 barriles en la tercera fila, etcétera; hasta la fila superior, que tiene sólo 1 barril. ¿Cuántos barriles hay?

79. Salario Armando acaba de comenzar un nuevo empleo, con un salario anual de $36000 como guardián de zoológico. Se le ha dicho que su salario aumentará $1000 al año, durante los próximos 10 años.

a) Escribe una sucesión que muestre su salario, para los primeros 4 años.

b) Escribe el término general de esta sucesión.

c) ¿Cuál será su salario dentro de 6 años?

d) ¿Cuánto dinero tendrá en los primeros 11 años?



Consulta el ejercicio 79.

[11.3]

80. Dinero Si comienzas con $50, lo duplicas para obtener $100, lo duplicas nuevamente para obtener $200, etcétera. ¿Cuánto tendrás, después de realizar este proceso 10 veces?

81. Salario Elías Moreno comenzó un nuevo empleo el 1 de enero, con un salario mensual de $1600. Su jefe acordó

darle un aumento de 4% cada mes, durante el resto del año.

a) ¿Cuál es el salario de Elías en julio?

b) ¿Cuál es el salario de Elías en diciembre?

c) ¿Cuánto dinero obtiene Elías durante el año?

82. Inflación Si la tasa de inflación es un 8% constante al año (cada año, el costo de vivir, es 8% mayor que el año previo), ¿cuánto costará, después de 12 años, un producto que ahora cuesta $200?

83. Péndulo En cada oscilación (izquierda a derecha o derecha a izquierda), un péndulo recorre 92% de su oscilación previa. Si la primera oscilación es de 12 pies, determina la distancia recorrida por el péndulo, para cuando éste llegue al reposo.

Capítulo 11 Examen de práctica

1. ¿Qué es una serie?

2. a) ¿Qué es una sucesión aritmética?

b) ¿Qué es una sucesión geométrica?

3. Escribe los cinco primeros términos de la sucesión, si $a_n = \dfrac{n-2}{3n}$.

4. Determina la primera y tercera suma parcial, si $a_n = \dfrac{2n+1}{n^2}$.

5. Escribe la siguiente serie y determina la suma de la serie.

$$\sum_{i=1}^{5} (2i^2 + 3)$$

6. Para $x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 8$ y $x_4 = 10$ determina $\sum_{i=1}^{4} (x_i)^2$.

7. Escribe el término general para la siguiente sucesión aritmética.

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \ldots$$

8. Escribe el término general para la siguiente sucesión geométrica.

$$5, 10, 20, 40, \ldots$$

En los ejercicios 9 y 10, escribe los cuatro primeros términos de cada sucesión.

9. $a_1 = 15, d = -6$

10. $a_1 = \dfrac{5}{12}, r = \dfrac{2}{3}$

11. Determina a_{11}, cuando $a_1 = 40$ y $d = -8$.

12. Determina s_8 para la sucesión aritmética, con $a_1 = 7$ y $a_8 = -12$.

13. Determina el número de términos, en la sucesión aritmética $-4, -16, -18, \ldots, -136$.

14. Determina a_6, cuando $a_1 = 8$ y $r = \dfrac{2}{3}$.

15. Determina s_7, cuando $a_1 = \dfrac{3}{5}$ y $r = -5$.

16. Determina la razón común y escribe una expresión para el término general de la sucesión $15, 5, \dfrac{5}{3}, \dfrac{5}{9}, \ldots$.

17. Determina la suma de la siguiente serie geométrica infinita.

$$4 + \frac{8}{3} + \frac{16}{9} + \frac{32}{27} + \cdots$$

18. Escribe $0.3939\ldots$, como una razón de enteros.

19. Evalúa $\binom{8}{3}$.

20. Usa el teorema del binomio, para expandir $(x + 2y)^4$.

21. Media aritmética Las cinco calificaciones de los exámenes de Carlos, son 76, 93, 83, 87 y 71. Usa $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x}{n}$ para determinar la media aritmética de las calificaciones de Carlos.

22. Una pila de troncos Se colocan troncos en una pila conformada por 13 troncos en la fila inferior, 12 troncos en la segunda fila, 11 troncos en la tercera fila, etcétera, hasta la parte superior. ¿Cuántos troncos hay?

23. Ahorro para el retiro Para ahorrar para su retiro, Daniela planea ahorrar $1 000 el primer año, $2 000 el segundo año, $3 000 el tercer año, y aumentar el monto ahorrado por $1 000 en cada año sucesivo. ¿Cuánto habrá ahorrado al final de su vigésimo año de ahorrar?

24. Ganancias Yolanda gana $700 a la semana trabajando como instructora de golf. Su jefe le garantizó un aumento de 4% semanal durante las próximas 7 semanas. ¿Cuánto obtendrá en la sexta semana?



25. Cultivo de bacterias El número de bacterias en un cultivo, se triplica cada hora. Si inicialmente hay 500 bacterias en el cultivo, ¿cuántas bacterias habrá en el cultivo al final de la sexta hora?

Examen de repaso acumulativo

Resuelve la siguiente evaluación y verifica tus respuestas con las proporcionadas en la parte final del libro. Revisa cualquier pregunta que respondas de manera incorrecta. Después de la respuesta, se indica la sección donde se cubrió el material.

1. Resuelve $A = \frac{1}{2}bh$, en términos de b.

2. Determina una ecuación, de la recta que pasa a través de $(4, -2)$ y $(1, 9)$. Escribe la ecuación en forma pendiente-intersección con el eje de las y.

3. Resuelve el sistema de ecuaciones.

$$x + y + z = 1$$
$$2x + 2y + 2z = 2$$
$$3x + 3y + 3z = 3$$

4. Multiplica $(5x^3 + 4x^2 - 6x + 2)(x + 5)$.

5. Factoriza $x^3 + 2x - 6x^2 - 12$.

6. Factoriza $(a + b)^2 + 8(a + b) + 16$.

7. Resta $5 - \dfrac{x - 1}{x^2 + 3x - 10}$.

8. y varía directamente con el cuadrado de z. Si y es 80 cuando z es 20, determina y cuando z es 50.

9. Si $f(x) = 2\sqrt[3]{x - 3}$ y $g(x) = \sqrt[3]{5x - 15}$, determina todos los valores de x, para los que $f(x) = g(x)$.

10. Resuelve $\sqrt{6x - 5} - \sqrt{2x + 6} - 1 = 0$.

11. Resuelve completando el cuadrado.

$$x^2 + 2x + 15 = 0$$

12. Resuelve mediante la fórmula cuadrática.

$$x^2 - \frac{x}{5} - \frac{1}{3} = 0$$

13. Números El doble del cuadrado de un número positivo, disminuido por nueve veces el número, es 5. Determina el número.

14. Elabora la gráfica de $y = x^2 - 4x$ e indica el vértice.

15. Resuelve $\log_a \dfrac{1}{64} = 6$, en términos de a.

16. Elabora la gráfica de $y = 2^x - 1$.

17. Determina una ecuación de un círculo, con centro en $(-6, 2)$ y radio 7.

18. Elabora la gráfica de $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$.

19. Elabora la gráfica de $9x^2 + 16y^2 = 144$.

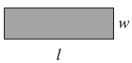
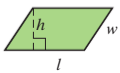
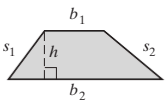
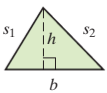
20. Determina la suma de la serie geométrica infinita.

$$6 + 4 + \frac{8}{3} + \frac{16}{9} + \frac{32}{27} + \cdots$$

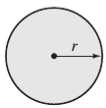
Apéndice

Fórmulas geométricas

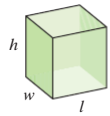
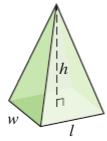
ÁREAS Y PERÍMETROS

Figura	Dibujo	Área	Perímetro
Cuadrado		$A = s^2$	$P = 4s$
Rectángulo		$A = lw$	$P = 2l + 2w$
Paralelogramo		$A = lh$	$P = 2l + 2w$
Trapezoide		$A = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$	$P = s_1 + s_2 + b_1 + b_2$
Triángulo		$A = \frac{1}{2}bh$	$P = s_1 + s_2 + b$

ÁREA Y CIRCUNFERENCIA DE UN CÍRCULO

Círculo		$A = \pi r^2$	$C = 2\pi r$

VOLÚMENES Y ÁREAS SUPERFICIALES DE FIGURAS TRIDIMENSIONALES

Figura	Dibujo	Volumen	Área superficial
Sólido rectangular		$V = lwh$	$s = 2lh + 2wh + 2wl$
Cilindro circular recto		$V = \pi r^2 h$	$s = 2\pi rh + 2\pi r^2$
Esfera		$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$s = 4\pi r^2$
Cono circular recto		$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	$s = \pi r\sqrt{r^2 + h^2} + \pi r^2$
Pirámide cuadrada o rectangular		$V = \frac{1}{3}lwh$	

Respuestas

Capítulo 1

Serie de ejercicios 1.1

1-11. Las respuestas variarán. **13.** Haz toda la tarea y revisa el material nuevo que se estudiará en clase. **15.** Consulta los pasos en la página 4 del texto. **17.** Las respuestas variarán. **19.** Las respuestas variarán.

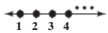
Serie de ejercicios 1.2

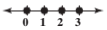
1. Variable **3.** Algebraica **5.** Elementos **7.** Subconjunto **9.** Intersección **11.** Irracional **13.** $>$ **15.** $<$ **17.** $<$ **19.** $=$ **21.** $>$ **23.** $>$ **25.** $<$ **27.** $>$ **29.** $A = \{-2, -1, 0\}$ **31.** $C = \{18, 20\}$ **33.** $E = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ **35.** $G = \{0, 7, 14, 21, \ldots\}$ **37.** $K = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ **39. a)** 2, 4 **b)** 2, 4 **c)** 2, 4, -5.33, $\frac{11}{2}$, -100, -7, 4.7 **d)** 2, 4, -100, -7 **e)** $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$ **f)** 2, 4, -5.33, $\frac{11}{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, -100, -7, 4.7 **41.** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$, $A \cap B = \{2, 4\}$ **43.** $A \cup B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 3\}$; $A \cap B = \{-3, -1\}$ **45.** $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$; $A \cap B = \{\ \}$ **47.** $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, $A \cap B = \{2, 4, 6\}$ **49.** $A \cup B = \{-1, -0, 1, e, i, \pi\}$; $A \cap B = \{-1, 0, 1\}$ **51.** El conjunto de los números naturales **53.** El conjunto de los múltiplos enteros no negativos de 3

55. El conjunto de enteros impares **57.** 

59. 

61. 

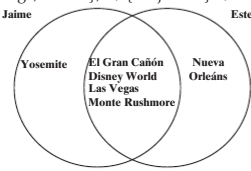
63. 

65. 

67. $\{x \mid x \geq 1\}$ **69.** $\{x \mid x < 5 \text{ y } x \in I\}$ o $\{x \mid x \leq 4 \text{ y } x \in I\}$ **71.** $\{x \mid -3 < x \leq 5\}$ **73.** $\{x \mid -2.5 \leq x < 4.2\}$

75. $\{x \mid -3 \leq x \leq 1 \text{ y } x \in I\}$ **77.** Sí **79.** Sí **81.** No **83.** Sí **85.** Un ejemplo es $\left\{\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}\right\}$ **87.** Un ejemplo es $A = \{2, 4, 5, 8, 9\}$, $B = \{4, 5, 6, 9\}$ **89. a)** {El Gran Cañón, Disney World, Monte Rushmore, Las Vegas} **b)** Intersección **c)** {El Gran Cañón, Disney World, Parque Nacional Yosemite, Monte Rushmore, Las Vegas, Nueva Orleáns} **d)** Unión **91. a)** {China, India, Estados Unidos, Indonesia, Brasil, Nigeria} **b)** {China, India, Estados Unidos, Rusia, Japón, Indonesia, Nigeria} **c)** {China, India, Estados Unidos} **d)** {China, India, Estados Unidos, Indonesia} **e)** {China, India, Estados Unidos} **93. a)** $A = \{$Alejandro, David$\}$, B = {Alejandro, David, Jorge, Carlos}, C = {Alejandro, Sergio}, D = {Alejandro, Jorge, Carlos}, **b)** {Alejandro} **c)** Sólo Alejandro

95. a) $\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$ **b)** $\{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$ **c)** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ **d)** $\{3, 4, 6\}$ **97.**



99. a) El conjunto A, es el conjunto de todas las x, tales que x, es un número natural menor que 7. **b)** $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ **101. a)** $\{x \mid x > 1\}$ incluye fracciones y números decimales, que el otro conjunto no contiene. **b)** {2, 3, 4, 5,. . . } **c)** No, pues no es posible enlistar todos los números reales mayores que 1 en forma de lista. **103.** {4, 5, 6} **105.** Infinito **107.** Verdadero **109.** Verdadero **111.** Falso **113.** Verdadero **115.** Verdadero **117. a)** $0.\overline{1}$, $0.\overline{2}$, $0.\overline{3}$ **b)** $\frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{6}{9}$ o $\frac{2}{3}$ **c)** 1

Serie de ejercicios 1.3

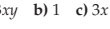
1. Positivo **3.** Aditivo **5.** Suma **7.** Absoluto **9.** Distributiva **11.** 2 **13.** 7 **15.** 8.61 **17.** $\frac{11}{16}$ **19.** -7 **21.** $-\frac{5}{9}$ **23.** $=$ **25.** $>$ **27.** $=$ **29.** $>$ **31.** $>$ **33.** $>$ **35.** $-|5|, -2, -1, |-3|, 4$ **37.** $-32, -|4|, 4, |-7|, 15$ **39.** $-|-6.5|$, $-6.1, |-6.3|, |6.4|, 6.8$ **41.** $-2, \frac{1}{3}, \left|-\frac{1}{2}\right|, \left|\frac{3}{5}\right|, \left|-\frac{3}{4}\right|$ **43.** -3 **45.** -22 **47.** 2 **49.** -4 **51.** $-\frac{2}{35}$ **53.** 13 **55.** -12 **57.** 2 **59.** -2 **61.** $\frac{17}{20}$ **63.** -40 **65.** $\frac{5}{4}$ **67.** 12 **69.** -1 **71.** 11 **73.** 1 **75.** $-\frac{3}{64}$ **77.** $\frac{7}{3}$ **79.** -18 **81.** 45 **83.** $-\frac{5}{12}$ **85.** $\frac{1}{24}$ **87.** -20.6

89. $\frac{81}{16}$ **91.** 48 **93.** -1 **95.** $-\frac{17}{45}$ **97.** 77 **99.** -39 **101.** 0 **103.** Propiedad conmutativa de la suma **105.** Propiedad multiplicativa de cero **107.** Propiedad asociativa de la suma **109.** Propiedad de la identidad de la multiplicación **111.** Propiedad asociativa de la multiplicación **113.** Propiedad distributiva **115.** Propiedad de la identidad de la suma **117.** Propiedad de inverso aditivo **119.** Propiedad de doble negación **121.** Propiedad conmutativa de la multiplicación **123.** Propiedad de inverso multiplicativo **125.** 49°F **127.** 148.2 pies abajo del punto de partida o -148.2 pies **129.** 10.1°F **131.** Ganancia de $1 207 **133.** Todos los números reales, $\mathbb{R}$ **135.** $6, -6$ **137.** $\{\ \}$ **139.** Las respuestas variarán **141.** Las respuestas variarán **143.** $-\frac{a}{b}$ o $\frac{-a}{b}$ **145.** -50 **147.** -1 **149.** Verdadero **150.** $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ **151. a)** 3, 4, -2, 0 **b)** 3, 4, $-2, \frac{5}{6}$, 0 **c)** $\sqrt{11}$ **d)** 3, 4, $-2, \frac{5}{6}, \sqrt{11}$, 0 **152. a)** {1, 4, 7, 9, 12, 19} **b)** {4, 7} **153.** 

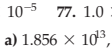
Serie de ejercicios 1.4

1. Factores **3.** Exponente **5.** 64 **7.** Radicando **9.** Índice **11.** Real **13. a)** 9 **b)** -9 **c)** 9 **d)** -9 **15. a)** 8 **b)** -8 **c)** -8 **d)** 8 **17. a)** $-\frac{2}{3}$ **b)** $\frac{4}{9}$ **c)** $-\frac{8}{27}$ **d)** $\frac{16}{81}$ **19.** 0.008 **21.** 7 **23.** -3 **25.** $\frac{1}{2}$ **27.** 0.859 **29.** -20.583 **31.** 1.897 **33.** 76 183.335 **35.** 2.962 **37.** 3.250 **39.** -0.723 **41. a)** 9 **b)** -9 **43. a)** 100 **b)** -100 **45. a)** $\frac{1}{9}$ **b)** $-\frac{1}{9}$ **47. a)** $\frac{1}{4}$ **b)** $-\frac{1}{4}$ **49. a)** 27 **b)** -27 **51. a)** -125 **b)** 125 **53. a)** $\frac{8}{125}$ **b)** $-\frac{8}{125}$ **55. a)** $-\frac{8}{27}$ **b)** $\frac{8}{27}$ **57.** -7 **59.** -19 **61.** -80.288 **63.** $-\frac{5}{16}$ **65.** -27 **67.** 12 **69.** -28 **71.** $\frac{4}{15}$ **73.** -10 **75.** -1 **77.** 64 **79.** 12 **81.** $\frac{27}{5}$ **83.** Indefinido **85.** -4 **87.** 10 **89.** $-\frac{10}{3}$ **91.** $\frac{242}{5}$ **93.** $\frac{1}{4}$ **95.** 34 **97.** -41 **99.** 34 **101.** 33 **103.** 52 **105.** $-\frac{21}{25}$ **107.** $\frac{3}{2}$ **109.** $\frac{7y-14}{2}, 14$ **111.** $6(3x+6)-9, 81$ **113.** $\left(\frac{x+3}{2y}\right)^2-3, 1$ **115. a)** 24.6 millas **b)** 57.4 millas **117. a)** 102 pies **b)** 54 pies **119. a)** 2 400 perros **b)** 2 775 perros **121. a)** 25 casitas para pájaros **b)** 20 casitas para pájaros **123. a)** \$34 800 **b)** \$39 800 **c)** \$34 800 **125. a)** 7.62 % **b)** 21.78 % **127. a)** \$50.12 mil millones **b)** \$85.16 mil millones **129.** n factores de a **131.** El número positivo cuyo cuadrado iguala al radicando **133.** Un número negativo elevado a una potencia impar, es un número negativo **135.** Paréntesis; exponentes y radicales; multiplicación o división de izquierda a derecha; suma o resta de izquierda a derecha **137. a)** Las respuestas variarán **b)** 24 **139. a)** $A \cap B = \{b, c, f\}$ **b)** $A \cup B = \{a, b, c, d, f, g, h\}$ **140.** Todos los números reales, $\mathbb{R}$ **141.** $a \geq 0$ **142.** $8, -8$ **143.** $-|6|, -4, -|-2|, 0, |-5|$ **144.** Propiedad asociativa de la suma

Examen de mitad de capítulo*

1. Las respuestas variarán [1.1] **2.** $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 5\}$, $A \cap B = \{-1, 1\}$ [1.2] **3.** El conjunto de los múltiplos enteros no negativos de 5 [1.2] **4.**  [1.2] **5.** $>$ [1.2] **6.** $\{x \mid -5 \leq x < 2\}$ [1.2] **7.** No [1.2] **8.** $-15, |-6|, 7, |-17|$ [1.2] **9.** 9.2 [1.3] **10.** $\frac{7}{30}$ [1.3] **11.** 256 [1.3] **12.** $-\frac{4}{13}$ [1.3] **13.** -3 [1.3] **14.** Propiedad distributiva [1.3] **15.** 0.9 [1.4] **16. a)** -121 **b)** 121 [1.4] **17. a)** 1)Símbolos de agrupamiento, 2) exponentes y radicales, 3) multiplicaciones o divisiones de izquierda a derecha, 4) sumas o restas de izquierda a derecha **b)** -14 [1.4] **18.** 23 [1.4] **19.** 4 [1.4] **20.** $\frac{5}{2}$ [1.4]

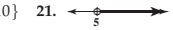
Serie de ejercicios 1.5

1. Producto **3.** Negativo **5.** Indefinido **7.** $a^m b^m$ **9.** 64 **11.** 16 **13.** $\frac{1}{8}$ **15.** $\frac{1}{81}$ **17.** 125 **19.** 1 **21.** 64 **23.** 64 **25.** $\frac{16}{49}$ **27.** $\frac{81}{16}$ **29. a)** 5 **b)** -5 **c)** 1 **d)** -1 **31. a)** $3xy$ **b)** 1 **c)** $3x$ **d)** 3 **33. a)** $\frac{1}{9}$ **b)** $\frac{1}{9}$ **c)** $-\frac{1}{9}$ **d)** $-\frac{1}{9}$ **35. a)** 2 **b)** -2 **c)** -2 **d)** 2 **37.** $\frac{7}{y^3}$ **39.** $-\frac{9x^2}{7}$ **41.** $3ab^3$ **43.** $\frac{17}{2m^2n^3}$ **45.** $\frac{5z^4}{x^2y^3}$ **47.** $-\frac{x^5}{25}$ **49. a)** x^{10} **b)** x^{21} **c)** x^4 **d)** $\frac{1}{x^4}$ **51. a)** x^{10} **b)** x^2 **c)** $\frac{1}{x^2}$ **d)** $\frac{1}{x^{10}}$ **53. a)** x^7 **b)** $\frac{1}{x^7}$ **c)** x^3 **d)** $\frac{1}{x^3}$ **55. a)** $\frac{x^3}{y^3}$ **b)** $\frac{y^3}{x^3}$ **c)** x^3y^3 **d)** $\frac{1}{x^3y^3}$ **57.** $\frac{1}{r^5}$ **59.** $5w^5$ **61.** $\frac{45}{u^6}$ **63.** $\frac{56v}{w^{10}}$ **65.** $-10r^7$ **67.** $8x^7y^2$ **69.** $\frac{3x^2}{y^6}$ **71.** $-\frac{3x^3z^2}{y^5}$ **73. a)** 4 **b)** 8 **c)** 1 **d)** 0 **75. a)** $\frac{5}{6}$ **b)** $\frac{1}{6}$ **c)** $\frac{1}{6}$ **d)** $-\frac{1}{10}$ **77.** $\frac{1}{81}$ **79.** b^6 **81.** $-c^3$ **83.** $\frac{1}{x^4}$ **85.** $\frac{25}{x^5}$ **87.** $\frac{3}{16}$ **89.** $\frac{21}{16}$ **91.** $\frac{9}{16b^2}$ **93.** $\frac{16x^4}{y^4}$ **95.** $\frac{q^{12}}{125p^6}$ **97.** $-\frac{g^{12}}{27h^9}$ **99.** $\frac{25j^2}{16k^4}$ **101.** $\frac{32b^5}{a^{25}}$ **103.** $\frac{49z^2}{x^2y^6}$ **105.** $\frac{x^6y^2}{81}$ **107.** $125x^9y^3$ **109.** $\frac{b^4}{a^5c^4}$ **111.** $\frac{x^4y^8}{9z^{12}}$ **113.** $\frac{x^5}{200}$ **115.** $\frac{2y^{10}z^{21}}{x^8}$ **117.** x^{7a+3} **119.** w^{5a-7} **121.** x^{w+7} **123.** x^{5p+2} **125.** x^{2m+2} **127.** $\frac{5m^{2b}}{n^{2a}}$ **129. a)** $x < 0$ o $x > 1$ **b)** $0 < x < 1$ **c)** $x = 0$ o $x = 1$ **d)** No es verdadero para $0 \leq x \leq 1$ **131. a)** El producto de un número par de factores negativos, es positivo **b)** El producto de un número impar de factores negativos, es negativo **133. a)** Sí **b)** Sí, porque $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ y $(-x)^{-2} = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2}$ **135.** -3, porque $\left(\frac{y^{-2}}{y^{-3}}\right)^2 = y^2$ **137.** $-1, 3$, porque $\left(\frac{x^{-1}}{x^4}\right)^{-1} = x^5$ y $\left(\frac{y^5}{y^3}\right)^{-1} = \frac{1}{y^2}$ **139.** $x^{9/8}$ **141.** $\frac{1}{x^{9/2}y^{19/6}}$ **144. a)** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$ **b)** $A \cap B = \{\ \}$ **145.**  **146.** -4 **147.** -5

Serie de ejercicios 1.6

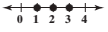
1. Mayor **3.** Negativo **5.** 5.0×10^1 **7.** 4.3×10^{-2} **9.** 7.6×10^5 **11.** 1.86×10^{-6} **13.** 5.78×10^6 **15.** 1.06×10^{-4} **17.** 790 **19.** 0.0000213 **21.** 0.917 **23.** 93 **25.** 3 000 000 **27.** 1 000 000 **29.** 240 000 000 **31.** 11 480 **33.** 0.0000006734 **35.** 0.0003 **37.** 0.000027 **39.** 0.021 **41.** 1.5×10^{-5} **43.** 5.0×10^3 **45.** 3.0×10^{-8} **47.** 1.75×10^7 **49.** 9.6×10^5 **51.** 3.0×10^0 **53.** 9.369×10^{14} **55.** 1.056×10^3 **57.** 8.111×10^{-18} **59.** 5.0×10^2 **61.** 3.333×10^{60} **63.** 5.337×10^2 **65.** 2.1×10^9 **67.** 5.101×10^8 **69.** 7.5×10^{10} **71.** 2.57×10^7 **73.** 2.54×10^{-5} **75.** 1.58×10^{-5} **77.** 1.0×10^{-9} **79. a)** 51 636.36 mi **b)** 2 151.52 mi **81. a)** 2 583.33 hr **b)** 107.64 días **83. a)** 7 159 500 000 personas **b)** 4.34 % **85. a)** 1.856×10^{13}, 3.239×10^8 **b)** \$57 301.64 **87. a)** 75 000 000 libras **b)** 0.0419 *o* 4.19 % **89.** 2.3×10^{18} moléculas de dióxido de silicio **91. a)** 2.58×10^8, 3.24×10^8, 1.267×10^9, 1.376×10^9 **b)** 2.643×10^9 **c)** 5.82×10^8 **d)** 4.54 veces **93.** 10.29 veces **95.** Las respuestas variarán **97. a)** Suma 1 al exponente. **b)** Suma 2 al exponente. **c)** Suma 6 al exponente. **d)** 7.59×10^{13} **99. a)** $\approx 5.87 \times 10^{12}$ millas **b)** 500 segundos o $8\frac{1}{3}$ minutos **c)** 6.72×10^{11} segundos o 21 309 años

Capítulo 1 Ejercicios de repaso

1. $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ **2.** $\{0, 3, 6, 9, \ldots\}$ **3.** Sí **4.** Sí **5.** No **6.** Sí **7.** 4, 6 **8.** 4, 6, 0 **9.** $-2, 4, 6, 0$ **10.** $-2, 4, 6, \frac{1}{2}, 0, \frac{15}{27}, -\frac{1}{5}, 1.47$ **11.** $\sqrt{7}, \sqrt{3}$ **12.** $-2, 4, 6, \frac{1}{2}, \sqrt{7}, \sqrt{3}, 0, \frac{15}{27}, -\frac{1}{5}, 1.47$ **13.** Falso **14.** Verdadero **15.** Verdadero **16.** Verdadero **17.** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}; A \cap B = \{2, 4, 6\}$ **18.** $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}; A \cap B = \{\ \}$ **19.** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}; A \cap B = \{\ \}$ **20.** $A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12\}; A \cap B = \{9, 10\}$ **21.** 

22. 

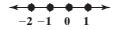
23. 

24. 

25. $<$ **26.** $<$ **27.** $<$ **28.** $=$ **29.** $<$ **30.** $>$ **31.** $>$ **32.** $>$ **33.** $-\pi, -3, 3, \pi$ **34.** $0, \frac{3}{5}, 2.7, |-3|$ **35.** $-2, 3, |-5|, |-10|$ **36.** $-7, -3, |-3|, |-7|$ **37.** $-4, -|-3|, 5, 6$ **38.** $-2, 0, |1.6|, |-2.3|$ **39.** Propiedad distributiva **40.** Propiedad conmutativa de la multiplicación **41.** Propiedad asociativa de la suma **42.** Propiedad de la identidad de la suma **43.** Propiedad asociativa de la multiplicación **44.** Propiedad de doble negación **45.** Propiedad multiplicativa del cero **46.** Propiedad de inverso aditivo **47.** Propiedad del inverso multiplicativo **48.** Propiedad de la identidad de la multiplicación **49.** 11 **50.** 9 **51.** 12 **52.** -3 **53.** 2 **54.** 21 **55.** 9 **56.** -59 **57.** 15 **58.** 42 **59.** 4 **60.** 64 **61.** Indefinido **62.** $\frac{8}{3}$ **63.** 22 **64.** -67 **65. a)** \$816.37 millones **b)** \$11 318.62 millones **66. a)** 944.53 tonelada-millas **b)** 2 757.33 tonelada-millas **67.** 32 **68.** x^5 **69.** a^8 **70.** y^7 **71.** b^9 **72.** $\frac{1}{c^3}$ **73.** $\frac{1}{125}$ **74.** 8 **75.** $81m^6$ **76.** $\frac{7}{5}$ **77.** $\frac{27}{8}$ **78.** $\frac{y^2}{x}$ **79.** $-15x^3y^4$ **80.** $\frac{14}{v^3w^3}$ **81.** $\frac{3y^7}{x^5}$ **82.** $\frac{3}{xy^9}$ **83.** $\frac{g^5}{h^5j^{14}}$ **84.** $\frac{3m}{n^4}$ **85.** $64a^3b^3$ **86.** $\frac{x^{10}}{9y^2}$ **87.** $\frac{p^{14}}{q^{12}}$ **88.** $-\frac{8a^3}{b^9c^6}$ **89.** $\frac{z^4}{25x^2y^6}$ **90.** $\frac{m^9}{27}$ **91.** $\frac{n^6}{4m^4}$ **92.** $\frac{625x^4y^4}{z^{20}}$ **93.** $\frac{9x^{10}}{4y^{14}z^{12}}$ **94.** $-\frac{x^6z^2}{10y^2}$ **95.** 7.42×10^{-5} **96.** 4.6×10^5 **97.** 1.83×10^5 **98.** 2.0×10^{-6} **99.** 30 000 **100.** 0.03 **101.** 300 000 000 **102.** 2 000 **103. a)** 2.74×10^6 millas cuadradas **b)** 3.00×10^4 millas cuadradas **c)** $\approx$1.71 veces **d)** $\approx$1.01 veces **104. a)** 14 000 000 000 **b)** 14 mil millones de kilómetros **c)** 5.0×10^8 o 500 000 000 kilómetros **d)** 8.4×10^9 u 8 400 000 000 millas

Capítulo 1 Examen de práctica

1. $A = \{6, 7, 8, 9, \ldots\}$ [1.2] **2.** Falso [1.2] **3.** Verdadero [1.2] **4.** $-\frac{3}{5}, 2, -4, 0, \frac{19}{12}, 2.57, -1.92$ [1.2] **5.** $-\frac{3}{5}, 2, -4, 0, \frac{19}{12}, 2.57, \sqrt{8}, \sqrt{2}, -1.92$ [1.2] **6.** $A \cup B = \{5, 7, 8, 9, 10, 11, 14\}: A \cap B = \{8, 10\}$ [1.2] **7.** $A \cup B = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}: A \cap B = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ [1.2] **8.** 

[1.2] **9.** 

[1.2] **10.** $-|4|, -2, |3|, 9$ [1.3] **11.** Propiedad asociativa de la suma [1.3] **12.** Propiedad conmutativa de la suma [1.3] **13.** 2 [1.4] **14.** 33 [1.4] **15.** Indefinido [1.4] **16.** $-\frac{37}{22}$ [1.4] **17.** 17 [1.4] **18. a)** 304 pies **b)** 400 pies [1.4] **19.** $\frac{1}{9}$ [1.5] **20.** $\frac{16}{m^6n^4}$ [1.5] **21.** $\frac{4c^2}{5ab^5}$ [1.5] **22.** $-\frac{y^{21}}{27x^{12}}$ [1.5] **23.** 3.89×10^8 [1.6] **24.** 260 000 000 [1.6] **25. a)** 9.2×10^9 **b)** 0–14: 1.794×10^9, 15–64: 5.8052×10^9, 65 y mayores: 1.6008×10^9 [1.6]

Capítulo 2

Serie de ejercicios 2.1

1. Términos **3.** Despejar **5.** Identidad **7.** Inconsistente **9.** $\varnothing$ **11.** Propiedad simétrica **13.** Propiedad transitiva **15.** Propiedad reflexiva **17.** Propiedad de igualdad de la suma **19.** Propiedad de igualdad de la multiplicación **21.** Propiedad de igualdad de la multiplicación **23.** Propiedad de igualdad de la suma **25.** Uno **27.** Tres **29.** Dos **31.** Cero **33.** Cinco **35.** Siete **37.** Diecisiete **39.** $-2x^2 + 2x - 3$ **41.** No se puede simplificar **43.** $8.7c^2 + 3.6c$ **45.** No se puede simplificar **47.** $-pq + p + q$ **49.** $8d + 2$ **51.** $12x + 17$ **53.** $-17x - 4$ **55.** $11x - 6y$ **57.** $-9b + 93$ **59.** $4r^2 - 2rs + 3r + 4s$ **61.** 3 **63.** 2 **65.** 3 **67.** $\frac{15}{2}$ **69.** 5 **71.** $\frac{3}{5}$ **73.** 1 **75.** 0 **77.** 3 **79.** -1 **81.** 5 **83.** 5 **85.** -1 **87.** -6 **89.** 2 **91.** 68 **93.** -35 **95.** -4 **97.** -4 **99.** 3 **101.** 8 **103.** 12 **105.** $-\frac{26}{29}$ **107.** -4 **109.** 10 **111.** 1 **113.** 0.42 **115.** 1.18 **117.** 1701.39 **119.** $\varnothing$; inconsistente **121.** $\left\{-\frac{4}{3}\right\}$; condicional **123.** $\mathbb{R}$; identidad **125.** $\mathbb{R}$; identidad **127.** $\varnothing$; inconsistente **129. a)** $\approx$93 personas por milla cuadrada **b)** $\approx$2 026 **131. a)** \$95 **b)** \$177.50 **c)** 60 frascos **133.** $\Delta = \frac{\odot + \square}{\divideontimes}$ **135.** $\odot = \frac{\otimes - \triangle}{\square}$ **137.** Las respuestas variarán. Una posible respuesta: $x = \frac{5}{2}, 2x - 4 = 1, 4x = 10$ **139.** Las respuestas variarán. Una posible respuesta: $2x - 4 = 5x - 3(1 + x)$ **141.** Las respuestas variarán. Una posible respuesta: $3p + 3 = \frac{3}{2}p + p + 6$ **143.** -22, sustituye -2 por a y resuelve en términos de n. **145. a)** Las respuestas variarán. **b)** $|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a < 0 \end{cases}$ **146. a)** -9 **b)** 9 **147.** -5 **148.** $\frac{4}{49}$

Serie de ejercicios 2.2

1. Modelo **3.** Traducir **5.** Verificar **7.** 2 528 **9.** 176 **11.** 201.06 **13.** 21 **15.** 2 **17.** $\frac{7}{4}$ **19.** 66.67 **21.** 4 **23.** 119.10 **25.** $y = -3x + 5$ **27.** $y = -\frac{3}{2}x + 3$ **29.** $y = \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}$ **31.** $y = -\frac{2}{5}x + 2$ **33.** $y = -\frac{4}{3}x + 11$ **35.** $y = \frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$ **37.** $I = \frac{E}{R}$ **39.** $d = \frac{C}{\pi}$ **41.** $l = \frac{P - 2w}{2}$ **43.** $h = \frac{V}{lw}$ **45.** $r = \frac{A - P}{Pt}$ **47.** $l = \frac{3V}{wh}$ **49.** $m = \frac{y - b}{x}$ **51.** $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ **53.** $s = \frac{x - \bar{x}}{z}$

55. $T_2 = \dfrac{T_1 P_2}{P_1}$ **57.** $h = \dfrac{2A}{b_1 + b_2}$ **59.** $h = \dfrac{s - 2\pi r^2}{2\pi r}$ **61.** $F = \dfrac{9}{5}C + 32$ **63.** $m_1 = \dfrac{Fd^2}{km_2}$ **65. a)** $m = 1.6k$ **b)** $k = \dfrac{m}{1.6}$ o $k = 0.62m$
67. a) \$720 **b)** \$6720 **69.** 6.5 años **71.** 1.75 % **73. a)** 706.86 ft^2 **b)** 1256.64 ft^2 **75. a)** 75 pies cúbicos **b)** 2.78 yardas cúbicas **c)** \$105
77. a) 122.72 $in.^3$ **b)** 122.5 $in.^3$ **c) El tubo, la diferencia es de 0.22 pulgadas cúbicas** **79.** \$11 264.93 **81. a)** \$4958.41 **b)** \$568.41
83. a) \$61 672.58 **b)** \$11 672.58 **85. a)** 43 pies **b)** 50 pies **c)** 0.5 pies **87. a)** $r = 220 - a$ **b)** 162 bpm **c)** 63 yr
89. a) $W = 207 - 0.75n$ **b)** 201 libras **c)** 36 semanas **91. a)** $s = \dfrac{rt^2}{u}$ **b)** $u = \dfrac{rt^2}{s}$ **92.** -40 **93.** 1 **94.** -125 **95.** $\dfrac{4}{3}$

Serie de ejercicios 2.3

1. $x + 3$ **3.** $7 - x$ **5.** menos **7.** $\$24.95x$ **9.** $4m - 17$ **11.** $x, 12 - x$ **13.** $w, w + 29$ **15.** $t, \dfrac{1}{4}t$ **17.** $x, 3x$
19. $e, e + 0.22e$ **21.** $A = 36°, B = 144°$ **23.** $C = 35°, D = 55°$ **25.** 40°, 60°, 80° **27.** \$220 **29.** 25 viajes **31.** 240 mi **33.** 13 veces
35. 10 veces **37.** \$128 **39.** Noroeste: \$2.145 millones, sureste: \$2.455 millones **41.** 4 gramos **43.** 10 500 personas **45.** céspedes: 12, hierbas: 19, árboles: 26 **47.** 14.6 % **49.** 24 horas **51. a)** 21 meses **b)** \$4680 **53.** 8 bantam, 11 dorkings, 18 leghorns **55.** 5 m, 16 m, 18 m
57. 9 pulgadas, 12 pulgadas, 15 pulgadas **59.** 39°, 51°, 90° **61.** 13 metros por 13 metros **63.** 3 pies por 6 pies **65.** \$60 **67. a)** \$250 **b)** \$175
69. Dalia: 400 acres, Leo: 100 acres, Mariana: 140 acres **71.** 99 **73.** 92 **75.** 220 millas **78.** $\dfrac{32}{5}$ **79.** -2.7 **80.** $\dfrac{5}{32}$ **81.** -10 **82.** $\dfrac{y^{18}}{8x^{12}}$

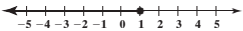
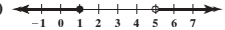
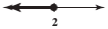
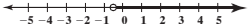
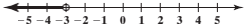
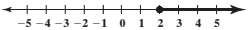
Examen de mitad de capítulo

1. 12 [2.1] **2.** $5x^2 - 2x - 11$ [2.1] **3.** $6.4a - 9.6$ [2.1] **4.** -6 [2.1] **5.** 14 [2.1] **6.** $-\dfrac{11}{3}$ [2.1]
7. 5 [2.1] **8.** $\mathbb{R}$, identidad [2.1] **9.** $\varnothing$, inconsistente [2.1] **10.** 80 [2.2] **11.** $\dfrac{100}{3}$ [2.2] **12.** $x = \dfrac{y - 13}{7}$ [2.2] **13.** $x_3 = nA - 2x_1 - x_2$ [2.2]
14. \$942.80 [2.2] **15.** $A = 62°, B = 28°$ [2.3] **16.** 10 días [2.3] **17.** 20 ft, 40 ft, 40 ft [2.3] **18.** 4.5 % [2.3] **19.** 40 meses [2.3]
20. Multiplica ambos lados por el mismo número, 12; $-\dfrac{10}{3}$ [2.3]

Serie de ejercicios 2.4

1. 4 horas **3.** 0.8 h **5.** 0.75 horas o 45 minutos **7. a)** 6 millas por hora **b)** 12 millas por hora
9. a) 0.15 horas o 9 minutos **b)** 3.6 millas **11. a)** 2.5 horas **b)** 2.25 horas **c)** 11.25 pulgadas **13. a)** 8 h **b)** 56 mi **15.** 13.8 horas **17.** 30 onzas
19. 3500 galones **21.** 2.8 cucharaditas al 30 %, 1.2 cucharaditas al 80 % **23.** 54 libras **25.** 425 gal **27.** 4 libras de hojas, 8 libras de rebanadas
29. \$12 570 a 3 %, \$17 430 a 4.1 % **31.** Cafetería: \$6500, tienda de cómics: \$3500 **33.** 24 horas **35.** 500 minutos o $8\dfrac{1}{3}$ horas **37.** 8 onzas
39. a) 4 horas **b)** 3120 millas **41.** 9.6 onzas de solución al 80 %, 118.4 onzas de agua **43.** 40 mph, 50 mph **45. a)** 248 boletos
b) 3002 boletos **47.** 14 %: 15 mL, 2 %: 30 mL **49.** $\approx$149 millas **51.** 6 cuartos **52.** 6.0×10^{-4} **53.** -5.7 **54.** $\dfrac{21}{4}$ **55.** $y = \dfrac{x - 42}{30}$
56. 300 millas

Serie de ejercicios 2.5

1. Compuesta **3.** Cerrado **5.** Unión **7. a)**  **b)** $(-3, \infty)$ **c)** $\{x \mid x > -3\}$
9. a)  **b)** $(-\infty, 1]$ **c)** $\{x \mid x \le 1\}$ **11. a)** **b)** $(-7, -4]$ **c)** $\{x \mid -7 < x \le -4\}$
13. a)  **b)** $(-\infty, 1] \cup (5, \infty)$ **c)** $\{k \mid k \le 1 \text{ o } k > 5\}$ **15. a)** 
b) $(0, 3]$ **c)** $\{a \mid 0 < a \le 3\}$ **17.**  **19.**  **21.** 
23.  **25.**  **27.**  **29.** $(-\infty, 3]$ **31.** $(-8, \infty)$ **33.** $[-2, \infty)$
35. $(-\infty, \infty)$ **37.** $[-5, 1)$ **39.** $[-4, 5]$ **41.** $[4, 6)$ **43.** $\left(-\dfrac{13}{3}, -4\right]$ **45.** $\{x \mid 0 < x \le 3\}$ **47.** $\{x \mid 3 \le x < 7\}$
49. $\left\{x \middle| -11 < x < -\dfrac{34}{5}\right\}$ **51.** $\{c \mid -3 < c \le 1\}$ **53.** $\{p \mid p < -5 \text{ o } p \ge -2\}$ **55.** $\mathbb{R}$ **57.** $\varnothing$ **59.** $(-\infty, 2) \cup [7, \infty)$ **61.** $[0, 2]$
63. $[-4, 4)$ **65.** $(-\infty, -8] \cup [6, \infty)$ **67.** $(-\infty, 3)$ **69.** $(-\infty, \infty)$ **71.** $\varnothing$ **73. a)** $l + g \le 165$ **b)** $l + 2w + 2h \le 165$ **c)** 42 pulgadas
75. a) \$4963.75 **b)** \$5388.75 **77.** 11 cajas **79.** 6 hr **81.** 1881 libros **83.** 1792 piezas **85.** 24 **87.** $76 \le x \le 100$ **89.** $6.97 < x < 8.77$
91. a) $[0, 3)$ **b)** $(3, 10]$ **93. a)** $[0, 5)$ **b)** $(5, 13]$ **95. a)** $[17.5, 23.5]$ **b)** $[23.5, 31]$ **c)** $[27.2, 36.5]$ **97.** No; $-1 > -2$ pero $(-1)^2 < (-2)^2$
99. $84 \le x \le 100$ **101.** $(-3, \infty)$ **103. a)** $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ **b)** $A \cap B = \{1, 8\}$ **104. a)** 4 **b)** 0, 4 **c)** $-3, 4, \dfrac{5}{2}, 0, -\dfrac{13}{29}$
d) $-3, 4, \dfrac{5}{2}, \sqrt{7}, 0, -\dfrac{13}{29}$ **105.** Propiedad asociativa de la suma **106.** Propiedad conmutativa de la suma **107.** $V = \dfrac{R - L + Dr}{r}$

Serie de ejercicios 2.6

1. $|x| \le 4$ **3.** $|x| = 4$ **5.** $|x| > 4$ **7.** $|x| \ge 5$ **9.** $|x| < 5$ **11.** $|x| > -6$ **13.** $\{-9, 9\}$ **15.** $\{0\}$
17. $\varnothing$ **19.** $\{-13, 3\}$ **21.** $\{-3, 6\}$ **23.** $\left\{\dfrac{4}{3}, 4\right\}$ **25.** $\{-17, 23\}$ **27.** $\{3\}$ **29.** $\varnothing$ **31.** $\{a \mid -5 < a < 5\}$ **33.** $\{q \mid -13 \le q \le 3\}$
35. $\{a \mid -9 \le a \le -5\}$ **37.** $\{x \mid -9 \le x \le 6\}$ **39.** $\left\{x \middle| \dfrac{1}{3} < x < \dfrac{13}{3}\right\}$ **41.** $\varnothing$ **43.** $\left\{m \middle| \dfrac{14}{9} \le m \le \dfrac{28}{9}\right\}$ **45.** $\{x \mid -1 \le x \le 7\}$
47. $\{a \mid a \le -5 \text{ o } a \ge 5\}$ **49.** $\{x \mid x < -9 \text{ o } x > 1\}$ **51.** $\{b \mid b < 2 \text{ o } b > 5\}$ **53.** $\left\{d \middle| d < 1 \text{ o } d > \dfrac{13}{3}\right\}$ **55.** $\{x \mid x < 2 \text{ o } x > 6\}$

57. $\{x \mid x \le -18 \text{ o } x \ge 2\}$ **59.** $\mathbb{R}$ **61.** $\{x \mid x < 2 \text{ o } x > 2\}$ **63.** $\{-1, 15\}$ **65.** $\{-2\}$ **67.** $\mathbb{R}$ **69.** $\left\{-23, \frac{13}{7}\right\}$ **71.** $\{-15, 15\}$

73. $\{q \mid q < -8 \text{ o } q > -4\}$ **75.** $\{w \mid -1 \le w \le 8\}$ **77.** $\left\{-\frac{8}{5}, 2\right\}$ **79.** $\left\{x \middle| x < -\frac{5}{2} \text{ o } x > -\frac{5}{2}\right\}$ **81.** $\left\{x \middle| -\frac{13}{3} \le x \le \frac{5}{3}\right\}$ **83.** $\varnothing$

85. $\{w \mid -16 < w < 8\}$ **87.** $\mathbb{R}$ **89.** $\left\{\frac{22}{3}, 2\right\}$ **91.** $\left\{-\frac{3}{2}, \frac{9}{7}\right\}$ **93. a)** $[0.085, 0.093]$ **b)** 0.085 pulgadas **c)** 0.093 pulgadaa **95. a)** $[132, 188]$ **b)** 132 a 188 pies bajo el nivel el mar, incluyendo los extremos **97. a)** Dos **b)** Número infinito **c)** Número infinito **99. a)** Ninguna **b)** Una **c)** dos **101.** $x = -\frac{b}{a}$; $|ax + b|$ nunca es menor que 0, así que establece $|ax + b| = 0$ y resuelve en términos de x

103. a) Establece $ax + b = c$ o $ax + b = -c$ y resuelve cada ecuación en términos de x **b)** $x = \frac{c - b}{a}$ o $x = \frac{-c - b}{a}$ **105. a)** Escribe $ax + b < -c$ o $ax + b > c$ y resuelve cada desigualdad en términos de x. **b)** $x < \frac{-c - b}{a}$ o $x > \frac{c - b}{a}$ **107.** $\mathbb{R}$; Dado que $4 - x = -(x - 4)$

109. $\{x \mid x \ge 0\}$; por definición de valor absoluto **111.** $\{2\}$; establece $x + 1 = 2x - 1$ o $x + 1 = -(2x - 1)$ **113.** $\{x \mid x \le 4\}$; por definición $|x - 4| = -(x - 4)$ si $x \le 4$ **115.** $\{4\}$ **117.** $\varnothing$ **119.** $\frac{29}{72}$ **120.** 25 **121.** ≈1.33 millas **122.** $\{x \mid x \le 3\}$

Capítulo 2 Ejercicios de repaso

1. Ocho **2.** Uno **3.** Siete **4.** $5z + 13$ **5.** $7x^2 + 2xy - 13$ **6.** No se puede simplificar

7. $4x - 3y + 10$ **8.** -2 **9.** 20 **10.** $-\frac{13}{3}$ **11.** -10 **12.** $-\frac{9}{2}$ **13.** Sin solución **14.** $\mathbb{R}$ **15.** 5 **16.** $\frac{1}{4}$ **17.** 69 **18.** -4 **19.** $t = \frac{D}{r}$

20. $w = \frac{P - 2l}{2}$ **21.** $h = \frac{A}{\pi r^2}$ **22.** $h = \frac{2A}{b}$ **23.** $m = \frac{y - b}{x}$ **24.** $y = \frac{2x - 5}{3}$ **25.** $R_2 = R_T - R_1 - R_3$ **26.** $a = \frac{2S - b}{3}$

27. $l = \frac{K - 2d}{2}$ **28.** \$700 **29.** 7 años **30.** \$6800 **31.** 150 millas **32.** \$260 **33.** \$2570 a 3.5%, \$2430 a 4% **34.** 187.5 galones de 20%, 62.5 galones de 60% **35.** $6\frac{1}{2}$ horas **36. a)** 3000 millas por hora **b)** 16500 millas **37.** 15 libras de café de \$6.00; 25 libras de café de café de \$6.80 **38.** \$36 **39. a)** 1 hora **b)** 14.4 millas **40.** 40°, 65°, 75° **41.** 300 galones por hora, 450 galones por hora **42.** 40°, 50° **43.** 7.5 onzas **44.** \$4500 a 10%, \$7500 a 6% **45.** Más que 5 **46.** 40 millas por hora, 50 millas por hora **47.** 

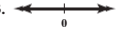
48. 

49. 

50. 

51. 

52. 

53. 

54. 

55. 6 cajas **56.** 8 horas **57.** ≈15.67 semanas **58.** $\{x \mid 81 \le x \le 100\}$ **59.** $(3, 8)$ **60.** $(-3, 5]$

61. $\left(\frac{7}{2}, 8\right)$ **62.** $\left(\frac{8}{3}, 6\right)$ **63.** $(-3, 1]$ **64.** $(2, 14)$ **65.** $\{x \mid 2 < x \le 3\}$ **66.** $\mathbb{R}$ **67.** $\{x \mid x \le -4\}$ **68.** $\{g \mid g < -6 \text{ o } g \ge 11\}$

69. $\{-4, 4\}$ **70.** $\{x \mid -8 < x < 8\}$ **71.** $\{x \mid x \le -9 \text{ o } x \ge 9\}$ **72.** $\{-18, 8\}$ **73.** $\{x \mid x \le -3 \text{ o } x \ge 7\}$ **74.** $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right\}$

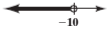
75. $\{q \mid 1 < q < 8\}$ **76.** $\{-1, 4\}$ **77.** $\{x \mid -14 < x < 22\}$ **78.** $\left\{-5, -\frac{4}{5}\right\}$ **79.** $\mathbb{R}$ **80.** $(-\infty, -1] \cup [4, \infty)$ **81.** $(4, 8]$ **82.** $\left(-\frac{17}{2}, \frac{27}{2}\right]$

83. $[-2, 6)$ **84.** $(-\infty, \infty)$ **85.** $\left(\frac{2}{3}, 10\right]$

Capítulo 2 Examen de práctica

1. Siete [2.1] **2.** $16p - 3q - 4pq$ [2.1] **3.** $10q + 42$ [2.1] **4.** -26 [2.1] **5.** $\frac{4}{3}$ [2.1] **6.** $-\frac{35}{11}$ [2.1]

7. $\varnothing$ [2.1] **8.** $\mathbb{R}$ [2.1] **9.** $\frac{13}{3}$ [2.2] **10.** $b = \frac{a - 2c}{5}$ [2.2] **11.** $b_2 = \frac{2A - hb_1}{h}$ [2.2] **12.** \$625 [2.3–2.4] **13.** 80 visitas [2.3–2.4]

14. 4.2 horas [2.3–2.4] **15.** 6.25 litros [2.3–2.4] **16.** \$7000 a 8%, \$5000 a 7% [2.3–2.4] **17.** 

[2.5] **18.** 

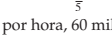
[2.5]

19. $\left(\frac{9}{2}, 7\right]$ [2.5] **20.** $[13, 16)$ [2.6] **21.** $\{-7, 2\}$ [2.6] **22.** $\left\{-\frac{14}{3}, \frac{26}{5}\right\}$ [2.6] **23.** $\{-3\}$ [2.6] **24.** $\{x \mid x < -1 \text{ o } x > 4\}$ [2.6]

25. $\left\{x \middle| \frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{2}\right\}$ [2.6]

Examen de repaso acumulativo

1. a) $\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ **b)** $\{3, 5, 7, 11, 13\}$ [1.2] **2. a)** Propiedad conmutativa de la suma **b)** Propiedad asociativa de la multiplicación **c)** Propiedad distributiva [1.3] **3.** -63 [1.4] **4.** -6 [1.4] **5.** 7 [1.4] **6.** $\frac{1}{25x^8y^6}$ [1.5]

7. $\frac{16m^{10}}{n^{12}}$ [1.5] **8.** ≈545.8 veces [1.6] **9.** 5 [2.1] **10.** 1.15 [2.1] **11.** $\frac{3}{4}$ [2.1] **12.** Una ecuación lineal condicional es verdadera sólo para valores específicos; una ecuación lineal que sea una identidad, siempre es verdadera; una ecuación lineal que sea inconsistente, nunca es verdadera. [2.1] **13.** 3 [2.2] **14.** $x = \frac{y - y_1 + mx_1}{m}$ [2.2] **15. a)** 

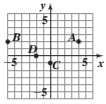
b) $\left\{x \middle| -2 < x < \frac{8}{5}\right\}$ **c)** $\left(-2, \frac{8}{5}\right)$ [2.5] **16.** $\left\{-\frac{7}{3}, 3\right\}$ [2.6]

17. $\{x \mid x \le -10 \text{ o } x \ge 14\}$ [2.6] **18.** \$35 [2.3] **19.** 40 millas por hora, 60 millas por hora [2.4] **20.** Nueces de la India: 15 libras, cacahuates: 25 libras [2.4]

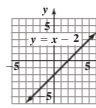
Capítulo 3

Serie de ejercicios 3.1

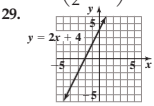
1. Ordenado **3.** Colineal **5.** $A(3, 2)$, $B(-6, 0)$, $C(2, -4)$, $D(-2, -4)$, $E(0, 3)$, $F(-8, 1)$, $G\left(\frac{3}{2}, -1\right)$, $H(2, 3)$ **7.**



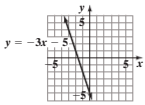
9. I **11.** IV **13.** II **15.** III **17.** Sí **19.** No **21.** No **23.** Sí **25.** Sí **27.**



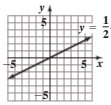
29.



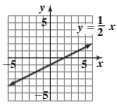
31.



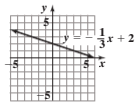
33.



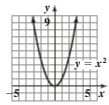
35.



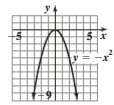
37.



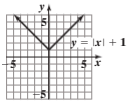
39.



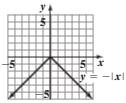
41.



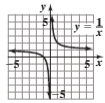
43.



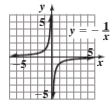
45.



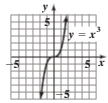
47.



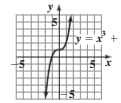
49.



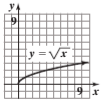
51.



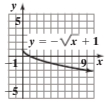
53.



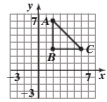
55.



57.

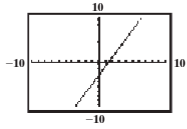


59. a)

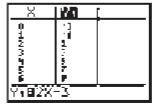


b) 8 unidades cuadradas **61. a)** 75 °F **b)** 48 °F **c)** Ene., Feb., Mar., Nov., Dic. **d)** No **63.** a **65.** c **67.** b **69.** d **71.** b **73.** d **75.** b **77.** d

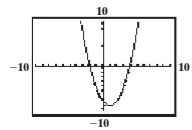
79. a)



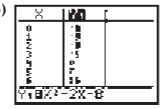
b)



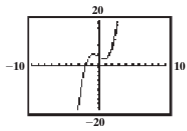
81. a)



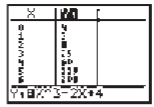
b)



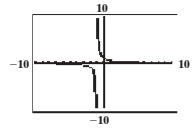
83. a)



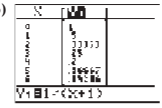
b)



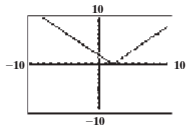
85. a)



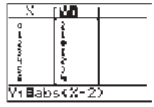
b)



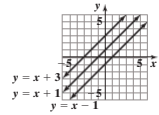
87. a)



b)

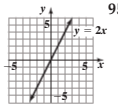


89. Sí, las coordenadas satisfacen la ecuación. **91.**

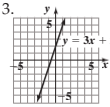


a) Cada gráfica interseca con el eje y, en el punto correspondiente al término constante en la ecuación de la gráfica. **b)** Sí

93. La razón de cambio es 2.



95. La razón de cambio es 3.



97. $(4, -3)$, $(5, 1)$;son posibles otras respuestas. **101.** $\frac{3}{2}$ **102.** ≈71 millas **103.** $\{x \mid -2 < x \leq 2\}$ **104.** $\left\{x \,\middle|\, x < -3 \text{ o } x > \frac{5}{3}\right\}$

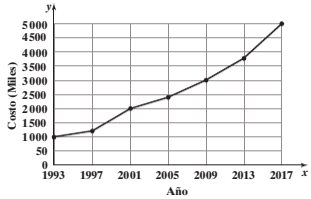
Serie de ejercicios 3.2

1. Dominio **3.** Ordenado **5.** Vertical **7.** Rango **9.** Función **11.** Independiente **13. a)** Función **b)** Dominio: {Dakota del Sur, Texas, Nueva Jersey}, Rango: {14.5, 16, 17} **15. a)** Función **b)** Dominio: {3, 5, 11}, Rango: {6, 10, 22} **17. a)** No es una función **b)** Dominio: {Robert, Margaret}, Rango: {Bobby, Rob, Peggy, Maggie} **19. a)** Función **b)** D: {Northwestern, Villanova, Kansas State}, R: {Wildcats} **21. a)** Función **b)** Dominio: {1, 2, 3, 4, 5}, Rango: {1, 2, 3, 4, 5} **23. a)** Función **b)** Dominio: {1, 2, 3, 4, 5, 7}, Rango: {−1, 0, 2, 4, 9} **25. a)** No es una función **b)** Dominio: {1, 2, 3}, Rango: {1, 2, 4, 5, 6} **27. a)** No es una función **b)** Dominio: {1}, Rango: {1, 2, 3, 4, 5} **29. a)** Función **b)** D: $\mathbb{R}$ o $(-\infty, \infty)$, R: $\mathbb{R}$ o $(-\infty, \infty)$ **c)** $y = 3$ **d)** $x = -1$ **31. a)** Función **b)** Dominio: $\mathbb{R}$ o $(-\infty, \infty)$, Rango $\{y \mid y \leq 2\}$ o $(-\infty, 2]$ **c)** $y = -2$ **d)** $x = -1$, $x = 1$ **33. a)** No es una función **b)** D: $\{x \mid -2 \leq x \leq 6\}$ o $\{-2, 6\}$, R: $\{y \mid -2 \leq y \leq 4\}$ o $\{-2, 4\}$ **c)** $y = -2$, $y = 4$ **d)** $x = -2$, $x = 6$ **35. a)** Función **b)** D: $\mathbb{R}$ o $(-\infty, \infty)$, R: $\{y \mid y \leq 4\}$ o $(-\infty, 4]$ **c)** $y = 2$ **d)** $x = -3$, $x = 3$ **37. a)** No es una función

b) Dominio: $\{2\}$, Rango: $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ **c)** $y = -2, y = -1, y = 0, y = 1, y = 2, y = 3$ **d)** $x = 2$ **39. a)** Función **b)** Dominio: $\mathbb{R}$ o $(-\infty, \infty)$, Rango: $\{1\}$ **c)** $y = 1$ **d)** $x =$ cualquier número real **41. a)** 3 **b)** 8 **43. a)** -6 **b)** -4 **45. a)** 2 **b)** 2 **47. a)** 7 **b)** 0 **49. a)** 0 **b)** 3 **51. a)** 1 **b)** Indefinido **53. a)** 28 ft^2 **b)** 45.5 ft^2 **55. a)** $A(r) = \pi r^2$ **b)** 28.27 yd^2

57. a) $C(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$ **b)** -35°C **59. a)** 18.23°C **b)** 27.68°C **61. a)** 74.7 ft **b)** 220.95 ft **c)** 338.7 ft **63. a)** 91 naranjas **b)** 204 naranjas **65. a)** \$34 800 **b)** \$39 800 **c)** \$34 800 **67.** Las respuestas variarán. Una posible interpretación: la persona hace calentamiento lentamente, tal vez caminando, durante 5 minutos. Luego, la persona comienza a trotar lentamente durante un periodo de 5 minutos. Durante los siguientes 15 minutos, la persona trota. Durante los siguientes 5 minutos, la persona camina lentamente y su frecuencia cardiaca disminuye a su frecuencia normal. La frecuencia permanece igual durante los siguientes 5 minutos. **69.** Las respuestas variarán. Una posible interpretación: el hombre camina a nivel del suelo, aproximadamente 30 pies arriba del nivel del mar, durante 5 minutos. Durante los siguientes 5 minutos, camina colina arriba hasta 45 pies sobre el nivel del mar. Durante 5 minutos, camina sobre el nivel del mar; luego, camina rápidamente colina abajo durante 3 minutos, hasta una elevación de 20 pies sobre el nivel del mar. Durante 7 minutos, camina a nivel del suelo. Luego, camina rápidamente colina arriba durante 5 minutos. **71.** Las respuestas variarán. Una posible interpretación: el conductor está en un tráfico intenso; luego, está en la autopista durante aproximadamente 15 minutos, posteriormente, conduce en un camino vecinal durante algunos minutos, después se detiene un par de minutos, luego hay tráfico intenso. **73. a)** Año **b)** Población **c)** 76 200 000 **d)** 228.4%

75. a)



b) Sí. Está cerca de una recta. **c)** \$2 300 000 **79.** $\frac{1}{2}$

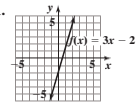
80. $p_2 = \dfrac{E - a_1p_1 - a_3p_3}{a_2}$ **81. a)**



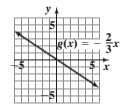
b) $(3, \infty)$ **c)** $\{x \mid x > 3\}$ **82.** $-2, 10$

Serie de ejercicios 3.3

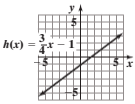
1. Real **3.** Intersección con el eje de las x **5.** Horizontal **7.** Falla **9.** Lineal **11.**



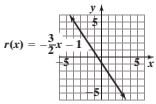
13.



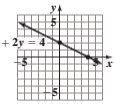
15.



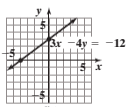
17.



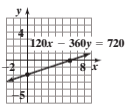
19. $7x - y = 4$ **21.** $3x - 4y = -14$ **23.** $x + 2y = 3$ **25.**



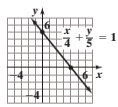
27.



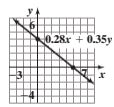
29.



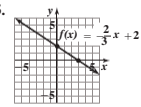
31.



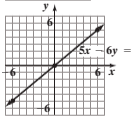
33.



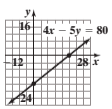
35.



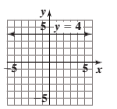
37.



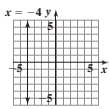
39.



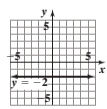
41.



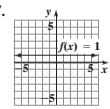
43. $x = -4$



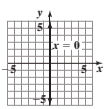
45.



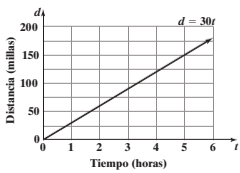
47.



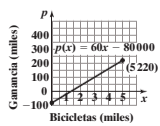
49.



51.

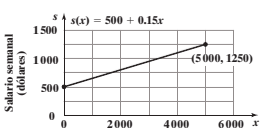


53. a)



b) ≈1 300 bicicletas **c)** ≈3 800 bicicletas **55. a)** $s(x) = 500 + 0.15x$

55. b)

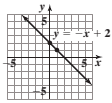


c) \$950 **d)** \$4 000 **57. a)** Sólo hay un valor y para cada valor x. **b)** Independiente: longitud, Dependiente: peso **c)** Sí **d)** 11.5 kilogramos **e)** 65 centímetros **f)** 12.0–15.5 kilogramos **g)** Aumenta; sí, conforme los bebés crecen, sus pesos varían más. **59.** Cuando la gráfica pasa a través del origen, porque en el origen, tanto x como y, son cero. **61.** Las respuestas variarán. Un ejemplo: $f(x) = 4$. **63.** $x = 0$ **65.** $(-3.2, 0), (0, 6.4)$ **67.** $(-2, 0), (0, -2.5)$ **71.** 96 **72.** $-\frac{18}{13}$ **73. a)** Las respuestas variarán. **b)** $x = a + b$ o $x = a - b$ **74. a)** Las respuestas variarán. **b)** $a - b < x < a + b$ **75. a)** Las respuestas variarán. **b)** $x < a - b$ o $x > a + b$ **76.** $\{-2, 2\}$

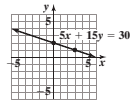
Serie de ejercicios 3.4

1. Pendiente **3.** General **5.** Elevación, extensión **7.** Negativa **9.** Vertical **11.** Tasa **13.** 2 **15.** $-\frac{1}{2}$ **17.** 2 **19.** Indefinida **21.** 0 **23.** $-\frac{2}{3}$ **25.** $j = 3$ **27.** $k = -2$ **29.** $x = 6$ **31. a)** $m = \frac{4}{3}$ **b)** $y = \frac{4}{3}x$ **33. a)** $m = 1$, **b)** $y = x - 1$ **b)** $y = -\frac{1}{3}x + 2$ **37. a)** m es indefinida, **b)** $x = -2$ **39. a)** $m = 0$, **b)** $y = 3$ **41. a)** $m = -\frac{3}{2}$, **b)** $y = -\frac{3}{2}x + 15$

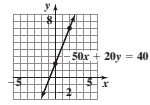
35. a) $m = -\frac{1}{3}$, **43.** $y = -x + 2, -1, (0, 2)$



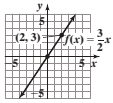
45. $y = -\frac{1}{3}x + 2, -\frac{1}{3}, (0, 2)$



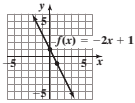
47. $y = \frac{5}{2}x + 2, \frac{5}{2}, (0, 2)$



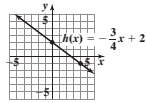
49.



51.

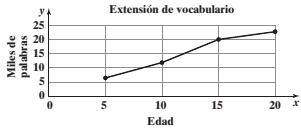


53.



55. a) 2 **b)** 4 **c)** 1 **d)** 3 **57.** $(0, -5)$ **59. a)** $y = 3x$ **b)** $y = 3x - 2$ **61. a)** 1 **b)** $(0, 4)$ **c)** $y = x + 4$ **63.** $y = \frac{3}{2}x - 7$ **65.** $\frac{1}{5}$ **67. a)** −42.6 **b)** −19.9 **c)** −26.02

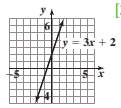
69. a–b)



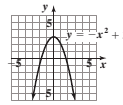
c) 1.2, 1.6, 0.6 **d)** Entre las edades de 10 a 15 **71. a)** $h(x) = -x + 200$ **b)** 186 latidos por minuto **73. a)** $S(t) = 204.4t + 38\,226$ **b)** \$38 839.20 **c)** \$40 270 **d)** 15 años **75. a)** $S(t) = 1\,853.6t + 37\,855$ **b)** \$43 415.80 **c)** \$56 391 **d)** 8 años **77.** La intersección con el eje de las y, está mal. **79.** La pendiente está mal. **81.** Altura: 14.2 pulgadas, ancho: 6.4 pulgadas **84.** 19 **85.** 5 **86.** 2.4 **87.** Primero: 75 millas por hora, segundo: 60 millas por hora **88. a)** $x < -3$ o $x > 2$ **b)** $-3 < x < 2$

Examen de mitad de capítulo

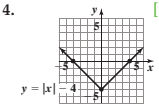
1. III [3.1] **2.**



[3.1] **3.**

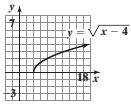


[3.1] **4.**



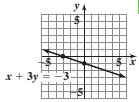
[3.1]

5.

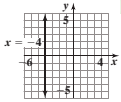


[3.1] **6. a)** Una relación, es cualquier conjunto de pares ordenados. **b)** Una función es una correspondencia entre un primer conjunto de elementos, el dominio, y un segundo conjunto de elementos, el rango; de modo tal, que cada elemento del dominio corresponde a exactamente un elemento del rango. **c)** No **d)** Sí [3.2] **7.** Función; Dominio: $\{1, 2, 7, -5\}$, Rango: $\{5, -3, -1, 6\}$ [3.2] **8.** No es una función; Dominio: $\{x \mid -2 \le x \le 2\}$ o $[-2, 2]$, Rango: $\{y \mid -4 \le y \le 4\}$ o $[-4, 4]$ [3.2] **9.** Función; Dominio: $\{x \mid -5 \le x \le 3\}$ o $[-5, 3]$ Rango: $\{y \mid -1 \le y \le 3\}$ o $[-1, 3]$ [3.2] **10.** −21 [3.2] **11.** 105 pies[3.2] **12.** $7x - y = -6$ [3.3]

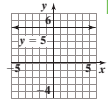
13.



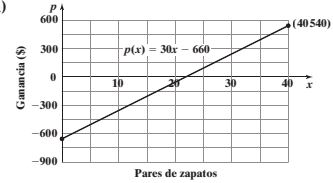
[3.3] **14.**



[3.3] **15.**



[3.3] **16. a)**



b) 22 pares de zapatos **c)** 34 pares de zapatos [3.3] **17.** $-\frac{5}{8}$ [3.4] **18.** $y = -2x + 2$ [3.4] **19.** $y = \frac{3}{2}x + 9; \frac{3}{2}, (0, 9)$ [3.4] **20. a)** 5 **b)** $(0, 1)$ **c)** $y = 5x + 1$ [3.4]

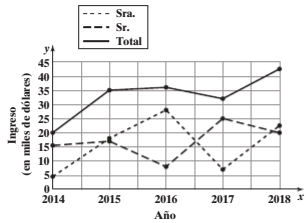
Serie de ejercicios 3.5

1. Paralelas **3.** Punto-pendiente **5.** $y = 2x + 5$ **7.** $y = -4x - 23$ **9.** $y = -\frac{1}{2}x + 1$ **11.** $y = -2x + 7$ **13.** $y = -\frac{3}{2}x$ **15.** $y = \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}$ **17.** $y = \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}$ **19.** Perpendicular **21.** Ninguna **23.** Paralela **25.** Paralela **27.** Perpendicular **29.** Ninguna **31.** Paralela **33.** Perpendicular **35.** $y = -5x - 9$ **37.** $y = -7x + 3$ **39.** $f(x) = 2x - 7$ **41.** $f(x) = -4x + 21$ **43.** $2x - 5y = 19$ **45.** $7x - 2y = 50$ **47.** $y = -\frac{3}{2}x - 13$ **49.** $y = \frac{2}{3}x - 15$ **51. a)** $C(s) = 45.7s + 95.8$ **b)** 324.3 calorías **53. a)** $d(p) = -0.20p + 90$ **b)** 38 carteras **c)** \$225 **55. a)** $s(p) = 95p - 60$ **b)** 206 cometas **c)** \$3.00 **57. a)** $i(t) = 12.5t$ **b)** \$1500 **c)** 176 boletos **59. a)** $r(w) = 0.01w + 10$ **b)** \$46.13 **c)** 5 000 libras **61. a)** $y(a) = -0.865a + 79.25$ **b)** 47.2 años **c)** 62.7 años de edad **63. a)** $w(a) \approx 0.189a + 10.6$ **b)** 14.758 kilogramos **66.** $\left(-\infty, \frac{2}{5}\right)$ **67.** Invierte la dirección del símbolo de desigualdad. **68. a)** Cualquier conjunto de pares ordenados. **b)** Una correspondencia donde cada miembro del dominio corresponde a un miembro único en el rango. **c)** Las respuestas variarán. **69.** Dominio: $\{3, 4, 5, 6\}$, Rango: $\{-4, -1, 2, 7\}$

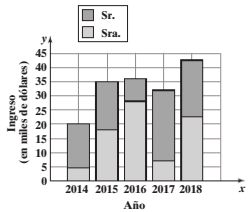
Serie de ejercicios 3.6

1. $x^2 - 2x + 5$ **3.** $x^2 + 2x - 5$ **5.** $2x^3 - 5x^2$ **7.** Real **9. a)** $7x - 6$ **b)** $7a - 6$ **c)** $-3x - 8$ **d)** $3x + 8$ **11. a)** $x^3 + x - 4$ **b)** $a^3 + a - 4$ **c)** $-x^3 - 6x^2 + x - 4$ **d)** $x^3 + 6x^2 - x + 4$ **13. a)** $4x^3 - x + 4$ **b)** $4a^3 - a + 4$ **c)** $4x^3 - 6x^2 - x - 4$ **d)** $-4x^3 + 6x^2 + x + 4$ **15.** -7 **17.** 29 **19.** -60 **21.** Indefinida **23.** -12 **25.** $-\frac{3}{4}$ **27.** $2x^2 - 2x + 6$ **29.** -4 **31.** 18 **33.** 0 **35.** Indefinida **37.** $-\frac{1}{45}$ **39.** $-2x^2 + 2x - 6$ **41.** 3 **43.** -4 **45.** 1 **47.** Indefinida **49.** 0 **51.** 0 **53.** -3 **55.** -2 **57. a)** 2016 **b)** \$800 **c)** \$7900 **d)** \$900 **59. a)** Verano A, 36 **b)** Verano B, 10 **c)** 11 estudiantes masculinos **d)** 19 estudiantes femeninos **61. a)** ≈ 20 **b)** ≈ 8 **c)** ≈ 12 **d)** ≈ 23

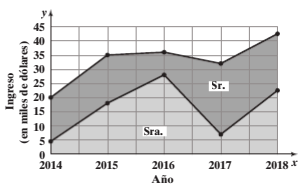
63. a)



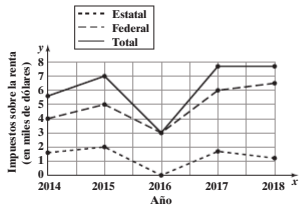
b)



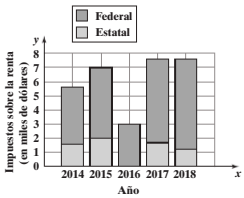
c)



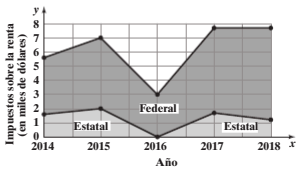
65. a)



b)

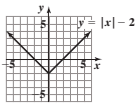


c)

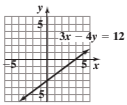


67. $g(x) \neq 0$ pues la división por cero es indefinida. **69.** No, la resta no es conmutativa. Un ejemplo es $5 - 3 = 2$ pero $3 - 5 = -2$ **71.** $f(a)$ y $g(a)$ deben ser, ya sea opuestas o ambas iguales que 0. **73.** $f(a) = g(a)$ **75.** $f(a)$ and $g(a)$, deben tener signos opuestos.

78. $-\frac{1}{64}$ **79.** 2.96×10^6 **80.** $h = \frac{2A}{b}$ **81.** \$450 **82.**

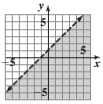


83.

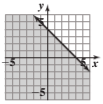


Serie de ejercicios 3.7

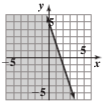
1. Límite **3.** Sólida **5.**



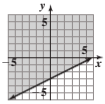
7.



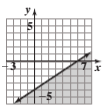
9.



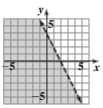
11.



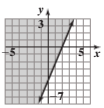
13.



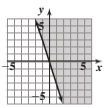
15.



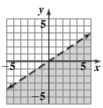
17.



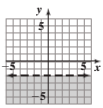
19.



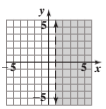
21.



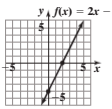
23.



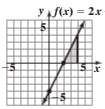
25.



27. a) $8x + 15y \leq 175$ **b)** Sí **c)** No **29. a)**

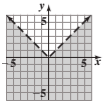


b)

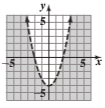


31. Los puntos sobre la recta, son soluciones a la ecuación correspondiente; y no son soluciones, si el símbolo utilizado es $<$ o $>$.
33. $(0, 0)$ no puede usarse como punto de verificación si la línea límite pasa a través del origen.

35.

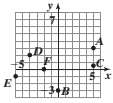


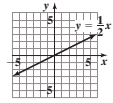
37.

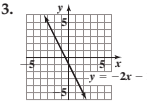


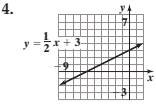
38. 9 **39.** 81.176 **40.** \$15.72 **41.** -4 **42.** -2 **43.** $y = -\frac{1}{2}x + 2$

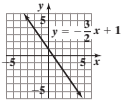
Capítulo 3 Ejercicios de repaso

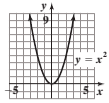
1. 

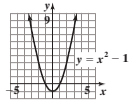
2. 

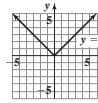
3. 

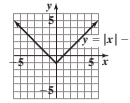
4. 

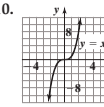
5. 

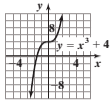
6. 

7. 

8. 

9. 

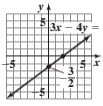
10. 

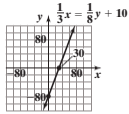
11. 

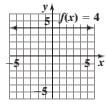
12. Una función, es una correspondencia donde cada miembro del dominio corresponde a exactamente un miembro del rango. **13.** No, no toda relación es una función. $\{(4,2), (4,-2)\}$ es una relación, mas no una función. Sí, toda función es una relación, porque es un conjunto de pares ordenados. **14.** Sí, cada miembro del dominio corresponde a exactamente un miembro del rango. **15.** No, el elemento de dominio 1, corresponde a más de un miembro del rango $(1 \text{ y } -1)$. **16. a)** Sí, la relación es una función. **b)** Dominio: $\mathbb{R}$ o $(-\infty, \infty)$, Rango: $\mathbb{R}$ o $(-\infty, \infty)$

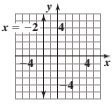
17. a) Sí, la relación es una función. **b)** Dominio: $\mathbb{R}$ o $(-\infty, \infty)$, Rango: $\{y|y \le 0\}$ o $(-\infty, 0]$ **18. a)** No, la relación no es una función. **b)** Dominio: $\{x|-3 \le x \le 3\}$ o $[-3, 3]$, Rango: $\{y|-3 \le y \le 3\}$ o $[-3, 3]$ **19. a)** No, la relación no es una función. **b)** Dominio: $\{x|-2 \le x \le 2\}$ o $[-2, 2]$, Rango: $\{y|-1 \le y \le 1\}$ o $[-1, 1]$ **20. a)** -1 **b)** $3h - 7$ **21. a)** 1 **b)** $2a^3 - 3a^2 + 6$

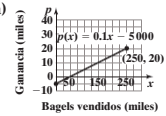
22. Las respuestas variarán. He aquí una posible interpretación: el automóvil acelera hasta 50 mph. Permanece en esta rapidez durante aproximadamente 11 minutos. Acelera hasta aproximadamente 68 mph. Permanece en esta rapidez durante aproximadamente 8 minutos, luego, se detiene rápidamente. Se detiene durante aproximadamente 5 minutos. Luego, avanza y se detiene en tráfico intenso, durante aproximadamente 5 minutos. **23. a)** 1020 canastas **b)** 1500 canastas **24. a)** 180 pies **b)** 52 pies

25. 

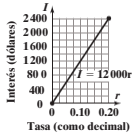
26. 

27. 

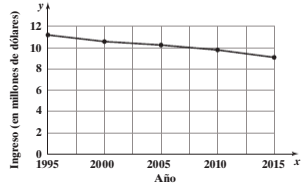
28. 

29. a) 

b) 50000 bagels **c)** 270000 bagels

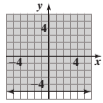
30. 

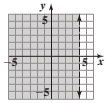
31. $m = \frac{1}{2}$, $(0, 6)$ **32.** $m = -2$, $(0, 3)$ **33.** $m = -\frac{3}{5}$, $\left(0, \frac{13}{5}\right)$ **34.** $m = -\frac{3}{4}$, $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ **35.** m es indefinida, no hay intersección con el eje de las y **36.** $m = 0$, $(0, 8)$ **37.** 2 **38.** $-\frac{1}{3}$ **39.** $m = 0$, $y = 3$ **40.** m es indefinida, $x = 2$ **41.** $m = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}x + 2$ **42. a)** -2 **b)** $(0, 1)$ **c)** $y = -2x + 1$ **43.** $(0, 0)$

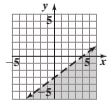
44. a) 

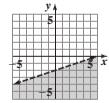
b) $-0.1, -0.08, -0.1, -0.14$ **c)** 2010–2015 **45.** $n(t) = 0.7t + 35.6$ **46.** Ninguna **47.** Paralela **48.** Perpendicular **49.** Ninguna **50.** Paralela **51.** Perpendicular **52.** Ninguna **53.** $y = \frac{1}{2}x + 2$ **54.** $y = -x - 2$ **55.** $y = -\frac{2}{3}x + 6$ **56.** $y = \frac{5}{2}x + 3$ **57.** $y = -\frac{5}{3}x - 4$ **58.** $y = -\frac{1}{2}x + 7$ **59. a)** $r(a) = 0.61a - 10.59$ **b)** \$13.81 **60. a)** $C(r) = 1.8r + 435$ **b)** 507 calorías **c)** ≈91.7 yardas por minuto **61.** $x^2 - x - 1$ **62.** 11 **63.** $-x^2 + 5x - 9$ **64.** -15 **65.** -56 **66.** 4 **67.** $-\frac{2}{3}$ **68.** -2

69. a) ≈4.6 miles de millones **b)** ≈2.1 miles de millones **c)** ≈0.8 miles de millones **d)** ≈33% **70. a)** ≈\$47000 **b)** ≈\$28000 **c)** ≈\$3000

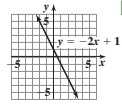
71. 

72. 

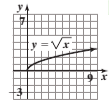
73. 

74. 

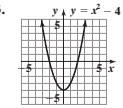
Capítulo 3 Examen de práctica

1. 

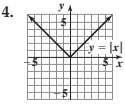
[3.1]

2. 

[3.1]

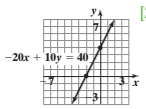
3. 

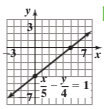
[3.1]

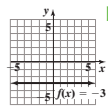
4. 

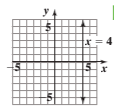
[3.1]

5. Una función, es una correspondencia donde cada elemento en el dominio corresponde con exactamente un elemento en el rango. [3.2]
6. Sí, porque cada elemento en el dominio corresponde a exactamente un elemento en el rango. [3.2] **7.** Sí; Dominio: $\mathbb{R}$ o $(-\infty, \infty)$, Rango: $\{y|y \le 4\}$ o $(-\infty, 4]$ [3.2] **8.** No; Dominio: $\{x|-3 \le x \le 3\}$ o $[-3, 3]$ Rango: $\{y|-2 \le y \le 2\}$ o $[-2, 2]$ [3.2] **9.** 29 [3.2]

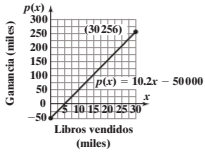
10. 

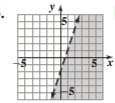
[3.3] **11.** 

[3.3] **12.** 

[3.3] **13.** 

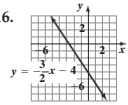
[3.3]

14. a) 

b) 4900 libros **c)** 14 700 libros [3.3] **15.** $m = \frac{4}{3}$, $(0, -5)$ [3.4] **16.** $y = 3x - 7$ [3.4] **17.** $y = -2x + 7$ [3.4] **18.** $p(t) = 2.9044t + 274.634$ [3.4] **19.** Paralela, la pendiente de ambas rectas es la misma, $\frac{2}{3}$ [3.5] **20. a)** $r(t) = -0.272t + 56.2$ **b)** 50.216 segundos **c)** 48.04 segundos [3.5] **21.** 12 [3.6] **22.** $-\frac{3}{7}$ [3.6] **23.** $2a^2 - a$ [3.6] **24. a)** ≈ 44 millones de toneladas **b)** ≈ 18 millones de toneladas **c)** ≈ 26 millones de toneladas [3.6] **25.** 

[3.7]

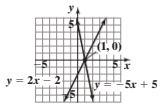
Examen de repaso acumulativo

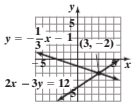
1. a) $\{3, 5, 7\}$ **b)** $\{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 14\}$ [1.2] **2. a)** Ninguna **b)** $-6, -4, \frac{1}{3}, 0, \sqrt{3}, 4.67, \frac{37}{2}, -\sqrt{5}$ [1.2] **3.** 100 [1.4] **4.** $25x^4y^6$ [1.5] **5.** $\frac{x^9}{8y^{15}}$ [1.5] **6. a)** 2.75×10^{13} **b)** 9.625×10^{12} ft^3 **c)** 4.4×10^{12} ft^3 **d)** 2.475×10^{12} ft^3 [1.6] **7.** 0 [2.1] **8.** $-\frac{138}{5}$ [2.1] **9.** $9x - 7$ [2.1] **10.** $b_1 = \frac{2A}{h} - b_2$ [2.2] **11.** 12 galones [2.4] **12.** $x > -\frac{10}{3}$ [2.5] **13.** $2 < x < 6$ [2.5] **14.** $\{-15, 1\}$ [2.6] **15.** $\{x \mid -1 \le x \le 2\}$ [2.6] **16.** 

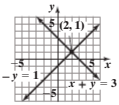
[3.1] **17. a)** No es una función **b)** Dominio: $\{x \mid x \le 2\}$ o $(-\infty, 2)$, Rango: $\mathbb{R}$ o $(-\infty, \infty)$ [3.2] **18.** $-\frac{4}{9}$ [3.4] **19.** Ninguna [3.5] **20.** $x^2 + 7x - 11$ [3.6]

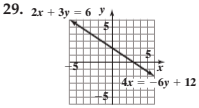
Capítulo 4

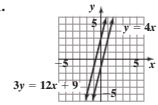
Serie de ejercicios 4.1

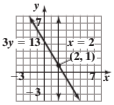
1. Variable **3.** Dependiente **5.** Consistente **7.** Paralela **9.** Par **11. b)** **13. a)** y **b)** **15. b)** **17.** Exactamente una solución **19.** Sin solución **21.** Número infinito de soluciones **23.** 

25. 

27. 

29. 

31. 

33. 

35. (3, 1) **37.** (3, 1) **39.** (−3, −3) **41.** (2, 1) **43.** (1.2, 1.8) **45.** Número infinito de soluciones **47.** Sin solución **49.** (8, 6) **51.** $\left(\frac{6}{5}, \frac{14}{5}\right)$ **53.** (−4, 3) **55.** (−8, −26) **57.** (3, −1) **59.** (1, 1) **61.** (1, 2) **63.** Sin solución **65.** (3, 2) **67.** Número infinito de soluciones **69.** (4, 3) **71.** (8, 12) **73.** $\left(\frac{37}{7}, \frac{19}{7}\right)$ **75.** $\left(2, \frac{4}{3}\right)$ **77.** 2033, $53 000 **79. a)** Un ejemplo es: $x + y = 7$, $x - y = -3$.

b) Elige coeficientes para x y y, después, usa las coordenadas dadas para determinar las constantes. **81.** $A = 2$ y $B = 5$ **83.** $m = 4$, $b = -2$ **85.** Compara las pendientes y las intersecciones con el eje de las y de las ecuaciones. Si las pendientes son diferentes, el sistema es consistente. Si las pendientes y las intersecciones con el eje y son iguales, el sistema es dependiente. Si las pendientes son iguales y las intersecciones con el eje de las y son diferentes, el sistema es inconsistente. **87.** Obtendrás un enunciado verdadero, como $0 = 0$. **89.** Multiplica la primera ecuación por 2 y, observa, que la nueva ecuación es idéntica a la segunda ecuación. **91. a), b)** y **c)** Las respuestas variarán. **93. a)** Número infinito, porque un sistema de ecuaciones puede no tener solución, una solución o un número infinito de soluciones **b)** $m = -4$, $y = -4x - 13$, $(0, -13)$ **c)** Sí **95.** Un ejemplo es: $x + y = 1$, $2x + 2y = 2$, crea una ecuación y luego multiplícala por una constante para obtener la segunda ecuación. **97.** El sistema es dependiente o una gráfica no está en la ventana de visualización. **99.** $(8, -1)$ **101.** $(-1, 2)$ **103.** $\left(\frac{1}{a}, 5\right)$ **105.** Los números racionales, pueden expresarse como cocientes de dos enteros, denominador no 0. Los números irracionales no pueden. **106. a)** Sí, el conjunto de los números reales, incluye el conjunto de los números racionales. **b)** Sí, el conjunto de los números reales, incluye el conjunto de los números irracionales. **107.** $-\frac{17}{4}$ **108.** $\mathbb{R}$ **109.** 520.20 **110.** No, los puntos $(-3, 4)$ y $(-3, -1)$ tienen la misma primera coordenada, pero diferentes segundas coordenadas. **111.** Indefinido

Serie de ejercicios 4.2

1. Triada **3.** Inconsistente **5.** $(0, 3, 6)$ **7.** $(3, 2, -1)$ **9.** $\left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{3}, \frac{13}{4}\right)$ **11.** $(1, -2, 3)$ **13.** $(-3, 15, -7)$ **15.** $(3, 1, -2)$ **17.** $(2, -1, 3)$ **19.** $(0, -1, 0)$ **21.** $(3, -1, 5)$ **23.** $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$ **25.** $(0, 0, 0)$ **27.** $(4, 6, 8)$ **29.** $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ **31.** $(1, 1, 2)$ **33.** Inconsistente **35.** Dependiente **37.** Inconsistente **39.** $A = 9$, $B = 6$, $C = 2$; $9x + 6y + 2z = 1$ **41.** Las respuestas variarán. Un ejemplo es: $x + y + z = 10$, $x + 2y + z = 11$, $x + y + 2z = 16$ **43. a)** $a = 1$, $b = 2$, $c = -4$ **b)** $y = x^2 + 2x - 4$, Sustituye 1 por a, 2 por b y -4 por c en $y = ax^2 + bx + c$ **45.** Ningún punto es común a los tres planos. Por tanto, el sistema es inconsistente. **47.** Un punto es común a los tres planos; por tanto, el sistema es consistente. **49. a)** Sí, los 3 planos pueden ser paralelos **b)** Sí, los 3 planos pueden intersecar en un punto **c)** No, los 3 planos no pueden intersecar en exactamente dos puntos **51.** (1, 2, 3, 4) **53. a)** $\frac{1}{4}$ hora o 15 minutos **b)** 1.25 millas **54.** $\left\{x \middle| x < -\frac{3}{2} \text{ o } x > \frac{27}{2}\right\}$ **55.** $\left\{x \middle| -\frac{8}{3} < x < \frac{16}{3}\right\}$ **56.** $\varnothing$

Serie de ejercicios 4.3

1. Irlanda: 70 273 kilómetros cuadrados, Georgia: 69 700 kilómetros cuadrados **3.** Leche: 103 calorías; Galleta: 90 calorías **5.** Hot dog: \$2, gaseosa: \$1 **7.** Jet ski: \$9 500, remolque: \$1700 **9.** 25°, 65° **11.** 52°, 128° **13.** 12.2 millas por hora, 3.4 millas por hora **15.** \$500, 4% **17.** \$85/mes, 6¢/copia **19.** 1.2 onzas de 5%, 1.8 onzas de 30% **21.** 3.75 galones de 20%, 6.25 galones de 4% **23.** libras de semillas para aves, 17 libras semillas de girasol **25.** Adulto: \$7, estudiante: \$4 **27.** \$6000 a 5%, \$4000 a 6% **29.** 160 galones de leche entera, 100 galones de leche descremada **31.** Caminos vecinales: 0.1 horas: 0.1 horas, interestatales: 0.5 horas **33.** Carmen: 8 horas, Diana: 3.4 horas **35.** 80 gramos A, 60 gramos B **37.** 200 gramos de la primera aleación, 100 gramos de la segunda aleación **39.** Jacobo: 1 hora, Carlos : $\frac{5}{6}$ hora o 50 minutos **41. a)** 2.5 horas **b)** 45 millas **43.** 5 gerentes, 10 meseros, 8 chefs **45.** Teoría: 7 medallas, Etimologías: 4 medallas, Vocabulario: 5 medallas **47.** Syracuse: 110 in., Erie: 89 in., Rochester: 88 in. **49.** *Crazy*: 71 peticiones, *Shout*: 83 peticiones, *Yeah*: 132 peticiones **51.** Laterales: \$65, Cabecera: \$40, Segundo piso: \$25 **53.** 30°, 45°, 105° **55.** \$1500 a 3%, \$3000 at 5%, \$5500 at 6% **57.** 4 litros de solución al 10%, 2 litros de solución al 12%, 2 litros de solución al 20% **59.** 10 sillas de niños, 12 sillas estándar, 8 sillas ejecutivas. **61.** $I_A = \frac{27}{38}$; $I_B = -\frac{15}{38}$; $I_C = -\frac{6}{19}$ **64.** $-\frac{35}{8}$ **65.** 4 **66.** Usa la prueba de la recta vertical **67.** $y = x - 10$

Examen de mitad de capítulo

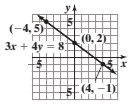
1. a) $y = 7x - 13$, $y = -\frac{2}{3}x + 3$, **b)** Consistente **c)** Una solución [4.1] **2.** (1, 2) [4.1] **3.** $(-1, -3)$ [4.1] **4.** $(-4, 1)$ [4.1] **5.** $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ [4.1] **6.** $(-3, 4)$ [4.1] **7.** $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ [4.1] **8.** $(6, 12)$ [4.1] **9.** Inconsistente, sin solución [4.1] **10.** Dependiente, número infinito de soluciones [4.1] **11.** $(1, 2, -1)$ [4.2] **12.** $(2, 0, 3)$ [4.2] **13.** La solución debe tener valores para y y z además de un valor para x. La solución es $(1, -1, 4)$ o $x = 1$, $y = -1$, $z = 4$. [4.2] **14.** 10 libras de nueces de la India, 5 libras de nueces pecaneras. [4.3] **15.** 5, 7, 20 [4.3]

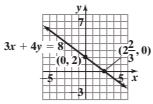
Serie de ejercicios 4.4

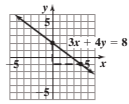
1. Transformaciones **3.** Dimensiones **5.** Inconsistente **7.** Cuadrada **9.** $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -7 & -3 \\ 2 & -3 & 16 \end{array}\right]$ **11.** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & -8 \\ 3 & 2 & 1 & -5 \\ 4 & 7 & 2 & -1 \end{array}\right]$ **13.** $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 12 \\ 0 & 23 & 42 \end{array}\right]$ **15.** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & \frac{1}{4} \\ 0 & 2 & -38 & -\frac{13}{4} \\ 6 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right]$ **17.** $(2, -1)$ **19.** $(-5, 1)$ **21.** $(0, 1)$ **23.** Sistema dependiente **25.** $(1, -1)$ **27.** Sistema inconsistente **29.** $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right)$ **31.** $\left(\frac{4}{5}, -\frac{7}{8}\right)$ **33.** $(1, -2, -1)$ **35.** $(3, 1, 2)$ **37.** $(1, -1, 2)$ **39.** Sistema inconsistente **41.** $(-1, -1, 3)$ **43.** Sistema dependiente **45.** $\left(5, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ **47.** $\angle x = 30°, \angle y = 65°, \angle z = 85°$ **49.** Blues: 18, Hip-hop: 28, Jazz: 13 **51.** Dependiente **53.** No, esto es lo mismo que cambiar el orden de las ecuaciones. **55. a)** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10\}$ **b)** $\{4, 6\}$ **56. a)**  **b)** $\{x \mid -1 < x \leq 4\}$ **c)** $(-1, 4]$ **57.** Una gráfica es una ilustración del conjunto de puntos, cuyas coordenadas satisfacen una ecuación. **58.** −71

Serie de ejercicios 4.5

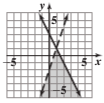
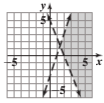
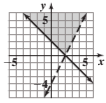
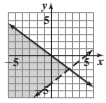
1. Determinante **3.** D_y **5.** Dependiente **7.** 11 **9.** −8 **11.** −12 **13.** 44 **15.** $(-1, 2)$ **17.** $(6, -4)$ **19.** $(-7, -2)$ **21.** Número infinito de soluciones **23.** $(2, -3)$ **25.** Sin solución **27.** $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ **29.** $(2, 5)$ **31.** $(2, -1, 3)$ **33.** $(-1, 0, 2)$ **35.** $(1, 2, 1)$ **37.** $(2, 2, -1)$ **39.** Número infinito de soluciones **41.** $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, 2\right)$ **43.** Sin solución **45.** $(3, 4, 1)$ **47.** $(-1, 5, -2)$ **49.** 5 **51.** 6 **53.** adulto: \$10, estudiante: \$5 **55.** Tendrá el signo opuesto. Esto puede verse al comparar $a_1b_2 - a_2b_1$ con $a_2b_1 - a_1b_2$ **57.** 0 **59.** 0 **61.** Sí, tendrá el signo opuesto. **63.** No, mismo valor que el valor original **65.** Sí, el valor es el doble del valor original **67. a)** $x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ **b)** $y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ **68.** $\left(-\infty, \frac{14}{11}\right)$

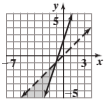
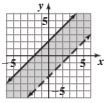
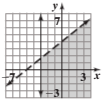
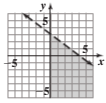
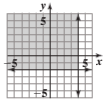
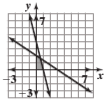
69. 

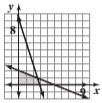
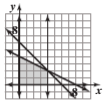
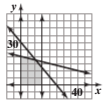
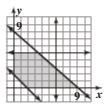
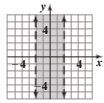
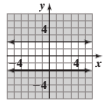
70. 

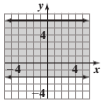
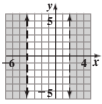
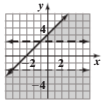
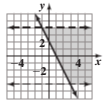
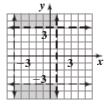
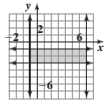
71. 

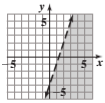
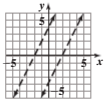
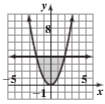
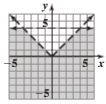
Serie de ejercicios 4.6

1. Satisface **3.** Punteada **5.**  **7.**  **9.**  **11.** 

13.  **15.**  **17.**  **19.**  **21.**  **23.** 

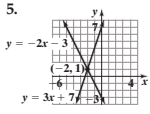
25.  **27.**  **29.**  **31.**  **33.**  **35.** 

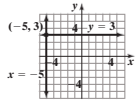
37.  **39.**  **41.**  **43.**  **45.**  **47.** 

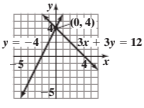
49. No; el punto no está contenido en la solución a la desigualdad $<$. **51.** No; el punto no es una solución a alguna desigualdad. **53.** No hay solución. Lados opuestos de la misma recta están sombrados y sólo una desigualdad incluye la recta. **55.** Hay un número infinito de soluciones. Ambas desigualdades incluyen la recta $5x - 2y = 3$. **57.** Hay un número infinito de soluciones. Las rectas no son paralelas o idénticas. **59.**  **61.** Sin solución  **63.**  **65.**  **67.** $f_2 = \dfrac{f_3 d_3 - f_1 d_1}{d_2}$

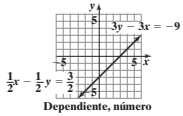
68. Dominio: $\{-1, 0, 4, 5\}$, Rango: $\{-5, -2, 2, 3\}$ **69.** Dominio: $\mathbb{R}$ o $(-\infty, \infty)$, Rango: $\mathbb{R}$ o $(-\infty, \infty)$ **70.** Dominio: $\mathbb{R}$ o $(-\infty, \infty)$, Rango: $\{y \mid y \geq -1\}$ o $[-1, \infty)$

Capítulo 4 Ejercicios de repaso

1. Sin solución **2.** Exactamente una solución **3.** Exactamente una solución **4.** Exactamente una solución **5.** 

6. 

7. 

8. 

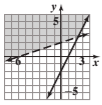
9. $(1, -1)$ **10.** $(-1, -1)$

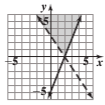
11. $(2, 5)$ **12.** $(5, 2)$ **13.** $(2, 1)$ **14.** $(-8, 11)$ **15.** $(-1, 3)$ **16.** $(3, -2)$ **17.** $\left(\frac{32}{13}, \frac{8}{13}\right)$ **18.** $\left(-1, \frac{13}{3}\right)$ **19.** $(1, 2)$

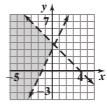
20. $\left(\frac{7}{5}, \frac{13}{5}\right)$ **21.** $(6, -2)$ **22.** $\left(-\frac{78}{7}, -\frac{48}{7}\right)$ **23.** Número infinito de soluciones **24.** Sin solución **25.** $(2, 0, 1)$ **26.** $(-1, 3, -2)$

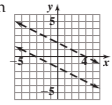
27. $(-5, 1, 2)$ **28.** $(3, -2, -2)$ **29.** $\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, 3\right)$ **30.** $(0, 2, -3)$ **31.** Sin solución **32.** Número infinito de soluciones **33.** Rodolfo: 38, Juana: 28 **34.** Avión: 520 mph, viento: 40 mph **35.** Combina 2 litros de la solución ácida al 20 % con 4 litros de la solución ácida al 50 %.

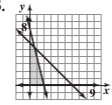
36. Se vendieron 240 boletos de niños y 410 boletos de adulto. **37.** Sus edades eran 41 años y 77 años. **38.** \$20 000 invertidos a 7 %, \$15 000 invertidos a 5 %, y \$5000 invertidos a 3 %. **39.** $(3, -2)$ **40.** $(3, 1)$ **41.** Número infinito de soluciones **42.** $(2, 1, -2)$ **43.** Sin solución **44.** Número infinito de soluciones **45.** $(1, 5)$ **46.** $(-3, 2)$ **47.** $(-1, 2)$ **48.** $(-2, 3, 4)$ **49.** $(1, 1, 2)$ **50.** Sin solución

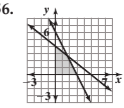
51. 

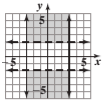
52. 

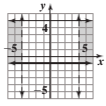
53. 

54. Sin solución 

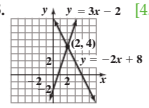
55. 

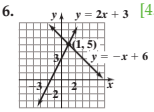
56. 

57. 

58. 

Capítulo 4 Examen de práctica

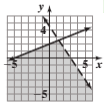
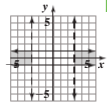
1. Las respuestas variarán. [4.1] **2.** Exactamente una solución [4.1] **3.** Número infinito de soluciones [4.1] **4.** Sin solución [4.1] **5.** 

[4.1] **6.** 

[4.1] **7.** $(1, 1)$ [4.1] **8.** $(-3, 2)$ [4.1] **9.** $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ [4.1]

10. Número infinito de soluciones [4.1] **11.** $\left(\frac{44}{19}, \frac{48}{19}\right)$ [4.1] **12.** $(1, -1, 2)$ [4.2] **13.** $\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 7 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & 9 & -13 \end{array}\right]$ [4.4]

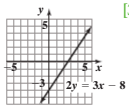
14. $\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & 12 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \end{array}\right]$ [4.4] **15.** $(4, -1)$ [4.4] **16.** $(3, -1, 2)$ [4.4] **17.** -1 [4.5] **18.** 165 [4.5] **19.** $(-3, 2)$ [4.5]

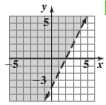
20. $(3, 1, -1)$ [4.5] **21.** 8 libras de semillas de girasol; 12 libras de mezcla de semillas para aves [4.3] **22.** $6\frac{2}{3}$ litros de solución al 6 % $3\frac{1}{3}$ litros de solución al 15 % [4.3] **23.** 4, 9 y 16 [4.3] **24.**  [4.6] **25.**  [4.6]

Examen de repaso acumulativo

1. 3 [1.4] **2. a)** 9, 1 **b)** $\frac{1}{2}, -4, 9, 0, -4.63, 1$ **c)** $\frac{1}{2}, -4, 9, 0, \sqrt{3}, -4.63, 1$ [1.2]

3. $-|-8|, -1, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, |-4|, |-12|$ [1.3] **4.** 7 [2.1] **5.** $\frac{17}{4}$ [2.1] **6.** $6, -3$ [2.6] **7.** $x = 2M - a$ [2.2] **8.** $\left\{x \left| \frac{2}{3} < x \leq \frac{34}{3} \right.\right\}$ [2.5]

9. $\frac{y^{10}}{9x^4}$ [1.5] **10.** 

[3.3] **11.** $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ [3.5] **12.**  [3.7] **13. a)** Función **b)** Función **c)** No es una función [3.2]

14. a) $-\frac{1}{7}$ **b)** $\frac{h+3}{h^2-9}$ **c)** Indefinido [3.2] **15.** $(1, 3)$ [4.1] **16.** $(7, -1)$ [4.1] **17.** $(2, 1, 3)$ [4.2] **18.** $10°, 80°, 90°$ [2.3]

19. 1 hora [2.4] **20.** 600 a \$20, 400 a \$16 [4.3]

Capítulo 5

Serie de ejercicios 5.1

1. Términos **3.** 5 **5.** Principal **7.** Binomio **9.** Monomio **11.** No es un polinomio; exponente -1

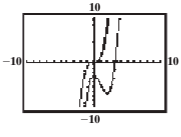
13. Trinomio **15.** No es un polinomio; exponente $\frac{1}{2}$ **17.** $-x^2 + 2x - 5$, 2 **19.** En orden descendente, 4 **21.** $10x^2 + 3xy + 9y^2$, 2 **23. a)** 1 **b)** 2

25. a) 6 **b)** 3 **27. a)** 6 **b)** 9 **29. a)** 8 **b)** 12 **c)** 0 **31. a)** -6 **b)** 6 **c)** 0 **33. a)** -1 **b)** -7 **c)** -4 **35.** $x^2 + 9x - 6$
37. $x^2 - 13x + 2$ **39.** $2y^2 + 9y - 11$ **41.** $-5k^3 + 3k^2 - 9k - 7$ **43.** $5a - 10b + 13c$ **45.** $-2a^2b - 10ab + 11b^2$ **47.** $10x^2 - 8x - 9$

49. $-\frac{2}{3}a^2 - \frac{29}{36}a + 5$ **51.** $-3.5x^2 - 2.1x - 19.6$ **53.** $-3x^2 - 6x - 12$ **55.** $13x^2 - 8xy + 5y^2$ **57.** $3x + 19$ **59.** $7x^2 + 13$

61. $-5.4a^2 - 5.7a - 26.4$ **63.** $-\frac{11}{2}x^2y + xy^2 + \frac{2}{45}$ **65.** $5x^{2r} - 10x^r + 3$ **67.** $-x^{2s} - 4x^s + 19$ **69.** $7b^{4n} - 3b^{3n} - 4b^{2n} + 1$

71. $3x^2 + 4x + 19$ **73.** $4x^2 + 8x + 24$ **75.** $2x^2 + 12x + 9$ **77.** 144 metros cuadrados **79.** $A \approx 113.10$ pulgadas cuadradas **81.** 674 pies
83. 105 comités **85. a)** \$674 **b)** \$1 010 **87. a)** $P(x) = 2x^2 + 360x - 8\,050$ **b)** \$47 950 **89. c)** La intersección con el eje de las y es $(0, -4)$ y el coeficiente principal es positivo **91. c)** La intersección con el eje de las y es $(0, -6)$ y el coeficiente principal es negativo **93. a)** 939 pies **b)** 811 pies

c) 379 pies **95.** \$88 210 **97. a)** 

b) Aumenta **c)** Las respuestas variarán. **d)** Disminuye **e)** Las respuestas variarán. **99.** 0 **101.** El coeficiente principal, es el coeficiente del término principal. **103. a)** Es el mismo que el del término del grado más alto. **b)** 7 **105. a)** Un polinomio es lineal si su grado es 0 o 1. **b)** Las respuestas variarán. Un ejemplo es $x + 4$. **107. a)** Un polinomio es cúbico, si tiene grado 3 y está en una variable. **b)** Las respuestas variarán. Un ejemplo es $x^3 + x - 4$. **109.** Las respuestas variarán. Un ejemplo es $x^5 + x + 1$.

111. No, por ejemplo $(x^2 + x + 1) + (x^3 - 2x^2 + x) = x^3 - x^2 + 2x + 1$ **113.** No, por ejemplo $(x^2 + 3x - 5) + (-x^2 - 4x + 2) = -x - 3$

115. b) intersección con el eje de las y $(0, -5)$ y el coeficiente principal es negativo **119.** 3 **120.** $\frac{15}{16}$ **121.** 6 horas **122.** $-\frac{2}{11}$ **123.** $(-4, 0, -1)$

Serie de ejercicios 5.2

1. Polinomio **3.** Factores **5.** Primero **7.** Elevar al cuadrado **9.** $42x^2y^5$ **11.** $-35x^4y^5z^3$ **13.** $15x^3 + 5x^2 - 5x$

15. $6x^6y^3 - 15x^3y^4 - 18x^2y$ **17.** $2xyz + \frac{8}{3}y^2z - 8y^3z$ **19.** $0.6x^2 - 1.5x + 3.3y$ **21.** $6x^2 + 19x + 10$ **23.** $12x^2 - 38x + 30$

25. $72x^2 + 25x - 63$ **27.** $x^2 + \frac{23}{6}xy - \frac{2}{3}y^2$ **29.** $x^3 - x^2 - 11x - 4$ **31.** $2a^3 - 7a^2b + 5ab^2 - 6b^3$ **33.** $x^4 + 2x^2 + 10x + 7$

35. $5x^4 + 29x^3 + 14x^2 - 28x + 10$ **37.** $3m^4 - 11m^3 - 5m^2 - 2m - 20$ **39.** $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ **41.** $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$

43. $x^2 + 4x + 4$ **45.** $z^2 - 10z + 25$ **47.** $4p^2 + 20pq + 25q^2$ **49.** $z^2 - 25$ **51.** $49x^2 - 64$ **53.** $25m^4 - 4n^2$ **55.** $y^2 + 8y - 4xy + 16 - 16x + 4x^2$

57. $4c^2 - 4cd + d^2 - 16$ **59.** $2x^3y + 2x^2y^2 + 24xy^3$ **61.** $21a^2 + 10a - 24$ **63.** $2x^3 + 10x^2 + 9x - 9$ **65.** $4r^2 - 12rs + 9s^2$

67. $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$ **69.** $8x^3 + 27$ **71.** $\frac{9}{16}x^2 - \frac{4}{9}$ **73.** $9x^2 + 12x + 4 - y^2$ **75.** $81x^4 - 16$ **77.** $x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{49}{16}$ **79. a)** $x^2 + x - 30$

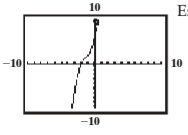
b) -10 **81. a)** $10x^3 + 36x^2 - 2x - 12$ **b)** 1196 **83. a)** $-x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 6x$ **b)** -72 **85.** $x^2 + 5x + 6$ **87.** $x^2 + y^2$ **89. a)** y

b) $x^2 + 7x + 12$ **91.** $36 - x^2$ **93. a)** $11x + 12$ **b)** 117 pulgadas cuadradas, 50 pulgadas cuadradas **95.** $(x + 7)(x - 7)$, producto de la suma y la diferencia de los mismos dos términos **97.** $(x + 6)(x + 6)$, cuadrado de la fórmula de un binomio

99. $a(x - n)(x - n)(x - n)$ **101. a)** Las respuestas variarán. **b)** $a^2 + 2ab + b^2$ **c)** $a^2 + 2ab + b^2$ **d)** Igual **103. a)** $A = P(1 + r)^t$

b) \$1123.60 **105. a)** 110 formas **b)** $P(n) = n^2 - n$ **c)** 110 formas **d)** Sí **107.** $a^2 + 2ab + b^2 - 3a - 3b + 5$ **109.** $15x^{3t-1} + 18x^{4t}$

111. $12x^{3m} - 18x^m - 10x^{2m} + 15$ **113.** $y^{a^2-b^2}$ **115.** $x^4 - 12x^3y + 54x^2y^2 - 108xy^3 + 81y^4$ **117. a)** Las respuestas variarán.

b) 

Es correcto. **119. a)–d)** Las respuestas variarán. **121. a)** Las respuestas variarán. **b)** $x^3 - 2x^2 - 21x + 12$ **123. a)** Las respuestas variarán. **b)** Las respuestas variarán. Una posible respuesta es $(x + 4)(x - 4)$. **c)** Las respuestas variarán. **d)** Las respuestas variarán. Una posible respuesta es $x^2 - 16$. **125.** Sí, por ejemplo $(x + 2)(x - 1) = x^2 + x - 2$

127. $y^2 - 2y - 2xy + 2x + x^2 + 1$ **129.** $\frac{43}{60}$ **130.** $8r^6s^{15}$ **131.** $\left(-\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right]$ **132.** $\frac{15}{4}$

Serie de ejercicios 5.3

1. Dividendo **3.** Cociente **5.** Término **7.** Sintética **9.** $P(7)$ **11.** x^{15} **13.** 1 **15.** $\frac{1}{u^4}$ **17.** $4r^6s^2$ **19.** $\frac{2s^4}{3r^4}$

21. $x + \frac{17}{2}$ **23.** $2x + 1$ **25.** $1 - \frac{3}{m}$ **27.** $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 2$ **29.** $4x^2 - 5xy - \frac{5}{2y}$ **31.** $\frac{9x}{2y} - 6x^2 + \frac{25y}{2x}$ **33.** $\frac{z}{2} + z^2 - \frac{3}{2}x^2y^4z^7$

35. $x + 2$ **37.** $2x + 3$ **39.** $3x + 2$ **41.** $x + 5 - \frac{2}{x + 1}$ **43.** $2b + 5 + \frac{2}{b - 2}$ **45.** $4x + 9 + \frac{2}{2x - 3}$ **47.** $2x + 6$

49. $x^2 + 2x + 3 + \frac{6}{x + 1}$ **51.** $2x^2 - 4x + 2 + \frac{5}{2x + 1}$ **53.** $4x^2 + 5x + 10 + \frac{15}{x - 2}$ **55.** $3x^3 - 3x^2 + 4x - 5 + \frac{6}{x + 1}$

57. $3x^3 + 6x + 2$ **59.** $2c^2 - 6c + 3$ **61.** $x + 3$ **63.** $x - 1$ **65.** $x + 8 + \frac{10}{x - 3}$ **67.** $3x + 5 + \frac{10}{x - 4}$ **69.** $p^2 - p - 1 - \frac{2}{p + 3}$

71. $4x^2 + x + 3 + \frac{3}{x - 1}$ **73.** $2x^3 + 8x^2 + 2x + 8 - \frac{9}{x - 4}$ **75.** $y^3 + y^2 + y + 1$ **77.** $x^3 - 4x^2 + 16x - 64 + \frac{272}{x + 4}$ **79.** $x^4 - \frac{9}{x + 1}$

81. $b^4 + 3b^3 - 3b^2 + 3b - 3 - \frac{11}{b + 1}$ **83.** $3x^2 + 3x - 3$ **85.** $8x^2 - 12x + 16$ **87. a)** -2 **b)** -14 **89. a)** -20 **b)** 48 **91. a)** -2

b) 6 **93.** Sí; $P(2) = 0$ **95.** No; $P(-3) \neq 0$ **97.** Sí; $P(-2) = 0$ **99.** $3x + 2$ **101.** 3 veces mayor, determina las áreas al multiplicar los polinomios, luego compara **103.** $x^2 - 2x - 8$ **105.** $x^2 + 9x + 26$ **107.** $2x^2 + 3xy - y^2$ **109.** $x + \frac{5}{2} + \frac{11}{2(2x - 3)}$

111. $w = r + 1$ **113.** $x^3 - 6x^2 + 13x - 7$; multiplica $(x - 3)(x^2 - 3x + 4)$ y luego suma 5. **115.** $2x + 1 - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2x^2}$

117. No es un factor; calcula $P(1)$. $P(1) = 101$, que no es 0, de modo que $x - 1$ no es un factor **119.** Factor; calcula $P(-1)$. $P(-1) = 0$, de modo que $x + 1$ es un factor **121.** $0.3x^2 + 0.43x^2 + 0.04x + \frac{0.304}{x - 0.1}$ **123.** Colócalos en orden descendente de la variable. **125.** No; porque el resto no es igual que 0. **127.** No, el dividendo es un binomio. **129.** Si el resto es 0, $x - a$ es un factor. **131.** 2.0×10^{10}

132. 30°, 60°, 90° **133.** $\left\{-1, \frac{11}{5}\right\}$ **134.** -864 **135.** $3r + 3s - 8t$

Serie de ejercicios 5.4

1. Multiplicar **3.** Agrupamiento **5.** $2x^2y$ **7.** $4(x - 2)^3$ **9.** $3(3x - 5)$ **11.** $2(x^2 - 3x + 1)$

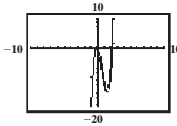
13. $2x(2x^2 - 3x + 11)$ **15.** $3x(5x^3 - 9x^2 + 3x - 4)$ **17.** $16c^7(2c^3 - 3)$ **19.** $3xy(x + 2xy + 1)$ **21.** $8a^2c(10a^3b^4 - 2a^2b^2c + 3)$

23. $3pq^2r(3p^3q^3 - pr + 4q^3r^2)$ **25.** $pq^2r^3s^4(p^4q^3r^2s + p^3q^2r - 1)$ **27.** $-3(8x - 5)$ **29.** $-(x^2 + 4x - 23)$ **31.** $-3(r^2 + 2r - 3)$

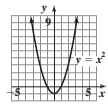
33. $-2rs^3(3r^5 - 2rs - s^2)$ **35.** $-2r^2s(5r^3s^2t + 3rst^2 - 1)$ **37.** $(a + 9)(x + 1)$ **39.** $(m + n)(a + b)$ **41.** $(x - 3)(x^2 + 4)$

43. $(x + 4)(x - 5)$ **45.** $(5m - 6n)(2m - 5n)$ **47.** $5(3m + 2)(6m + 5)$ **49.** $5(a + 3)(a^2 - 2)$ **51.** $-2(x - 5)(x^2 - 2)$

53. $(k+5)(2k-5)$ **55.** $(2x-1)(3x-1)$ **57.** $(x-4)(9x-8)$ **59.** $(2x+1)(6x-5)$ **61.** $(x+4)(3x-2)$
63. $2(2x-3)(4x-3)$ **65. a)** 96 pies **b)** $h(t) = -16t(t-5)$ **c)** 96 pies **67. a)** $\approx$2856.64 pies cuadrados **b)** $A = r(\pi r + 2l)$ **c)** $\approx$2856.64 pies cuadrados **69. a)** \$525 **b)** $A(t) = 75(13-t)$ **c)** \$525 **71. a)** $(x+0.06x)(1-0.06) = (1.06x)0.94$ **b)** $0.9964x$; ligeramente menor que el precio del modelo 2017 (99.64 % del costo original) **73. a)** $(x+0.15x) - 0.20(x+0.15x) = 0.80(x+0.15x)$ **b)** $0.80(1.15x) = 0.92x$; 92 % del precio regular **75.** $(3x+2)^4(15ax+10a+4)$ **77.** $2(x-3)(2x^4-12x^3+15x^2+9x+2)$
79. $(x^2+2x-4)(a+b)$ **81.** $x^{4m}(x^{2m}-5)$ **83.** $x^{2m}(3x^{2m}-2x^m+1)$ **85.** $(a^r+c^r)(b^r-d^r)$ **87. a)** Sí **b)** 0; restar la misma cantidad de sí mismo **c)** Las respuestas variarán. **89. a)** Deben ser la misma gráfica; representan la misma función
89. b)



c) Las respuestas variarán. **d)** La factorización no es correcta. **91.** Determina si todos los términos contienen un máximo factor común y, si lo tienen, factorízalo. **93. a)** Las respuestas variarán. **b)** $2x^2y$ **c)** $2x^2y(3y^4 - x + 6x^7y^2)$ **95.** $3(x-4)^3$ **97. a)** Las respuestas variarán. **b)** $(3x^2-y^3)(2x+y^2)$
99. $-\frac{15}{72} = -\frac{5}{24}$ **100.** 2 **101.**



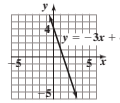
102. 0.4 horas **103.** $-14a^3 - 22a^2 + 19a - 3$

Examen de mitad de capítulo

1. $5x^4 - 1.5x^3 + 2x - 7$, 4 [5.1] **2.** $\frac{3}{2}$ o $1\frac{1}{2}$ [5.1] **3.** $-n^2 - 7n - 4$ [5.1] **4.** $-16x^2y + 14xy$ [5.1]
5. $9x^2 - 4x + 13$ [5.1] **6.** $6x^6y^4 + 10x^7 - 14x^8y$ [5.1] **7.** $21x^2 - 4xy - 12y^2$ [5.2] **8.** $6x^4 - x^3 + 14x^2 + 32x + 9$ [5.2]
9. $64p^2 - \frac{1}{25}$ [5.2] **10.** $12m^3 - m^2n - 30mn^2 + 18n^3$ [5.2] **11.** $(x-7)^2$ [5.2] **12.** $2x^2y + 3 - \frac{11}{2xy^2}$ [5.3] **13.** $3x + 5 + \frac{2}{4x+1}$ [5.3]
14. $y^2 + y + 5 + \frac{5}{2y-3}$ [5.3] **15.** $x - 9$ [5.3] **16.** $3a^3 + 4a^2 - 6a - 1$ [5.3] **17.** $8b^2c(4bc^2 + 2 + 3b^3c^3)$ [5.4]
18. $(2x+9)(7b-3c)$ [5.4] **19.** $b^2(2b-c)(b+2c)$ [5.4] **20.** $(3x-2)^5(5a-12x+8)$ [5.4]

Serie de ejercicios 5.5

1. Coeficientes **3.** Multiplicar **5.** Inverso **7.** Negativos **9.** Ambos son + **11.** Uno es +, Uno es −
13. $(x+2)(x+3)$ **15.** $(w-6)(w-2)$ **17.** $(a+9)(a-1)$ **19.** $(x+2)(x-15)$ **21.** $2(c+2)(c+8)$ **23.** $3(p-7)(p-4)$
25. $4(r+4)(r-1)$ **27.** $5(x-12)(x+2)$ **29.** Primo **31.** $(5w+1)(w+2)$ **33.** $(5a-2)(a-3)$ **35.** $(3c-2)(2c+5)$
37. $(3c+7)(2c-9)$ **39.** Primo **41.** $2(3a+2)(4a+5)$ **43.** $10(5b-2)(2b-1)$ **45.** $5(2h-3)(3h+5)$
47. $2(3m+2)(7m-8)$ **49.** $(x+7y)(x+5y)$ **51.** $(3a-2b)(5a+6b)$ **53.** $-2(x+1)(2x-5)$ **55.** $-2(3x-2y)(5x-2y)$
57. $(8a+9)(9a-8)$ **59.** $-2(6x+7y)(3x-8y)$ **61.** $x^2y^3(2x+3)(3x-2)$ **63.** $-2x^2y(3x-4y)(2x+3y)$ **65.** $(b^2+5)(b^2+4)$
67. $(x^2+3)(x^2-2)$ **69.** $(2a^2+5)(3a^2-5)$ **71.** $(xy+7)(xy+2)$ **73.** $(2xy-11)(xy+1)$ **75.** $(a^3-10)(a^3+3)$
77. $(2x+5)(2x+3)$ **79.** $(3a+1)(2a+5)$ **81.** $3(x+1)(3x+1)$ **83.** $(2x^4+3)(3x^4+2)$ **85.** $(4x+1)(6x-5)$
87. $(4x^2y^2+3)(3x^2y^2-8)$ **89.** $(x+6)(x+1)$ **91.** $(x+6)(x+3)$ **93.** $2x^2-5xy-12y^2$, multiplica $(2x+3y)(x-4y)$
95. Divide, $x+7$ **97. a)** Las respuestas variarán. **b)** $(6x-5)(5x+8)$, $(7x-1)(7x-13)$ **99.** $\pm 3, \pm 9$ **101.** 6 o -6, b es la suma de los factores de 5 **103. a)** 529 **b)** $(3x-2)(4x+5)$ **105. a)** -431 **b)** Primo **107. a)** 3625 **b)** Primo **109.** $(2a^n+3)(2a^n-5)$
111. $(x+y)^2(x-4y)(x-3y)$ **113.** $(x^n-2)(x^n+5)$ **115. a)** Las respuestas variarán. **b)** Correcto **117.** Factoriza el máximo factor común, si existe. **119. a)** Las respuestas variarán. **b)** $(2x+3)(3x-4)$ **121.** No; $2(x+3)(x+1)$; $(2x+2)$ tiene el MFC 2
123. No, $3x(x+4)(x-2)$; $(3x-6)$ tiene el MFC 3 **125.** $C = \frac{5}{9}(F-32)$ **126.**



127. 4
128. $x^2 + 2xy + y^2 + 12x + 12y + 36$ **129.** $(x+2)(2x^2-5)$

Serie de ejercicios 5.6

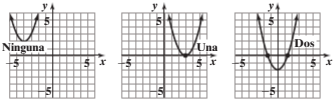
1. Cuadrados **3.** Cubos **5.** Real **7.** $(x+2)(x-2)$ **9.** $(w+1)(w-1)$ **11.** $(2j+3)(2j-3)$
13. $4(r+4)(r-4)$ **15.** $2(5t+7)(5t-7)$ **17.** $(12w+11z)(12w-11z)$ **19.** $-4(3v+10)(3v-10)$ **21.** $(x^2+3)(x^2-3)$
23. $(cd+5)(cd-5)$ **25.** $\left(\frac{2}{3}m+\frac{10}{7}\right)\left(\frac{2}{3}m-\frac{10}{7}\right)$ **27.** $(0.3p+0.7)(0.3p-0.7)$ **29.** $(5x+6)(5x-8)$ **31.** $(9+x)(13-x)$
33. $(3p+8)(p+2)$ **35.** $(x+5)^2$ **37.** $(c-3)^2$ **39.** $4(p-3)^2$ **41.** $(2p-3)^2$ **43.** $(4x+5y)^2$ **45.** $(3c-d)^2$ **47.** $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$
49. $(x-0.25)^2$ **51.** $(x+y+3)^2$ **53.** $(x+1)(x^2-x+1)$ **55.** $(j-5)(j^2+5j+25)$ **57.** $(2x+3)(4x^2-6x+9)$
59. $(4w-5z)(16w^2+20wz+25z^2)$ **61.** $8(v+2)(v^2-2v+4)$ **63.** $(x^2-y^3)(x^4+x^2y^3+y^6)$ **65.** $(x+5)(x^2+4x+7)$
67. $(c-5)(c^2-7c+13)$ **69.** $(8x-7)^2$ **71.** $9(2x+5)^2$ **73.** $(4u^2+9v^2)(2u+3v)(2u-3v)$ **75.** $(3x^2-5y^2)(9x^4+15x^2y^2+25y^4)$
77. $(x+3+y)(x+3-y)$ **79.** $(2c^2+3d^2+5d)(2c^2+3d^2-5d)$ **81.** $12(5x-2)(x-1)$ **83.** $(6x+11)^2$ **85.** $2x(x^2+3y^2)$
87. $(3x-2)(9x^2+6x+4)$ **89.** $(6p-q)(36p^2+6pq+q^2)$ **91.** $(4p+3q)(16p^2-12pq+9q^2)$ **93. a)** x^2-y^2 **b)** $(x+y)(x-y)$
95. a) $6x^3-6xy^2$ **b)** $6x(x+y)(x-y)$ **97. a)** $\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$ **b)** $\frac{4}{3}\pi(R-r)(R^2+Rr+r^2)$ **99.** 12, -12; escribe $4x^2+bx+9$ como $(2x)^2+bx+(3)^2$; $bx = 2(2x)(3)$ o $bx = -2(2x)(3)$ **101.** 4; escribe $25x^2+20x+c$ como $(5x)^2+20x+(a)^2$ entonces $20x = 2(5x)(a)$. Dado que $a=2, c=4$ **103. a)** Determina una expresión, cuyo cuadrado sea $25x^2-30x+9$ **b)** $s(x) = 5x-3$ **c)** 7
105. $(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$ **107.** $h(2a+h)$ **109. a)** 16 **b)** $x^2+8x+16$ **c)** $(x+4)^2$ **111.** Correcto **113. a)** Las respuestas variarán. **b)** $(x+4)(x-4)$ **115.** $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$ **117.** Las respuestas variarán. **119.** No. $(x+7)(x-7) = x^2-49$
121. No. $x^2-81 = (x+9)(x-9)$ **123.** $(8x^{2a}+3y^{3a})(8x^{2a}-3y^{3a})$ **125.** $(d^n-8)^2$ **127.** $(x^n-2)(x^{2n}+2x^n+4)$
129. a) $(x^3+1)(x^3-1)$ **b)** $(x^2-1)(x^4+x^2+1)$ **131.** $4x+7y-2$ **132.** -17 **133.** 20°, 30°, 40° **134.** $15y^{10}(3y^2+4)$
135. $(4x-3y)(3x+y)$

Serie de ejercicios 5.7

1. $3(x+5)(x-5)$ **3.** $7(x-3)^2$ **5.** $(5s-3)(2s+5)$ **7.** $5(3x-7)(4x+5)$ **9.** $3(x+5)(x^2-3)$ **11.** $6x(x^2+3)(x^2-3)$ **13.** $-7(2x+5)(3x-8)$ **15.** $x^2(x+y)(x-y)$ **17.** $11(2c^3+d^2)(2c^3-d^2)$ **19.** $x^4y^2(x-1)(x^2+x+1)$ **21.** $x(x^2+4)(x+2)(x-2)$ **23.** $-3z^2(z^2+4)(z+2)(z-2)$ **25.** $4(x^2+2y)(x^4-2x^2y+4y^2)$ **27.** $-6(3c+2d^3)(3c-2d^3)$ **29.** $6(x+3y)^2$ **31.** $(3x+7)(3x-5)$ **33.** $(y+7)^2$ **35.** $-2(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$ **37.** $\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}\right)$ **39.** $2y(3y+1)(y+2)$ **41.** $(c^4+1)(c^8-c^4+1)$ **43.** $(x-y+5)(x-y-5)$ **45.** $2(3x-2)(4x-3)$ **47.** $(b-2x)(5c-7y)$ **49.** $2ab^2(2c-7d)(3a-5b)$ **51.** $(x^2+4)(x+2)(x-2)$ **53.** $(3x^2-4)(x^2+1)$ **55.** $2k^2(7k+3)^2$ **57.** $(2y+5)(y+8)$ **59.** $3x(3x+5)(3x-5)$ **61.** $(x+y)^2(x-y)^2$ **63.** $(2xy+3)^2$ **65. e) 67. d) 69. f) 71. c) 73.** $2(x+3)(x+2)$ **75.** $(x+6)(x+2)$ **77.** $(y+3)(y-3)$ **79.** $(5x-3)(25x^2+15x+9)$ **81. a)** $a(a+b)-b(a+b)$ o a^2-b^2 **b)** $(a+b)(a-b)$ **83. a)** $a^2+2ab+b^2$ **b)** $(a+b)^2$ **85. a)** $a(a-b)+a(a-b)+b(a-b)+b(a-b)$ o $2a(a-b)+2b(a-b)$ **b)** $2(a+b)(a-b)$ **87. a)** Las respuestas variarán. **b)** Las respuestas variarán. **89. a)** $x^{-5}(x^2-2x-3)$ **b)** $x^{-5}(x-3)(x+1)$ **91. a)** $x^{-3/2}(5x^2+2x-3)$ **b)** $x^{-3/2}(5x-3)(x+1)$ **92.** 1 **93.** $\{z\,|\,z<-6 \text{ o } z>0\}$ **94.** ≈17.3 libras a $5.20, ≈ 12.7 libras a $6.30 **95.** $5x^3-x^2+16x+16$ **96.** $(x+3)(2x^2-5)$

Serie de ejercicios 5.8

1. Ecuación **3.** $ax^2+bx+c=0$ **5.** intersección con el eje de las x **7.** 0, 1 **9.** $\frac{2}{3}, \frac{1}{7}$ **11.** $-1, 7$ **13.** 0, 4, 9 **15.** 0, −5 **17.** 0, 6 **19.** 0,3 **21.** −4, 3 **23.** $-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}$ **25.** $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}$ **27.** −2, 6 **29.** $\frac{3}{2}$, −2 **31.** $-\frac{7}{6}, \frac{8}{9}$ **33.** −4, 6 **35.** 0, −4, 7 **37.** 0, 6, −3 **39.** −3, −2, 2 **41.** 7 **43.** $-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}$ **45.** 0, −3, 3 **47.** $-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}$, 1 **49.** −11, 9 **51.** −3, −11 **53.** −2, 2, −3, 3 **55.** $\frac{5}{2}, \frac{4}{3}$ **57.** $-\frac{1}{2}$, 5 **59.** −7, 9 **61.** $-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}$ **63.** $-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}$, −3 **65.** (−1,0), (1,0) **67.** (4, 0), (6, 0) **69.** (0, 0), $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$, $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ **71.** $x=4$ **73.** $x=17$ **75.** $x=1$ **77. d) 79. b) 81.** $y=x^2-6x+5$ **83.** $y=x^2-2x-8$ **85.** $y=6x^2-7x-10$ **87.** Ancho = 2 pies, largo = 5 pies **89.** Base = 10 pies, altura = 16 pies **91.** 2 pies **93.** 3 pies **95.** 2 segundos **97.** Christian: 5 millas, Marco: 12 millas **99.** 13 pies **101.** 50 bicicletas **103.** 13 pulgadas por 13 pulgadas **105. a)** $V=p^3-pq^2$ **b)** $V=p(p+q)(p-q)$ **c)** 3 pulgadas **107. a)** $f(x)=x^2+7x+10$ **b)** $x^2+7x+10=0$ **c)** Un número infinito; cualquier función de la forma $f(x)=a(x^2+7x+10), a\neq 0$ **d)** Un número infinito; cualquier función de la forma $a(x^2+7x+10)=0, a\neq 0$ **109. a)** Las respuestas variarán. Son ejemplos:



b) Ninguna (no hay intersecciones con el eje x), una (una intersección al eje x) o dos (dos intersecciones con el eje x) **111.** 73.72 mph **113.** Una ecuación polinomial de segundo grado en una variable **115. a)** Las respuestas variarán. **b)** $\frac{7}{3}, -\frac{3}{2}$ **117.** El término constante no contiene una variable **119. a)** Factoriza −1 **b)** 7, −5 **121.** $a^2+b^2=c^2$ **123.** $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$, (6, 0) **125.** Sí **127.** No **129.** ±2, ±3 **134.** $\frac{x^4}{16y^6}$ **135.** $\left(\frac{5}{12}, \frac{23}{12}\right]$ **136.** (2, −1) **137.** −84 **138.** $(x+3)(x-2)$

Capítulo 5 Ejercicios de repaso

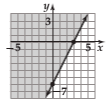
1. a) Binomio **b)** $3x^2+9$ **c)** 2 **2. a)** Trinomio **b)** $4x^3+5x-7$ **c)** 3 **3.** No es un polinomio **4. a)** Polinomio **b)** $2x^4-10x^2y+6xy^3-3$ **c)** 4 **5.** $x^2-3x+14$ **6.** $5x^2+11x-4$ **7.** $3a-8b+7$ **8.** $6x^3-9x+13$ **9.** $3x^2y+3xy-9y^2$ **10.** $-3ab+b^2-2a$ **11.** $5x^2+7x+3$ **12.** $-10a^2b+ab$ **13.** 21 **14.** −76 **15.** $3x^2+27$ **16.** $2x^2+24x+23$ **17. a)** $1154.86 miles de millones **b)** Sí **18. a)** $1304.97 miles de millones **b)** Sí **19.** $6x^3-14x^2+10x$ **20.** $-3x^4y^2-3x^2y^6+12xy^7$ **21.** $6x^2+17x-45$ **22.** $50a^2-5a-3$ **23.** $x^2+16xy+64y^2$ **24.** $a^2-22ab+121b^2$ **25.** $10x^2y+8xy^2-5x-4y$ **26.** $6p^2q^2+11pqr-7r^2$ **27.** $4a^2+36ab+81b^2$ **28.** $16x^2-24xy+9y^2$ **29.** $49x^2-25y^2$ **30.** $4a^2-25b^4$ **31.** $16x^2y^2-36$ **32.** $81a^4-4b^4$ **33.** $x^2+6xy+9y^2+4x+12y+4$ **34.** $4p^2-4pq+q^2-20p+10q+25$ **35.** $6x^3-x^2-24x+18$ **36.** $4x^4+12x^3+6x^2+16x-6$ **37.** $x^2+8x+10$ **38.** $x^2+xy+4y+xz$ **39. a)** x^2-2x-3 **b)** 0 **40. a)** $2x^3-4x^2-6x+12$ **b)** 12 **41. a)** x^3-x^2-5x+6 **b)** 9 **42. a)** x^4-4 **b)** 77 **43.** $\frac{1}{5}x^6y^2$ **44.** $\frac{1}{4}t^5$ **45.** $9p-5q-3$ **46.** $\frac{7}{4}a^2-4a+8$ **47.** $\frac{x^2}{4y}+x+\frac{3y}{2}$ **48.** $4x-3$ **49.** x^3-2x^2+3x+7 **50.** $2a^3+a^2-3a-4$ **51.** $x+4-\frac{10}{x-3}$ **52.** $2x^2+3x-4+\frac{3}{2x+3}$ **53.** $3x^2+7x+21+\frac{73}{x-3}$ **54.** $2y^4-2y^3-8y^2+8y-7+\frac{5}{y+1}$ **55.** $x^4+2x^3+4x^2+8x+16+\frac{14}{x-2}$ **56.** $2x^2+2x+6$ **57. a)** 13 **b)** −22 **58. a)** 47 **b)** −23 **59.** Sí; $P(-3)=0$ **60.** No; $P(2)\neq 0$ **61.** $4(x^2+2x+8)$ **62.** $3x^4(5x+2-4xy^3)$ **63.** $2a^2b^3(5a-7b^3)$ **64.** $6xy^2z^2(4y^2z+2xy-5x^2z)$ **65.** $(5x-y)(x+6y)$ **66.** $(3a+2b)(4a+5b)$ **67.** $(2x-5)(x+9)$ **68.** $(3x-7)(16x-21)$ **69.** $(5x+2)(13x-7)$ **70.** $(7x+9)(2x-1)$ **71.** $(17x+3)(9x-7)$ **72.** $(4x+5)(5x-2)$ **73.** $(x+6)(x+3)$ **74.** $(x-2)(x+5)$ **75.** $(x-7)(x+4)$ **76.** $(x-8)(x-2)$ **77.** $-(x-15)(x+3)$ **78.** $-(x-12)(x-1)$ **79.** $x(2x+1)(x+6)$ **80.** $x^2(4x-5)(2x+5)$ **81.** $a^3(4a-5)(a-1)$ **82.** $y^3(12y+1)(y+5)$ **83.** $(x-18y)(x+3y)$ **84.** $(2p-5q)(3p-2q)$ **85.** $(x^2+3)(x^2+7)$ **86.** $(x^2-7)(x^2+9)$ **87.** $(x+9)(x+7)$ **88.** $x(x-9)$ **89.** $(x+10)(x+1)$ **90.** $(x+10)(x+2)$ **91.** $(x+6)(x-6)$ **92.** $(x+11)(x-11)$ **93.** $(x^2+9)(x+3)(x-3)$ **94.** $(x^2+4)(x+2)(x-2)$ **95.** $(2a+1)^2$ **96.** $(4y-3)^2$ **97.** $(x+6)(x-2)$ **98.** $(3y+5)(3y-7)$ **99.** $(p^2+9)^2$ **100.** $(m^2-10)^2$ **101.** $(x+4+y)(x+4-y)$ **102.** $(a+3b+6c)(a+3b-6c)$ **103.** $(4x+y)^2$ **104.** $(6b-5c)^2$ **105.** $(x-3)(x^2+3x+9)$ **106.** $(y+4z)(y^2-4yz+16z^2)$ **107.** $(5x-1)(25x^2+5x+1)$ **108.** $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$ **109.** $(y-4z)(y^2+4yz+16z^2)$ **110.** $(x-5)(x^2-x+7)$ **111.** $(x-1)(x^2+4x+7)$ **112.** $(a+5)(a^2+7a+13)$ **113.** $(x+3)(x-3)$ **114.** $(a+2b)(a-2b)$ **115.** $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$ **116.** $4a(a+c)(a-c)$ **117.** $y^4(x+3)(x-5)$ **118.** $5x(x-4)(x-2)$ **119.** $3xy^4(x-2)(x+6)$ **120.** $3y(y^2+5)(y^2-5)$ **121.** $4y(x+2)(x^2-2x+4)$ **122.** $5x^2y(x+2)^2$ **123.** $3x(2x+1)(x-4)$ **124.** $(x+5+z)(x+5-z)$ **125.** $5(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$ **126.** $(x+4)(x-1)(x+6)$ **127.** $(4x+1)(4x+5)$ **128.** $(2x^2-1)(2x^2+3)$ **129.** $(x+1)^2(x-2)$ **130.** $(3a-b)(3x+7y)$ **131.** $(2pq-3)(3pq+2)$

132. $(3x^2-2)^2$ **133.** $(4y+x+2)(4y-x-2)$ **134.** $2(3a+5)(4a+3)$ **135.** $3x^2y^5(x+3)(2x-3)$
136. $\left(x-\frac{2}{3}y^2\right)\left(x^2+\frac{2}{3}xy^2+\frac{4}{9}y^4\right)$ **137.** $(x+9)(x+2)$ **138.** $(y+10)(y+5)$ **139.** $(a+2b)(a-2b)$ **140.** $2b(a+b)$
141. $(2a+b)(a+3b)$ **142.** $(a+b)^2$ **143.** $2, -\frac{1}{4}$ **144.** $-\frac{5}{2}, -\frac{10}{3}$ **145.** $0, 2$ **146.** $0, -\frac{4}{3}$ **147.** $-4, -3$ **148.** $5, -6$ **149.** $7, 1$
150. $0, 2, 4$ **151.** $4, -4$ **152.** $2, -3$ **153.** $\frac{4}{3}, -\frac{1}{4}$ **154.** $\frac{3}{4}, -\frac{2}{5}$ **155.** $(-3, 0), (6, 0)$ **156.** $\left(\frac{6}{5}, 0\right), \left(\frac{5}{4}, 0\right)$ **157.** $y = x^2 - 2x - 24$
158. $y = 12x^2 + 32x + 5$ **159.** Ancho = 9 pies, largo = 12 pies **160.** Alto = 4 pies, base = 13 pies **161.** 3 pulgadas, 7 pulgadas
162. 9 segundos **163.** 9

Capítulo 5 Examen de práctica

1. a) Trinomio **b)** $-6x^4 - 4x^2 + 3x$ **c)** 4 **d)** -6 [5.1] **2.** $4x^2y - 14y^2 + 4x + 6y$ [5.1]
3. $-8x^8y^3 + 24x^6y^4 - 12x^4y^2$ [5.2] **4.** $10a^2 - 13ab - 3b^2$ [5.2] **5.** $4x^3 + 8x^2y - 9xy^2 - 6y^3$ [5.2] **6.** $4x^4 - 5y + \frac{7}{x^2}$ [5.3]
7. $x - 5 + \frac{24}{2x+3}$ [5.3] **8.** $3x^3 + 3x^2 + 15x + 15 + \frac{76}{x-5}$ [5.3] **9.** -2 [5.3] **10.** $2xy(6x^2 + 5xy^3 - 7y^2)$ [5.4]
11. $x(x-3)(x+1)$ [5.5] **12.** $(a+2b)(2a+3b)$ [5.4] **13.** $(2b^2+9)(b^2-2)$ [5.5] **14.** $4x(x-5)$ [5.5] **15.** $(x+7)(x+3)$ [5.5]
16. $q^6(3p-2)(9p^2+6p+4)$ [5.6] **17. a)** $3x^2 - 19x + 20$ **b)** -6 [5.2] **18.** $4(x+y)(x-y)$ [5.5] **19.** $(x+11)(x+4)$ [5.5]
20. $\frac{3}{7}, -4$ [5.8] **21.** $0, -5, 2$ [5.8] **22.** $\left(\frac{1}{4}, 0\right), \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ [5.8] **23.** $y = x^2 - 9x + 14$ [5.8] **24.** Alto = 4 metros, base = 11 metros [5.8]
25. 7 segundos [5.8]

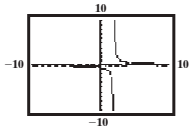
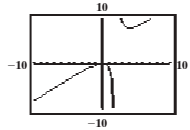
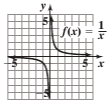
Examen de repaso acumulativo

1. $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ [1.2] **2.**  [1.2] **3.** $-\frac{3}{32}$ [1.3] **4.** -34 [1.4] **5.** $8r^6s^{15}$ [1.5]
6. 5 [2.1] **7.** $e = \frac{k-2d}{2}$ [2.2] **8.** 13 metros por 13 metros [2.3] **9.** 620 páginas [2.3] **10.** $34 \le x < 84$ [2.5] **11.** No [3.1]
12. $6x - 3y = 2$ [3.3] **13.** $-\frac{2}{9}$ [3.4] **14.** -180 [3.6] **15.**  [3.7] **16.** (10, 4) [4.1] **17.** (4, 1, 2) [4.2] **18.** 18 [4.5]
19. $2x^2 + 12x + 63 + \frac{393}{x-6}$ [5.3]
20. $(4x-3y)(16x^2+12xy+9y^2)$ [5.6]

Capítulo 6

Serie de ejercicios 6.1

1. Racional **3.** Dominio **5.** Multiplicar **7.** 4 **9.** $\frac{4}{3}$ **11.** $5, \frac{5}{2}$ **13.** $9, -9$ **15.** Ninguno **17.** $\{x|x \neq 5\}$
19. $\left\{t|t \neq -\frac{1}{3} \text{ y } t \neq 4\right\}$ **21.** $\{a|a \neq -3 \text{ y } a \neq -1\}$ **23.** $\{x|x \text{ es un número real}\}$ **25.** $\{x|x \neq -3, x \neq -2 \text{ y } x \neq 2\}$ **27.** $\frac{x+10}{2x-5}$
29. $-\frac{3}{7}$ **31.** $\frac{a-5}{a+3}$ **33.** $-(p+4)$ **35.** $\frac{8x-3}{9x-4}$ **37.** $\frac{x-3y}{x-y}$ **39.** $\frac{3x+7}{2x-5}$ **41.** $\frac{3x+5}{2x+3}$ **43.** $-\frac{3y+2}{2y+7}$ **45.** $\frac{a+7}{a+5}$ **47.** $\frac{x-4}{x^2-3x+9}$
49. $\frac{x}{15y}$ **51.** $\frac{2y^2}{5p}$ **53.** $-\frac{3y}{2}$ **55.** $\frac{x+5}{4}$ **57.** $\frac{r^3}{r-8}$ **59.** $\frac{7}{x-4}$ **61.** $\frac{(a+1)^2}{9(a+b)^2}$ **63.** $\frac{x-4}{4x+1}$ **65.** $\frac{(x+2)(x-2)}{(x^2+2x+4)(x^2+4)}$
67. $\frac{x-y}{x+y}$ **69.** $\frac{x^3}{x+2}$ **71.** $2a-1$ **73.** $-\frac{7}{3}$ **75.** $\frac{2x+3}{2(3x-5)}$ **77.** $\frac{p-q}{p+q}$ **79.** $x+5$; numerador debe ser $x+5$ **81.** $y^2 - 4y - 5$, los factores deben ser $(y-5)(y+1)$ **83.** $x^2 + x - 2$; los factores deben ser $(x-1)(x+2)$ **85.** $2x^2 + x - 6$; los factores deben ser $(x+2)(2x-3)$. **87.** $\frac{3a+b}{2}$ **89.** $2(a+b)$ **91.** $\frac{(x+2)(3x+1)}{(2x-3)(x+1)}$ **93.** $\frac{x-1}{x+3}$ **95.** $\frac{1}{x^4(x-p)^n}$ **97.** x^y

99. a) $\{x|x \neq 2\}$ **b)** 
101. a) $\{x|x \neq 2\}$ **b)** 
103. a) $\{x|x \neq 0\}$
b) $-0.1, -1, -2, -10, -100, 100, 10, 2, 1, 0.1$ **c)**  **d)** No; el numerador nunca puede ser 0 **105.** Una posible respuesta es $\frac{1}{(x-2)(x+3)}$; denominador es 0 en $x = 2$ y $x = -3$ **107.** El numerador nunca es 0 **109. a)** 4, hace al numerador 0 **b)** 6 y -6 hacen al denominador 0 **111.** Una posible respuesta es $f(x) = \frac{x-2}{(x-3)(x+1)}$; numerador es 0 en $x = 2$, denominador es 0 en $x = 3$ y $x = -1$ **113.** $y = x + 2$ **114.** $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ **115.** $-28, 32$ **116.** 0.1 **117.** $(2, -1)$ **118.** $(3x+y+2)(3x+y-2)$

Serie de ejercicios 6.2

1. Mínimo **3.** Más alta **5.** $\frac{7x-11}{x-8}$ **7.** 4 **9.** -2 **11.** $\frac{1}{x+5}$ **13.** $\frac{1}{a-1}$ **15.** $\frac{x-3}{x-1}$ **17.** $\frac{x+5}{x+3}$ **19.** $12a^2$ **21.** $6a^4b^5$ **23.** $x(x+3)$ **25.** $(x+3)(x+9)$ **27.** $(p+7)(p-2)$ **29.** $30x^3(x-3)^2$ **31.** $(a-8)(a+3)(a+8)$ **33.** $(x-3)(2x-1)(2x+3)$ **35.** $\frac{13}{2x}$ **37.** $\frac{15y^2+8x^2}{40x^4y^3}$ **39.** $\frac{13k+10}{k(k+2)}$ **41.** $\frac{23}{15(2x+1)}$ **43.** $\frac{2c-1}{(c-4)(c-3)}$ **45.** $\frac{5x^2+3x-12}{(x-4)(x+1)}$ **47.** $\frac{4x}{x-8}$ **49.** $\frac{2a}{a-b}$ **51.** $\frac{3x+11}{(x+5)(x+7)}$ **53.** $\frac{2x-1}{x+3}$ **55.** $\frac{3c-7}{c+1}$ **57.** $\frac{2x^2+4x+4}{(x-1)(x+4)(x-2)}$ **59.** $\frac{2x+3}{(x-8)(x-1)}$ **61.** $\frac{2p-9}{(p-1)(p-8)}$ **63.** $\frac{3p-2}{(p+2)(p+4)}$ **65.** $\frac{16}{r-4}$ **67.** 2 **69.** $\frac{x+5}{x-3}$ **71.** $\frac{2p-3}{p-2}$ **73.** $\frac{1}{2x+3y}$ **75.** **a)** $\{x|x\neq 3\}$ **b)** $\{x|x\neq -4\}$ **c)** $\frac{2x^2+3x+8}{(x-3)(x+4)}$ **d)** $\{x|x\neq 3 \text{ y } x\neq -4\}$ **77.** $P(x)=\frac{2x^2+8x-3}{(x+1)(x+2)}$ **79.** $P(x)=\frac{3x^2+19x+7}{(x+2)(x+3)}$ **81.** $\frac{x^2+5x+4}{(x+2)(x-2)(x+3)}$ **83.** $\frac{2x}{(x+2)(x-2)^2(x+3)}$ **85.** $\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$ **87.** **a)** 4 **b)** $\frac{a^2-b^2}{a^2}$ **89.** $7x^2-6x+6$ **91.** $\frac{3x+10}{x-2}$ **93.** $\frac{1}{(a-5)(a+3)}$ **95.** $-x^2+4x+5$ **97.** **a)** $\frac{ax+bn-bx}{n}$ **b)** 79.2 **99.** $\frac{a-b+1}{(a-b)^2}$ **101.** **a)** No se restó todo el numerador **b)** $\frac{x^2-4x-x^2-x+2}{(x+3)(x-2)}$ **103.** No **105.** Sí, si multiplicas alguna fracción por $\frac{-1}{-1}$ obtienes la otra fracción **107.** **a)** $\frac{x+1}{x}$ **b)** $\frac{x^2+x+1}{x^2}$ **c)** $\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^4}$ **d)** $\frac{x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1}{x^n}$ **109.** $\frac{-h}{(a+1)(a+h+1)}$ **110.** **a)** 6 minutos **b)** 960 cajas **111.** $\{x|-2<x<8\}$ **112.** $-\frac{2}{3}$ **113.** -11 **114.** $3x-7+\frac{27}{2x+3}$ **115.** $\frac{1}{3}, 7$

Serie de ejercicios 6.3

1. Compleja **3.** Denominador **5.** $\frac{75a}{b^5}$ **7.** $\frac{35z^2}{12x^3}$ **9.** $\frac{1}{x+3}$ **11.** $\frac{x+3}{3x-4}$ **13.** $\frac{5}{3a^2}$ **15.** $\frac{k}{3}$ **17.** $-\frac{a}{b}$ **19.** $\frac{x-y}{y}$ **21.** -1 **23.** $\frac{x+3}{x-3}$ **25.** $\frac{9}{2y-9}$ **27.** $\frac{x-1}{x+1}$ **29.** $-\frac{x-2}{x+2}$ **31.** $\frac{x}{5(x-3)}$ **33.** $\frac{2x+1}{x+1}$ **35.** $-\frac{a^2+9}{6a}$ **37.** $\frac{(x+6)(5x+11)}{5x^2+13x-78}$ **39.** $\frac{1+a}{1-a}$ **41.** $\frac{2}{y-x}$ **43.** $\frac{1}{a+1}$ **45.** $\frac{a-b}{a+b}$ **47.** $\frac{7j+3}{8j-5}$ **49.** $\frac{ab}{b+a}$ **51.** $\frac{2y-8xy+5y^2}{3y^2-4x}$ **53.** $\frac{x^2+9x+14}{x+1}$ **55.** $\frac{x^2+3x-4}{x+1}$ **57.** **a)** $\frac{2}{9}$ **b)** $\frac{1}{5}$ **59.** $R_T=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ **61.** a **63.** $\frac{-1}{a(a+h)}$ **65.** $\frac{-1}{(a+1)(a+h+1)}$ **67.** $\frac{-2a-h}{a^2(a+h)^2}$ **69.** $\frac{5}{12}$ **71.** $\frac{4a^2+1}{4a(2a^2+1)}$ **72.** $\frac{13}{48}$ **73.** $\left(-23,-\frac{34}{5}\right)$ **74.** $\left\{3,\frac{5}{3}\right\}$ **75.** Ninguna

Serie de ejercicios 6.4

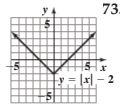
1. Común **3.** Extraña **5.** Multiplicación cruzada **7.** Factorización **9.** 5 **11.** -5 **13.** 3 **15.** -5 **17.** Todos los números reales **19.** $\frac{1}{4}$ **21.** $-\frac{51}{8}$ **23.** $\frac{11}{3}$ **25.** Sin solución **27.** 8 **29.** $-\frac{4}{3}, 1$ **31.** $-1, -6$ **33.** 3 **35.** -2 **37.** Sin solución **39.** 5 **41.** 6 **43.** Sin solución **45.** -5 **47.** $\frac{17}{4}$ **49.** 12, 2 **51.** 10, 4 **53.** 12, 4 **55.** 3, -1 **57.** $\frac{25}{2}$ **59.** $\frac{3}{2}$ **61.** $r=\frac{d}{t}$ **63.** $t=\frac{i}{pr}$ **65.** $w=\frac{fl-df}{d}$ **67.** $a=\frac{2A-bh}{h}$ **69.** $q=\frac{pf}{p-f}$ **71.** $P_1=\frac{P_2V_2}{V_1}$ **73.** $R_T=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ **75.** $a=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}$ **77.** $d=\frac{a_n-a_1}{n-1}$ **79.** $T_1=\frac{T_2P_1V_1}{P_2V_2}$ **81.** **a)** $\frac{3x+7}{(x+3)(x+1)}$ **b)** $-\frac{7}{3}$ **83.** **a)** $\frac{4}{b+5}$ **b)** Sin solución **85.** **a)** 75 mph **b)** $d_2=d_1+v(t_2-t_1)$ **87.** $A=3$ **89.** **a)** 12.5% **b)** $T_f=T_a(1-f)$ **c)** 8.64% **91.** 150 ohms **93.** 750 ohms **95.** $\approx$0.101 metros **97.** $\approx$115.96 días **99.** $c\neq 0$ **101.** Una respuesta es $\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x+2}=0$; 4 o -2 hacen una fracción indefinida **103.** Una respuesta es $\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{2}{x}$. **105.** $-1<x\leq 3$ **106.** $m=-\frac{1}{3}$; intersección con el eje de las y $\left(0,\frac{14}{3}\right)$ **107.** $3x^2y-7xy-4y^2-9x$ **108.** 2 pies

Examen de mitad de capítulo

1. $\{x|x\neq 0\ x\neq -5, \text{y } x\neq 5\}$ [6.1] **2.** $\frac{x+5}{2x-3}$ [6.1] **3.** $\frac{55b}{a^2-ab+b^2}$ [6.1] **4.** $\frac{x-3}{x+1}$ [6.1] **5.** $\frac{(2a+1)(2a+3)}{(2a-1)(a-9)}$ o $\frac{4a^2+8a+3}{2a^2-19a+9}$ [6.1] **6.** $\frac{4a+3b}{6}$ [6.1] **7.** $(x+5)(x-6)(x+2)$ [6.2] **8.** 5 [6.2] **9.** $\frac{20y^2+ax}{6x^2y^3}$ [6.2] **10.** $\frac{-2x-7}{(x-4)(x+4)(2x-3)}$ [6.2] **11.** $\frac{9b+a}{3-c}$ [6.3] **12.** $\frac{5x-8}{6x^2-x}$ [6.3] **13.** y^2 [6.3] **14.** Una solución extraña, es un número que se obtiene cuando se resuelve una ecuación que no es una solución a la ecuación original. Siempre que una variable aparezca en cualquier denominador, debes verificar la(s) solución(es) aparente(s) [6.4] **15.** 5 [6.4] **16.** Sin solución [6.4] **17.** 4, -3 [6.4] **18.** $a=\frac{bc}{b+c}$ [6.4] **19.** $r=\frac{x-4}{x}$ [6.4] **20.** 14 y 5 [6.4]

Serie de ejercicios 6.5

1. Trabajo **3.** Razón **5.** 1.5 horas **7.** 2 horas **9.** 2.4 horas **11.** 1.62 horas **13.** 4.62 minutos **15.** 100 horas **17.** 150 minutos **19.** 15.27 minutos **21.** 180 minutos **23.** 75 minutos **25.** 12 horas **27.** 1.33 horas **29.** 3 **31.** 2, 6 **33.** 4, 6 **35.** 20 **37.** $\frac{2}{3}$, 1 **39.** -4, 3 **41.** 0.5 millas por hora **43.** 3 pies por segundo **45.** 15 millas por hora **47.** Denisse: 75 millas por hora, Cristal: 80 millas por hora **49.** 10 mi **51.** 30 yardas **53.** Automóvil: 60 millas por hora, tren: 30 millas por hora **55.** 50 millas por hora, 60 millas por hora **57.** 120 kilómetros por hora **59.** 4 millas por hora; 16 millas por hora **61.** 108 000 millas **63.** 3.7 millas por hora, 7.4 millas por hora **65.** Las respuestas variarán **67.** Las respuestas variarán **69.** $\frac{1}{72x^5y^{12}}$ **70.** 9.26×10^9 **71.** \$2 500 **72.**



73. $a(2a^2 - 5)(a - 1)$

Serie de ejercicios 6.6

1. Directa **3.** Conjunta **5.** Constante **7.** Inversa **9.** Directa **11.** Directa **13.** Directa **15.** Directa **17.** Inversa **19.** Inversa **21. a)** $y = kx$ **b)** 28 **23. a)** $y = \frac{k}{x}$ **b)** $\frac{3}{4}$ **25. a)** $C = kn$ **b)** 50 **27. a)** $j = \frac{k}{x}$ **b)** 50 **29. a)** $I = \frac{k}{d^2}$ **b)** 60 **31. a)** $A = \frac{kB}{C}$ **b)** 9 **33. a)** $y = kx$ **b)** 15 **35. a)** $y = kR^2$ **b)** 20 **37. a)** $S = \frac{k}{G}$ **b)** 0.96 **39. a)** $T = \frac{k}{P^2}$ **b)** 25 **41. a)** $F = \frac{kM_1M_2}{d}$ **b)** 40 **43.** \$8 814 **45.** 3 096 miligramos **47.** 1.05 pulgadas **49.** 6 400 centímetros cúbicos **51.** 3.12 horas **53.** 45 pies-candelas **55.** 117.6 pies **57.** 126 metros cúbicos **59.** 42 minutos **61.** 1 570.8 centímetros cúbicos **63.** 121 528 llamadas **65.** $\frac{1}{49}$ de la luz del flash **67.** Se duplica **69.** Se reduce a la mitad **71.** Se duplica **73.** No cambia **75.** Se duplica **77.** $y = \frac{k}{x}; k = 5$ **79. a)** $P = 14.7 + kx$ **b)** 0.43 **c)** ≈337.9 pies **81.** $h = \frac{3V}{4\pi r^2}$ **82.** 132 **83.** $-14x^3 - 22x^2 + 47x - 15$ **84.** $(x + 3)(x - 2)$

Capítulo 6 Ejercicios de repaso

1. 4 **2.** -1 **3.** Ninguno **4.** $\{x|x \neq 1\}$ **5.** $\{x|x \neq 0\}$ **6.** $\{x|x \neq 2 \text{ y } x \neq -6\}$ **7.** $\frac{2}{5}$ **8.** $x - 6$ **9.** -1 **10.** $\frac{x-1}{x-2}$ **11.** $\frac{x-3}{x+1}$ **12.** $\frac{a^2 + 2ab + 4b^2}{a + 2b}$ **13.** $\frac{9x^2 - 3xy + y^2}{3x - y}$ **14.** $\frac{2x - 3}{x^2 - 2x + 4}$ **15.** $x(x - 4)$ **16.** $(x + 2y)(x - 2y)$ **17.** $(x + 7)(x - 5)(x + 2)$ **18.** $(x + 2)^2(x - 2)(x + 3)$ **19.** $\frac{4xyz}{3}$ **20.** $-\frac{x}{6}$ **21.** $9x^3z^5$ **22.** $\frac{11x + 6}{3x^2}$ **23.** $\frac{(x - y)y^2}{4x^3}$ **24.** $3x + 2$ **25.** $\frac{30x + 3y^2}{5x^2y}$ **26.** 1 **27.** $\frac{2x + 1}{3x + 1}$ **28.** $\frac{6a + 7}{a + 1}$ **29.** $\frac{6b - 8}{b - 1}$ **30.** $\frac{a^2 - b^2}{a^2}$ **31.** $\frac{1}{3(a + 3)}$ **32.** $\frac{a^2 + c^2}{ac}$ **33.** $\frac{x + 1}{2x - 1}$ **34.** 1 **35.** $4x(x - 5y)$ **36.** $\frac{2a^2 + 9a + 4}{4a(a + 2)}$ **37.** $\frac{x^2 + 5}{(x + 5)(x - 5)}$ **38.** $-\frac{2(x + 1)}{(x + 2)(x - 2)}$ **39.** $\frac{x + 5}{x + 6}$ **40.** $\frac{-x + 5}{(x + 2)(x - 2)(x - 3)}$ **41.** $\frac{16(x - 2y)}{3(x + 2y)}$ **42.** $\frac{3}{a^3}$ **43.** $\frac{22x + 5}{(x - 5)(x - 10)(x + 5)}$ **44.** $\frac{2(x - 4)}{(x - 3)(x - 5)}$ **45.** $-\frac{1}{x - 3}$ **46.** $\frac{a + 3}{a + 5}$ **47.** $\frac{x + 6}{x - 4}$ **48.** $\frac{a + 2b^2}{3}$ **49.** $\frac{x^2 + 6x - 24}{(x - 1)(x + 9)}$ **50.** $\frac{x - 4}{x - 6}$ **51. a)** $\{x|x \neq -2\}$ **b)** $\{x|x \neq -4\}$ **c)** $\frac{2x^2 + 7x + 4}{(x + 2)(x + 4)}$ **d)** $\{x|x \neq -2 \text{ y } x \neq -4\}$ **52. a)** $\{x|x \neq 3 \text{ y } x \neq -3\}$ **b)** $\{x|x \neq 3\}$ **c)** $\frac{x^2 + 8x + 12}{(x + 3)(x - 3)}$ **d)** $\{x|x \neq 3 \text{ y } x \neq -3\}$ **53.** $\frac{3ac^2}{b^3}$ **54.** $\frac{4x + 2y}{x^2 + xy^3}$ **55.** $\frac{3y - 1}{7y^2 + 1}$ **56.** $\frac{5a + 1}{2}$ **57.** $\frac{3x + 1}{-x + 1}$ **58.** $\frac{3x^2 - 29x + 68}{4x^2 - 6x - 54}$ **59.** $\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 5}$ **60.** $\frac{x^2 + 6x + 8}{x + 3}$ **61.** 16 **62.** -2 **63.** 52 **64.** 2.4 **65.** 5 **66.** -9 **67.** -18 **68.** Sin solución **69.** -6 **70.** 6 **71.** $b = \frac{ac}{a - c}$ **72.** $\bar{x} = x - sz$ **73.** 60 ohms **74.** 2 centímetros **75.** 10, 2 **76.** 21, 3 **77.** 17.14 minutos **78.** 14 horas **79.** 3 **80.** $\frac{5}{6}$ **81.** 5 millas por hora **82.** Automóvil: 50 millas por hora, avión: 150 millas por hora **83.** 20 **84.** $\frac{25}{2}$ **85.** 426.7 **86.** \$8.40 **87.** 1 600 pies **88.** 200.96 unidades cuadradas **89.** 2.38 minutos

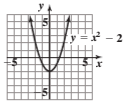
Capítulo 6 Examen de práctica

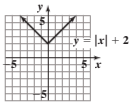
1. -7 y 4 [6.1] **2.** $\left\{x \middle| x \neq -4 \text{ y } x \neq \frac{1}{2}\right\}$ [6.1] **3.** $5x^5y + 8 + 11xy^2$ [6.1] **4.** $\frac{x - 6y}{x + y}$ [6.1] **5.** $\frac{1}{x^4y^2}$ [6.1] **6.** $\frac{1}{x + 2}$ [6.1] **7.** $\frac{7}{a(a + b)}$ [6.1] **8.** $x^2 + y^2$ [6.1] **9.** $\frac{5x^2 + 2x + 2}{x^2(x + 1)}$ [6.2] **10.** $\frac{-3x - 1}{(x - 3)(x + 3)(x + 1)}$ [6.2] **11.** $\frac{m(6m + n)}{(6m + 5n)(2m - n)(2m + 3n)}$ [6.2] **12.** $\frac{x(x + 10)}{(2x - 1)^2(x + 3)}$ [6.2] **13.** $x + 3$ [6.1] **14. a)** $\frac{3x^2 + 2x - 9}{(x + 5)(2x + 3)}$ **b)** $\left\{x \middle| x \neq -5 \text{ y } x \neq -\frac{3}{2}\right\}$ [6.2] **15.** $\frac{x + 5}{x + 2}$ [6.1] **16.** $\frac{y + 2x}{y - 3x}$ [6.3] **17.** $\frac{b(a - b)}{a}$ [6.3] **18.** $\frac{7x - 6}{x(4x - 1)}$ [6.3] **19.** 20 [6.4]

20. 12 [6.4] **21.** $C = \dfrac{2b + Ad}{A}$ [6.4] **22.** 0.75 watt [6.6] **23.** 6 [6.6] **24.** 4.44 horas [6.5] **25.** $6\frac{2}{3}$ millas [6.5]

Examen de repaso acumulativo

1. [1.2] **2.** $-27\frac{3}{4}$ [1.4] **3.** -3 [2.1] **4. a)** 6 % **b)** 1 485 estudiantes **c)** 770 estudiantes

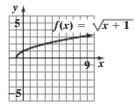
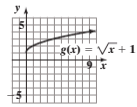
5. 62 [1.4] **6.** $\dfrac{x^3}{8y^3}$ [1.5] **7.** $m = \dfrac{rF}{v^2}$ [2.2] **8.** 6 %[2.2] **9.** 3 hr [2.4] **10.** $\left\{-\frac{32}{3}, \frac{22}{3}\right\}$ [2.6] **11.**  [3.1] **12.** 5 [3.2]

13. $-\frac{1}{7}$ [3.4] **14.** $2x + 3y = 4$ [3.5] **15.** $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ [4.1] **16.** $9x^4 - 25y^2$ [5.2] **17.** $3(x - 5)^2$ [5.6] **18.**  [3.1]

19. $\dfrac{3x - 4}{(x - 1)(x - 2)}$ [6.2] **20.** 4 [6.4]

Capítulo 7

Serie de ejercicios 7.1

1. Radical **3.** Radicando **5.** Cubo **7.** Negativo **9.** Par **11. a)** 5 **b)** -5 **c)** No es un número real **d)** No es un número real **13. a)** 2 **b)** -2 **c)** -2 **d)** 2 **15. a)** 2 **b)** No es un número real **c)** -2 **d)** No es un número real **17.** -1 **19.** No es un número real **21.** -4 **23.** 2 **25.** $\frac{5}{9}$ **27.** $-\frac{2}{5}$ **29.** 2.5 **31.** 1.2 **33. a)** 1.73 **b)** -2.65 **c)** No es un número real **d)** No es un número real **35. a)** 1.71 **b)** -2.22 **c)** -2.57 **d)** 3.07 **37. a)** 4.12 **b)** No es un número real **c)** 2.57 **d)** -2.57 **39.** 7 **41.** 3 **43.** 119 **45.** 2.78 **47.** $\frac{217}{311}$ **49.** $\frac{517}{711}$ **51.** $|x - 8|$ **53.** $|5x - 11|$ **55.** $|3x^2 - 1|$ **57.** $|6a^3 - 5b^4|$ **59.** $|x^5|$ **61.** $|w^{25}|$ **63.** $|a - 4|$ **65.** $|3a + 2b|$ **67.** $5a$ **69.** $4c^3$ **71.** $x + 2$ **73.** $2x + y$ **75.** 2 **77.** 8 **79.** No es un número real **81.** 9.38 **83.** -2 **85.** 1 **87.** 97 **89.** 11 **91.** 45 **93.** Selecciona un valor menor que $-\frac{1}{2}$. **95.** d **97.** a **99.**  **101.** 

103. Una respuesta es $f(x) = \sqrt{x - 8}$ **105. a)** $\sqrt{1288} \approx 35.89$ pies por segundo **b)** $\sqrt{2576} \approx 50.75$ pies por segundo **107.** No existe un número real que, cuando se eleve al cuadrado, produzca -81. **109.** No; si el radicando es negativo, la respuesta no es un número real **111. a)** 1.3 **b)** 1.3 **113.** $x \geq 1$ **115.** $x \geq 3$ **117. a)** Todos los números reales **b)** $a \geq 0$ **c)** Todos los números reales **119.** Si n es par, estás determinando una raíz par de un número positivo. Si n es impar, la expresión es real **121.** $x > -5$ **123. a)** No **b)** Sí, cuando $x = 0$ **c)** Sí **127.** $(3a - b)(3x + 4y)$ **128.** $3x(x - 4)(x - 2)$ **129.** $(2x + 1)(2x - 1)(2x^2 + 3)$ **130.** $\left(x - \frac{2}{3}y\right)\left(x^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{4}{9}y^2\right)$

Serie de ejercicios 7.2

1. Numerador **3.** Índice **5.** Suma **7.** $p^{1/2}$ **9.** $5^{1/3}$ **11.** $r^{2/3}$ **13.** $b^{3/5}$ **15.** $x^{2/3}$ **17.** $(5x^3)^{1/4}$ **19.** $11x^{2/3}$ **21.** $(2x - 3)^{1/5}$ **23.** $(a + 3)^{2/3}$ **25.** $\left(\dfrac{3x^5}{2y^3}\right)^{1/7}$ **27.** $\sqrt{x}$ **29.** $\sqrt[4]{3}$ **31.** $\sqrt[3]{a^2}$ **33.** $\dfrac{1}{\sqrt{17x}}$ **35.** $7\sqrt[4]{a^3}$ **37.** $\left(\sqrt[3]{2x - 3y}\right)^2$ **39.** $\dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{7m^2 - 3n}\right)^3}$ **41.** x **43.** x^3 **45.** $\sqrt{a}$ **47.** $\sqrt[4]{j^3}$ **49.** x **51.** x^5y^{10} **53.** $\sqrt{xyz}$ **55.** $\dfrac{x^2}{y^2}$ **57.** $\sqrt[4]{x}$ **59.** $\sqrt[8]{y}$ **61.** $\dfrac{x^3y^3}{27z^3}$ **63.** ab^2c^3 **65.** 3 **67.** 16 **69.** No es un número real **71.** $\frac{5}{3}$ **73.** $\frac{1}{2}$ **75.** -9 **77.** No es un número real **79.** -4 **81.** $\frac{1}{64}$ **83.** $\frac{3}{4}$ **85.** No es un número real **87.** 24 **89.** $\frac{11}{28}$ **91.** $x^{9/2}$ **93.** $x^{1/6}$ **95.** $\dfrac{1}{x^{2/15}}$ **97.** 1 **99.** $\dfrac{y^{5/3}}{12}$ **101.** $\dfrac{12}{x^{11/6}}$ **103.** $\dfrac{1}{2x^{1/3}}$ **105.** $\dfrac{121}{x^{1/7}}$ **107.** $\dfrac{64}{a^{66/5}}$ **109.** $\dfrac{x}{y^{20}}$ **111.** $8z^{7/2} - 4$ **113.** $\dfrac{5}{x^5} + \dfrac{20}{x^{3/2}}$ **115.** $12x^{13/6} - 18x^2$ **117.** 2.36 **119.** 3.32 **121.** 12.01 **123.** 0.03

125. n es impar, o n es par y $a \geq 0$. **127.** $(4^{1/2} + 9^{1/2})^2 \neq 4 + 9; 25 \neq 13$ **129.** $(1^{1/3} + 1^{1/3})^3 \neq 1 + 1; 8 \neq 2$ **131. a)** $2^{10} = 1\,024$ bacterias **b)** $2^{10}\sqrt{2} \approx 1\,448$ bacterias **133.** 2 247 calorías **135.** $\{x \mid x \geq 7\}$ **137.** $2; z^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}} = z^{\frac{1}{30}}; z^{\frac{1}{20x}} = z^{\frac{1}{20}}, 60a = 120; a = 2$ **139. a)** Cuando n es par y a ≥ 0, o n es impar **b)** $a^{1/n}$ **141. a)** Siempre es real **b)** a **c)** a **d)** $|a|$ **143. a)** No; $(xy)^{1/2} = x^{1/2}y^{1/2}$ **b)** No; $(xy)^{-1/2} = x^{-1/2}y^{-1/2} = \dfrac{1}{x^{1/2}y^{1/2}}$ **145.** 9 **147. c)** Es una función **148.** $\dfrac{b^2 + a^3b}{a^3 - b}$ **149.** 0, 3 **150.** $\approx$441.67 millas por hora

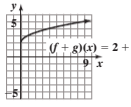
Serie de ejercicios 7.3

1. Cuadrado **3.** 3 **5.** 4 **7.** Producto **9.** 8 **11.** $2\sqrt{6}$ **13.** $5\sqrt{2}$ **15.** $4\sqrt{2}$ **17.** $5\sqrt{3}$ **19.** 4 **21.** $2\sqrt[3]{2}$ **23.** $3\sqrt[3]{2}$ **25.** $2\sqrt[3]{4}$ **27.** $2\sqrt[4]{3}$ **29.** $3\sqrt[4]{2}$ **31.** $-2\sqrt[5]{2}$ **33.** x^{18} **35.** x^2 **37.** $a^2\sqrt{a}$ **39.** $5c^4\sqrt{c}$ **41.** $8z^{10}\sqrt[3]{z^2}$ **43.** $b^5\sqrt[4]{b^3}$

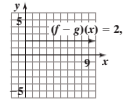
45. $3x^2\sqrt{2x}$ **47.** $2a\sqrt[3]{2a^2}$ **49.** $3p^2q^3\sqrt{2q}$ **51.** $2a^2b^2\sqrt[3]{2b}$ **53.** $3a^2b^2\sqrt{11bc}$ **55.** $2x^7y^{10}z^{13}\sqrt{6xz}$ **57.** $35stu^2\sqrt{2rtu}$
59. $5u^4v^5w^6\sqrt[3]{3uw^2}$ **61.** $2x^2y^2z^4\sqrt[4]{2yz^3}$ **63.** $2a^2b^2c^3\sqrt[5]{4ab^3c^2}$ **65.** 5 **67.** $\frac{2}{5}$ **69.** 3 **71.** $\frac{1}{4}$ **73.** $2\sqrt{2}$ **75.** $\frac{1}{2}$ **77.** $\frac{1}{3}$ **79.** $\frac{1}{2}$
81. $\frac{1}{2}$ **83.** $\frac{x}{3}$ **85.** $\frac{4x^2}{5y^5}$ **87.** $\frac{5k^2m^4}{13n^3}$ **89.** $a^2b^6\sqrt[3]{a^2b^2}$ **91.** $\frac{a^3}{5}$ **93.** $2x^2y\sqrt{2y}$ **95.** $\frac{\sqrt[3]{5y}}{2x^4}$ **97.** $\frac{y^2\sqrt[3]{5y}}{x^2}$ **99.** $\frac{x^3\sqrt[4]{10y}}{3}$ **101. a)** Eleva al cuadrado los números reales **b)** 1, 4, 9, 16, 25, 36 **103.** Si n es par y a o b son negativos, los números no son números reales
105. $(a \cdot b)^{1/2} = a^{1/2}b^{1/2} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ **107.** No; un ejemplo es $\sqrt{18}/\sqrt{2} = 3$. **109. a)** No **b)** Cuando $\sqrt[n]{x}$ es un número real y no igual que 0
110. $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ **111.** $\{-28, 32\}$ **112.** $3x^6 - x^3 + 4$ **113.** $(x - 1)(x^2 - 8x + 19)$

Serie de ejercicios 7.4

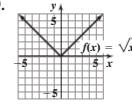
1. Semejantes **3.** Distributiva **5.** PIES **7.** $8\sqrt{2}$ **9.** $3\sqrt{3}$ **11.** $7 - 9\sqrt{5}$ **13.** $-7\sqrt[4]{y}$ **15.** $2\sqrt[3]{x} + 9\sqrt{5}$
17. $7\sqrt{x} - 6\sqrt{y}$ **19.** $8\sqrt{2}$ **21.** $7\sqrt{3x}$ **23.** $-4\sqrt{10}$ **25.** $\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$ **27.** $-27a\sqrt{2}$ **29.** $5\sqrt[3]{4}$ **31.** $11\sqrt[3]{3}$ **33.** $(5x - 2)\sqrt{3x}$
35. $18y\sqrt{5x}$ **37.** $3r^3s^2\sqrt{rs}$ **39.** 4 **41.** 2 **43.** $2\sqrt[3]{7}$ **45.** $3k\sqrt{35}$ **47.** $3m^2n^5\sqrt{3n}$ **49.** $2x^3y^4z^2\sqrt[3]{3y^2z^2}$ **51.** $2y\sqrt[3]{50x^2y}$ **53.** $5 - \sqrt{15}$
55. $2\sqrt[3]{y^2} - y^3$ **57.** $23 + 9\sqrt{3}$ **59.** $10 - 3\sqrt{6}$ **61.** 59 **63.** $6 - x^2$ **65.** $9 + 4\sqrt{5}$ **67.** $4x - 12\sqrt{x} + 9$ **69.** $18x - \sqrt{3xy} - y$
71. $5x + \sqrt[3]{18x^2} + x\sqrt[3]{12x}$ **73.** $x - \sqrt{3x}$ **75.** $x^2 + x\sqrt[3]{x^2}$ **77.** $3x - x^3\sqrt[4]{12x^3}$ **79.** $3\sqrt{2}$ **81.** $3\sqrt{5}$ **83.** $-14 + 11\sqrt{2}$
85. $13 - 2\sqrt{22}$ **87.** $15\sqrt{2}$ **89.** $x^3y^3\sqrt[3]{y^2z}$ **91.** $xy^2\sqrt[6]{75x^5}$ **93.** $4ab\sqrt[4]{b}$ **95.** $x - 2\sqrt[3]{x^2y^2} - \sqrt[3]{xy} + 2y$ **97.** $ab\sqrt[3]{12a^2b^2} - 2a^2b^2\sqrt[3]{3}$
99. $f(x) = x + 2$ **101.** $f(a) = a - 7$ **103.** $h(x) = |x + 2|$ **105.** $f(x) = |3x - 7|$ **107.** $P = 14\sqrt{5}, A = 60$
109. $P = 12\sqrt{5}, A = 30$ **111. a)** ≈45.17 millas por hora **b)** ≈35.33 millas por hora **113. a)** 37 pulgadas **b)** ≈37.97 pulgadas
115. a)



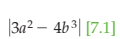
b) Sube la gráfica 2 unidades **117. a)**



b) $\{x|x \geq 0\}$ **119.**



121. No; un ejemplo es $\sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{9 + 16}, 3 + 4 \neq 5, 7 \neq 5$. **123.** No, $-\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$ **125.** Un cociente de dos enteros, denominador no 0 **126.** Un número que puede representarse sobre una recta numérica real **127.** Un número real que no puede expresarse como un cociente de dos enteros **128.** $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$ **129.** $m = \frac{2E}{v^2}$ **130. a)**



b) $\left(-\frac{1}{2}, 5\right]$ **c)** $\left\{x \middle| -\frac{1}{2} < x \leq 5\right\}$

Examen de mitad de capítulo

1. 11 [7.1] **2.** $-\frac{3}{4}$ [7.1] **3.** 16.3 [7.1] **4.** $|3a^2 - 4b^3|$ [7.1] **5.** 3 [7.1] **6.** $(7a^4b^3)^{1/5}$ [7.2] **7.** 20 [7.2]
8. $a^{10}b^{15}c^5$ [7.3] **9.** $\frac{14}{x}$ [7.3] **10.** $8x + \frac{16}{x^{5/2}}$ [7.3] **11.** $4x^2y^4\sqrt{2y}$ [7.3] **12.** $2a^2b^3c^2\sqrt[6]{ab^5c^3}$ [7.3] **13.** $\frac{1}{3}$ [7.3] **14.** $\frac{y^2\sqrt{y}}{3x^5}$ [7.3]
15. $11\sqrt{x} + 12\sqrt{y}$ [7.4] **16.** $27x\sqrt{10y}$ [7.4] **17.** $2x^2 - x\sqrt{5} - 15$ [7.4] **18.** $18a\sqrt{a} - 20a\sqrt{3}$ [7.4] **19.** $7ab\sqrt[4]{ab}$ [7.4] **20.** El inciso **a)** tendrá un valor absoluto **a)** $|x - 3|$, **b)** $8x$ [7.1]

Serie de ejercicios 7.5

1. Racionalización **3.** Potencia **5.** Radicando **7.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **9.** $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ **11.** $\sqrt{6}$ **13.** $\frac{5\sqrt{m}}{m}$ **15.** $\frac{p\sqrt{2}}{2}$ **17.** $\frac{\sqrt{7t}}{t}$
19. $18\sqrt{p}$ **21.** $\frac{\sqrt{3x}}{x}$ **23.** $\frac{\sqrt{10m}}{4}$ **25.** $\frac{\sqrt{14x}}{6}$ **27.** $\frac{\sqrt{22xy}}{6y}$ **29.** $\frac{3x^2y\sqrt{yz}}{z^2}$ **31.** $\frac{2y^4z\sqrt{15xz}}{3x}$ **33.** $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ **35.** $\frac{2\sqrt[3]{a}}{a}$ **37.** $\frac{\sqrt[4]{8}}{2}$
39. $\frac{5\sqrt[4]{z}}{z}$ **41.** $\frac{a\sqrt[4]{2}}{2}$ **43.** $\frac{5m\sqrt[4]{8}}{2}$ **45.** $\frac{\sqrt[3]{10x}}{x}$ **47.** $\frac{\sqrt[3]{4x^2}}{2x}$ **49.** $\frac{\sqrt[3]{15by^2}}{3y}$ **51.** $\frac{\sqrt[4]{135x}}{3x}$ **53.** $\frac{x^2y\sqrt[3]{42xz^2}}{2z}$ **55.** $\frac{z^2\sqrt[4]{30x^3y^2}}{2xy}$ **57.** 11
59. -6 **61.** 8 **63.** $a - b$ **65.** $4x - 9y$ **67.** $\frac{5\sqrt{3} - 5}{2}$ **69.** $3\sqrt{7} - 6$ **71.** $\frac{5 + \sqrt{7}}{6}$ **73.** $-\frac{11(\sqrt{2} + \sqrt{5})}{3}$ **75.** $\frac{18 - 3\sqrt{x}}{36 - x}$
77. $\frac{\sqrt{77} + \sqrt{33} + \sqrt{35} + \sqrt{15}}{4}$ **79.** $\frac{7x + 2\sqrt{21x} + 3}{7x - 3}$ **81.** $-\frac{x\sqrt{2} + x\sqrt{5} + \sqrt{10} + 5}{3}$ **83.** $\frac{4\sqrt{x + 2} + 12}{x - 7}$ **85.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **87.** $\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}$
89. 1 **91.** $\frac{\sqrt[3]{10}}{2}$ **93.** $\frac{2xy^3\sqrt{30xz}}{5z}$ **95.** $\frac{\sqrt{a} - 7}{a - 49}$ **97.** $\frac{\sqrt{77} + \sqrt{33} + \sqrt{21} + 3}{4}$ **99.** $\frac{\sqrt[4]{24x^3y^2}}{2x}$ **101.** $\frac{2y^4z^3\sqrt[3]{2x^2z}}{x}$ **103.** $\frac{a\sqrt{r} + 2r\sqrt{a}}{a - 4r}$
105. $\frac{\sqrt[3]{150y^2}}{5y}$ **107.** $\sqrt{x + 5} - \sqrt{x}$ **109.** $\sqrt{2}$ **111.** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ **113.** $\frac{\sqrt{6}}{6}$ **115.** $\frac{19\sqrt{2}}{2}$ **117.** $7\sqrt{2}$ **119.** $10\sqrt{3}$ **121.** $\frac{3\sqrt{6}}{4}$ **123.** $\frac{\sqrt{xy}(x + y)}{xy}$
125. $\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$ **127.** $\sqrt[6]{rs^5}$ **129.** $\sqrt[15]{x^2y^8}$ **131.** $\sqrt[3]{(a + b)^5}$ **133.** $\sqrt[15]{(a + 2b)^2}$ **135.** ≈3.69 metros **137.** ≈12 pulgadas
139. ≈28.87 **141.** $\frac{10}{15 + 3\sqrt{5}}$ **143.** $\frac{1}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}$ **145.** $\frac{3}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ **147.** $2 + \sqrt{3}$; racionaliza el denominador y compara **149. a)** 4, 8, 12 **b)** 9, 18, 27 **c)** $x^{(3a+2b)/6}$ **d)** $x^{(3a-2b)/6}$ **152.** $b_2 = \frac{2A}{h} - b_1$ **153.** 40 millas por hora, 50 millas por hora
154. $4x^3 + x^2 - 20x + 4$ **155.** $-8, 1$

Serie de ejercicios 7.6

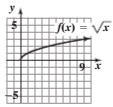
1. Radical **3.** Original **5.** Índice **7.** Cubo **9. a)** 9 **b)** 27 **c)** 81 **11. a)** Sin solución **b)** -27 **c)** Sin solución **13. a)** 4 **b)** Sin solución **c)** 8 **d)** -8 **15.** 11 **17.** 10 **19.** 9 **21.** 4 **23.** 71 **25.** 26 **27.** 6 **29.** -1 **31.** Sin solución **33.** $\frac{2}{3}$ **35.** Sin solución **37.** 7 **39.** $0, -1$ **41.** 10 **43.** $\frac{1}{9}$ **45.** $-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}$ **47.** 1 **49.** Sin solución **51.** 8 **53.** $\frac{3}{2}$ **55.** 0 **57.** $\frac{49}{36}$ **59.** Sin solución **61.** 9 **63.** $3, 7$ **65.** -1 **67.** 4 **69.** 2 **71.** 5 **73.** $v = \frac{p^2}{2}$ **75.** $g = \frac{v^2}{2h}$ **77.** $F = \frac{Mv^2}{R}$ **79.** $m = \frac{x^2k}{V_0^2}$ **81.** $A = \pi r^2$ **83.** $\sqrt{87}$ **85.** $2\sqrt{10}$ **87.** 1 **89.** Sin solución **91.** 3 **93.** 7 **95.** 1 **97.** 3 **99.** $\sqrt{16\,200} \approx 127.28$ pies **101.** $\sqrt{2000} \approx 44.72$ pies **103.** $\sqrt{1649} \approx 40.61$ metros **105. a)** 3.14 segundos **b)** $\sqrt{2} \cdot T$; compara $\sqrt{\frac{l}{32}}$ con $\sqrt{\frac{l}{16}}$ **c)** $\sqrt{24} \approx 4.90$ segundos **107. a)** $0.2\left(\sqrt{149.4}\right)^3 \approx 365.22$ días **b)** $0.2\left(\sqrt{58}\right)^3 \approx 88.34$ días **109.** $\sqrt{10000} = 100$ libras **111.** $\sqrt{320} \approx 17.89$ pies por segundo **113.** $\frac{\sqrt{1960}}{9.8} \approx 4.52$ segundos **115.** $2, -2$ **117.** $5, -1$ **119.** 30 **121.** $5, -5$ **123.** Todos los números reales **125.** Las respuestas variarán **127.** 0 **129.** Uno; las respuestas variarán **131. a)** $3, 7$; puntos de intersección **b)** Sí **c)** $3, 7$; Sí **133.** En $x = 4$, $g(x)$ o $y = 0$. En consecuencia, la gráfica debe tener una intersección con el eje de las x en 4 **135.** Sin solución **137.** $n = \frac{z^2\sigma^2}{(\bar{x} - \mu)^2}$ **139.** $L_1 \approx 0.44$, $L_2 \approx 0.76$ **142.** $P_2 = \frac{P_1P_3}{P_1 - P_3}$ **143.** x **144.** $\frac{3a}{2b(2a + 3b)}$ **145.** $t(t - 5)$ **146.** $\frac{3}{x + 3}$ **147.** 2

Serie de ejercicios 7.7

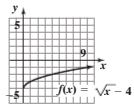
1. Imaginario **3.** Complejo **5.** Parte **7.** Número **9.** -1 **11.** $3 + 0i$ **13.** $0 - 3i$ **15.** $21 - 6i$ **17.** $\sqrt{7} - i\sqrt{11}$ **19.** $8 - 2i\sqrt{3}$ **21.** $0 + 12i$ **23.** $(-5 + \sqrt{3}) + 0i$ **25.** $5\sqrt{3} - 4i\sqrt{2}$ **27.** $4 + 4i$ **29.** $2 + 10i$ **31.** $-17 - 12i$ **33.** $11 - 4i\sqrt{2}$ **35.** $-\sqrt{5} + 9i\sqrt{3}$ **37.** $\left(4\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) - 2i\sqrt{2}$ **39.** $6 - 12i$ **41.** $-9 + 4i$ **43.** $-\frac{1}{4} + \frac{3}{2}i$ **45.** $28 + 4i\sqrt{3}$ **47.** $9 + 9i$ **49.** $1 + 5i$ **51.** $109 + 0i$ **53.** $5 + 12i$ **55.** $\frac{25}{72} + \frac{1}{4}i$ **57.** $-\frac{2}{3}i$ **59.** $\frac{3}{2} - i$ **61.** $\frac{12}{5} + \frac{6}{5}i$ **63.** $\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$ **65.** $\frac{3}{10} + \frac{3}{5}i$ **67.** $\frac{9}{10} - \frac{6}{5}i$ **69.** $\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$ **71.** $\frac{5\sqrt{2}}{37} - \frac{2\sqrt{6}}{37}i$ **73.** $\frac{3}{8} + \frac{7}{8}i$ **75.** i **77.** $-10 + 13i$ **79.** $4\sqrt{2} + 2i\sqrt{3}$ **81.** $-3\sqrt{10} + 5i\sqrt{6}$ **83.** $37 - 39i$ **85.** $2 - \frac{11}{2}i$ **87.** $\frac{6\sqrt{3}}{7} + \frac{12}{7}i$ **89.** $7 + \frac{2}{45}i$ **91.** $\frac{11}{13} - \frac{16}{13}i$ **93.** $7 + 2.76i$ **95.** $55 - 48i$ **97.** -1 **99.** 1 **101.** i **103.** $-i$ **105. a)** $-2 - 3i$ **b)** $\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$ **107.** -4 **109.** $16 - 4i$ **111.** $14 + 8i$ **113.** 0 **115.** 1 **117.** Sí **119.** No **121.** $\approx 0.83 - 3i$ **123.** $\approx 1.5 - 0.33i$ **125.** $-i$ **127.** $1 \pm i\sqrt{5}$ **129.** $6 + 3i\sqrt{3}$ **131.** $-1 + 7i\sqrt{3}$ **133.** Sí **135.** No **137.** Verdadero; $(2i)(2i) = -4$ **139.** Falso; $(1 + i)(1 + 2i) = -1 + 3i$ **141.** Valores pares; i^n donde n es par, será ya sea -1 o 1 **143.** 15 libras a \$5.50, 25 libras a \$6.30 **144.** $2c - 3 - \frac{8}{4c + 9}$ **145.** $\frac{a^2}{b(a - b)}$ **146.** 4

Capítulo 7 Ejercicios de repaso

1. 3 **2.** -3 **3.** -5 **4.** 4 **5.** 5 **6.** 38.2 **7.** $|x|$ **8.** $|x + 7|$ **9.** $|x - y|$ **10.** $|x^2 - 4x + 12|$ **11.** 7 **12.** 57 **13.** ≈ 2.2 **14.** 12 metros **15.** $x^{3/2}$ **16.** $x^{5/3}$ **17.** $y^{13/4}$ **18.** $6^{2/7}$ **19.** $\sqrt{x}$ **20.** $\sqrt[3]{a^2}$ **21.** $\left(\sqrt[4]{8m^2n}\right)^7$ **22.** $\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x + y}\right)^5}$ **23.** 16 **24.** x^6 **25.** 81 **26.** $\sqrt[4]{a}$ **27.** -6 **28.** No es un número real **29.** $\frac{3}{4}$ **30.** $\frac{3}{8}$ **31.** $x^{4/15}$ **32.** $\frac{4}{y^3}$ **33.** $\frac{1}{a^{16/15}}$ **34.** $\frac{25x^{10}}{y^7}$ **35.** $\frac{1}{9x^{1/3}}$ **36.** 1 **37.** $5a^2 - 3a^{5/2}$ **38.** $\frac{4}{x^{7/6}} + 11$ **39.** 5 **40.** 2.668 **41.**



42.

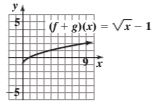


43. $3\sqrt{2}$ **44.** $2\sqrt[3]{2}$ **45.** $\frac{7}{3}$ **46.** $\frac{2}{5}$ **47.** $-\frac{9}{7}$ **48.** $-\frac{3}{5}$ **49.** 8 **50.** 4 **51.** $3xyz^2\sqrt{2y}$ **52.** $5xy^3\sqrt[3]{3xy}$ **53.** $3a^2b^3\sqrt[3]{2ab}$ **54.** $5x^2y^3z^5\sqrt[3]{x^2z}$ **55.** $x^{14}y^{21}z^{35}$ **56.** $8a^3b^{12}c^{18}$ **57.** $2x^3\sqrt{10}$ **58.** $2x^3y\sqrt[3]{x^2y^2}$ **59.** $2x^2y^3\sqrt[3]{4x^2}$ **60.** $2x^2y^4\sqrt[4]{x}$ **61.** $6x - 2\sqrt{15x}$ **62.** $2x^2y^2\sqrt[3]{y^2} + x\sqrt[3]{18y}$ **63.** $\sqrt[4]{a^3b^2}$ **64.** $\sqrt[6]{x^5y^2}$ **65.** $\frac{64r^{9/2}}{p^3}$ **66.** $\frac{y^{1/5}}{6xz^{1/3}}$ **67.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$ **68.** $\frac{\sqrt[3]{21}}{3}$ **69.** $\frac{\sqrt[4]{20}}{2}$ **70.** $\frac{x\sqrt{10}}{10}$ **71.** $\frac{8\sqrt{x}}{x}$ **72.** $\frac{m\sqrt[3]{5}}{5}$ **73.** $\frac{10\sqrt[3]{y}}{y}$ **74.** $\frac{9\sqrt[4]{z^3}}{z}$ **75.** $\frac{x}{3}$ **76.** $\frac{x}{2}$ **77.** $\frac{4y^2}{x^3}$ **78.** $2x^2y^3$ **79.** $\frac{x^2\sqrt{6y}}{y}$ **80.** $\frac{2\sqrt{21ab}}{7b}$ **81.** $\frac{x^2y^2\sqrt{6yz}}{z}$ **82.** $\frac{5xy^2\sqrt{15yz}}{3z}$ **83.** $3xy\sqrt[3]{2y}$ **84.** $\frac{\sqrt[3]{75xy^2}}{5y}$ **85.** $\frac{y\sqrt[3]{9x^2}}{x}$ **86.** $\frac{y^2\sqrt[3]{25x}}{5x}$ **87.** $\frac{b^2\sqrt[4]{2ab^2}}{a}$ **88.** $\frac{y\sqrt[4]{6x^3y^2}}{2x}$ **89.** 7 **90.** -2 **91.** $x^2 - y$ **92.** $7 + 4\sqrt{3}$ **93.** $x + \sqrt{5xy} - \sqrt{3xy} - y\sqrt{15}$ **94.** $\sqrt[3]{6x^2} - \sqrt[3]{4xy} - \sqrt[3]{9xy} + \sqrt[3]{6y^2}$ **95.** $-12 + 6\sqrt{5}$ **96.** $\frac{4x - x\sqrt{x}}{16 - x}$ **97.** $\frac{4a + a\sqrt{b}}{16 - b}$ **98.** $\frac{x\sqrt{y} + 7x}{y - 49}$ **99.** $\frac{x - \sqrt{xy}}{x - y}$

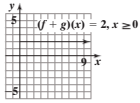
100. $\dfrac{x-2\sqrt{xy}-3y}{x-y}$ **101.** $\dfrac{2\sqrt{a-1}+4}{a-5}$ **102.** $\dfrac{5\sqrt{y+2}+15}{y-7}$ **103.** $9\sqrt[3]{x}$ **104.** $-4\sqrt{3}$ **105.** $12-13\sqrt[3]{2}$ **106.** $\dfrac{45\sqrt{2}}{8}$

107. $(9x^2y^3-4x^3y^4)\sqrt{x}$ **108.** $(8x^2y^2-x+3x^3)\sqrt[3]{xy^2}$ **109.** $3x\sqrt{2}-3\sqrt{5x}$ **110.** $2x^2+2x^2\sqrt[3]{4x}$ **111.** $2x+7$

112. $|2a+5|$ **113.** $\sqrt[6]{x+5}$ **114.** $\sqrt[12]{b^5}$ **115. a)** $12\sqrt{3}$ **b)** 24 **116. a)** $40\sqrt{2}$ **b)** 120 **117. a)**



b) $x \geq 0$ **118. a)**



b) $x \geq 0$ **119.** 16 **120.** Sin solución **121.** 64 **122.** -125 **123.** 9 **124.** 125 **125.** Sin solución **126.** 4 **127.** -3 **128.** 3 **129.** 0, 9 **130.** 5 **131.** 4 **132.** 6 **133.** $L=\dfrac{V^2w}{2}$ **134.** $A=\pi r^2$ **135.** $2\sqrt{14}$ **136.** $5\sqrt{3}$ **137.** $\sqrt{29}\approx 5.39$ metros **138.** $\sqrt{1280}\approx 35.78$ pies por segundo **139.** $2\pi\sqrt{2}\approx 2.83\pi\approx 8.89$ segundos

140. $\sqrt{\dfrac{90}{0.145}}\approx 24.91$ metros por segundo **141.** $m\approx 5m_0$. Por tanto, es ≈ 5 veces su masa original **142.** $1+0i$ **143.** $-8+0i$

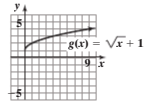
144. $7-16i$ **145.** $9+4i$ **146.** $13+i$ **147.** $-3+3i$ **148.** $12\sqrt{3}+(\sqrt{5}-\sqrt{7})i$ **149.** $-6+6i$ **150.** $17-6i$

151. $(24+3\sqrt{5})+(4\sqrt{3}-6\sqrt{15})i$ **152.** $-\dfrac{8i}{3}$ **153.** $\left(-1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)i$ **154.** $\dfrac{12}{13}-\dfrac{8}{13}i$ **155.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{31}+\dfrac{3\sqrt{2}}{31}i$ **156.** 0 **157.** 7 **158.** i

159. $-i$ **160.** 1 **161.** -1

Capítulo 7 Examen de práctica

1. $|5x-3|$ [7.1] **2.** $\dfrac{1}{x^{12/5}}$ [7.2] **3.** $(2x+7)^{2/5}$ [7.2] **4.** [7.1]



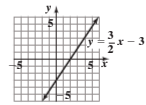
5. $3x^3y^5\sqrt{6x}$ [7.3] **6.** $5x^3y^3\sqrt[3]{2x^2y}$ [7.4] **7.** $\dfrac{x^3y\sqrt{14yz}}{4z}$ [7.5] **8.** $\dfrac{9\sqrt[3]{x^2}}{x}$ [7.5] **9.** $\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$ [7.5] **10.** $7\sqrt{6}$ [7.3] **11.** $(2xy+4x^2y^2)\sqrt[3]{y^2}$ [7.4] **12.** $6\sqrt{3}-2\sqrt{6}-12+4\sqrt{2}$ [7.4] **13.** $\sqrt[8]{x^5y^3}$ [7.2] **14.** $\sqrt[12]{(7x+2)^7}$ [7.5] **15.** -5 [7.6] **16.** -3 [7.6] **17.** 9 [7.6]

18. 3 [7.6] **19.** $g=\dfrac{8w^2}{h}$ [7.6] **20.** $\sqrt{12\,880}\approx 113.49$ pies por segundo [7.6] **21.** 13 pies [7.6] **22.** $2\pi\sqrt{\dfrac{1\,400}{65\,000}}\approx 0.92$ segundo [7.6]

23. $20+20i$ [7.7] **24.** $\dfrac{33}{53}-\dfrac{17}{53}i$ [7.7] **25.** 2 [7.7]

Examen de repaso acumulativo

1. $\dfrac{19}{3}$ [2.1] **2.** -1 [2.1] **3.** \$40 [2.3] **4.** $\{x\mid -1<x<4\}$ [2.6] **5.** [3.4]



6. Paralela [3.5] **7.** $-x^2+5x-13$ [3.6] **8.** $y=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{10}{3}$ [3.5] **9.** $\left(2,5,\dfrac{34}{5}\right)$ [4.2] **10.** 40 [4.5] **11.** $w=2r+1$ [5.3]

12. $25x^2y^2-9$ [5.2] **13.** $3,-3$ [7.6] **14.** $x(4x-5)(x-1)$ [5.5] **15.** $(x-2)(x^2+5x+13)$ [5.6] **16.** $\dfrac{1}{4},-\dfrac{3}{2}$ [5.8]

17. $\dfrac{(x+y)y^2}{3x^3}$ [6.1] **18.** $\dfrac{x+3}{x+5}$ [6.2] **19.** 18 [6.4] **20.** 400 pies [6.6]

Capítulo 8

Serie de ejercicios 8.1

1. Cuadrática **3.** Complejo **5.** Perfecto **7.** Recíproco **9.** 25 **11.** ± 8 **13.** ± 5 **15.** $\pm 2\sqrt{6}$ **17.** $\pm 9i$

19. $\pm 2i\sqrt{6}$ **21.** $\pm 3\sqrt{3}$ **23.** $\pm i\sqrt{5}$ **25.** 8, 0 **27.** $-3\pm 5i$ **29.** $2\pm 3i\sqrt{5}$ **31.** $-1,\dfrac{1}{3}$ **33.** $\dfrac{5\pm 3\sqrt{2}}{2}$ **35.** $-\dfrac{9}{5}\pm\dfrac{2}{5}i$

37. $-\dfrac{1}{20},-\dfrac{9}{20}$ **39.** $-1,-3$ **41.** $-1,3$ **43.** $-3,-4$ **45.** 1, 4 **47.** $-1,\dfrac{1}{2}$ **49.** $-\dfrac{1}{2},4$ **51.** $-1,7$ **53.** $1,-11$ **55.** $7,-4$

57. $2\pm\sqrt{14}$ **59.** $-3\pm 2\sqrt{2}$ **61.** $2\pm 3i$ **63.** $\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$ **65.** $-\dfrac{3}{2}\pm\dfrac{i\sqrt{15}}{2}$ **67.** 0, 1 **69.** $2\pm i\sqrt{3}$ **71.** $\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{2}{3}i$

73. $1,-3$ **75.** $8,-4$ **77.** $\dfrac{1}{3},-1$ **79.** $2\pm\sqrt{5}$ **81.** $\dfrac{1}{4}\pm\dfrac{i\sqrt{39}}{4}$ **83.** $\dfrac{-9\pm\sqrt{73}}{2}$ **85. a)** $21=(x+2)(x-2)$ **b)** 5

87. **a)** $18 = (x + 4)(x + 2)$ **b)** $-3 + \sqrt{19}$ **89.** 12 mph **91.** 5, 7 **93.** 5 pies por 12 pies **95.** $6 + 6\sqrt{2} \approx 14.49$ pies **97.** $\sqrt{200} \approx 14.14$ pulgadas **99.** $\sqrt{24} \approx 4.90$ pies **101.** 4 % **103.** ≈6 % **105.** **a)** $S = 32 + 80\sqrt{\pi} \approx 173.80$ pulgadas cuadradas **b)** $r = \dfrac{4\sqrt{\pi}}{\pi} \approx 2.26$ pulgadas **c)** $r = -5 + \sqrt{\dfrac{80 + 25\pi}{\pi}} \approx 2.1$ pulgadas **107.** 2 **108.** \$4 200 a 7 %, \$5800 a $6\frac{1}{4}$ % **109.** $\left\{10, \frac{4}{3}\right\}$ **110.** 0 **111.** $4x^3 + x^2 - 21x + 6$

Serie de ejercicios 8.2

1. Completar **3.** Divide **5.** Dos **7.** No **9.** Una solución real **11.** Sin solución real **13.** Dos soluciones reales **15.** Dos soluciones reales **17.** Una solución real **19.** Sin solución real **21.** $-2, -3$ **23.** 2, 4 **25.** $-3, 5$ **27.** $\frac{4}{3}, \frac{3}{2}$ **29.** $-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ **31.** $-3, \frac{2}{3}$ **33.** 8 **35.** $3 \pm \sqrt{2}$ **37.** $\dfrac{5 \pm \sqrt{73}}{6}$ **39.** 3 **41.** $5 \pm 3i$ **43.** $3 \pm \frac{1}{2}i$ **45.** $0, \frac{11}{7}$ **47.** $\pm\dfrac{i\sqrt{42}}{6}$ **49.** $\frac{10}{7}$ **51.** $-\frac{1}{3}, \frac{4}{5}$ **53.** $-\frac{5}{8}, \frac{4}{7}$ **55.** $\dfrac{-1 \pm \sqrt{211}}{20}$ **57.** $\frac{1}{2} \pm \dfrac{i\sqrt{5}}{2}$ **59.** $\dfrac{3 \pm \sqrt{33}}{2}$ **61.** $\dfrac{-6 \pm 2\sqrt{6}}{3}$ **63.** $-3 \pm \sqrt{21}$ **65.** $0, \frac{3}{2}$ **67.** $-5, 6$ **69.** $\dfrac{7 \pm \sqrt{17}}{4}$ **71.** No es número real **73.** $x^2 + 8x - 9 = 0$ **75.** $x^2 - 7x + 6 = 0$ **77.** $15x^2 - x - 6 = 0$ **79.** $x^2 - 2 = 0$ **81.** $x^2 + 9 = 0$ **83.** $x^2 - 6x + 7 = 0$ **85.** $x^2 - 4x + 13 = 0$ **87.** **a)** \$282 **b)** 50 lámparas **89.** **a)** \$1 000 **b)** 15 sillas **91.** 3 **93.** $w = 3$ pies, $l = 8$ pies **95.** 2 pulgadas **97.** **a)** 0.5 segundos y 2 segundos **b)** 2.60 segundos **c)** 28 pies **99.** **a)** 1 segundo y 9 segundos **b)** 10 segundos **c)** 66.25 pies **101.** Sí; si multiplicas ambos lados de una ecuación por -1 obtienes la otra ecuación **103.** **a)** $b^2 - 4ac$ **b)** -84 **c)** Las respuestas variarán **105.** Las respuestas variarán **107.** Sí **109.** $\left(-0.12 + \sqrt{14.3952}\right)/1.2 \approx 3.0618$ milímetros **111.** **a)** ≈1.94 segundos **b)** ≈2.74 segundos **c)** De Carolina **d)** Sí, a 1.5 segundos **112.** 5.0×10^2 o 500 **113.** 7 **114.** $(2, -1)$ **115.** $\dfrac{6y - x}{3xy}$ **116.** Sin solución real

Serie de ejercicios 8.3

1. Ganancia **3.** Tarea **5.** $s = \sqrt{\dfrac{A}{6}}$ **7.** $s = \sqrt{2A}$ **9.** $i = \sqrt{\dfrac{E}{r}}$ **11.** $v = 5\sqrt{d}$ **13.** $r = \sqrt{\dfrac{3V}{\pi h}}$ **15.** $W = \sqrt{d^2 - L^2}$ **17.** $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ **19.** $H = \sqrt{d^2 - L^2 - W^2}$ **21.** $t = \sqrt{\dfrac{h - s_0}{-16}}$ o $t = \dfrac{\sqrt{s_0 - h}}{4}$ **23.** $v = \sqrt{\dfrac{2E}{m}}$ **25.** $f_x = \sqrt{f^2 - f_y^2}$ **27.** $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2ad}$ **29.** **a)** pérdida de \$2700 **b)** ganancia de \$21 800 **c)** 1.61 años **31.** **a)** pérdida de \$2400 **b)** ganancia de \$24 000 **c)** 1.41 años **33.** **a)** 32 °F **b)** 80.8 °F **c)** 2.92 minutos **35.** $l = 30$ metros, $w = 20$ metros **37.** $l = 15.08$ pulgadas, $h = 8.48$ pulgadas **39.** 5 pulgadas, 12 pulgadas, **41.** Tráfico intenso: 40 millas por hora, autopista: 65 millas por hora **43.** Caminar: 4 mph; pedalear: 16 mph **45.** 130 mph **47.** 75 mph **49.** Benita: 11.52 horas, Pamela: 12.52 horas **51.** Christian: 11.76 horas, Juan: 12.26 horas **53.** David: 142.87 minutos, Katia: 157.87 minutos **55.** Las respuestas variarán **57.** Las respuestas variarán **59.** 6 metros por 3 metros o 9 metros por 2 metros **61.** -16 **62.** $R = \dfrac{E - Ir}{I}$ **63.** $\dfrac{8}{r - 4}$ **64.** $\dfrac{x^2}{y^{32}}$ **65.** Sin solución

Examen de mitad de capítulo

1. $\pm 7\sqrt{2}$ [8.1] **2.** $3 \pm 2i\sqrt{5}$ [8.1] **3.** $-\frac{1}{2}, -\frac{13}{2}$ [8.1] **4.** $-6, 2$ [8.1] **5.** $2 \pm \sqrt{14}$ [8.1] **6.** $-\frac{1}{8} \pm \dfrac{i\sqrt{143}}{8}$ [8.1] **7.** $(6 + 6\sqrt{2})$ metros [8.1] **8.** **a)** $b^2 - 4ac$ **b)** Dos soluciones reales distintas $b^2 - 4ac > 0$; una solución real $b^2 - 4ac = 0$; sin solución real $b^2 - 4ac < 0$ [8.2] **9.** Dos soluciones reales distintas [8.2] **10.** $-\frac{5}{3}, \frac{3}{2}$ [8.2] **11.** $-2 \pm 2\sqrt{3}$ [8.2] **12.** $\frac{1}{3} \pm \dfrac{i\sqrt{14}}{3}$ [8.2] **13.** $x^2 - 5x - 14 = 0$ [8.2] **14.** $x^2 - 4x - 1 = 0$ [8.2] **15.** 10 lámparas [8.2] **16.** $r = \sqrt{x^2 - y}$ [8.3] **17.** $x = \sqrt{\dfrac{3A}{k}}$ [8.3] **18.** $y = \sqrt{D^2 - x^2}$ [8.3] **19.** 5 pies por 12 pies [8.3] **20.** 5 relojes [8.3]

Serie de ejercicios 8.4

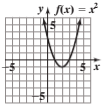
1. Cuadrática **3.** Extraña **5.** $u = h - 2$ **7.** $\pm 1, \pm 4$ **9.** $\pm 2i, \pm 3i$ **11.** $\pm 2, \pm\sqrt{3}$ **13.** $\pm 3i, \pm i\sqrt{5}$ **15.** $\pm\frac{1}{2}, \pm 2$ **17.** $\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{5}$ **19.** $\pm 3, \pm i\sqrt{2}$ **21.** $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \pm\sqrt{10}$ **23.** $-1, 11$ **25.** $\frac{4}{3}, -\frac{1}{2}$ **27.** $\pm 2, \pm 3$ **29.** $\pm i, \pm 3i$ **31.** $-4, -3, 1, 2$ **33.** $-\frac{1}{2}$ **35.** 3, 4 **37.** $2, \frac{1}{3}$ **39.** $-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}$ **41.** 8, 27 **43.** 1, 27 **45.** 16, 81 **47.** 1 **49.** $\frac{1}{4}$ **51.** 4, 9 **53.** 4 **55.** $\frac{1}{9}$ **57.** $(4, 0), (9, 0)$ **59.** Ninguna **61.** $(-4, 0), \left(\frac{1}{5}, 0\right)$ **63.** $(1, 0)$ **65.** $(-1, 0), (4, 0)$ **67.** $(\pm 2, 0), (\pm 5, 0)$ **69.** **a)** y **b)** $\frac{1}{5}, -\frac{1}{4}$ **71.** $-\frac{14}{5}, -\frac{8}{3}$ **73.** $2, \frac{1}{4}$ **75.** 2, 1 **77.** $-3, 1, 2, -4$ **79.** $\pm\sqrt{\dfrac{3 \pm \sqrt{15}}{2}}$ **81.** Sea $u = x^2$ **83.** Sea $u = x^{-1}$ **85.** $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; comienza con $(x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 1) = 0$ **87.** $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$; comienza con

$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})=0$ **89.** No; las soluciones imaginarias siempre ocurren en pares. **91.** $\frac{43}{60}$ **92.** 1
93. D: $\mathbb{R}$, R: $\{y \mid y \geq 0\}$ **94.** $2xy^2\sqrt[3]{2}$ **95.** $9\sqrt{3}$

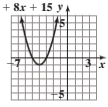
Serie de ejercicios 8.5

1. Parábola **3.** Hacia abajo **5.** $-\frac{b}{2a}$ **7.** intersección con el eje de las y **9.** Derecha **11.** Arriba

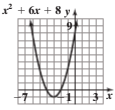
13. **a)** Hacia arriba **b)** $(0,3)$ **c)** $(2,-1)$ **d)** $x=2$ **e)** $(1,0),(3,0)$
f)



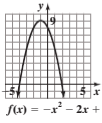
15. **a)** Hacia abajo **b)** $(0,15)$ **c)** $(-4,-1)$ **d)** $x=-4$ **e)** $(-5,0),(-3,0)$
f)



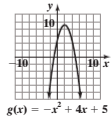
17. **a)** Hacia abajo **b)** $(0,8)$ **c)** $(-3,-1)$ **d)** $x=-3$ **e)** $(-4,0),(-2,0)$
f)



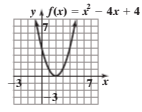
19. **a)** Hacia abajo **b)** $(0,8)$ **c)** $(-1,9)$ **d)** $x=-1$ **e)** $(-4,0),(2,0)$
f)



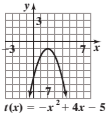
21. **a)** Hacia abajo **b)** $(0,5)$ **c)** $(2,9)$ **d)** $x=2$ **e)** $(-1,0),(5,0)$
f)



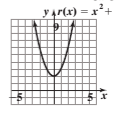
23. **a)** Hacia arriba **b)** $(0,4)$ **c)** $(2,0)$ **d)** $x=2$ **e)** $(2,0)$
f)



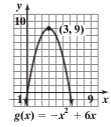
25. **a)** Hacia abajo **b)** $(0,-5)$ **c)** $(2,-1)$ **d)** $x=2$ **e)** Sin intersecciones con el eje de las x
f)



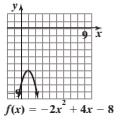
27. **a)** Hacia arriba **b)** $(0,2)$ **c)** $(0,2)$ **d)** $x=0$ **e)** Sin intersecciones con el eje de las x
f)



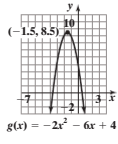
29. **a)** Hacia abajo **b)** $(0,0)$ **c)** $(3,9)$ **d)** $x=3$ **e)** $(0,0),(6,0)$
f)



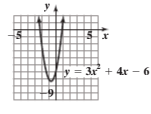
31. **a)** Hacia abajo **b)** $(0,-8)$ **c)** $(1,-6)$ **d)** $x=1$ **e)** Sin intersecciones con el eje de las x
f)



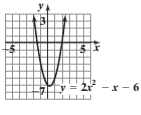
33. **a)** Hacia abajo **b)** $(0,4)$ **c)** $\left(-\frac{3}{2},\frac{17}{2}\right)$ **d)** $x=-\frac{3}{2}$ **e)** $\left(\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2},0\right)$
f)



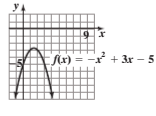
35. **a)** Hacia arriba **b)** $(0,-6)$ **c)** $\left(-\frac{2}{3},-\frac{22}{3}\right)$ **d)** $x=-\frac{2}{3}$ **e)** $\left(\frac{-2\pm\sqrt{22}}{3},0\right)$
f)



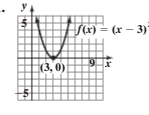
37. **a)** Hacia abajo **b)** $(0,-6)$ **c)** $\left(\frac{1}{4},-\frac{49}{8}\right)$ **d)** $x=\frac{1}{4}$ **e)** $\left(-\frac{3}{2},0\right),(2,0)$
f)



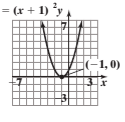
39. **a)** Hacia abajo **b)** $(0,-5)$ **c)** $\left(\frac{3}{2},-\frac{11}{4}\right)$ **d)** $x=\frac{3}{2}$ **e)** Sin intersecciones con el eje de las x
f)



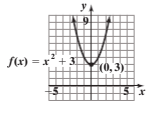
41.



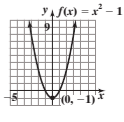
43.



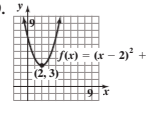
45.



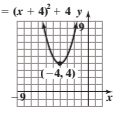
47.

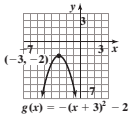


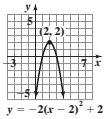
49.

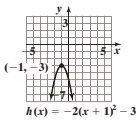


51.

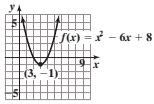


53. 

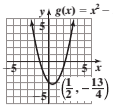
55. 

57. 

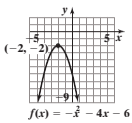
59. a) $f(x) = (x - 3)^2 - 1$

b) 

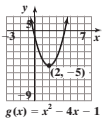
61. a) $g(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$

b) 

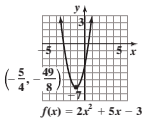
63. a) $f(x) = -(x + 2)^2 - 2$

b) 

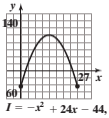
65. a) $g(x) = (x - 2)^2 - 5$

b) 

67. a) $f(x) = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$

b) 

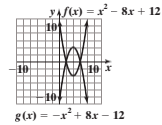
69. b) **71.** d) **73. a)** $x = 7$ **b)** $A = 121$ **75. a)** $x = 1$ **b)** $A = 100$ **77. a)** \$200 **b)** \$39 800 **79. a)** 200 spinners **b)** \$800

81. a) 

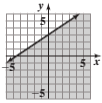
b) \$2 **c)** \$22 **d)** \$12 **e)** \$10 000 **83. a)** 100 **b)** \$3 800 **85. a)** 40.425 metros **b)** 2.5 segundos **c)** ≈5.37 segundos **87.** 400 pies cuadrados **89.** −16, 4 y −4 **91.** 900, 30 y 30 **93. a)** \$142 400 **b)** 380 **95. a)** \$188 844 **b)** 438 **97.** 4 unidades **99.** 3 unidades **101.** $f(x) = 2(x - 3)^2 - 2$

103. a)  **b)** 

105. valor mínimo; la gráfica abre hacia arriba

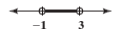
107. a) Las gráficas tendrán las mismas intersecciones con el eje de las x, pero $f(x) = x^2 - 8x + 12$ abrirá hacia arriba y $g(x) = -x^2 + 8x - 12$ abrirá hacia abajo **b)** Sí, ambas en $(6, 0)$ y $(2, 0)$ **c)** No; vértice de $f(x)$ en $(4, -4)$, vértice de $g(x)$ en $(4, 4)$ **d)** 

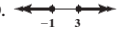
109. a) $h(t) = -16(t - 1.875)^2 + 58.25$ **b)** 58.25 pies, 1.875 segundos **c)** Sí **111.** 200π pies cuadrados

112. 

113. $(-2, 3, 2)$ **114.** -8 **115.** $\frac{x}{x + 6}$

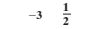
Serie de ejercicios 8.6

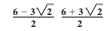
1. Solución **3.** Se incluyen **5.** Abierto **7.** 

9. 

11. 

13.

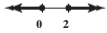
15. 

17. 

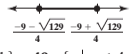
19.

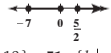
21. $(-\infty, -4) \cup (-2, 3)$

23. $(-\infty, -2] \cup [1, 3]$ **25.** $\left(-3, \frac{1}{4}\right) \cup (2, \infty)$ **27.** $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right] \cup [3, \infty)$ **29.** $\left(-\infty, \frac{7}{4}\right]$ **31.** $(-\infty, 0)$ **33.** 

35. 

37. 

39. 

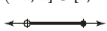
41. 

43. $\{x \mid -1 \le x < 3\}$

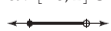
45. $\{x \mid x \le -3 \text{ o } x > 2\}$ **47.** $\{x \mid -5 < x < 1\}$ **49.** $\{c \mid c < 4 \text{ o } c > 10\}$ **51.** $\{b \mid -7 \le b < -1\}$ **53.** $\{j \mid 0 \le j < 5\}$

55. $\{m \mid m < 0 \text{ o } m \ge 3\}$ **57.** $\left\{x \middle| x < -\frac{5}{3} \text{ o } x > \frac{7}{5}\right\}$ **59.** $\left\{w \middle| -\frac{1}{4} < w \le \frac{3}{5}\right\}$ **61.** $(-\infty, -1) \cup (2, 4)$ **63.** $(-3, 2) \cup (5, \infty)$

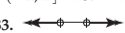
65. $(-2, 1] \cup [7, \infty)$ **67.** $(-\infty, -8) \cup [0, 3)$ **69.** $[-3, 2] \cup (5, \infty)$ **71.** $(-\infty, -4] \cup (-2, 1]$ **73.** 

75. 

77. 

79. 

81. 

83. 

85. a) $x < 2 \text{ o } x > 5$ **b)** $2 < x < 5$ **87. a)** $(4, \infty)$; $y > 0$ en este intervalo **b)** $(-\infty, 2) \cup (2, 4)$; $y < 0$ en este intervalo

89. $x^2 + 2x - 8 > 0$ **91.** $\frac{x + 3}{x - 4} \ge 0$ **93.** Todos los números reales; para cualquier valor de x, la expresión es ≥ 0 **95.** Todos los números reales, excepto -2; para cualquier valor de x excepto -2, la expresión es ≥ 0 **97.** Sin solución; la gráfica abre hacia arriba y no tiene intersecciones con el eje de las x, de modo que siempre está arriba del eje x **99.** 

101. $x^2 - 3x > 0$; multiplica factores que contienen valores límite **103.** $x^2 < 0$; x^2 siempre es ≥ 0. **105.** $(-\infty, -3) \cup (-1, 1) \cup (3, \infty)$ **107.** $[-2, -1] \cup [2, \infty)$ **111.** 6 mililitros

112. $-\frac{1}{2}$ **113.** $3r + 3s - 9t$ **114.** $\frac{x - 3}{x + 1}$ **115.** $38 - 9i$

Capítulo 8 Ejercicios de repaso

1. 1, 9 **2.** $\frac{-1 \pm 2\sqrt{15}}{2}$ **3.** $-\frac{1}{3}, 1$ **4.** $\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}$ **5.** 2, 6 **6.** 4, −8 **7.** $-1 \pm \sqrt{10}$ **8.** $-3 \pm \sqrt{21}$ **9.** $1 \pm 3i$ **10.** $2 \pm 2i\sqrt{7}$ **11. a)** $32 = (x + 1)(x + 5)$ **b)** 3 **12. a)** $63 = (x + 2)(x + 4)$ **b)** 5 **13.** 7, 8 **14.** ≈16.90 pies por ≈16.90 pies **15.** Dos soluciones reales **16.** Sin solución real **17.** Una solución real

18. Sin solución real **19.** Una solución real **20.** Dos soluciones reales **21.** $-\frac{5}{2}, \frac{10}{3}$ **22.** $2, 9$ **23.** $8, -5$ **24.** $0, \frac{9}{7}$ **25.** $\frac{7}{2}$

26. $-\frac{6}{5}$ **27.** $-4 \pm \sqrt{11}$ **28.** $-2 \pm 2\sqrt{3}$ **29.** $\frac{-2 \pm \sqrt{10}}{2}$ **30.** $\frac{3 \pm \sqrt{33}}{3}$ **31.** $\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{51}}{2}$ **32.** $1 \pm i\sqrt{10}$ **33.** $\frac{5}{2}, -\frac{5}{3}$

34. $\frac{1}{4}, -\frac{3}{2}$ **35.** $10, -6$ **36.** $\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}$ **37.** $\frac{7 \pm \sqrt{89}}{10}$ **38.** $\frac{3 \pm 3\sqrt{3}}{2}$ **39.** $x^2 - 2x - 3 = 0$ **40.** $3x^2 + 4x - 4 = 0$

41. $x^2 - 11 = 0$ **42.** $x^2 - 6x + 13 = 0$ **43.** 8 pies por 12 pies **44.** $\sqrt{128} \approx 11.31$ **45.** 4 % **46.** 7, 11 **47.** 8 pulgadas por 12 pulgadas

48. \$540 **49. a)** 10.12 pulgadas **b)** 11.77 pulgadas o 38.23 pulgadas **50. a)** 720 pies **b)** 7 segundos **51. a)** 40 mililitros **b)** 150 °C

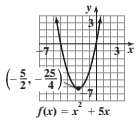
52. más grande: ≈ 23.51 horas, más pequeña: ≈ 24.51 horas **53.** 50 millas por hora **54.** 1.6 millas por hora **55.** $l = 10$ unidades, $w = 8$ unidades **56.** 20 mesas **57.** $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ **58.** $t = \sqrt{\frac{c - h}{4.9}}$ **59.** $v_y = \sqrt{v^2 - v_x^2}$ **60.** $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2ad}$ **61.** $\pm 1, \pm 3$ **62.** $\pm 4, \pm\sqrt{5}$

63. $\pm 2\sqrt{2}, \pm i\sqrt{3}$ **64.** $\frac{3}{2}, -\frac{1}{6}$ **65.** $\frac{1}{9}$ **66.** $\frac{27}{8}, 8$ **67.** $4, \frac{13}{8}$ **68.** $-\frac{1}{5}, -\frac{5}{2}$ **69.** $(\pm 1, 0), (\pm 9, 0)$ **70.** $\left(\frac{4}{25}, 0\right)$ **71.** Ninguno

72. $(3 \pm \sqrt{17}, 0), (3 \pm \sqrt{6}, 0)$

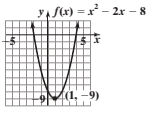
73. a) Hacia arriba **b)** $(0, 0)$ **c)** $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{25}{4}\right)$ **d)** $x = -\frac{5}{2}$ **e)** $(0, 0), (-5, 0)$

f)



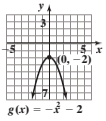
74. a) Hacia arriba **b)** $(0, -8)$ **c)** $(1, -9)$ **d)** $x = 1$ **e)** $(-2, 0), (4, 0)$

f)



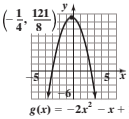
75. a) Hacia abajo **b)** $(0, -2)$ **c)** $(0, -2)$ **d)** $x = 0$ **e)** Sin intersecciones con el eje de las x

f)



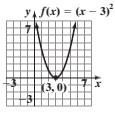
76. a) Hacia abajo **b)** $(0, 15)$ **c)** $\left(-\frac{1}{4}, \frac{121}{8}\right)$ **d)** $x = -\frac{1}{4}$ **e)** $(-3, 0), \left(\frac{5}{2}, 0\right)$

f)

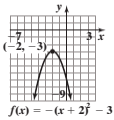


77. a) \$11 **b)** \$7 600 **78. a)** 2.5 segundos **b)** 175 pies

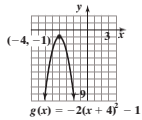
79.



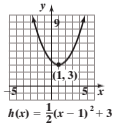
80.



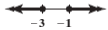
81.



82.



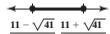
83.



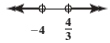
84.



85.



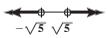
86.



87.



88.

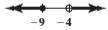


89. $\{x | x < -1 \text{ o } x > 5\}$ **90.** $\{x | -2 < x \leq 3\}$ **91.** $\{x | x < -3 \text{ o } x \geq 2\}$

92. $\left\{x \middle| -\frac{5}{3} < x < 6\right\}$ **93.** $\{x | -4 < x < -1 \text{ o } x > 2\}$ **94.** $\{x | x \leq 0 \text{ o } 3 \leq x \leq 6\}$

95. $\left[-\frac{4}{3}, 1\right] \cup [3, \infty)$ **96.** $(-\infty, -4) \cup (-2, 0)$ **97.** $(-2, 0) \cup (4, \infty)$ **98.** $(-\infty, -3) \cup (2, 8)$ **99.** $(-2, 3] \cup (7, \infty)$

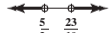
100. $(-\infty, -3) \cup [0, 6]$ **101.**



102.



103.

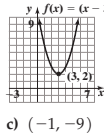


Capítulo 8 Examen de práctica

1. $3, -5$ [8.1] **2.** $3 \pm \sqrt{2}$ [8.1] **3.** $8, -2$ [8.2] **4.** $2 \pm i\sqrt{7}$ [8.2] **5.** $\frac{2}{3}, -1$ [8.1–8.2]

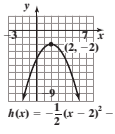
6. $\frac{-7 \pm \sqrt{33}}{2}$ [8.1–8.2] **7.** $5x^2 - 18x - 8 = 0$ [8.2] **8.** $v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$ [8.3] **9. a)** \$121 200 **b)** ≈ 2 712.57 pies cuadrados [8.1–8.3]

10. 50 mph [8.1–8.3] **11.** $\pm\frac{\sqrt{10}}{2}, \pm i\sqrt{10}$ [8.4] **12.** $\frac{343}{27}, -216$ [8.4] **13.** $\left(\frac{9}{16}, 0\right)$ [8.4] **14.**

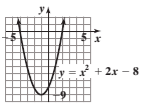


[8.5]

15.



16. Dos soluciones reales [8.5] **17. a)** Hacia arriba **b)** $(0, -8)$ **c)** $(-1, -9)$ **d)** $x = -1$ **e)** $(-4, 0), (2, 0)$

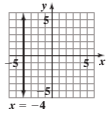
f) 

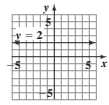
[8.5] **18.** $2x^2 + 13x - 7 = 0$ [8.5] **19.** [8.6] **20**  [8.6] **21. a)** $\left[-\frac{5}{2}, -2\right)$

b) $\left\{x \middle| -\frac{5}{2} \le x < -2\right\}$ [8.6] **22.** $w = 5$ pies, $l = 13$ pies [8.5] **23.** 6 segundos [8.5]

24. a) 20 **b)** \$ 490 [8.5] **25.** 30 [8.5]

Examen de repaso acumulativo

1. 13 [1.4] **2.** 18 [1.4] **3.** 2.54×10^6 [1.6] **4.** $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right\}$ [2.6] **5.** $3x - 7$ [2.1] **6.** Todos los números reales, $\mathbb{R}$ [2.1] **7.** $(-12, 8)$ [2.5] **8.** $m = -\frac{9}{7}, \left(0, \frac{15}{7}\right)$ [3.4] **9.** 1 500 [3.2] **10.** $y = x - 1$ [3.5] **11. a)** No, la gráfica no pasa la prueba de la recta vertical **b)** Dominio: $\{x|x \ge -2\}$, Rango: $\mathbb{R}$ [3.2] **12. a)** 

b) 

[3.3] **13.** 160 [4.5]

14. $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ [4.1] **15.** $(x + 7)(x + 9)$ [5.5] **16. a)** $a^2 + 2ab + b^2$ **b)** $(a + b)^2$ [5.7] **17.** $\frac{2(x-4)}{(x-3)(x-5)}$ [6.2] **18.** $\frac{12}{5}$ [6.4]

19. 11.52 watts [6.6] **20.** $-\frac{14}{29} - \frac{23}{29}i$ [7.7]

Capítulo 9

Serie de ejercicios 9.1

1. Composición **3.** Vertical **5.** Inversa **7.** Dominio **9. a)** $2x + 1$ **b)** 9 **c)** $2x + 5$ **d)** 13

11. a) $x^2 + x - 1$ **b)** 19 **c)** $x^2 + 7x + 8$ **d)** 52 **13. a)** $\frac{1}{2x+3}$ **b)** $\frac{1}{11}$ **c)** $\frac{2}{x} + 3$ **d)** $3\frac{1}{2}$ **15. a)** $\frac{2}{x^2+1}$ **b)** $\frac{2}{17}$

c) $\frac{4}{x^2} + 1$ **d)** $1\frac{1}{4}$ **17. a)** $x^4 + 10x^2 + 26$ **b)** 442 **c)** $x^4 + 2x^2 + 6$ **d)** 294 **19. a)** $\sqrt{x+5} - 4$ **b)** -1 **c)** $\sqrt{x+1}$

d) $\sqrt{5}$ **21.** Sí **23.** No **25.** Sí **27.** No **29.** Sí **31.** No **33.** Sí **35.** Sí **37.** Sí **39.** No **41.** Sí

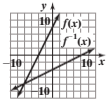
43. $f(x)$: Dominio: $\{-2, -1, 2, 4, 8\}$, Rango: $\{0, 4, 6, 7, 9\}$; $f^{-1}(x)$: Dominio: $\{0, 4, 6, 7, 9\}$, Rango: $\{-2, -1, 2, 4, 8\}$

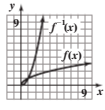
45. $f(x)$: Dominio: $\{-1, 1, 2, 4\}$, Rango: $\{-3, -1, 0, 2\}$; $f^{-1}(x)$: Dominio: $\{-3, -1, 0, 2\}$, Rango: $\{-1, 1, 2, 4\}$

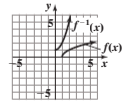
47. $f(x)$: Dominio: $\{x|x \ge 2\}$, Rango: $\{y|y \ge 0\}$; $f^{-1}(x)$; Dominio: $\{x|x \ge 0\}$; Rango: $\{y|y \ge 2\}$ **49. a)** Sí **b)** $f^{-1}(x) = x - 5$

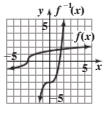
51. a) Sí **b)** $h^{-1}(x) = \frac{x}{4}$ **53. a)** No **55. a)** No **57. a)** Sí **b)** $g^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ **59. a)** Sí **b)** $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+6}$ **61. a)** Sí

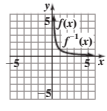
b) $g^{-1}(x) = x^2 - 2, x \ge 0$ **63. a)** Sí **b)** $h^{-1}(x) = \sqrt{x+4}, x \ge -4$ **65. a)** Sí **b)** $g^{-1}(x) = x^3 + 1$ **67. a)** $f^{-1}(x) = \frac{x-8}{2}$

b) 

69. a) $f^{-1}(x) = x^2, x \ge 0$ **b)** 

71. a) $f^{-1}(x) = x^2 + 1, x \ge 0$ **b)** 

73. a) $f^{-1}(x) = x^3 - 3$ **b)** 

75. a) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}, x > 0$ **b)** 

77. $(f \circ f^{-1})(x) = x, (f^{-1} \circ f)(x) = x$
79. $(f \circ f^{-1})(x) = x, (f^{-1} \circ f)(x) = x$
81. $(f \circ f^{-1})(x) = x, (f^{-1} \circ f)(x) = x$
83. $(f \circ f^{-1})(x) = x, (f^{-1} \circ f)(x) = x$
85. $(f \circ f^{-1})(x) = x, (f^{-1} \circ f)(x) = x$

87. $f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$; x en pies y $f^{-1}(x)$ en yardas **89.** $f^{-1}(x) = \frac{9}{5}x + 32$. **91.** $(g \circ f)(x) = 453.6x$, x en libras, $(g \circ f)(x)$ en gramos

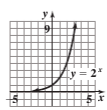
93. $(g \circ f)(x) = 0.915x$, x en yardas, $(g \circ f)(x)$ en metros **95.** No, la composición de funciones no es conmutativa. Sea $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 1$. Entonces $(f \circ g)(x) = x^2 + 2x + 1$, mientras que $(g \circ f)(x) = x^2 + 1$. **97. a)** $(f \circ g)(x) = x$; $(g \circ f)(x) = x$

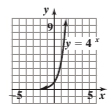
b) El dominio es $\mathbb{R}$ para todos ellos. **99.** El rango de $f^{-1}(x)$ es el dominio de $f(x)$. **101. a)** 6 pies **b)** $36\pi \approx 113.10$ pies cuadrados

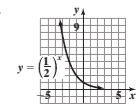
c) $A(t) = 4\pi t^2$ **d)** $36\pi \approx 113.10$ pies cuadrados **e)** Las respuestas deben concordar **104.** $\frac{81}{16}$ **105.** $2x + 3y = 10$ **106.** $\frac{18 - 12x}{x^3}$

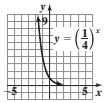
107. $p = \frac{fq}{q - f}$ **108.** $-1 \pm \sqrt{11}$

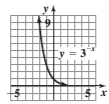
Serie de ejercicios 9.2

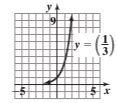
1. Exponente **3.** se elevará **5.** Principal **7.** 

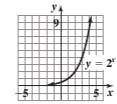
9. 

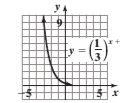
11. 

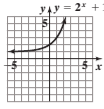
13. 

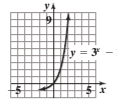
15. 

17. 

19. 

21. 

23. 

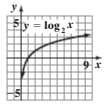
25. 

27. \$512 **29.** ≈\$10 850.92 **31.** ≈\$6 344.93 **33.** \$6 166.13 **35.** \$3 147.06

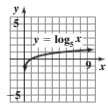
37. ≈10.6 gramos **39. a)** 5 gramos **b)** $\approx 7.28 \times 10^{-11}$ gramos **41.** 45 **43. a)** ≈16 449 pares que anidan **b)** ≈22 221 pares que anidan **45. a)** 2 400 **b)** ≈4 977 **47.** ≈8.83 kilómetros **49. a)** ≈1 245 325 **b)** ≈1 933 952 **51. a)** 14 años **b)** 10 años **c)** \$25 **d)** Lo aumenta **53. a)** Conforme x aumenta, y disminuye **b)** No, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ nunca puede ser 0. **c)** No, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ nunca puede ser negativo. **55. a)** Mismas; (0, 1). **b)** $y = 3^x$ será más inclinada que $y = 2^x$ para $x > 0$. **57. a)** Es una recta horizontal a través de $y = 1$. **b)** Sí **c)** No, no es una función uno a uno **59.** $y = a^x - k$ es $y = a^x$ desplazada hacia abajo k unidades **61.** La gráfica de $y = a^{x+2}$ es la gráfica de $y = a^x$ desplazada 2 unidades a la izquierda. **63. a)** \$16 384 **b)** \$524 288 **c)** 2^{n-1} **d)** $\$2^{29} = \$536\,870\,912$ **e)** $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{29}$ **65. a)** $-6.2x^6y^2 + 9.2x^5y^2 + 2.3x^4y$ **b)** 8 **c)** −6.2 **66.** $x^3 + 3x^2 - 6x + 20$ **67.** $|a - 4|$ **68.** $\dfrac{2xy\sqrt[4]{xy^2z^3}}{z}$

Serie de ejercicios 9.3

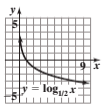
1. Exponente **3.** Base **5.** Dominio **7.** $\log_2 32 = 5$ **9.** $\log_2 8 = 3$ **11.** $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$ **13.** $\log_8 2 = \frac{1}{3}$ **15.** $\log_{1/2} \frac{1}{32} = 5$ **17.** $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ **19.** $\log_4 \frac{1}{64} = -3$ **21.** $\log_{64} 4 = \frac{1}{3}$ **23.** $\log_8 \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$ **25.** $\log_{81} \frac{1}{3} = -\frac{1}{4}$ **27.** $\log_{10} 7 = 0.8451$ **29.** $\log_e 7.3891 = 2$ **31.** $\log_a b = n$ **33.** $2^4 = 16$ **35.** $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ **37.** $5^{-2} = \frac{1}{25}$ **39.** $49^{1/2} = 7$ **41.** $3^{1/2} = \sqrt{3}$ **43.** $10^2 = 100$ **45.** $10^{-3} = \frac{1}{1\,000}$ **47.** $10^{-0.2076} = 0.62$ **49.** $e^{1.8749} = 6.52$ **51.** $w^{-p} = s$ **53.** 3 **55.** 5 **57.** 27 **59.** −4 **61.** $\frac{1}{64}$ **63.** 3 **65.** $\frac{1}{2}$ **67.** 0 **69.** 2 **71.** 4 **73.** −2 **75.** 1 **77.** $\frac{1}{2}$ **79.** $\frac{1}{2}$ **81.** −1 **83.** −2 **85.** −4 **87.**



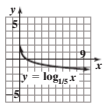
89.



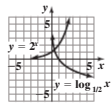
91.



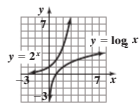
93.



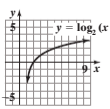
95.



97.



99. 10 000 000 **101.** 10 000 **103.**



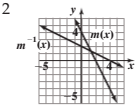
105. a) $a > 0$ y $a \neq 1$ **b)** $\{x | x > 0\}$ **c)** $\mathbb{R}$ **107.** $\left(\frac{1}{27}, -3\right), \left(\frac{1}{9}, -2\right), \left(\frac{1}{3}, -1\right)$ (1, 0), (3, 1), (9, 2) y (27, 3); las funciones $f(x) = a^x$ and $g(x) = \log_a x$ son inversas. **109.** $f^{-1}(x) = \log_5 x$ **111.** 3 y 4, dado que 62 se encuentra entre $3^3 = 27$ y $3^4 = 81$. **113.** 2 y 3, pues 425 se encuentra entre $10^2 = 100$ y $10^3 = 1\,000$. **115.** 2^x; Observa que, para $x = 10$, $2^x = 1\,024$ mientras que $\log_{10} x = 1$. **117.** $2x(x + 3)(x - 6)$ **118.** $(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$ **119.** $4(2x + 3)(5x - 1)$ **120.** $(3rs - 1)(2rs + 1)$

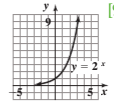
Serie de ejercicios 9.4

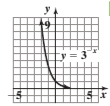
1. Positivos **3.** Suma **5.** Por **7.** $\log_2 5 + \log_2 x$ **9.** $\log_4 x - \log_4 11$ **11.** $7 \log_6 x$ **13.** $\log_8 7 + \log_8 (x + 3)$ **15.** $\log_{11}(2x + 1) - \log_{11}(x - 7)$ **17.** $5 \log_8 (r + 7)$ **19.** $\frac{1}{2}\log_{10} x - \log_{10}(x - 9)$ **21.** $\frac{3}{2}\log_4 a - \frac{1}{2}\log_4 (a + 2)$ **23.** $\log_{10} 9 + \log_{10} m - \log_{10} 8 - \log_{10} n$ **25.** $2 \log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 y - \log_3 (x + 1)$ **27.** $\log_7 8x$ **29.** $\log_6\left(\frac{x}{5}\right)$ **31.** $\log_3 x^2$ **33.** $\log_5 \sqrt{x}$ **35.** $\log_9 \frac{z^2}{z - 2}$ **37.** $\log_2 (343x^3)$ **39.** $\log_8 \sqrt[3]{\frac{q}{3q + 4}}$ **41.** $\log_8 \frac{x^3}{y^2 z^5}$ **43.** $\log_9 \frac{16\sqrt[3]{r - 6}}{\sqrt{r}}$ **45.** 1.7917 **47.** −0.4055 **49.** 0.4055 **51.** 2.1972 **53.** −2.1972 **55.** 0.5493 **57.** x **59.** $x + 3$ **61.** 7 **63.** 7 **65.** 1 **67.** $\log_a (x - 2)$ **69.** $\frac{1}{4}\log_2 x + \frac{1}{4}\log_2 y + \frac{1}{3}\log_2 a - \frac{1}{5}\log_2 (a - b)$ **71.** 0.8640 **73.** 0.1080 **75.** 0.7000 **77.** No, no hay relación entre $\log_{10}(x + y)$ y $\log_{10} xy$ o $\log_{10}\left(\frac{x}{y}\right)$ **79.** Sí, es una expansión de la propiedad 1 **81.** Sí, $\log_a (x^2 + 8x + 16) = \log_a (x + 4)^2 = 2 \log_a (x + 4)$ **83.** Sí **85.** $\log_a \frac{x}{y} = \log_a\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = \log_a x + \log_a \frac{1}{y}$ **88. a)** $\{x | x > 40\}$ **b)** $(40, \infty)$ **89. a)** $a^2 - 4c^2$ **b)** $(a + 2c)(a - 2c)$ **90.** 3 **91.** $-26 - 7i$ **92.** 49

Examen de mitad de capítulo

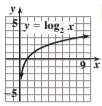
1. a) En $f(x)$, sustituye x con $g(x)$. **b)** $6x + 18$ [9.1] **2. a)** $\left(\frac{6}{x}\right)^2 + 5$ o $\frac{36}{x^2} + 5$ **b)** 9 **c)** $\frac{6}{x^2 + 5}$ **d)** $\frac{3}{7}$ [9.1] **3. a)** Las respuestas variarán. **b)** No [9.1] **4. a)** Sí **b)** $\{(2, -3), (3, 2), (1, 5), (8, 6)\}$ [9.1] **5. a)** Sí **b)** $p^{-1}(x) = 3x + 15$ [9.1] **6. a)** Sí **b)** $k^{-1}(x) = x^2 + 4, x \geq 0$ [9.1] **7.** $m^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ [9.1] **8.** [9.2] **9.** [9.2]







10. [9.3] **11. a)** 10 **b)** 320 [9.3] **12.** $\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$ [9.3] **13.** $2^{-6} = \frac{1}{64}$ [9.3] **14.** 3 [9.3] **15.** 2 [9.3] **16.** 4 [9.3]



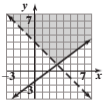
17. $2 \log_9 x + \log_9 (x - 5)$ [9.4] **18.** $\log_5 7 + \log_5 m - \frac{1}{2}\log_5 n$ [9.4] **19.** $\log_2 \frac{x^3(x + 7)}{(x + 1)^4}$ [9.4] **20.** $\log_7 \sqrt{\frac{x + 2}{x}}$ [9.4]

Serie de ejercicios 9.5

1. Común **3.** 10^y **5.** 0 **7.** 2 **9.** -1 **11.** -3 **13.** 0 y 1 **15.** 1 y 2 **17.** 4 y 5 **19.** -1 y 0 **21.** -2 y -1 **23.** -3 y -2 **25.** 0.5786 **27.** 1.9345 **29.** 4.2833 **31.** -0.1421 **33.** -1.2125 **35.** -2.4271 **37.** 3.5514 **39.** -1.1385 **41.** 0.6990 **43.** -2.2277 **45.** -2.0088 **47.** 7.2852 **49.** 1.6357 **51.** 42 491.2982 **53.** 0.0196 **55.** 1.0023 **57.** 0.9977 **59.** 10.2329 **61.** 10 **63.** 28.9201 **65.** 2 408.2413 **67.** 0.0871 **69.** 0.2389 **71.** 0.0079 **73.** 7 **75.** 7 **77.** 20.8 **79.** 41.5 **81.** 2 511.8864 **83.** 501 187.2336 **85. a)** $\approx$31.62 kilómetros **b)** $\approx$0.50 kilómetros **c)** $\approx$14.68 **87. a)** $\approx$72 % **b)** $\approx$15 % **89.** $\approx$6 310 veces más intenso **91. a)** $\approx 6.31 \times 10^{20}$ **b)** $\approx$2.19 **93.** $\approx$6.2 **95.** No; $10^2 = 100$ y como $462 > 100$, $\log 462$ debe ser mayor que 2 **97.** No; $10^0 = 1$ y $10^{-1} = 0.1$ y como $1 > 0.163 > 0.1$, $\log 0.163$ debe estar entre 0 y -1 **99.** No; $\log \frac{y}{4x} = \log y - \log 4 - \log x$ **101.** $I = 10^R$ **103.** $t = 10^{\left(\frac{2s - R}{4.9}\right)} - 1$ **106.** 50 millas por hora, 55 millas por hora **107.** $(2, -3)$ **108.** 0, -4, 3 **109.** $|3x^2 - y|$ **110.** $(-\infty, -4] \cup [2, 5]$

Serie de ejercicios 9.6

1. Base **3.** Extraña **5.** Producto **7.** 4 **9.** $\frac{1}{2}$ **11.** 2 **13.** $-\frac{1}{3}$ **15.** 4 **17.** 3 **19.** -4 **21.** 2.01 **23.** 3.56 **25.** -5.29 **27.** 1.71 **29.** 6.34 **31.** 6 **33.** 5 **35.** $\frac{1}{16}$ **37.** 100 **39.** 6 **41.** 18 **43.** 92 **45.** $-6, 4$ **47.** $\frac{4}{5}$ **49.** 75 **51.** $\frac{3}{2}$ **53.** 4 **55.** 3 **57.** 2 **59.** 30 **61.** 5 **63.** 3 **65.** 9 **67.** Sin solución **69.** 3.47 horas **71.** 3.19 años **73.** 17.07 años **75.** 11.81 años **77.** \$7 112.09 **79.** 19.36 **81. a)** 1 000 000 000 000 veces mayor **b)** 10 000 000 veces mayor **83.** 8 **85.** $x = 1$ y $x = 2$ **87.** (3, 1) **89.** (54, 46) **91.** 2.8 **93.** Sin solución **95.** $\log(-2)$ no es un número real **97.** La caja es mayor por ≈ 7.73 pies cúbicos **98.** -4 **99.** **100.** $\frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x}}{x - y}$ **101.** $c = \sqrt{\frac{E}{m}}$ **102.** $f(x) = 2(x - 3)^2 - 5$

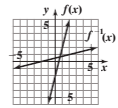


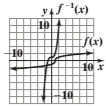
Serie de ejercicios 9.7

1. Base **3.** Exponencial **5.** Cambio **7.** Crecimiento **9.** 2 **11.** $\frac{1}{3}$ **13.** 3.2958 **15.** -0.8795 **17.** 3.3201 **19.** 0.5712 **21.** 4.9530 **23.** 0.0578 **25.** 4.5850 **27.** -2.8577 **29.** 4.3923 **31.** 1.7297 **33.** -0.2324 **35.** -0.4784 **37.** 4 **39.** 4 **41.** 4 **43.** 6 **45.** 15 **47.** Sin solución **49.** $P = 4757.5673$ **51.** $P_0 = 224.0845$ **53.** $t = 0.7847$ **55.** $t = 1.3863$ **57.** $k = 0.2310$ **59.** $k = -0.2888$ **61.** $V_0 = \frac{V}{e^{kt}}$ **63.** $t = \frac{\ln P - \ln 150}{7}$ **65.** $k = \frac{\ln A - \ln A_0}{t}$ **67.** $y = xe^{2.3}$ **69.** $y = \frac{2}{x^9}$ **71. a)** $\approx$\$5 637.48 **b)** $\approx$11.55 años **73. a)** $\approx$\$2 818.74 **b)** $\approx$17.33 años **75.** $\approx$39.98 gramos **77. a)** $\approx$86.47 % **b)** $\approx$34.66 días **79.** \$999 277 696 400 000 **81. a)** $\approx$5.01 pies por segundo **b)** $\approx$5.96 pies por segundo **c)** $\approx$646 000 **83. a)** $\approx$8.20 mil millones de personas **b)** $\approx$63.01 años **85. a)** $\approx$345.96 millones de personas **b)** $\approx$94.95 años **87. a)** $\approx$32.43 pulgadas **b)** $\approx$35.46 pulgadas **89. a)** $\approx$999.7 gramos **b)** $\approx$231 049 años **91. a)** $\approx$6 626.62 años **b)** $\approx$5 752.26 años **93.** $\approx$\$6 791.91 **95. a)** Estroncio 90, pues tiene mayor razón de decaimiento **b)** $\approx$31.66 % de la cantidad original **97.** $v_0 = \frac{e^{vk} - 1}{kt}$ **99.** $i = Ie^{-t/RC}$ **101. a)** 0 **b)** $\frac{11}{40}$ o 0.275 **102.** 240 niños, 310 adultos **103.** $-9x^2y^3 + 12x^2y^2 - 3xy^2 + 4xy$ **104.** $-20, 20$ **105.** $x + x^2$

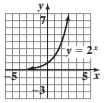
Capítulo 9 Ejercicios de repaso

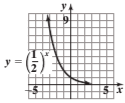
1. $4x^2 - 26x + 44$ **2.** 2 **3.** $2x^2 - 6x + 3$ **4.** 39 **5.** $6\sqrt{x - 3} + 7, x \geq 3$ **6.** $\sqrt{6x + 4}, x \geq -\frac{2}{3}$ **7.** Uno a uno **8.** No es uno a uno **9.** Uno a uno **10.** No es uno a uno **11.** Uno a uno **12.** No es uno a uno **13.** $f(x)$: Dominio: $\{-4, -1, 5, 6\}$, Rango: $\{-3, 2, 3, 8\}$; $f^{-1}(x)$: Dominio: $\{-3, 2, 3, 8\}$, Rango: $\{-4, -1, 5, 6\}$ **14.** $f(x)$: Dominio: $\{x \mid x \geq 0\}$, Rango: $\{y \mid y \geq 4\}$; $f^{-1}(x)$: Dominio: $\{x \mid x \geq 4\}$, Rango: $\{y \mid y \geq 0\}$ **15.** $f^{-1}(x) = \frac{x + 2}{4}$;



16. $f^{-1}(x) = x^3 + 1$; 

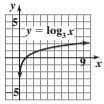
17. $f^{-1}(x) = \frac{x}{36}$, x en pulgadas, $f^{-1}(x)$ en yardas **18.** $f^{-1}(x) = \frac{x}{4}$, x en cuartos, $f^{-1}(x)$ en galones

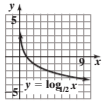
19. 

20. 

21. ≈$1 830.29 **22.** $\log_8 64 = 2$ **23.** $\log_{81} 3 = \frac{1}{4}$ **24.** $\log_5 \frac{1}{125} = -3$ **25.** $2^5 = 32$

26. $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ **27.** $6^{-2} = \frac{1}{36}$ **28.** $4^3 = x; 64$ **29.** $a^4 = 81; 3$ **30.** $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = x; 125$

31. 

32. 

33. $8 \log_5 17$ **34.** $\frac{1}{2}\log_3 (x - 9)$ **35.** $\log 6 + \log (a + 1) - \log 19$

36. $4 \log x - \log 7 - 5 \log (2x + 3)$ **37.** $\log \frac{x^5}{(x + 1)^3}$ **38.** $\log \frac{(2x)^4}{y}$ **39.** $\ln \frac{\sqrt[3]{\frac{x}{x + 2}}}{2}$

40. $\ln \frac{x^3\sqrt{x + 1}}{(x + 4)^6}$ **41.** 10 **42.** 5 **43.** 121 **44.** 3 **45.** 2.9133 **46.** −3.5720 **47.** 1 442.1154 **48.** 0.0007 **49.** 11 561.1224 **50.** 0.0594

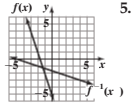
51. 5 **52.** 9 **53.** 22.4 **54.** 9.4 **55.** 4 **56.** $-\frac{1}{2}$ **57.** 2 **58.** 5 **59.** 2.58 **60.** 5.97 **61.** 1.35 **62.** 2.24 **63.** 26 **64.** 5 **65.** 1 **66.** 3

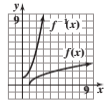
67. $t \approx 1.1552$ **68.** $A_0 \approx 352.5421$ **69.** $t = \frac{\ln A - \ln A_0}{k}$ **70.** $k = \frac{\ln 0.25}{t}$ **71.** $y = xe^6$ **72.** $y = 3x + 23$ **73.** 7.6147 **74.** 3.5046

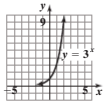
75. ≈$19 126.18 **76.** ≈17.3 años **77.** **a)** ≈92.88 minutos **b)** ≈118.14 minutos **78.** ≈10.32 libras por pulgada cuadrada **79. a)** 72 **b)** ≈61.2 **c)** ≈5 meses

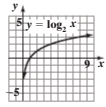
Capítulo 9 Examen de práctica

1. a) Sí **b)** $\{(2, 4), (8, -3), (3, -1), (-7, 6)\}$ [9.1] **2. a)** $x^2 + 4x + 1$ **b)** 61 [9.1]

3. a) $\sqrt{x^2 + 3}$, **b)** $2\sqrt{13}$ [9.1] **4. a)** $f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}(x + 5)$ [9.1] **b)** 

5. a) $f^{-1}(x) = x^2 + 1, x \geq 0$ [9.1] **b)** 

6. $\{x | x > 0\}$ [9.3] **7.** −4 [9.4] **8.** 

[9.2] **9.** 

[9.3] **10.** $\log_2 \frac{1}{32} = -5$ [9.4] **11.** $5^3 = 125$ [9.3]

12. $2^x = x + 3, 13$ [9.3] **13.** $64^y = 16, \frac{2}{3}$ [9.3]

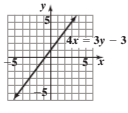
14. $3 \log_2 x + \log_2 (x - 4) - \log_2 (x + 2)$ [9.4]

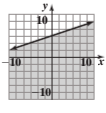
15. $\log_6 \frac{(x - 4)^7 (x + 3)^2}{\sqrt{x}}$ [9.4] **16.** 5 [9.4] **17. a)** 3.6646 **b)** −2.6708 [9.5] **18.** ≈2.68 [9.6] **19.** 3 [9.6] **20.** $\frac{17}{5}$ [9.6]

21. 16.2810 [9.7] **22.** 2.0588 [9.7] **23.** 30.5430 [9.7] **24.** ≈$5 211.02 [9.7] **25.** ≈3 364.86 años de antigüedad [9.7]

Examen de repaso acumulativo

1. $\frac{12xy^5}{z^4}$ [1.5] **2.** 40 [1.4] **3.** 7.5 % [2.3] **4.** $\left\{x \middle| 2 \leq x < \frac{15}{2}\right\}, \left[2, \frac{15}{2}\right)$ [2.5] **5.** $y = \frac{2x - 8}{3}$ [2.2]

6. 0 [3.2] **7.** $m = 2, y = 2x + 3$ [3.4] **8.** 

[3.4] **9.** 

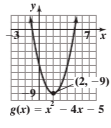
[3.7] **10.** (10, 24) [4.1]

11. $x^2 + 2x + 3 + \frac{6}{x + 1}$ [5.3]

12. $(x - y + 8)(x - y - 8)$ [5.6]

13. 1, −2 [8.1] **14.** −3 [6.4]

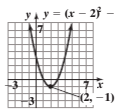
15. $d = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$ [6.4] **16.** 6.25 [6.6]

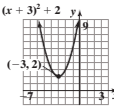
17. $(12x + 1)\sqrt{5x}$ [7.4] **18.** 8 [7.6] **19.** $0, \pm\sqrt{7}$ [8.4] **20. a)** $g(x) = (x - 2)^2 - 9$ **b)** 

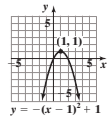
[8.5]

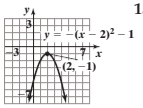
Capítulo 10

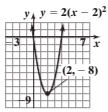
Serie de ejercicios 10.1

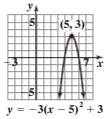
1. Punto medio **3.** Parábola **5.** (h, k) **7.** 

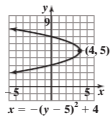
9. $y = (x + 3)^2 + 2$ 

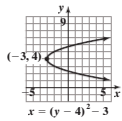
11. 

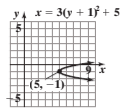
13. 

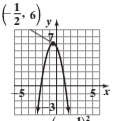
15. 

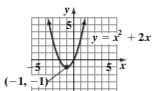
17. 

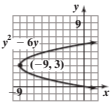
19. 

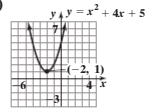
21. 

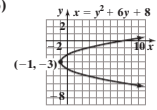
23. 

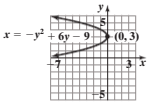
25. $\left(-\frac{1}{2}, 6\right)$ 

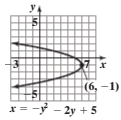
27. a) $y = (x + 1)^2 - 1$ **b)** 

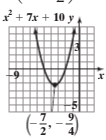
29. a) $x = (y - 3)^2 - 9$ **b)** 

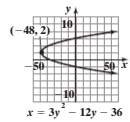
31. a) $y = (x + 2)^2 + 1$ **b)** 

33. a) $x = (y + 3)^2 - 1$ **b)** 

35. a) $x = -(y - 3)^2$ **b)** 

37. a) $x = -(y + 1)^2 + 6$ **b)** 

39. a) $y = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ **b)** 

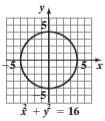
41. a) $x = 3(y - 2)^2 - 48$ **b)** 

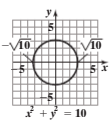
43. 5 **45.** 13 **47.** $3\sqrt{10} \approx 9.49$ **49.** $\frac{5\sqrt{5}}{2} \approx 5.59$ **51.** $\sqrt{34.33} \approx 5.86$ **53.** $\sqrt{10} \approx 3.16$ **55.** $(3, 5)$

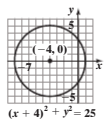
57. $(-2, -6)$ **59.** $\left(\frac{3}{2}, 5\right)$ **61.** $\left(\frac{5}{2}, -\frac{7}{4}\right)$ **63.** $\left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}, \frac{7}{2}\right)$ **65.** $x^2 + y^2 = 25$ **67.** $(x - 2)^2 + y^2 = 64$

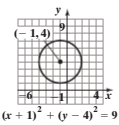
69. $x^2 + (y + 6)^2 = 100$ **71.** $(x - 7)^2 + (y + 6)^2 = 144$ **73.** $(x + 6)^2 + (y + 5)^2 = 121$

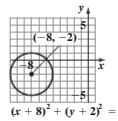
75. $(x + 7)^2 + (y + 2)^2 = 13$ **77.** $x^2 + y^2 = 16$ **79.** $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$

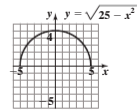
81. 

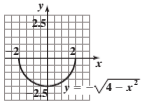
83. 

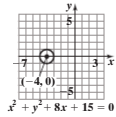
85. 

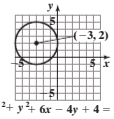
87. 

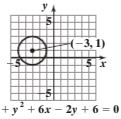
89. 

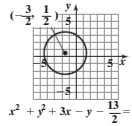
91. 

93. 

95. a) $(x + 4)^2 + y^2 = 1^2$ **b)** 

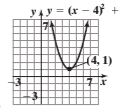
97. a) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$ **b)** 

99. a) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$ **b)** 

101. a) $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 3^2$ **b)** 

103. $25\pi \approx 78.5$ unidades cuadradas **105.** intersección con el eje de las x: $(-7, 0)$, intersecciones con el eje de las y: $(0, -1)$, $(0, 7)$
107. Intersección con el eje de las x: $(24, 0)$, sin intersecciones con el eje de las y **109.** 10 **111.** $(x + 6)^2 + (y - 2)^2 = 4$ **113. a)** $2\sqrt{2}$ **b)** $(7, 6)$ **c)** $(x - 7)^2 + (y - 6)^2 = 8$ **115.** 4, 0; una parábola que abre hacia arriba o hacia abajo, y una parábola que abre hacia la derecha o la izquierda, puede dibujarse para que tenga un máximo de 4 intersecciones, o un mínimo de 0 intersecciones **117. a)** 13.6 pies **b)** 81.8 pies **c)** $x^2 + (y - 81.8)^2 = 4\,651.24$ **119. a)** $x^2 + y^2 = 16$ **b)** $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ **c)** $(x + 2)^2 + y^2 = 4$ **d)** 8π unidades cuadradas
121. 48π unidades cuadradas **123.** No **125.** Sí; D: $\mathbb{R}$, R: $\{y | y \geq k\}$ **127.** Mismo vértice; la primera gráfica abre hacia arriba y la segunda abre hacia abajo

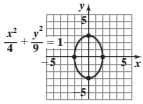
129. No **131.** No **133.** No **136.** $\frac{y}{3x}$ **137.** $(0, 7)$ **138.** 128 **139. a)** 1. a^2, 2. ab, 3. ab, 4. b^2 **b)** $(a + b)^2$ **140.**



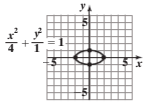
Serie de ejercicios 10.2

1. $(0, 0)$ **3.** Elipse **5.** intersecciones con el eje de las x **7.** Mayor **9.** Dividir

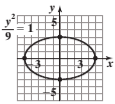
11.



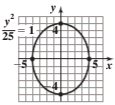
13.



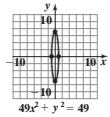
15.



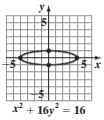
17.



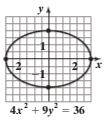
19.



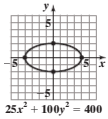
21.



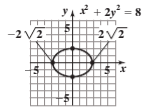
23.



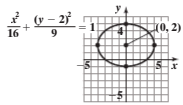
25.



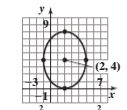
27.



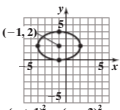
29.



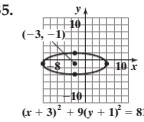
31.



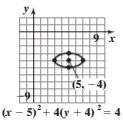
33.



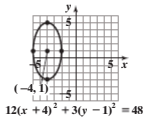
35.



37.



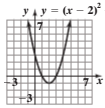
39.



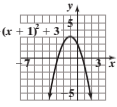
41. a) $6\pi \approx 18.85$ unidades cuadradas **b)** $2\pi \approx 6.28$ unidades cuadradas **43. a)** $7\pi \approx 21.99$ unidades cuadradas **b)** $4\pi \approx 12.57$ unidades cuadradas **45.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ **47.** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ **49.** $\frac{(x+3)^2}{36} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$; $(-3, -2)$ **51.** 69.5 pies **53. a)** $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{576} = 1$ **b)** $240\pi \approx 753.98$ pies cuadrados **c)** $\approx$376.99 pies cuadrados **55.** Las respuestas variarán **57.** $\sqrt{5} \approx 2.24$ pies, en ambas direcciones, desde el centro de la elipse, a lo largo del eje mayor **59.** Las respuestas variarán **61.** Si $a = b$, se obtiene la fórmula para una circunferencia **63.** No **65.** Se vuelve más circular. Cuando $a = b$, la gráfica es una circunferencia **67.** 2 **69.** $\frac{(x-4)^2}{49} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ **71.** $l = \frac{2S - nf}{n}$ **72.** $x + \frac{5}{2} + \frac{1}{2(2x-3)}$ **73.** 6 **74.** $\left[-\frac{5}{3}, 4\right)$ **75.** $\approx$2.7755

Examen de mitad de capítulo

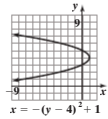
1.



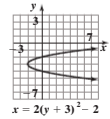
[10.1] **2.**



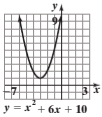
[10.1] **3.**



[10.1] **4.**

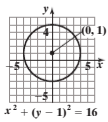


[10.1] **5.**

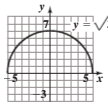


[10.1] **6.** 13 [10.1] **7.** $\sqrt{153} \approx 12.37$ [10.1] **8.** $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$ [10.1] **9.** $\left(\frac{11}{4}, \frac{15}{4}\right)$ [10.1] **10.** $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$ [10.1]

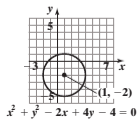
11.



[10.1] **12.**

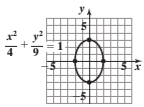


[10.1] **13.**

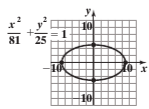


[10.1] **14.** una circunferencia es un conjunto de puntos en un plano que están a la misma distancia, desde un punto fijo llamado centro. [10.1]

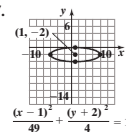
15.



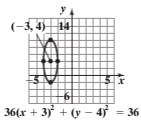
[10.2] **16.**



[10.2] **17.**



[10.2] **18.**

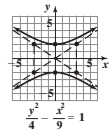


[10.2]

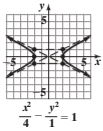
19. $6\pi \approx 18.85$ unidades cuadradas [10.2] **20.** $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1$ [10.2]

Serie de ejercicios 10.3

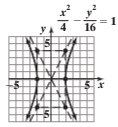
1. Hipérbola **3.** Centro **5.** Transversal **7.** y **9.** Dividir **11. a)** $y = \pm\frac{2}{3}x$ **b)**



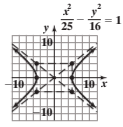
13. a) $y = \pm\frac{1}{2}x$ **b)**



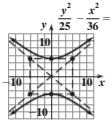
15. a) $y = \pm 2x$ **b)**



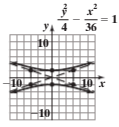
17. a) $y = \pm\frac{4}{5}x$ **b)**



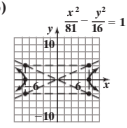
19. a) $y = \pm\frac{5}{6}x$ **b)**



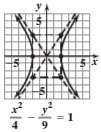
21. a) $y = \pm\frac{1}{3}x$ **b)**



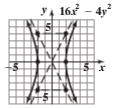
23. a) $y = \pm\frac{4}{9}x$ **b)**



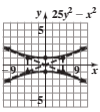
25. a) $y = \pm\frac{3}{2}x$ **b)**



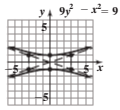
27. a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1; y = \pm 2x$ **b)**



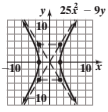
29. a) $\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{25} = 1, y = \pm\frac{1}{5}x$ **b)**



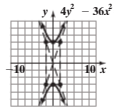
31. a) $\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{9} = 1, y = \pm\frac{1}{3}x$ **b)**



33. a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1, y = \pm\frac{5}{3}x$ **b)**



35. a) $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{4} = 1, y = \pm 3x$ **b)**



37. Circunferencia **39.** Parábola **41.** Elipse

43. Hipérbola **45.** Elipse **47.** Hipérbola **49.** Circunferencia **51.** Parábola **53.** Parábola **55.** Circunferencia **57.** Hipérbola **59.** Elipse

61. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$ **63.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ **65.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$, no, $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{50} = 1$ y otras funcionarán. La razón de $\frac{b}{a}$ debe ser $\frac{5}{3}$.

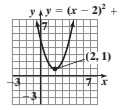
67. D: $(-\infty, -5] \cup [5, \infty)$; R: $\mathbb{R}$ **69.** Las respuestas variarán **71.** No, las gráficas de las hipérbolas de esta forma, no pasan la prueba de la recta vertical **73.** Los ejes transversales de ambas gráficas, están a lo largo del eje x. Los vértices de la segunda gráfica, estarán más cerca del origen, y la segunda gráfica abrirá más ancha **75.** Es una hipérbola con vértices en $(a, 0)$ y $(-a, 0)$. El eje transversal está a lo largo del eje x. Las asíntotas son $y = \pm\frac{b}{a}x$. **77.** No **79.** Sí **81.** $y = -\frac{1}{2}x + 1$ **82.** $-x^2 - x + 11$ **83.** $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$ **84.** $\frac{3x + 2}{2x - 3}$ **85.** $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ **86.** 1

Serie de ejercicios 10.4

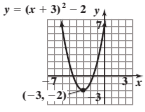
1. No lineal **3.** Adición **5.** 3 **7.** $(3, -3), (-3, 3)$ **9.** $(2, 1), (1, -2)$ **11.** $(2, 1), (2, -1)$ **13.** $(-2, 0)$ **15.** $(3, 8), (-3, 8)$ **17.** Sin solución real **19.** $(0, -13), (5, 12), (-5, 12)$ **21.** $(4, -3), (-4, -3), (\sqrt{21}, 2), (-\sqrt{21}, 2)$ **23.** $(2, 0), (-2, 0)$ **25.** $(4, 3), (4, -3), (-4, 3), (-4, -3)$ **27.** $(3, 0), (-3, 0)$ **29.** $(2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1)$ **31.** $(3, 4), (3, -4), (-3, 4), (-3, -4)$ **33.** $(1, 2), (1, -2), (-1, 2), (-1, -2)$ **35.** $(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ **37.** $(\sqrt{5}, 2), (\sqrt{5}, -2), (-\sqrt{5}, 2), (-\sqrt{5}, -2)$ **39.** Sin solución real **41.** 20 metros por 25 metros **43.** 10 pies por 17 pies **45.** largo: 14 centímetros, ancho: 8 centímetros **47.** 16 pulgadas por 30 pulgadas **49.** ≈ 1.67 segundos **51.** $r = 6\%, p = \$125$ **53.** ≈ 16 and ≈ 184 **55.** ≈ 5 and ≈ 95 **57.** $(-1, -3), (3.12, -0.53)$ **59.** 59. Las respuestas variarán **61.** Sí, por ejemplo **63.** Sí, por ejemplo **65.** 10 yardas, 24 yardas **67.** Paréntesis, exponentes, multiplicación o división, suma o resta **68.** $(x + 2)(x^2 + x + 1)$ **69.** 0.9 **70.** $\frac{5\sqrt{x + 2} + 15}{x - 7}$ **71.** $k = \frac{\ln A - \ln A_0}{t}$

Capítulo 10 Ejercicios de repaso

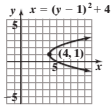
1. $13; \left(\frac{5}{2}, -6\right)$ **2.** $5; \left(-\frac{5}{2}, 3\right)$ **3.** $17; \left(-5, \frac{5}{2}\right)$ **4.** $\sqrt{8} \approx 2.83; (-3, 4)$ **5.**



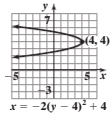
6.



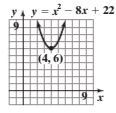
7.



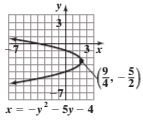
8.



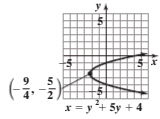
9. a) $y = (x - 4)^2 + 6$ **b)**



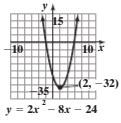
10. a) $x = -\left(y + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$ **b)**



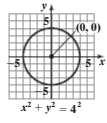
11. a) $x = \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ **b)**



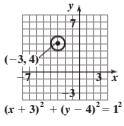
12. a) $y = 2(x - 2)^2 - 32$ **b)**



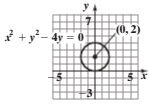
13. a) $x^2 + y^2 = 4^2$ **b)**



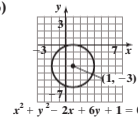
14. a) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 1^2$ **b)**



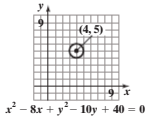
15. a) $x^2 + (y - 2)^2 = 2^2$ **b)**



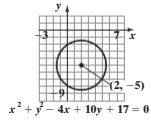
16. a) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 3^2$ **b)**



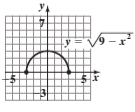
17. a) $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 1^2$ **b)**



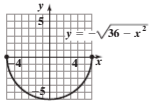
18. a) $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = (\sqrt{12})^2$ **b)**



19.

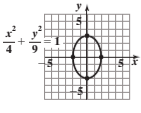


20.

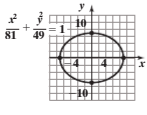


21. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ **22.** $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 9$

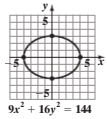
23.



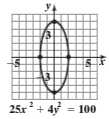
24.



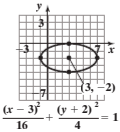
25.



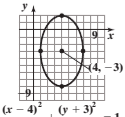
26.



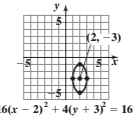
27.



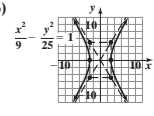
28.

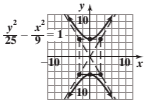


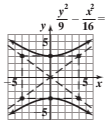
29.

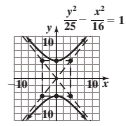


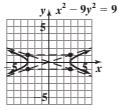
30. $6\pi \approx 18.85$ unidades cuadradas **31. a)** $y = \pm\frac{5}{3}x$ **b)**

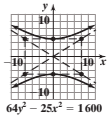


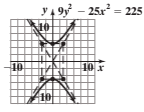
32. **a)** $y = \pm\frac{5}{3}x$ **b)** 

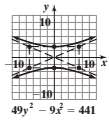
33. **a)** $y = \pm\frac{3}{4}x$ **b)** 

34. **a)** $y = \pm\frac{5}{4}x$ **b)** 

35. **a)** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = 1$ **b)** $y = \pm\frac{1}{3}x$ **c)** 

36. **a)** $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{64} = 1$ **b)** $y = \pm\frac{5}{8}x$ **c)** 

37. **a)** $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$ **b)** $y = \pm\frac{5}{3}x$ **c)** 

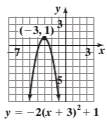
38. **a)** $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{49} = 1$ **b)** $y = \pm\frac{3}{7}x$ **c)** 

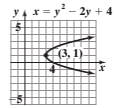
39. Hipérbola **40.** Elipse **41.** Circunferencia **42.** Hipérbola **43.** Elipse **44.** Parábola **45.** Elipse **46.** Parábola

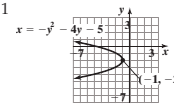
47. $(2, 2\sqrt{2}), (2, -2\sqrt{2}), (-2, 2\sqrt{2}), (-2, -2\sqrt{2})$ **48.** $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ **49.** $(3, 0), \left(-\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$ **50.** Sin solución real **51.** $(6, 0), (-6, 0)$

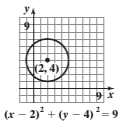
52. $(\sqrt{15}, 1), (-\sqrt{15}, 1), (\sqrt{15}, -1), (-\sqrt{15}, -1)$ **53.** Sin solución real **54.** $(1, 2\sqrt{2}), (1, -2\sqrt{2}), (-1, 2\sqrt{2}), (-1, -2\sqrt{2})$
55. 5 pies por 9 pies **56.** ≈ 4 y ≈ 145 **57.** $r = 3\,\%$, $p = \$4\,000$

Capítulo 10 Examen de práctica

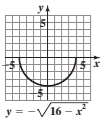
1. Se forman al cortar un cono o un par de conos. [10.1] **2.** $\sqrt{50} \approx 7.07$ [10.1]
3. $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$ [10.1] **4.** $(-3, 1)$, [10.1] 

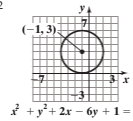
5. [10.1] 

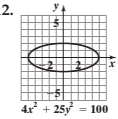
6. $x = -(y + 2)^2 - 1$ [10.1] 

7. $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 9$ [10.1] 

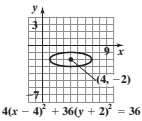
8. $9\pi \approx 28.27$ unidades cuadradas [10.1] **9.** $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 16$ [10.1]

10. 

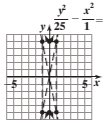
[10.1] **11.** $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 3^2$ [10.1] 

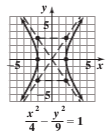
12. 

[10.2] **13.** No, el eje mayor debe estar a lo largo del eje y [10.2]

14. 

[10.2] **15.** $(8, -7)$ [10.2] **16.** El eje transversal, se encuentra a lo largo del eje que corresponde al término positivo de la ecuación en la forma general. [10.3]

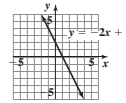
17. $y = \pm\frac{7}{4}x$ [10.3] **18.** 

[10.3] **19.** 

[10.3]

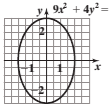
20. Hipérbola, divide ambos lados de la ecuación entre 30. [10.3]
21. Elipse, divide ambos lados de la ecuación entre 100. [10.3]
22. $(2, \sqrt{3}), (2, -\sqrt{3}), (-2, \sqrt{3}), (-2, -\sqrt{3})$ [10.4]
23. Sin solución real [10.4] **24.** 30 metros por 50 metros [10.4]
25. 5 pies por 12 pies [10.4]

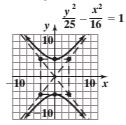
Examen de repaso acumulativo

1. $-27x^3y^9$ [1.5] **2.** $\frac{19}{4}$ [2.1] **3.** $\varnothing$ [2.1] **4.** $\left\{x \middle| x < -\frac{5}{3} \text{ o } x > 1\right\}$ [2.6] **5.**  [3.1]

6. 139 [3.2] **7.** (8, 6) [4.1] **8.** $(x^2 + 6)(x^2 - 7)$ [5.5] **9.** base: 14 pies, altura: 8 pies [5.8] **10.** $\frac{x - 4}{4x + 3}$ [6.1] **11.** $\frac{2x^2 - 9x - 5}{2(x + 3)(x - 4)}$ [6.2]

12. 2 [6.4] **13.** $\frac{3y^{3/2}}{x^{1/2}}$ [7.2] **14.** $\frac{6x + 6y\sqrt{x}}{x - y^2}$ [7.5] **15.** 3 [7.6] **16.** $\frac{2}{3} \pm \frac{i\sqrt{11}}{3}$ [8.2] **17.** 2 [9.6] **18.** ≈2.31 [9.7]

19.  [10.2]

20.  [10.3]

Capítulo 11

Serie de ejercicios 11.1

1. Sucesión **3.** Finita **5.** Menor **7.** Serie **9.** Superior **11.** 4, 5, 6, 7, 8 **13.** 3, 7, 11, 15, 19 **15.** $8, 2, \frac{8}{9}, \frac{1}{2}, \frac{8}{25}$

17. $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}$ **19.** −1, 1, −1, 1, −1 **21.** 4, −8, 16, −32, 64 **23.** 31 **25.** 12 **27.** 1 **29.** 27 **31.** $\frac{81}{25}$ **33.** 2, 15 **35.** 3, 17 **37.** $0, \frac{13}{20}$

39. −2, −6 **41.** $-2, -\frac{9}{4}$ **43.** 15, 17, 19 **45.** 32, 64, 128 **47.** $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$ **49.** $\frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}$ **51.** $\frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ **53.** $-\frac{6}{25}, \frac{7}{36}, -\frac{8}{49}$ **55.** $12, 3, \frac{3}{4}$

57. $2 + 5 + 8 + 11 + 14 = 40$ **59.** $2 + 5 + 10 + 17 + 26 + 37 = 97$ **61.** $\frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{9}{3} + \frac{16}{3} = \frac{30}{3} = 10$ **63.** $4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 39$

65. $\sum_{i=1}^{5}(i + 10)$ **67.** $\sum_{i=1}^{3}\frac{i^2}{4}$ **69.** 13 **71.** 169 **73.** 51 **75.** 25 **77.** ≈42.83 **79. a)** 6, 12, 18, 24 **b)** $p_n = 6n$ **81. a)** $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$

b) $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$ **c)** Sí **83.** $n = \frac{\sum x}{\bar{x}}$ **85.** Sí **87.** La enésima suma parcial de una serie, es la suma de los primeros n términos consecutivos de una serie **89.** Sucesión creciente **91.** Sí **93.** Las respuestas variarán **95.** Las respuestas variarán **96.** $\frac{2}{5}$

97. $8\left(y - 2x^2\right)\left(y^2 + 2x^2y + 4x^4\right)$ **98.** 11 **99.** $r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$

Serie de ejercicios 11.2

1. Aritmética **3.** d **5.** Positivo **7.** 6, 10, 14, 18, 22 **9.** 5, 2, −1, −4, −7 **11.** 4, 7, 10, 13, 16; $a_n = 3n + 1$

13. 7, 5, 3, 1, −1; $a_n = -2n + 9$ **15.** −7, −9, −11, −13, −15; $a_n = -2n - 5$ **17.** $\frac{1}{2}, 2, \frac{7}{2}, 5, \frac{13}{2}$; $a_n = \frac{3}{2}n - 1$ **19.** 157 **21.** −204

23. 6 **25.** 2 **27.** 9 **29.** 6 **31.** $s_{10} = 100, d = 2$ **33.** $s_{11} = -242, d = -3$ **35.** $s_6 = 25.5, d = 3.7$ **37.** $s_5 = 5, d = \frac{4}{5}$

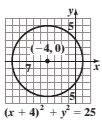
39. 4, 7, 10, 13; $a_{10} = 31, s_{10} = 175$ **41.** −6, −4, −2, 0; $a_{10} = 12, s_{10} = 30$ **43.** −8, −13, −18, −23; $a_{10} = -53, s_{10} = -305$

45. 100, 93, 86, 79; $a_{10} = 37, s_{10} = 685$ **47.** $\frac{7}{2}, 6, \frac{17}{2}, 11$; $a_{10} = 26, s_{10} = 147.5$ **49.** $n = 15, s_{15} = 330$ **51.** $n = 11, s_{11} = 121$

53. $n = 17, s_{17} = \frac{153}{2}$ **55.** $n = 29, s_{29} = 1421$ **57.** 1275 **59.** 2500 **61.** 1395 **63.** 10100 **65.** 267 **67.** 42; 372 **69.** 351

71. a) 27 **b)** 196 **73.** $101 \cdot 50 = 5050$ **75.** $s_n = n^2$ **77. a)** 19 pies **b)** 143.5 pies **79.** 2 pies **81. a)** 155 **b)** 780 **83.** $496

85. a) $45600 **b)** $438000 **87.** $a_n = 180°(n - 2)$ **89.** Sí **91.** Sí **99.** $r = \frac{A - P}{Pt}$ **100.** $(-3, -5)$ **101.** $3(2n - 5)(2n - 1)$

102. 

Serie de ejercicios 11.3

1. Geométrica **3.** r **5.** Término **7.** Suma **9.** 1 **11.** 2, 10, 50, 250, 1250 **13.** 7, −14, 28, −56, 112

15. −1, −3, −9, −27, −81 **17.** 5, −5, 5, −5, 5 **19.** $72, 24, 8, \frac{8}{3}, \frac{8}{9}$ **21.** $90, -30, 10, -\frac{10}{3}, \frac{10}{9}$ **23.** $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \frac{1}{48}$ **25.** $\frac{5}{16}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{20}, -\frac{1}{50}, \frac{1}{125}$

27. 128 **29.** 3645 **31.** 6144 **33.** $\frac{1}{64}$ **35.** $-\frac{512}{2187}$ **37.** 64 **39.** 155 **41.** −140 **43.** 0 **45.** $\frac{19531}{3}$ **47.** $-\frac{2565}{256}$

49. $r = 2, a_n = 9(2)^{n-1}$ **51.** $r = -3, a_n = 2(-3)^{n-1}$ **53.** $r = -\frac{1}{4}, a_n = -5\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ **55.** $r = \frac{2}{3}, a_n = \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ **57.** 2 **59.** $\frac{5}{6}$

61. $\frac{25}{3}$ **63.** -1 **65.** 5 **67.** 6 **69.** 12 **71.** 4 **73.** -45 **75.** $\frac{9}{2}$ **77.** $\frac{7}{9}$ **79.** $\frac{8}{33}$ **81.** $\frac{125}{333}$ **83.** $r = 3, a_1 = 5$ **85.** $r = 2$ o $r = -2, a_1 = 7$ **87.** ≈\$1.77 **89. a)** 50 gramos **b)** 9 días **91. a)** 64 000 bacterias **b)** 11 horas **93.** ≈\$18 414.29 **95. a)** $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ **b)** $a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ **c)** $\frac{1}{128} \approx 0.78\%$ **97.** ≈\$15 938.48 **99. a)** 28.512 pies **b)** 550 pies **101. a)** 10.29 pulgadas **b)** 100 pulgadas **103.** 211 **105.** 190 pies **107.** 50 pies **109.** 0 **111.** Sí **113.** Sí, $s_\infty = 8$ **115.** $n = 21, s_{21} = 2\,097\,151$ **116.** 12 **117.** $6x^3 - x^2y - 16xy^2 + 6y^3$ **118.** $r = \frac{S - 2a}{S}$ **119.** $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 9}$ **120.** 5 **121.** 9 metros, 12 metros

Examen de mitad de capítulo

1. 4, 1, −2, −5, −8 [11.1] **2.** 91 [11.1] **3.** 1, 11 [11.1] **4.** −15, −19, −23 [11.1] **5.** 45 [11.1] **6.** $\sum_{i=1}^{5}\left(\frac{1}{4}i + 9\right)$ [11.1] **7.** −6, −1, 4, 9; $a_n = -11 + 5n$ [11.2] **8.** −1 [11.2] **9.** 6 [11.2] **10.** 3, −3 [11.2] **11.** $47\frac{1}{2}$ [11.2] **12.** 12 [11.2] **13.** 136 [11.2] **14.** 100, −50, 25, $-\frac{25}{2}, \frac{25}{4}$ [11.3] **15.** $\frac{1}{27}$ [11.3] **16.** 315 [11.3] **17.** $-\frac{2}{3}$ [11.3] **18.** 18 [11.3] **19.** $\frac{29}{33}$ [11.3]

20. a) Una sucesión, es una lista de números ordenados en un orden específico **b)** Una sucesión aritmética, es una sucesión donde los términos consecutivos difieren por una cantidad constante **c)** Una sucesión geométrica, es una sucesión donde los términos consecutivos difieren por un múltiplo común **d)** Una serie, es la suma de los términos de una sucesión [11.1–11.3]

Serie de ejercicios 11.4

1. Factorial **3.** 1 **5.** 20 **7.** 10 **9.** 10 **11.** 70 **13.** 35 **15.** 126 **17.** 66 **19. a)** 1 **b)** 10 **c)** 10 **d)** 1 **21.** $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ **23.** $x^3 - 15x^2 + 75x - 125$ **25.** $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$ **27.** $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ **29.** $243a^5 - 405a^4b + 270a^3b^2 - 90a^2b^3 + 15ab^4 - b^5$ **31.** $\frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{27}{2}x^2 - 54x + 81$ **33.** $x^9 + 45x^8 + 900x^7 + 10\,500x^6$ **35.** $2\,187x^7 - 5\,103x^6y + 5\,103x^5y^2 - 2\,835x^4y^3$ **37.** $x^{16} - 24x^{14}y + 252x^{12}y^2 - 1\,512x^{10}y^3$ **39.** $x^8, 24x^7, 17\,496x, 6\,561$ **41.** $64x^6, 960x^5, 37\,500x, 15\,625$ **43.** Sí, $4! = 4 \cdot 3!$ **45.** Sí, $(7-3)! = (7-3)(7-4)(7-5)! = 4 \cdot 3 \cdot 2!$ **47.** $m = n$ o $m = 0$ **49.** $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$ **51.** $(0, 10)$ **52.** $(10, 4)$ **53.** 2, 9 **54.** $2x^3y^5\sqrt{30y}$ **55.** $f^{-1}(x) = \frac{x-8}{3}$

Capítulo 11 Ejercicios de repaso

1. 6, 7, 8, 9, 10 **2.** −1, 3, 9, 17, 27 **3.** 12, 6, 4, 3, $\frac{12}{5}$ **4.** $\frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{9}{7}, 2, \frac{25}{9}$ **5.** 11 **6.** 6 **7.** $\frac{26}{81}$ **8.** 88 **9.** $s_1 = 7, s_3 = 27$ **10.** $s_1 = 12, s_3 = 47$ **11.** $s_1 = \frac{4}{3}, s_3 = \frac{227}{60}$ **12.** $s_1 = -9, s_3 = -10$ **13.** 32, 64, 128; $a_n = 2^n$ **14.** $\frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \frac{1}{64}; a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ **15.** $\frac{16}{9}, \frac{32}{9}, \frac{64}{9}; a_n = \frac{2^n - 1}{9}$ **16.** −3, −7, −11; $a_n = 17 - 4n$ **17.** $11 + 14 + 19 = 44$ **18.** $6 + 14 + 24 + 36 = 80$ **19.** $\frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{9}{6} + \frac{16}{6} + \frac{25}{6} = \frac{55}{6}$ **20.** $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{163}{60}$ **21.** 29 **22.** 239 **23.** 132 **24.** 841 **25. a)** 10, 14, 18, 22 **b)** $p_n = 4n + 6$ **26. a)** 4, 10, 18, 28 **b)** $a_n = n(n+3) = n^2 + 3n$ **27.** 5, 8, 11, 14, 17 **28.** $5, \frac{14}{3}, \frac{13}{3}, 4, \frac{11}{3}$ **29.** $\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}, -\frac{11}{2}, -\frac{15}{2}$ **30.** $-20, -\frac{99}{5}, -\frac{98}{5}, -\frac{97}{5}, -\frac{96}{5}$ **31.** 30 **32.** −5 **33.** $\frac{1}{2}$ **34.** 6 **35.** $s_8 = 112, d = 2$ **36.** $s_7 = -140, d = -6$ **37.** $s_6 = \frac{48}{5}, d = \frac{2}{5}$ **38.** $s_9 = -42, d = -\frac{1}{3}$ **39.** $-7, -3, 1, 5; a_{10} = 29, s_{10} = 110$ **40.** $8, 5, 2, -1; a_{10} = -19, s_{10} = -55$ **41.** $\frac{5}{6}, \frac{3}{2}, \frac{13}{6}, \frac{17}{6}; a_{10} = \frac{41}{6}, s_{10} = \frac{115}{3}$ **42.** $-60, -55, -50, -45; a_{10} = -15, s_{10} = -375$ **43.** $n = 13, s_{13} = 442$ **44.** $n = 8, s_8 = 28$ **45.** $n = 11, s_{11} = \frac{231}{10}$ **46.** $n = 10, s_{10} = 180$ **47.** 6, 12, 24, 48, 96 **48.** $-28, -14, -7, -\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}$ **49.** $20, -\frac{40}{3}, \frac{80}{9}, -\frac{160}{27}, \frac{320}{81}$ **50.** $-20, -4, -\frac{4}{5}, -\frac{4}{25}, -\frac{4}{125}$ **51.** $\frac{4}{27}$ **52.** 480 **53.** 216 **54.** $\frac{4}{243}$ **55.** 441 **56.** $-\frac{4\,305}{64}$ **57.** $\frac{585}{8}$ **58.** $\frac{127}{8}$ **59.** $r = 2; a_n = 6(2)^{n-1}$ **60.** $r = 5, a_n = -6(5)^{n-1}$ **61.** $r = \frac{1}{3}, a_n = 10\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ **62.** $r = \frac{2}{3}, a_n = \frac{9}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ **63.** 10 **64.** $\frac{49}{10}$ **65.** −6 **66.** −18 **67.** 32 **68.** $\frac{33}{2}$ **69.** $\frac{25}{6}$ **70.** −12 **71.** $\frac{4}{11}$ **72.** $\frac{29}{37}$ **73.** $81x^4 + 108x^3y + 54x^2y^2 + 12xy^3 + y^4$ **74.** $8x^3 - 36x^2y^2 + 54xy^4 - 27y^6$ **75.** $x^9 - 18x^8y + 144x^7y^2 - 672x^6y^3$ **76.** $256a^{16} + 3\,072a^{14}b + 16\,128a^{12}b^2 + 48\,384a^{10}b^3$ **77.** 15 050 **78.** 231 **79. a)** \$36 000, \$37 000, \$38 000, \$39 000 **b)** $a_n = \$35\,000 + 1\,000n$ **c)** \$41 000 **d)** \$451 000 **80.** \$51 200 **81. a)** ≈\$2 024.51 **b)** ≈2 463.13 **c)** ≈\$24 041.29 **82.** ≈\$503.63 **83.** 150 pies

Capítulo 11 Examen de práctica

1. Una serie, es la suma de los términos de una sucesión [11.1] **2. a)** Una sucesión aritmética, es aquella que cuyos términos consecutivos difieren por una cantidad constante **b)** Una sucesión geométrica, es aquella que cuyos términos consecutivos difieren por un múltiplo común [11.2–11.3] **3.** $-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{9}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}$ [11.1] **4.** $s_1 = 3, s_3 = \frac{181}{36}$ [11.1] **5.** $5 + 11 + 21 + 35 + 53 = 125$ [11.1] **6.** 184 [11.1] **7.** $a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}(n-1) = \frac{1}{3}n$ [11.1] **8.** $a_n = 5(2)^{n-1}$ [11.3] **9.** 15, 9, 3, −3 [11.2] **10.** $\frac{5}{12}, \frac{5}{18}, \frac{5}{27}, \frac{10}{81}$ [11.3] **11.** −40 [11.2]

12. -20 [11.2] **13.** 12 [11.2] **14.** $\frac{256}{243}$ [11.3] **15.** $\frac{39\,063}{5}$ [11.3] **16.** $r = \frac{1}{3}$, $a_n = 15\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ [11.3] **17.** 12 [11.3] **18.** $\frac{13}{33}$ [11.3]

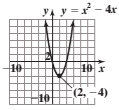
19. 56 [11.4] **20.** $x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 + 32xy^3 + 16y^4$ [11.4] **21.** 82 [11.2] **22.** 91 [11.2] **23.** \$210 000 [11.2] **24.** $\approx$\$851.66 [11.3]
25. 364 500 [11.3]

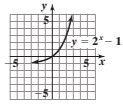
Examen de repaso acumulativo

1. $b = \frac{2A}{h}$ [2.2] **2.** $y = -\frac{11}{3}x + \frac{38}{3}$ [3.5] **3.** Número infinito de soluciones [4.2]

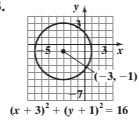
4. $5x^4 + 29x^3 + 14x^2 - 28x + 10$ [5.2] **5.** $(x - 6)(x^2 + 2)$ [5.4] **6.** $(a + b + 4)^2$ [5.5] **7.** $\frac{5x^2 + 14x - 49}{(x + 5)(x - 2)}$ [6.2]

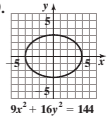
8. 500 [6.6] **9.** 3 [7.6] **10.** 5 [7.6] **11.** $-1 \pm i\sqrt{14}$ [8.1] **12.** $\frac{3 \pm \sqrt{309}}{30}$ [8.2]

13. 5 [5.8] **14.** 

[8.5] **15.** $\frac{1}{2}$ [9.3] **16.** 

[9.2] **17.** $(x + 6)^2 + (y - 2)^2 = 49$ [10.1]

18. 

[10.1] **19.** 

[10.2]

20. 18 [11.3]

Índice de aplicaciones

Agricultura

almacenamiento de granos, 432
arado de un campo, 108, 431
canastas de cerezas frente a número de árboles, 602
canastas de manzanas *vs* número de árboles, 226
cosecha de ejotes, 451
crecimiento de un árbol de secuoya, 599
dimensiones de un corral, 573-574
dimensiones de un jardín de vegetales, 708, 716
equipo agrícola, 744
fertilizante, 141, 261, 432
inspección de plantas en una granja de fresas, 428
longitud del alambre de sujeción de un árbol, 368
ordeña de vacas, 558
riego de cultivos, 432
tanque de leche, 432
vacas lecheras, 98
valor de cosecha de trigo, 598

Alimentos/nutrición

aceite de almendras, 261
aceite de romero, 110
aceitunas Gaetano, 107
cátsup, 98, 111
centro Pepsi, 252-253
contenido de azúcar en limonada, 260
contenido de fibra en fruta, 98
costo de naranjas, 159
costo de una hogaza de pan, 743
demanda por nuevos emparedados, 205
dulces en una pila piramidal, 731
galletas y leche, 260
golosinas en el estadio, 260
manzanas orgánicas, 263
mezclas de café, 110, 141, 261, 363, 517
mezcla de dulces, 110
mezcla de leche, 111, 261
mezclas de nueces, 110, 144, 266
muesli, 98
número naranjas en una pirámide, 170
pérdida de peso, 88
precios de alitas estilo Búfalo, 261
precios en un puesto de hot dogs, 260
receta de un postre, 262
salsas de rábanos, 110
soluciones de vinagre, 109
tartas hechas en casa, 77
tienda de nueces, 110
ventas de alimentos orgánicos, 39
volúmenes de recipientes de helado, 86

Ambiente

consumo de gas natural, 230
crecimiento de manatíes, 623
crecimiento de secuoyas, 599
crecimiento del águila calva, 623
expansión de círculos a partir de una piedra lanzada a un estanque, 615
nivel de agua durante inundación, 170
planta de tratamiento de agua, 432
presión atmosférica, 623, 671
rapidez de corriente de un río,433

Aviación

aeronave ultraligera, 434
área de un helipuerto, 86
edad de John Glenn cada vez que fue al espacio, 295
lanzamientos de cohetes, 435
millaje de *Voyager I*, 64
órbita de un satélite de comunicaciones, 691
rapidez de un avión en aire tranquilo, 429, 434, 472
rapidez de un avión y un automóvil que van en la misma dirección, 451
rapidez de vuelo en aire tranquilo, 558
rapidez de vuelo de un avión, 260, 294
rapidez de vuelo de un helicóptero, 435
rapidez y distancia del Transbordador Espacial, 141
reabastecimiento de combustible a mitad de vuelo, 111
tamaños de equipajes de mano, 125
velocidad de escape de una nave espacial, 506
velocidad de un cohete lanzado hacia arriba, 384

Clima

calentador eléctrico, 558
cambio de temperatura, 27
temperatura de un sauna, 169
temperatura del aire acondicionado, 169
temperatura en Escocia, 155
temperatura en Nueva York, 155
temperatura Fahrenheit y Celsius, 166, 169
temperatura promedio, 442
temperatura y facturas del agua, 444-445
temperaturas extremas, 22, 28

Computadoras/tecnología

costo de fotocopiador por página, 385
impresión de cheques, 431
pantalla de computadora, 557

Consumidores

compra de campamento, 98
costos de lavandería, 97
costos de un club deportivo, 143
cuenta de una cena, 100
doblado de ropa limpia, 558
duplicación de centavos por realizar labores domésticas, 619
precio regular de vestimenta, 97
precios de bicicletas, 100
programa de recompensas Staples, 100
seguro de vida, 272-228

Deportes/acondicionamiento físico

altura de un objeto lanzado/golpeado, 38, 81, 331-332, 544-545, 548, 571-572, 582, 583, 600, 601
altura de una bola que cae contra el tiempo, 226
altura de una herradura lanzada contra el tiempo, 548
altura sobre el nivel del mar contra el tiempo durante una caminata, 171
alturas de rebote de una pelota de ping-pong, 744
alturas de rebote en un salto en bungee, 744
anotaciones contra el tiempo, 443
béisbol en la Luna, 548
boletos de hockey de campo, 295
boletos de hockey sobre hielo, 295, 668
boletos de un juego de fútbol, 263
calorías quemadas durante la natación, 228
calorías quemadas durante el pedaleo, 199-200
calorías quemadas durante el uso de la caminadora, 205
caminar a través de un puente contra el tiempo, 435
caminar ascendiendo y descendiendo de colinas, 155
caminata en la playa, 109
caminata fuera del rango de los walkie-talkies, 108
campo de béisbol de las grandes ligas, 432
cancha de básquetbol, 86
colección de autógrafos de beisbolistas, 274
conteo de tiempo a la misma altura para una pelota de béisbol y un balón de fútbol, 708
conteo de tiempo para rebasar un objeto que se deja caer y un objeto arrojado, 708
correr a casa, 262

costo de comerciales en el súper tazón, 172
descuento en un equipo de palos golf, 143
dimensiones de la vela de un velero, 372, 708, 745
dimensiones de un salón de baile/gimnasio, 708
dimensiones de una pista de hielo, 336, 708
dimensiones de una tienda, 373
distancia de la segunda base al plato de home, 505
distancia de una carrera, 434
distancia desde el plato de home hasta lo alto de una pared, a lo largo de la línea de tercera base, 501
distancia entre botes de vela y un restaurante, 435
distancia pedaleada en bicicleta acuática, 429-430
distancia que recorre un bote a favor y contra la corriente, 433, 552
distancia recorrida por ciclistas, 373
elevado de béisbol, 87
esquí a campo traviesa, 252
finales de carreras de caballos, 318
golf en la Luna, 548
jaula de bateo, 98
lanzamiento de roca contra el tiempo y velocidad, 549
límite de peso de una canoa, 142, 220
longitudes de un alambre de una tienda, 373
longitud de un pase de fútbol, 434
membresía del club de golf, 97
membresía del club de salud, 143
membresía del club de tenis, 97, 99
nadar a través de un lago, 137
participar en carreras y el tiempo, 14-15, 444
paseo en bicicleta, 38
pelota de béisbol lanzada hacia arriba, 385
planes de membresía a centro de acondicionamiento físico, 142
precios en locales concesionados, 281
preparación de campo de béisbol de ligas pequeñas, 431
radio de una canasta de básquetbol, 506
rapideces de pedaleo, 108, 262, 435
rapidez de caminata frente al tiempo, 155-156
rapidez de caminata y carrera/trote frente al tiempo, 156, 162, 297, 338
rapidez de patinaje sobre ruedas, 430, 452
rapidez de pedaleo contra el tiempo, 156, 558
rapidez de remo de un equipo en aguas quietas, 260
rapidez de un kayak en aguas quietas, 253
rapidez de un paseo a caballo, 254-255, 434-435
rapidez de una carrera bote de vela, 435
rapidez de una canoa en aguas quietas, 599
rapidez para correr una carrera, 442
rapidez promedio de un automóvil carreras, 113
rapidez promedio de una caminata, 663
récords 400 metros planos, 230
renta de bicicletas, 125, 142
senderismo, 263
senderismo al fondo de un cañón, 109
tiempo necesario para perder peso, 142
tiempo para que una pelota de tenis golpee el suelo después del servicio, 445, 582
tiempo requerido para correr a casa, 103
tiempo y distancia de trote, 141, 262
tiro en elevación, 336
torneo de soccer, 261
ventas de boletos, 665
velocidad de una bola lanzada, 38

Diversos

altura de un objeto que se deja caer un tiempo después de soltarse, 305, 307, 544-545, 599
altura de una bala de cañón disparada hacia arriba, 65, 367
altura de una bengala disparada hacia arriba, 336
altura de una fuente de agua, 372-373
altura y ancho de escalones, 196
alturas de una bola que rebota, 732, 745
área superficial de un objeto, 536, 555
áreas, 83, 169, 290, 305, 314, 316-317, 328, 333, 335, 336, 344, 357-358, 362, 374, 381-383, 385, 395, 406, 440, 442, 451, 521, 523, 536, 559, 573, 599, 615
asientos en un auditorio, 731
aumento en el número de empaques para embarque, 732
balanceo en una liana, 732
barriles de petróleo en una pila piramidal, 757
bola que rueda por un plano inclinado, 307
capacidad de una cubeta, 87
circunferencias, 442
copas en una pila piramidal, 731
destinos vacacionales, 14
diagonales de cajas, 506, 554
dieta de un perro, 262
dimensiones de paquetes de UPS, 124
dimensiones de un señalamiento, 384, 716
dimensiones de una caja, 373
dimensiones de una región rectangular, 598, 708
distancia de un objeto en caída libre, 451, 506, 525
energía eólica, 621
focos y distancias de la recepción de una galería de arte, 691
focos y distancias de una galería susurrante, 692
fundido de una paleta de hielo, 451
lectores de periódicos, 39
límites de peso en un elevador, 125
llamadas telefónicas entre ciudades, 444
llenado de un tanque, 433
llenado de una bañera, 432
longitudes de los lados de un triángulo, 99, 536, 598
longitudes de un alambre de poste telefónico, 384,505
margen de error, 502
mediciones de ángulos, 94-95, 99, 102, 141, 260, 264, 274, 297, 329, 358, 733
mediciones de la abertura de una tienda de campaña, 367
mediciones de un área superficial y del lado de un billete, 708
mezclas de semillas para aves, 261, 296
páginas leídas en una hora y la rapidez, 442
perímetros, 82-83, 99, 102, 303, 362, 406, 437, 523
peso de pacas de heno, 117
pila de troncos, 758
poste de electricidad, 524
preferencias de sitios Web de noticias, 17
puente Golden Gate, 57
puente New River Gorge, 57
rapidez de impresión, 442
reducción de fotografía, 548
reunión para un día de campo, 453
seguridad social, 196, 227, 380
suma de números, 266, 296
tanques de medusas, 432
toneladas de papel usadas, 230
troncos en una pila piramidal, 731
valor de Manhattan, 662
valor de un violín Guarneri, 206
volúmenes, 169, 305, 317, 328, 335, 354, 356-357, 362, 373, 382, 383, 442, 444, 495, 525, 536

Educación

calificación general promedio, 557
calificaciones de examen, 99, 100, 385, 758
calificaciones globales, 216
calificaciones mínimas, 125
calificaciones promedio, 125, 126
calificaciones promedio de examen estandarizado, 645
carreras de caracoles, 109
concurso de escritura, 15
concurso de oratoria, 305-306
conformación por género de clases, 214
competencia de latín, 263
dimensiones de un patio de juegos, 557
empleo universitario, 214
equipo de matemáticas, 444
exámenes, 101, 122, 125, 127, 142

extensión de vocabulario, 194
matrícula universitaria, 216
premios otorgados a estudiantes, 317-318
promedio de examen, 100
retención de aprendizaje, 645, 671
selección de comité estudiantil, 306

Electrónica

audífonos, 97
calentador eléctrico en una habitación, 558
circuito eléctrico, 444, 665
costos de centro de copiado, 261
dimensiones de una pantalla, 557
excavar fosa para tendido de cable, 432
flujo de corriente, 264
ganancia de amplificador, 652
impedancia, 513,516
potencia de un electrodoméstico, 444, 452, 602
rapideces de fotocopiadoras, 109
recargos de compañía eléctrica, 451
resistencia de un alambre, 444
resistencia total, 418-419, 423
resistores, 412, 423, 450

Entretenimiento

acuario, 220
álbumes musicales de mayor venta, 263
alturas de rebote en salto en bungee, 744
área de tablero de dardos, 86
asistencia en un concierto, 98
boletos digitales para películas, 112
boletos para un concierto, 112, 264
carreras de caridad, 108
costo de boleto de concierto de rock, 170, 297
cuerda de guitarra, 443
dimensiones de mesa de billar, 715
dimensiones de rueda de la fortuna, 684
duplicación de fichas de póquer en pilas, 744
encuesta musical, 453
excursión en un parque, 434
Gold (película), 27
ingreso por obra teatral escolar, 205
insignias de lobatos, 15
obras musicales, 15-16
películas de mayor venta, 263
películas populares, 263
peticiones de canciones, 263
precios de boletos teatro, 281, 581-582, 600
productor discográfico, 274
rapidez de vías ferroviarias inclinadas, 435
tiempo de caída en lanzamiento de modelo de cohete, 373
tarifas de centro de boliche, 117
vuelo de globos, 108

Finanzas

acumulación de dinero, 616
beneficiarios de seguridad social, 227
bote de pesca y remolque, 260
cambio de divisas, 604
capitalización continua, 659, 662, 664, 671
cena en restaurante, 672
cuenta de cheques, 28
cuenta para el retiro, 214, 622, 662, 732, 758
cuentas de ahorros, 87, 144, 261, 295, 306, 536, 598, 622, 652, 672, 715, 739, 744
deuda pública estadounidense, 187
deuda pública por persona, 53
duplicación de centavos cada día, 50-51, 619
duplicación de dinero con el tiempo, 619, 622, 624, 732, 740-741, 745, 757
duración de un préstamo, 86
fondos de mercado de dinero, 101
impuesto sobre ventas, 92
impuestos estimados, 28
impuestos sobre la renta, 125, 178, 218
inflación, 307, 733, 743
interés compuesto, 87, 102, 80, 87, 138, 188, 317, 533, 616, 622, 624, 652, 664, 671
interés simple, 444
inversión, 86, 87, 102, 107, 110, 141, 142, 144, 261, 264, 423, 536, 624, 652, 62, 744
monto prestado a tasas de interés, 257-258
precios de acciones, 28
préstamo a interés simple, 79-80, 85, 107, 138, 226, 420, 709
préstamos libres de interés, 306, 336
refinanciamiento de préstamo empresarial, 99
refinanciamiento de una hipoteca, 99
rendimiento gravable equivalente, 423
saldo cartera inversiones, 88
tasa de interés simple, 85, 107, 169, 181, 453
tasa impositiva sobre una habitación de hotel, 98

Física/astronomía

aceleración promedio, 423
alambre de sujeción de una turbina eólica, 505
años-luz, 58
atenuación de la luz a través de aguas profundas, 744
calentamiento de un cubo metálico, 549
cohete de agua, 87
diámetro de la galaxia, 51
diámetros de los planetas, 645
días terrestres en un planeta, 506
distancia de la oscilación de un péndulo, 729, 732, 741, 745, 758
distancia entre la Tierra y el Sol, 56
distancia entre la Tierra y Proxima Centauri, 56
distancia vertical de una partícula en movimiento ondulatorio, 745
energía cinética, 524
espejo curvo, 424
excavación arqueológica, 432
experimento científico, 58
fuerza de atracción y masa, 446
fuerza y un resorte que se estira, 443
fuerzas sobre un automóvil, 506
fuerzas sobre una viga, 264
fundido de hielo dependiente de la temperatura, 439, 442, 451
intensidad de la luz, 439, 444, 445, 664
intensidad sonora, 652
longitud focal, 424, 425, 450
masa y pérdida de su volumen 743
óptica, 412, 419
órbita lunar, 56
órbita terrestre, 56
palancas, 420
péndulo, 745
periodo de un resorte contra la masa, 525
periodo del péndulo, 502, 505, 524
periodos planetarios, 424
peso de un objeto en la atmósfera terrestre, 443
presión atmosférica, 623, 671
presión bajo el nivel del mar, 445-446
presión del sonido, 645
presión y volumen, 443
rapidez de la luz contra la masa, 524
rapidez del sonido, 506
rapidez del viento y altura de onda, 462
razón de flujo del agua a través de una manguera de bomberos, 486
relación de la iluminación con la distancia, 439, 445, 495
resorte saltarín, 136
tasa de cambio promedio, 423
tripulación de un submarino, 263
velocidad, 38, 126, 524, 664
velocidad promedio, 423
viaje al Sol, 56

Geografía

altura sobre nivel del mar, 171
ancho de un lago, 137
área territorial, 64, 92-93, 144, 171, 260
aumento de población, 102, 141, 663
centenarios, 39, 623
ciudades más húmedas en Estados Unidos, 263
ciudades más nevadas, 263
densidad de población, 57, 77
distancia de una roca que cae, 444
movimiento ondulatorio en aguas poco profundas, 506
países más poblados, 15, 57
población de Estados Unidos, 56, 171
población de Hong Kong, 624

población de Massachusetts colonial, 172
población de Puerto Rico, 623
población de truchas en un lago, 663
población de un bachillerato, 189-190
población femenina, 228
población global, 215
profundidades de fosas marinas, 20
proyecciones de población, 65, 229, 307
rapidez de una corriente de agua, 253, 260, 433, 451
rapidez del viento y altura de la onda, 462
terremotos, 630, 632, 643-644, 645, 652

Hogar/decoración del hogar

acidez de agua en una piscina, 125-126
área de una habitación, 582
bombeo de agua de sótanos, 431, 552-553
desarrollo inmobiliario, 100
dimensiones de un librero, 100
dimensiones de un patio, 536
dimensiones de una alfombra, 384, 601
dimensiones de una caja de arena, 100
dimensiones de una cerca, 99
dimensiones de una mesa de billar, 715
dimensiones de una mesa de café, 372
dimensiones de una sala de estar, 598
dimensiones del marco de una pintura, 373
facturas de agua al consumidor, 444-445
facturas telefónicas, 216
lavado de una alfombra, 431
lavado de ventanas, 452
limpieza de una casa, 39
llenado de una bañera, 427
longitud de una escalera, 525
mesa de billar y ubicación de las bolas, 692
mezcla de un limpiador doméstico, 255
nivel del agua en una bañera, 171
paleado de nieve de un camino, 426-427
pasamanos de una escalera, 99
podar el césped, 433
precios de una lavadora y una secadora, 217
químicos para albercas, 111, 126
razón de flujo para llenar una piscina, 141-142
recolección de basura, 432
refinanciamiento de una hipoteca, 99
renta de una escalera, 102
tasas hipotecarias, 165-166
techar una casa, 433
tiempos de bombas de drenado, 111
tiempos en poda de césped, 112
volumen de concreto para entrada de automóviles, 86

Industria

bicicletas, 264
botes inflables, 258-259
cubetas plásticas, 309
ganancia, 181
grosor de vidrio, 135
grosor de madera contrachapada, 135
muebles, 264
plantas de seda, 373
producción de gaseosas, 104
sillas, 262
soluciones de tintura, 142
tiempo que utiliza una máquina moldeadora para completar un pedido, 309, 599

Jardinería

ancho de borde de mantillo, 372
área de cobertizo, 372
diagonal de un jardín de flores, 505
dimensiones de áreas cuadradas, 372, 384
dimensiones de un jardín de mariposas, 536
dimensiones de un jardín de vegetales, 708, 716
dimensiones de un jardín rectangular, 535, 548, 598, 705
dimensiones de un sendero, 372, 425
dimensiones de una cerca, 99-100
fertilizante, 141, 261, 432
fuentes de polen, 98
longitud de un alambre de sujeción de un árbol, 368
mezclas de semillas para aves, 296
paisajismo, 385
perímetro de un jardín, 99, 582
plantación de flores, 448, 451
remoción de hierbajos, 431
venta de alimentos orgánicos, 39

Medicina/salud

aceite de té, 105
centros de acondicionamiento físico, 94, 142
colesterol malo contra el bueno, 211-213
crecimiento bacteriano en cultivos, 471,616, 623, 639, 650, 652, 743 759
crecimiento bacteriano en el cuerpo humano, 671
diámetro de un virus, 51
disminución de tinte de contraste en el sistema, 744
dosis de medicamento, 437-438, 443
eritrocitos y leucocitos, 58
esperanza de vida, 206, 551-552
flujo sanguíneo a través de las arterias, 506
focos y distancias del litotriptor, 692
frecuencia cardiaca durante el ejercicio, 170, 195
frecuencia cardiaca ideal, 87
índice de masa corporal, 88
mezcla de medicamentos, 106
prescripción de medicamento, 663
solución de aceite de lavanda, 261
tasa metabólica en reposo, 471
virus y bacterias, 58
zona de calentamiento, 195

Negocios

aumento de salario mínimo, 98
casitas para pájaros, 39
carteras de diseñador, 205
comisión, 253-254
correo masivo codificado, 125
costo de campaña política, 63
costos de correo de primera clase preclasificado, 125
empaquetado de espagueti en cajas, 109
empleados de restaurante, 263
entrega de correo, 558
entrega de periódicos, 432
exportaciones a China, 194
fabricante de vestidos, 39
ganancia, 117-118, 125-126, 178, 181, 198, 226, 229, 306, 443, 550, 556, 582, 583, 601
ganancia anual, 300-301, 581
ganancias de primer año, 28
horario laboral, 431, 432
ingreso de Hazel City, 227
ingreso por ventas, 373, 543, 547, 581, 599, 601
ingresos por collares, 543
limpieza profunda de botes, 39
negocio de salsa, 77
presupuesto de publicidad, 440, 660, 662
producción de gaseosa, 104
Producto Interno Bruto, 58
reducciones de precio, 100, 220, 336-337, 525
removedor de manchas, 112
servicio de cambio de aceite, 170
servicio de limpieza, 558
venta de béisbol, 144
venta de electrónicos, 141
venta de liquidación, 141
ventas de música, 194
ventas para alcanzar el punto de equilibrio e ingresos, 706, 715

Niños

bebés dormilones, 77
circunferencia cefálica contra edad, 207
chapoteadero en un hotel, 538
dimensiones de caja de arena, 100
edades de dos niños a partir de la suma de sus edades, 294
estatura de niñas, 486
estaturas de los niños contra su edad, 663
insignias de lobatos, 15
longitudes de los niños contra su edad, 207
niños cuyos padres trabajan, 39
pesos de las niñas contra su edad, 663
pesos de las niñas contra estatura, 181
pesos de los niños contra edad, 207

premios otorgados a estudiantes, 317-318
suministro de carriolas, 205
suministro de cometas, 205
tablas de crecimiento, 126
ventas de galletas de niñas exploradoras, 98

Química

ácido, 594
acción de una molécula proteínica, 665
átomos en un diamante, 53-54
átomos en alambre de cobre, 57
datación con carbono, 471, 620, 622, 664, 672
datación radiométrica, 664
decaimiento radiactivo, 622, 652, 659, 662, 664
ingeniería química, 112
Ley de Charles, 83
mezclas de aleaciones de latón, 262
mezclas de aleaciones de plata, 262
moléculas en un grano de arena, 57
pH de soluciones, 646
radioisótopos, 664
solución de peróxido de hidrógeno, 110, 231, 264
solución salina, 144
soluciones ácidas, 294
soluciones de ácido sulfúrico, 110, 264, 296
soluciones de alcohol, 112

Salarios

aumento del salario mínimo, 98
bono, 264
ingreso, 215
ingresos del retiro, 228
paga de un mesero, 97
planes salariales, 242, 336
salario anual después de aumentos, 718, 725, 728, 732, 757
salario de un conferencista, 206
salario de un guardabosques, 196
salario más comisión, 141, 181, 253, 261
salario mensual después de aumentos, 757-758
salario mensual contra ventas, 179
salario semanal, 436, 759
salarios de un profesor, 195
técnico de turbina eólica, 728-729

Vehículos motorizados

auto sacado del fango, 373
cobros de estacionamiento, 125
construcción de un motor mientras se trabaja solo, 558
costos de jet ski y remolque, 260
depreciación de automóvil/maquinaria, 197, 652
dimensiones de una plataforma de carga, 716
distancia de detención en nieve, 535
distancia de frenado, 169
distancia de frenado en pavimento seco, 35, 169, 374, 444, 535
eficiencia de un gato automotriz, 412
llanta ponchada, 557
marcas de derrape y rapidez de vehículo, 486
millaje de gasolina, 206
octanaje, 110
parquímetros, 432
precio de un dispositivo GPS, 141
producción de vehículos, 164-165
rapidez de conducción contra el tiempo, 156, 442, 444, 558
rapidez de senderismo contra el tiempo, 108
rapidez de un vehículo, 111, 171
rapidez contra el tiempo, 226, 265
rapidez y distancia de un automóvil en una hora, 442
registro automotriz, 206
renta de un automóvil, 141
renta de un camión, 97, 101, 113, 158, 243, 261
solución anticongelante, 112, 113
temperatura de radiador, 557
valor de ATV, 622
valor de SUV, 622
valor de un jeep, 619-620
venta de go-carts, 403
volumen de fuga aceite, 599

Viaje/transportación

alcanzar, 109
bombeo de gas, 139
botes, 111-112
buceo submarino, 27-28, 135
carreras de resistencia en bicicletas, 109
conductores de un vehículo compartido, 40, 170
costos de operación de un taxi, 181
distancia a Calais, 112
distancia al trabajo, 112
distancia entre ciclistas, 143
distancia entre ciudades, 442
distancia entre trenes, 141
distancia recorrida contra el tiempo, 139, 171, 181, 599
forma triangular de tres caminos que intersecan y longitudes de lados, 709
góndola, 433
intercambio de divisas, 604
mediciones de un túnel, 684, 692, 693
motor de cacea, 100
Ocean City, 93
pase de autobús, 97
pasillo móvil, 433-434
paso por la interestatal, 108
peaje de un puente, 97
rapideces de automóviles que usan rutas diferentes, 435
rapideces de un tren y un automóvil que van en la misma dirección, 434, 558
rapidez de automóviles que van en direcciones opuestas, 144, 496, 646
rapidez de caminata sobre un pasillo móvil, 433
rapidez de manejo, 112, 262, 435, 557, 599, 601
rapidez de trenes que van en direcciones opuestas, 142
rapidez de trenes que van en la misma dirección, 197
rapidez de un automóvil y un tren, 434
rapidez de un tren contra el tiempo, 157
servicios de un vehículo compartido, 91
Sunshine Skyway, 98
tiempo requerido para que automóviles se encuentren, 108
tiempos de manejo, 112, 262
tiempos de vuelo, 153
tráfico de ferrocarril, 64
tráfico pesado, 435
viaje al trabajo, 262, 433
viaje en bote, 451
viaje en canoa, 448
vuelo de globos, 108

Vivienda/construcción

casas en venta, 215
cercado de una región rectangular, 548
chapoteadero en hotel, 536
conductores de camiones, 103
dimensiones de madera contrachapada, 708
resistencia de un tablero, 495
velocidad de un martinete, 462
viga de construcción, 441

Índice alfabético

A

Actitud positiva, 2
Agrupamiento, 333-334, 344-345
Álgebra
  aplicaciones del, 88-95
  de gráficas/graficar funciones, 208-213
  enunciados verbales en, 88-91
  problemas de movimiento en, 102-104
  problemas mixtos en, 105-108
  procedimientos adicionales para, 102-108
  procedimientos de resolución de problemas en, 91-95
Ángulos,
  complementarios, 94
  suplementarios, 95
Ansiedad por las matemáticas, 2
Aproximación
  de funciones logarítmicas naturales, 654-656
  de logaritmos comunes, 640-642
  de potencias de 10, 643-644
  definición, 10
Área, 760
  de círculos, 760
  de elipses, 689
  de trapezoides, 83
  fórmulas para, 760-761
  superficial, 761
Argumentos, 633
Asíntotas, 695

B

Base, 29
Base natural *e*, 653
Binomios
  coeficientes de, 748
  cuadrado de, 312-313
  definición, 299
  polinomios y, 310-311, 320-322, 332-333

C

Calculadora, aprende a usar, 5
Calculadora graficadora, 5
Calculadora TI-83 plus, 5
Calculadora TI-84 plus, 5
Cambio, razón de, 187
Catetos, 368
Centro, definición de, 679
Círculos
  área de, 760
  circunferencia de, 760
Circunferencia, 760
  definición, 679
  ecuación para, 679
  fórmula para, 760
  gráficas de, 679-681
Clase
  asistencia, 2-3
  preparación para, 2-3
Cocientes
  de funciones, 206
  de gráficas, 205-208
  exponentes, reglas para, 41
  radicales, regla para, 476-477
Coeficientes, 67
  binomiales, 748
  definición, 67
  principales, 299, 301
  matriz, 267
  numéricos, 67
Coeficiente principal, 299, 301
  negativo, 301
  positivo, 301
Completar los cuadrados, 530
  resolución de funciones cuadráticas mediante, 530-533
Conjugados, 489
  de números complejos, 512
  racionalización de denominadores usando, 489-491
Conjuntos, 6-12
  de enteros, 6
  de números, 10-12, 116
  definición, 6
  elementos de, 6
  finitos, 6
  identificación, 6-7
  infinitos, 6
  intersección de, 9-10
  nulos, 7, 116
  solución, 67, 115-118
  unión de, 9-10, 122
  vacíos, 7, 116
Constantes, 6, 68
  función, 178
  matriz, 267
  variación, 437
Construcción de modelos, 199-201
  forma pendiente-intersección con el eje de las *y* para, 189-190
Contradicciones, 73-74
Coordenadas
  x, 146
  y, 146
Coordenadas al origen
  intersección con el eje de las *x*, 174, 568
  intersección con el eje de las *y*, 174
  uso de funciones cuadráticas, 569-571
  uso de gráficas de, 174-177
Cuadrado
  completar el, 530
  matriz, 267
  perfecto, 472, 474, 529
Cuadrados
  completar el, 530-533
  de binomios, 312-314
  diferencia de ,350-351
  perfectos, 351-353, 472, 474, 529
Cuadrantes, 146
Cubos
  diferencia de, 353-355
  perfectos, 472
  suma de, 353-355

D

10, potencias de, 640, 643-644
Decimales, 10
Decimales finitos, 10
Decimales periódicos, 10
Denominadores
  común, 397-398
  diferente, 400-403
  mínimo común, 20, 72, 116
  racionalización, 487-492
  simplificación, 409-410
Desigualdades, 113
  compuestas, 119
  cuadráticas, 584
  identificación, 7-8
  polinomiales, 588-589
  propiedades usadas para resolver, 114
  racionales, 589-590
  símbolos de, 7
  usando, 7-8
  valores absolutos en, 127-134
Desigualdades compuestas, 119
  usando *o*, 122-123
  usando *y*, 119-122
Desigualdades cuadráticas
  resolución, 584-587
  solución a, 584
Desigualdades lineales
  desigualdades compuestas y, 119-122
  graficar soluciones a, 115-118

resolución, 113-115
sistemas de, 282-286
Desigualdades polinomiales, 588-589
Determinantes, 275
de sistemas de ecuaciones lineales, 275-278
definición, 275
menores, 277
Deuda pública, 53
Diferencia común, 726
Diferencias
común, 725-726
de cuadrados, 350-351
de cubos, 353-355
de dos productos, 313-314
de funciones, 208-209
Dimensiones, 266
Discriminantes, 542-543
Distancia
de frenado, 35
fórmulas para, 102, 677-678
Dividendos, 320
División
de expresiones racionales, 392-393
de números complejos, 512-513
de números reales, 23-24
de polinomios, 319-325
de radicales, 487-492
sintética, 323-324
División larga, pasos de, 320
Divisor, 320
Dominios, 159, 387-389

E

E, potencias de, 655-656
Ecuación de primer grado, 148
Ecuaciones. *Véase también* ecuaciones *específicas*
condicionales, 73-74
cuadráticas, 363, 369, 527
cúbicas, 366
de recta horizontal, 178
definición, 69
enunciado verbal, traducción en, 88-91
equivalente, 69
exponencial, 647-650, 656-660
gráficas de, 148
lineales, 69-70, 148, 173-174, 188, 198, 203. *Véase también* Sistema de ecuaciones lineales
logarítmicas, 647-650, 656-660
no lineales, 150
para la circunferencia, 679
polinomiales, 363-370
primer grado, 148
racionales, 413
radicales, 497
resolución de problemas, variable en, 81-83
sistemas no lineales de, 702-706
soluciones de, 69
tercer grado, 366
valores absolutos en, 127-133
variación, 437
Ecuaciones condicionales, 73-74
Ecuaciones cuadráticas
aplicaciones usando, 543-545, 550-553
con exponentes racionales, 563-564
definición, 363, 527
escritura, 560-564
forma estándar de, 363
fórmulas, para variable en, 553-555
resolución, 560-563
Ecuaciones cúbicas, 366
Ecuaciones equivalentes, 69
Ecuaciones exponenciales
natural, 656-660
resolución, 647-650
Ecuaciones lineales, 67-74. *Véase también* Sistema de ecuaciones lineales
combinación de términos semejantes en, 67-69
conceptos de, 74
condicional, 73-74
definición, 148
en una variable, 69
forma general de, 174, 203
forma punto-pendiente de, 198-203
forma pendiente-intersección con el eje de las y de, 183-190, 203
formas de, 173-203
fracciones en, 72-73
identidades en, 73-74
contradicciones, 73-74
propiedades de, 67
resolución, 69-71
variables en, 69
Ecuaciones logarítmicas
natural, 656-660
resolución, 647-650
Ecuaciones polinomiales, 363-370
factores/factorización para, 364-370
factorización para resolver, 364-370
grado de, 363
propiedad de factor cero para resolver, 364
Ecuaciones racionales
definición, 413
funciones racionales y, 418
proporciones de, resolución, 416-418
resolución de problemas de, 426-431
resolución, 413-414, 418-420
soluciones a, 414-416
variables en, 419-420
Eje
de simetría, 567-571, 575
mayor, 687
menor, 687
transversal, 694
Elementos, 6, 266
Elipses, 6
área de, 688
definición, 686, 718
gráficas de, 686-689
Enteros, 6, 10
negativos, 6
positivos, 6
Enunciado verbal, 88-91
Escritura
ecuaciones cuadráticas, 560-564
forma pendiente-intersección con el eje de las y, 188
funciones cuadráticas, 577-579
series, 720-721
Exámenes
preparación para, 3-4
resolver, 3-4
Exponentes, 41-47. *Véase también* Reglas de exponentes
definición, 29
funciones logarítmicas, conversión a, 626-627
negativos, 42-44, 466-468
racionales, 463-468
radicales, 497-503
suma, 309
Exponentes racionales, 463-469
a expresión exponencial, cambio, 463-464
ecuaciones cuadráticas con, 563-564
reglas de, 466-469
Exponentes radicales
aplicaciones usando, 501-502
que contienen radicales, 497-501
radicandos, para variable en, 502
resolución, 497-503
Expresiones
algebraicas, 6, 88-91
definición, 6
exponenciales, 29-31, 463-464
racionales, 387, 389, 391-392
radicales, 455, 464-466, 492
simplificación, 68
términos de, 67
usando orden de operaciones, 33-34
variables en, 34-36
Expresiones racionales
adición, 397-403
aplicación de, 402
definición, 387
división, 392-393
multiplicación, 391-392
resolución, 418-419
resta, 397-403
simplificación, 389-390
Expresiones racionales simplificadas, 389
Expresiones radicales, 455
simplificación, 464-466, 491

F

Factores/factorización. *Véase también* Factorización de polinomios; Factorización de trinomios
  calculadora graficadora para, 343
  común, 341
  de factores comunes, 341
  máximo común, 330
  para ecuaciones polinomiales, 354-360
  tamaño medio, 343
  usando sustitución, 345-346
  verificación, 340
Factores comunes, 341
Factores de tamaño medio, 343
Factoriales, 746-747
Factorización de polinomios
  binomios a partir de, 332-333
  fórmula para, 350-355
  máximo factor común para, 330
  monomios a partir de, 330-332
  por agrupamiento, 333-334
  repaso de, 359-360
  técnicas para el uso de combinación de, 359-360
Factorización de trinomios, 339-346
  cuadrado perfecto, 351-353
  de factores comunes, 341
  usando sustitución, 345-346
  $x^2 + bx + c$, 339-340
Figuras semejantes, 416
Foco(s), 686
Forma pendiente-intersección con el eje de las y, 188. *Véase también* Pendiente
  de ecuaciones lineales, 188, 203
  escritura, 188
  gráficas de, 183-190
  para modelos, construcción, 189-190
Forma punto-pendiente, 198-203
  comprensión, 198-199
  de ecuaciones lineales, 198, 203
  de rectas paralelas, 201-203
  de rectas perpendiculares, 201-203
  definición, 198
  para construcción de modelos, 199-201
Formas
  cuadrática de, 560
  de ecuaciones lineales, 173, 203
  en lista, 6
  escalonadas (triangular), 267-269
  estándar, 174, 203, 363
  pendiente-intersección con el eje de las y, 188, 203
  punto-pendiente, 198-203
  triangulares, 267
Fórmulas, 78-79
  cambio de base, 656
  crecimiento exponencial, 658
  cuadráticas, 537-545
  decaimiento, 658
  distancia, 102, 677-678
  ecuaciones cuadráticas, para variable en, 553-555
  geométricas, 760-761
  interés compuesto, 80, 620
  interés simple, 79
  movimiento, 102, 544
  para elipses, 688
  para polinomios, 350-355
  punto medio, 678
  resolución de problemas para variable en, 81-83
  trayectoria de proyectiles, 544
  variables en, 553-555
Fórmulas cuadráticas, 537-545
  determinación, 541-542
  derivación, 537
  resolución, 537-541
Fracciones
  complejas, 407-410
  en ecuaciones lineales, 71-72
Fracciones complejas, 407
  reconocimiento, 407-408
  simplificación, 408-410
Función exponencial natural, 653-654
Función logarítmica natural, 654-656
Funciones, 159-160. *Véase también* Funciones exponenciales; Gráficas; Funciones logarítmicas; funciones *específicas*
  cociente de, 208
  composición de, 604, 611-613
  complejas, 407
  compuestas, 604-607
  constantes, 178
  cuadráticas, 567
  de polinomios, 300-302, 314
  de raíz cuadrada, 456
  diferencia de, 208
  exponenciales, 617
  gráficas de, 160
  inversas, 609-613, 629
  logarítmicas, 628, 654
  notación, 162-164
  operaciones sobre, 208
  producto de, 208
  racionales, 387-389
  raíces cúbicas, 457
  suma de, 208
  uno a uno, 607-609
  valor máximo de, 567
  valor mínimo de, 567
Funciones cuadráticas, 566
  escritura, 577-579
  gráficas de, 566-579. *Véase también* Parábola
  mediante fórmula cuadrática, 537-545
  resolución, 527-545
  soluciones para, discriminar para determinar real, 542-543
  trinomio cuadrado perfecto y, 529
  uso de la propiedad de la raíz cuadrada, 527-529
Funciones exponenciales
  definición, 617
  gráficas de, 616-619, 629-630
  natural, 653-654
  resolución de aplicaciones de, 619-621
Funciones inversas, 611-612
  de función uno a uno, 609
  definición, 609, 629
  encontrar, 609-611
Funciones logarítmicas, 625-630
  definición, 628
  exponentes, convertir a, 626-627
  gráficas de, 628-629
  natural, 654
  resoluciones de aplicaciones de, 630
Funciones polinomiales, 300, 302
Funciones racionales, 387
  dominios de, 387-389
  ecuaciones racionales y, 418

G

Grado
  de ecuaciones polinomiales, 363
  de polinomios, 299-300
  de términos, 68
Gráficas, 146-153, 173-174
  álgebra de, 208-213
  aplicaciones de, 164-166, 178-179
  cociente de, 208-209
  coordenadas al origen, 174
  de barras, 20, 22, 211-212
  de circunferencias, 679-681
  de desigualdades lineales, 217-219
  de ecuaciones, 148, 150-152. *Véase también* Ecuaciones lineales
  de elipses, 686-690
  de formas $x = a$ y $y = b$, 177-178
  de funciones, 158-166, 302
  de funciones exponenciales, 616-619, 628-629
  de funciones logarítmicas, 628-630
  de hipérbola, 694-697
  de intersecciones con el eje de las x, 369
  de líneas superpuestas, 212-213
  de relaciones, 160
  de soluciones, 115-119
  de parábola, 675-677
  diferencia de, 208-209
  funciones cuadráticas, 566-579. *Véase también* Parábola
  identificación, 159-160
  interpretación, 153
  lineales, 148, 173-179
  polinomiales, funciones de, 301-302

producto de, 208-209
prueba de la recta vertical sobre, 160-162
recta, 210-211
relaciones en, 158-159
sobre la recta numérica, 115-119
suma de, 208-213
traslaciones de, 183-184
trazado de puntos en, 146-150
usando coordenadas al origen, 174-177
Gráficas de líneas, 210
Gráficas lineales, 148, 173-179, 177
usando coordenadas al origen, 174-177

H

Habilidades de estudio para tener éxito
actitud positiva, 2
calculadora, aprende a usar, 5
clase, asistencia y preparación para, 2-3
complementos, 4-5
exámenes, preparación y resolución, 3-4
Hipérbolas
definición, 694
gráficas de, 694-696
Hipotenusa, 368

I

i, potencias de, 513-514
Identidades, 73-74
Igualdades
lineal, 217-218, 282
multiplicación de, 70
propiedades de, 67, 70
suma de, 70
Igualdades lineales, 217-218, 282
Inclinación de la recta, 184. *Véase también* Pendiente
Inconsistencias, 73-74
Índice(s), 31, 455
de sumatoria, 721
definición, 721
radicales con diferente, 492
Infinito, 115
Interés, 79
Interés compuesto, 80, 620
Intersección con el eje de las x, 174, 567-569
de función cuadrática, 369-370
de parábola, 568
de una gráfica, 369
Intersección con el eje de las y, 174
pendiente y, 188-189
Intersección de conjuntos, 9-10
Inversos, 17, 438
Inversos aditivos, 17

L

Ley de Charles, 83
Límite inferior de la sumatoria, 721
Límite superior de la sumatoria, 721
Línea de fracción, 407
Líneas de frontera, 217
Logaritmo
común, 640-644
definición, 625
natural, 654
propiedades de, 633-636
regla de potencia para, 634-635
regla del cociente para, 633
regla del producto para, 633
Logaritmos comunes, 640-644
aproximación de, 640-642
de potencias de 10, 640, 643-644
definición, 642

M

Matriz (matrices), 266-267
aumentada, 266-267
coeficiente, 267
constante, 267
definición, 266
en sistemas dependientes, 271-272
en sistemas inconsistentes, 271-272
cuadrada, 266
en sistemas de ecuaciones lineales, 266-272
3×3, 277-278
2×2, 275
en variables, 269-271
Máximo factor común (MFC), 330
Medios planos, 217
Método PIES, 311, 341, 482
Métodos
adición, 236
PIES, 311, 341, 465
prueba y error, 341-344
Mínimo común denominador (MCD), 20, 72, 116, 399-400
Modelo matemático, 78
Mono, 299
Monomios, 299
polinomios y, 309-310, 319-320, 330-332
Movimiento, 102-104, 429-431
Multiplicación
cruzada, 416
de expresiones racionales, 391-392
de igualdades, 69-70
de mínimo común denominador, 408-409
de números complejos, 510-511
de números reales, 23
de polinomios, 309-314
de radicales, 481-484

N

N factorial, 746
Notación
científica, 51
construcción de conjuntos, 8-9
enésima suma parcial, 727-729, 736-737
enésimo término, 726-727, 735-736
funciones, 162-164
intervalo, 9, 115-119
límite de conjunto, (o Notación de lista para conjuntos), 8
sumatoria, 722
Notación científica, 51-54
en resolución de problemas, 53-54
números en, 51-52
Numeradores, 409-410
Números. *Véase también* tipos *específicos*
cardinales, 6, 10
complejos, 509-514, 528
conjuntos de, 10-12
en notación científica, 51-52
enteros no negativos, 10
imaginarios, 509-510, 528
imaginarios puros, 509-510
irracionales, 10
naturales, 6, 10
negativos, 18
problemas de, 428
racionales, 10-11
reales, 10-11, 17-25, 116
sucesiones de, 718
Números complejos
definición, 509-514, 528
división, 512-513
escritura de, usando *i*, 513-514
multiplicación, 511-512
reconocimiento, 509-510
resta, 510-511
suma, 510-511
Números reales
conjuntos de, 116
definición, 10-11, 17-25
división, 23-24
multiplicación, 23
operaciones con, 17-25
propiedades de, 24-25
resta, 21-22
suma, 19-20

O

O, desigualdades compuestas usando, 122-123
Operaciones
sobre funciones, 208
orden de, 29-36
con números reales, 17-25

Opuestos, 17. *Véase también* Inversos aditivos
Orden
de operaciones, 29-36
descendente, 300

P

Parábola, 566
apertura de, hacia arriba o hacia abajo, 566
corrimientos en, 575
definición, 674
eje de simetría de, 567-569
gráficas de, 675-677
intersecciones con el eje de las x, 557-569
repaso de, 674-675
traslaciones de, 574-577
valor máximo de, 571-574
valor mínimo de, 571-574
vértice de, 567-569, 576, 676
Pares ordenados, 146
Pendiente. *Véase también* Forma pendiente-intersección con el eje de las y
cero, 186
como razón de cambio, 187
de recta, 184-187
intersección con el eje de las y y, 188-189
negativa, 186
positiva, 186
Perímetro, 82, 760
fórmula para, 760
Polinomios, 299. *Véase también* Factorización de polinomios; Trinomios
cuadráticos, 299
cúbicos, 299
desigualdades en, 588-589
división de, 320-325
funciones de, 300-301, 314
grado de, 299-300
lineales, 299
multiplicación de, 309-314
primos, 345
resta de, 302-303
suma de, 302-303
Potencias
de 10, 640, 643-644
de e, 654-656
de i, 513-514
perfectas, 472-473
reglas de, 44
Problemas de mezclas, 105-108
Problemas de trabajo, 426-428
Problemas numéricos, 428
Productos
de funciones, 208, 314
de gráficas, 208-209
de sumas, 313-314
diferencia de dos, 313-314
exponentes en, regla para, 41, 309
radicales, reglas para, 472-478
Programación lineal, 284-285
Propiedades
de desigualdades, 114
de doble negación, 17
de igualdades, 67, 69-70
de números reales, 23-24
de raíz cuadrada, 527-529
distributivas, 310
factor cero, 363-364
reflexivas, 67
simétricas, 67
transitivas, 67
Proporcionalidad, constante de, 436
Proporciones, 416-418
Prueba de la recta vertical, 160-162
Puntos colineales, 148
Puntos extremos, 8

R

Racionalización de denominadores, 487
Radicales
adición, 479-481
división, 487-492
exponentes radicales que contienen, 497-501
multiplicación, 481-484
no semejantes, 479
regla del cociente para, 476
reglas del producto para, 472-473
resta, 479-481
semejantes, 479
simplificación, 472-477
valores absolutos, para evaluación, 459-460
Radicandos, 31, 455, 502
Radio, 679-681
Raíces. *Véase también* Raíces cuadradas
cúbicas, 31, 457
impares, 457-458
pares, 457-458
superiores, 31-33
Raíces cuadradas
definición, 455
encontrar, 455-456
evaluación, 31-33
función de, 456
negativas, 455
positivas, 30-31, 455
principales, 30-31, 455
propiedades de, 527-529
simplificación, 474
Rango, 159
Razón común, 734-735
Razón de cambio, 187
Recta de fracción principal, 407-408
Recta vertical, pendiente de, 187
Rectángulo, 82
Rectas
fracción, 407-408
inclinación de, 184
horizontales, 178, 607-609
límite, 217
numéricas, 115-119, 127
paralelas, 183, 201-203
pendiente de, 184-186
perpendiculares, 201-203
verticales, pendiente de, 186
Recíproco negativo, 201
Regla de Cramer, 275-280
Reglas
cociente, 41, 476, 633
de exponentes, 42, 47, 466-469
elevar un cociente a una potencia, 45-47
elevar un producto a una potencia, 45
elevar una potencia a una potencia, 44-45.
exponente cero, 42
potencia, 44-47, 634-635
producto, 41, 309, 472-473, 633
Reglas de exponentes
cociente, 41-42
elevar un cociente a una potencia, 45-47
elevar un producto a una potencia, 45
elevar una potencia a una potencia, 44-45
exponente cero, 42
exponente negativo, 42-44
producto, 41, 309
resumen de, 47
Relaciones, 158-160
Resolución de problemas. *Véase también* Resolución de problemas aplicados
de ecuaciones racionales, 426-431
de fórmula, variable en, 81-83
en álgebra, 91-95
en ecuación, variable en, 81-83
lineamientos para, 78
notación científica en, 53-54
procedimientos para, 78-81
Resolución de problemas aplicados
ecuaciones cuadráticas, 543-545, 550-553
ecuaciones polinomiales, 367-369
exponentes radicales, 501-502
expresiones racionales, 403
gráficas, 178-179, 184-186
sistemas de ecuaciones lineales, 252-256
Resta
de expresiones racionales, 397-398
de números complejos, 510

de números reales, 20-22
de polinomios, 302-303
de radicales,479-481
Restricciones, 284

S
Secciones cónicas
circunferencia, 679-681
descripción, 674
elipses, 686-690
hipérbola, 694-697
identificación, 674
parábola, 675-677
repaso de, 698-699
Separación de variables, 70, 81
Series
aritméticas, 727
definición, 720
escritura, 720-721
finitas, 720
geométricas, 736-741
infinitas, 720-721
Series geométricas
aplicaciones de, 739-741
definición, 737
infinitas, 737-740
Signos
diferentes, 23-24
iguales, 23
radical, 31, 455
Símbolos de desigualdades, 7
Simetría, eje de, 567-569, 575
Simplificación
de denominadores, 409-410
de expresiones, 68, 389-390, 464-466, 491
de fracciones complejas, 407-410
de numeradores, 409-410
de radicales, 472-477, 491
de raíz cuadrada, 474
Sistema consistente de ecuaciones lineales, 233
Sistema de coordenadas
cartesianas, 146
rectangulares, 146
Sistemas de ecuaciones lineales, 233
aplicaciones usando, 252-256
consistente, 233
dependiente, 233, 248
en dos variables, 233-240
en tres variables, 245-249
en variables, 233, 245
inconsistente, 233, 248
por sustitución, 235
regla de Cramer para, 276
usando determinantes, 233-278
usando matrices, 266-272
usando regla de Cramer, 233-280
Sistemas de desigualdades lineales, 282-286
programación lineal, gráfica de restricciones, 284-285
que contienen valor absoluto, 285-286
Sistemas de ecuaciones no lineales, 702-706
definición, 702
resolución de problemas aplicados de, 705-706
uso de adición, 704-705
uso de sustitución, 702-704
Sistemas dependientes, 233, 248
matriz en, 271-272
Sistemas inconsistentes, 233, 248
matriz en, 271-272
Sistemas de igualdades lineales, 282
Soluciones
a desigualdades cuadráticas, 584
a ecuaciones racionales, 414-416
a fórmula cuadrática, 541-542
de ecuaciones, 69
no solución, 414
Subconjunto, 11
Subíndices, 80
Sucesiones
alternantes, 720
aritméticas, 725-729
crecientes, 719
de números, 718
decrecientes, 719
encontrar términos de, 720
finitas, 719, 720
geométricas, 734-741
infinitas, 718, 720
término de, 718
Sucesiones aritméticas
definición, 726
diferencias en, 725-26
*en*ésima suma parcial de, 727-729
*en*ésimo término de, 726-727
Sucesiones geométricas
aplicaciones de, 739-741
definición, 734
*en*ésima suma parcial de, 736-737
*en*ésimo término de, 735-736
razón común en, 734
Suma
de exponentes, 309
de expresiones racionales, 397-403
de igualdades, 70
de números reales, 19-20
de polinomios, 302-303
de radicales, 479-481
denominadores en, racionalización, 492
método de, 236
números complejos, 510-551
sistemas de ecuaciones no lineales usando, 704-705
Sumas
de cubos, 353-355
de funciones, 208
de series geométricas infinitas, 738-739
gráficas de, 208-213
parciales, 721, 727-729, 736-737
productos de, 313-314
Sumatoria, 721-723
Suplementos, 4-5
Sustitución, 235
factores usando, 345-346
sistemas de ecuaciones lineales usando, 235
sistemas de ecuaciones no lineales usando, 702-704

T
Teorema de Pitágoras, 368
Teorema del binomio, 746-750
definición, 746, 749
factoriales, 746-747
triángulo de Pascal, 747-748
uso del, 748-750
Teorema del residuo, 324-325
Términos, 299
combinación, semejantes, 67-69
de expresiones, 67
de sucesiones, 718-720
grado de, 68, 299
*en*ésimo, 726-727, 735-736
no radicales, 500-501
no semejantes, 68
principal, 299
semejantes, 68
Transformaciones de filas, 267
Traslaciones verticales, 183-184
Trapezoide, 83
Triada ordenada, 245
Triángulo de Pascal, 747-748
Triángulos, 747-748
Trinomio cuadrado perfecto, 351, 529
Trinomios, 299, 351, 529

U
Unidad imaginaria, 509
Unión
de conjuntos, 9-10, 122
de números racionales, 11

V
Valores. *Véase también* Valores absolutos
absolutos, 18-19, 127
límite, 585
máximos, 567, 571-574
mínimos, 567, 571-574
Valores absolutos
definición, 18, 127
en desigualdades, 127-133
en ecuaciones, 127-133
evaluación, 18

sistemas de desigualdades lineales que contienen, 285-286
sobre la recta numérica, 127-128
usando radicales, 459-460
Valor máximo, 571
de funciones, 566
de parábola, 571-574
Valor mínimo, 566, 571
de funciones, 566
de parábola, 571-574
Variables, 6
aisladas, 70, 81
dependientes, 159
en ecuaciones lineales, 69
en ecuaciones racionales, 419-420
en fórmulas, 553-555
en igualdades lineales, 217-218
en matrices, 269-271
en radicandos, 502-503
en sistema de ecuaciones lineales, 233, 245-248
expresiones que contienen, 34-36
independientes, 159
resolución de problemas para, 81-83
Variaciones
combinadas, 440-441
conjuntas, 440
constantes, 437
directas, 436-438
inversas, 438
Ventana, 152
Vértice, 566, 676
de una parábola, 567-569, 576
funciones cuadráticas usando, 569-571
Vértices, 694
Volumen, 761

Y

Y, desigualdades compuestas usando, 119-122

Créditos fotográficos

Capítulo 1

Página 1 JPL-Caltech/MSSS/NASA; **p. 2** Wavebreakmedia/Shutterstock; **p. 3** Cathy Yeulet/123RF; **p. 5** Jean-Marie Guyon/123RF; **p. 14** Francesco Dazzi/Shutterstock; **p. 28** NTdgr/Shutterstock; **p. 35** Ion Chiosea/123RF; **p. 38** (**izquierda**) Ammentorp/123RF; **p. 38** (**derecha**) Fotorince/Shutterstock; **p. 39** Melissa Vis/123RF; **p. 51** (**izquierda**) Outer Space/Shutterstock; **p. 51** (**derecha**) Crevis/Shutterstock; **p. 53** Larry1235/Shutterstock; **p. 54** Takashi Honma/123RF; **p. 55** JPL-Caltech/NASA; **p. 56** NASA Images/Shutterstock; **p. 57** ESB Professional/Shutterstock; **p. 58** Bioraven/Shutterstock; **p. 63** Catherine Jones/Shutterstock

Capítulo 2

Página 66 Andy Dean Photography/Shutterstock; **p. 77** (**izquierda**) Shutt2016/Shutterstock; **p. 77** (**derecha**) Olena Danileiko/123RF; **p. 85** Archana Bhartia/123RF; **p. 86** Wavebreakmedia/Shutterstock; **p. 87** Zdenka Darula/Shutterstock; **p. 89** Rido/123RF; **p. 92** Olena Yakobchuk/Shutterstock; **p. 93** (**arriba, izquierda**) Markus Mainka/123RF; **p. 93** (**abajo, izquierda**) Lissandra Melo/Shutterstock; **p. 94** Holbox/Shutterstock; **p. 96** (**izquierda**) Tinxi/Shutterstock; **p. 96** (**derecha**) Ian Iankovskii/123RF; **p. 97** (**izquierda**) StockLite/Shutterstock; **p. 97** (**derecha**) Benoit Daoust/123RF; **p. 98** (**arriba, izquierda**) Delmas Lehman/Shutterstock; **p. 98** (**abajo, izquierda**) Zigzag Mountain Art/Shutterstock; **p. 98** (**derecha**) Flavio Beltran/Shutterstock; **p. 99** Lisa S./Shutterstock; **p. 100** Andrei Kuznetsov/123RF; **p. 101** Bibiphoto/Shutterstock; **p. 103** Vitpho/123RF; **p. 108** (**izquierda**) Buddy Mays/Alamy Stock Photo; **p. 108** (**derecha**) Nataliia Budianska/Shutterstock; **p. 109** (**izquierda**) Yobro10/123RF; **p. 109** (**derecha**) Aleksey Sagitov/123RF; **p. 110** (**izquierda**) Goldminer/123RF; **p. 110** (**derecha**) Robert Gregory Griffeth/Shutterstock; **p. 111** (**arriba, izquierda**) Dmitriy Shironosov/Alamy Stock Photo; **p. 111** (**abajo, izquierda**) Monkey Business Images/Shutterstock; **p. 111** (**derecha**) Iriana88w/123RF; **p. 112** (**izquierda**) Serg Zastavkin/Shutterstock; **p. 112** (**arriba, derecha**) Hero Images Inc./Alamy Stock Photo; **p. 112** (**abajo, derecha**) EQRoy/Shutterstock; **p. 117** Image Source/Stockbyte/Getty Images; **p. 118** Wavebreakmedia/Shutterstock; **p. 122**, Sirtravelalot/Shutterstock; **p. 124**, B Christopher/Alamy Stock Photo; **p. 125** Anekcen Peenh/123RF; **p. 126** Golden Pixels LLC/Shutterstock; **p. 141** (**izquierda**) Trubavin/Shutterstock; **p. 141** (**derecha**) Stillfx/123RF; **p. 142** (**arriba, izquierda**) Fotopool/Shutterstock; **p. 142** (**abajo, izquierda**) Denisfilm/123RF; **p. 142** (**derecha**) ESB Professional/Shutterstock; **p. 143** Kzenon/123RF

Capítulo 3

Página 145 Jim West/Alamy Stock Photo; **p. 153** Rebius/123RF; **p. 160** Art Konovalov/Shutterstock; **p. 164** James R. Martin/Shutterstock; **p. 169** (**izquierda**) Serezniy/123RF; **p. 169** (**derecha**) Rostislav Glinsky/Shutterstock; **p. 170** AK2/E+/Getty Images; **p. 181** (**arriba, izquierda**) Vietnam Stock Images/Shutterstock; **p. 181** (**abajo, izquierda**) Jules Selmes/Pearson Education, Inc.; **p. 181** (**derecha**) Jeff Whyte/Shutterstock; **p. 195**, Michaeljung/Shutterstock; **p. 196** (**arriba**) Joaquin Ossorio Castillo/Shutterstock; **p. 196** (**abajo**) DR Travel Photo and Video/Shutterstock; **p. 200** Cathy Yeulet/123RF; **p. 205** (**izquierda**) Gilberto Mevi/123RF; **p. 205** (**derecha**) Pukhov K/Shutterstock; **p. 206** Marmaduke St. John/Alamy Stock Photo; **p. 207** Oleksa D/Shutterstock; **p. 214** Wavebreakmedia/ Shutterstock; **p. 216** Natalia Bratslavsky/Shutterstock; **p. 220** Dzmitry Kliapitski/123RF

Capítulo 4

Página 232 Sergey Ryzhov/123RF; **p. 243** Christina Richards/Shutterstock; **p. 252** (**arriba**) Gorillaimages/Shutterstock; **p. 252** (**abajo**) Hector Acevedo/ZUMA Press, Inc./Alamy Stock Photo; **p. 253** Kzenon/Shutterstock; **p. 254** Miami2you/Shutterstock; **p. 257** NikomMaelao Production/Shutterstock; **p. 259** Ammit Jack/Shutterstock; **p. 260** (**arriba, izquierda**) Oleksandra Naumenko/123RF; **p. 260** (**abajo, izquierda**) Gpointstudio/Shutterstock; **p. 260** (**derecha**) Sandra R. Barba/Shutterstock; **p. 261** (**arriba**) Feng Yu/123RF; **p. 261** (**abajo**) Ton Koene/Alamy Stock Photo; **p. 262** Ali Peterson/123RF; **p. 263** (**izquierda**) Golden Pixels LLC/Shutterstock; **p. 263** (**derecha**) Alex Potemkin/ iStock/Getty Images; **p. 264** Yobro10/123RF; **p. 274** Nejron Photo/Shutterstock; **p. 281** Ted Foxx/Alamy Stock Photo; **p. 295** (**izquierda**) Juice Images/Getty Images; **p. 295** (**derecha**) Alones/Shutterstock; **p. 296** Vera Kuttelvaserova Stuchelova/123RF; **p. 297** Hero Images Inc./Alamy Stock Photo

Capítulo 5

Página 298 Khakimullin Aleksandr/Shutterstock; **p. 300** Pressmaster/Shutterstock; **p. 305** 360degreeAerial/Shutterstock; **p. 306** Sean Nel/123RF; **p. 307** Gino Santa Maria/Shutterstock; **p. 317** Espies/Shutterstock; **p. 336** (**izquierda**) A_Lesik/Shutterstock; **p. 336** (**derecha**) Ion Chiosea/123RF; **p. 337** Leblond Catherine/123RF; **p. 372** Allen R. Angel; **p. 373** Allen R. Angel

Capítulo 6

Página 386 Fred_dl/Shutterstock; **p. 403** Jaggat Rashidi/Shutterstock; **p. 407** Jacek Chabraszewski/123RF; **p. 412** Aaltair/Shutterstock; **p. 419** Jstudio/Shutterstock; **p. 423** Lightpoet/123RF; **p. 424** NASA Images/Shutterstock; **p. 427** Maryna Pleshkun/Shutterstock; **p. 428** Oleksandr Farion/123RF; **p. 430** (**arriba**) Kzenon/Shutterstock; **p. 430** (**abajo**) Kaspars Grinvalds/Shutterstock;

p. 431 MTaira/Shutterstock; **p. 432** (**izquierda**) Mark Payne/123RF; **p. 432** (**arriba, derecha**) MartinMaritz/Shutterstock; **p. 432** (**abajo, derecha**) Steve Mann/123RF; **p. 433** (**izquierda**) Hongqi Zhang/123RF; **p. 433** (**derecha**) Adwo/Shutterstock; **p. 434** (**izquierda**) Benny Marty/Shutterstock; **p. 434** (**derecha**) Lzf/Shutterstock; **p. 435** (**arriba, izquierda**) Yulia Chupina/123RF; **p. 435** (**abajo, izquierda**) Allen R. Angel; **p. 435** (**derecha**) Lurii Kovalenko/123RF; **p. 439** Bernard Bodo/123RF; **p. 441** Pinkcandy/Shutterstock; **p. 442** (**izquierda**) Luckybusiness/123RF; **p. 442** (**derecha**) Tatyana Tomsickova/123RF; **p. 443** (**arriba**) Christian Duschinger/123RF; **p. 443** (**abajo**) Rukawajung/Shutterstock; **p. 444** Monkey Business Images/Shutterstock; **p. 445** Aabeele/Shutterstock; **p. 451** (**izquierda**) Freevideophotoagency/Shutterstock; **p. 451** (**derecha**) Joggie Botma/Shutterstock; **p. 452** Alexey Fursov/Shutterstock

Capítulo 7

Página 454 Epicstockmedia/123RF; **p. 471** Michal Adamczyk/123RF; **p. 472** Gino Santa Maria/123RF; **p. 486** Jules Selmes/Pearson Education, Inc.; **p. 495**(**izquierda**) Olegusk/Shutterstock; **p. 495** (**derecha**) Vladimir Liverts/123RF; **p. 502** Allen R. Angel; **p. 505** Rogatnykh/Shutterstock; **p. 506** B Calkins/Shutterstock; **p. 517** Bajinda/Shutterstock; **p. 524** Richard Paul Kane/Shutterstock

Capítulo 8

Página 526 NASA; **p. 533** Stefan Schurr/Shutterstock; **p. 535** Pilgrimiracle/123RF; **p. 536** StevenRussellSmithPhotos/Shutterstock; **p. 543** AJR_Photo/Shutterstock; **p. 547** Aaron Amat/123RF; **p. 548** (**izquierda**) Rob Lopshire/iStock/Getty Images; **p. 548** (**derecha**) Dennis Hallinan/Alamy Stock Photo; **p. 550** Jarp5/123RF; **p. 552** Beneda Miroslav/Shutterstock; **p. 555** Ithasak Archalamlert/123RF; **p. 556** Dmitry Kalinovsky/Shutterstock; **p. 557** (**izquierda**) Cathy Yeulet/123RF; **p. 557** (**derecha**) Taina Sohlman/Shuttrestock; **p. 558** (**izquierda**) Photo.ua/Shutterstock; **p. 558** (**derecha**) Africa Studio/Shutterstock; **p. 572** Zsolt Uveges/Shutterstock; **p. 574** Smileus/123RF; **p. 581** (**izquierda**) Invictus99/123RF; **p. 581** (**derecha**) Lee Chee Keong/123RF; **p. 582** (**izquierda**) Spotmatikphoto/123RF; **p. 582** (**derecha**) ESB Professional/Shutterstock; **p. 594** Nestor Rizhniak/Shutterstock; **p. 599** EpicStockMedia/Shutterstock; **p. 600** Jim West/Alamy Stock Photo; **p. 601** (**izquierda**) Alberto Loyo/123RF; **p. 601** (**derecha**) ElenaGaak/Shutterstock; **p. 602** Nataliya Dvukhimenna/123RF

Capítulo 9

Página 603 ThreeRivers11/Shutterstock; **p. 615** Roblan/Shutterstock; **p. 616** Oleg0/123RF; **p. 619** Deni Williams/Shutterstock; **p. 620** Hemera Technologies/PhotoObjects.net/Getty Images; **p. 621** Wajan/Fotolia; **p. 622** Jakub Cejpek/123RF; **p. 623** (**arriba**) William Perry/123RF; **p. 623** (**abajo**) Andrea Izzotti/123RF; **p. 624** ESB Professional/Shutterstock; **p. 630** James Benet/E+/Getty Images; **p. 645** ESB Professional/Shutterstock; **p. 646** ProStockStudio/Shutterstock; **p. 650** Science Photo/Shutterstock; **p. 652** (**izquierda**) Madhourse/Shutterstock; **p. 652** (**arriba, derecha**) Andrey Armyagov/123RF; **p. 652** (**abajo, derecha**) Linda Moon/ Shutterstock; **p. 660** Route66/Shutterstock; **p. 662** Minerva Studio/Shutterstock; **p. 663** (**izquierda**) Evgeniy Kalinovskiy/Shutterstock; **p. 663** (**derecha**) Monkey Business Images/Shutterstock; **p. 664** Jules Selmes/Pearson Education, Inc.; **p. 670** Dmitrijs Bindemanis/ Shutterstock; **p. 671** Zack Frank/Shutterstock; **p. 672** (**izquierda**) Pere Rubi/Shutterstock; **p. 672** (**derecha**) Snowshill/Shutterstock

Capítulo 10

Página 673 Oomka/Shutterstock; **p. 691** Anton_Ivanov/Shutterstock; **p. 692** Allen R. Angel; **p. 693** Allen R.Angel; **p. 708** (**izquierda**) Lakov Filimonov/Shutterstock; **p. 708** (**derecha**) Roman Babakin/Shutterstock; **p. 715** Elena Nichizhenova/123RF; **p. 716** Alexander Raths/Shutterstock

Capítulo 11

Página 717 Stefan Holm/Shutterstock; **p. 728** Ssuaphotos/Shutterstock; **p. 731** Allen R. Angel; **p. 732** (**izquierda**) Pearson Education, Inc.; **p. 732** (**derecha**) Oneinchpunch/Shutterstock; **p. 739** Keith Morris/Alamy Stock Photo; **p. 743** Image Wizard/Shutterstock; **p. 744** Salienko Evgenii/Shutterstock; **p. 745** Andrew Bayda/Fotolia; **p. 747** GeorgiosArt/iStock/Getty Images; **p. 757** Neelsky/Shutterstock; **p. 759** Olimpik/Shutterstock

Capítulo 1 Conceptos básicos

Propiedades conmutativas: $a + b = b + a, ab = ba$

Propiedades asociativas: $(a + b) + c = a + (b + c), (ab)c = a(bc)$

Propiedad distributiva: $a(b + c) = ab + ac$

Propiedades de la identidad: $a + 0 = 0 + a = a, a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Propiedades de los inversos: $a + (-a) = -a + a = 0, a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

Propiedad de la multiplicación por 0: $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

Propiedad de la doble negación: $-(-a) = a$

$>$ significa es mayor que, $\geq$ significa es mayor o igual que,
$<$ significa es menor que, $\leq$ significa es menor o igual que

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases} \qquad a - b = a + (-b)$$

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ si } \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{n \text{ factores de } b} = a \quad b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{n \text{ factores de } b}$$

Orden de las operaciones: Paréntesis, exponentes y radicales, multiplicación o división de izquierda a derecha, suma y resta de izquierda a derecha.

Reglas de los exponentes:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$a^m / a^n = a^{m-n}, a \neq 0$ $\qquad (ab)^m = a^m b^m$

$a^{-m} = \frac{1}{a^m} a \neq 0$ $\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} b \neq 0$

$a^0 = 1, a \neq 0$ $\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m, a \neq 0, b \neq 0$

Capítulo 2 Ecuaciones y desigualdades

Propiedad de la suma para la igualdad: Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$.

Propiedad de la multiplicación para la igualdad: Si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$.

Procedimiento para la resolución de problemas aplicados

1. **Entiende el problema.** Identifica la cantidad o cantidades que se pide determinar.
2. **Traduce el problema al lenguaje matemático** (expresa el problema como una ecuación).
   a) Elige una variable para representar una cantidad y **escribe exactamente lo que representa.** Representa cualquiera otra cantidad a determinarse en términos de esta variable.
   b) Con la información del paso a), escribe una ecuación que represente el problema de forma verbal.
3. **Realiza los cálculos matemáticos** (resuelve la ecuación).
4. **Comprueba la respuesta** (usando el texto original del problema).
5. **Responde la pregunta planteada.**

Fórmula de distancia: $d = rt$

Desigualdades:

Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$.
Si $a > b$, entonces $a - c > b - c$.
Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $a \cdot c > b \cdot c$.
Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $a/c > b/c$.
Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$.
Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $a/c < b/c$.

Valor absoluto:

Si $|x| = a$, entonces $x = a$ o $x = -a$. Si $|x| > a$, entonces $x < -a$ o $x > a$.
Si $|x| < a$, entonces $-a < x < a$. Si $|x| = |y|$, entonces $x = y$ o $x = -y$.

Capítulo 3 Gráficas y funciones

Una **relación** es cualquier conjunto de pares ordenados.

Una **función** es una correspondencia entre un primer conjunto de elementos, el dominio, y un segundo conjunto de elementos, el rango; de modo que, para cada elemento del dominio corresponde exactamente un único elemento en el rango.

Funciones

Suma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

Diferencia: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

Producto: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Cociente: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$

La **gráfica de una ecuación** es una ilustración del conjunto de puntos que satisfacen una ecuación.

Para determinar la ordenada al origen de una gráfica, haz $x = 0$ y resuelve la ecuación para y.

Para determinar la abscisa al origen de una gráfica, haz $y = 0$ y resuelve la ecuación para x.

Pendiente de una recta: $m = \frac{\text{elevación}}{\text{extensión}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Forma general de una ecuación lineal: $ax + by = c$

Forma pendiente-ordenada de una ecuación lineal: $y = mx + b$

Forma punto-pendiente de una ecuación lineal: $y - y_1 = m(x - x_1)$



Pendiente positiva
(asciende hacia la derecha)



La pendiente es 0
(recta horizontal)



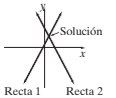
Pendiente negativa
(desciende hacia la derecha)



Pendiente indefinida
(recta vertical)

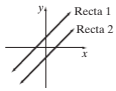
Capítulo 4 Sistemas de ecuaciones y desigualdades

Exactamente una solución
(rectas no paralelas)



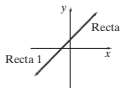
Sistema consistente

Sin solución
(rectas paralelas)



Sistema inconsistente

Número infinito de
soluciones (La misma recta)



Sistema dependiente

Un sistema de ecuaciones lineales puede resolverse: (a) gráficamente, (b) por el método de sustitución, (c) por el método de suma o eliminación, (d) mediante matrices o (e) por determinantes.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Regla de Cramer:

Dado un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2 \end{aligned} \quad \text{entonces } x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ y } y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

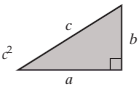
Capítulo 5 Polinomios y funciones polinomiales

Método PIES para multiplicar dos binomios:

$$\overset{P}{(a+b)}\overset{S}{(c+d)} = \overset{P}{a\cdot c} + \overset{I}{b\cdot c} + \overset{E}{a\cdot d} + \overset{S}{b\cdot d}$$

Teorema de Pitágoras:

cateto^2 + cateto^2 = hipotenusa^2 o $a^2 + b^2 = c^2$



Cuadrado de un binomio:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Diferencia de dos cuadrados: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Trinomios cuadrados perfectos:

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2, a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

Suma de dos cubos: $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$

Diferencia de dos cubos: $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$

Forma general de una ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

Propiedad del factor cero: Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$, o bien, $a = 0$ y $b = 0$.

Capítulo 6 Expresiones y ecuaciones racionales

Para multiplicar expresiones racionales:

1. Factoriza todos los numeradores y denominadores.
2. Divide entre los factores comunes que existan.
3. Multiplica los numeradores y denominadores.
4. Si es posible, simplifica la respuesta.

Para dividir expresiones racionales:

Invierte el divisor y multiplica la expresión racional resultante.

Para sumar o restar expresiones racionales:

1. Escribe cada fracción con un denominador común.
2. Suma o resta los numeradores, manteniendo el denominador común.
3. Cuando sea posible, factoriza el numerador y simplifica la fracción.

Figuras semejantes: Los ángulos correspondientes son iguales y los lados correspondientes son proporcionales.

Proporcionalidad: Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad = bc$.

Variación: directa, $y = kx$; inversa, $y = \frac{k}{x}$; conjunta, $y = kxz$.

Capítulo 7 Raíces, radicales y números complejos

Si n es par y $a \geq 0$: $\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$

Si n es impar: $\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$

Reglas de los radicales

$\sqrt{a^2} = |a| \qquad \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{m/n}, a \geq 0$

$\sqrt{a^2} = a, a \geq 0 \qquad \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ y $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, $a \geq 0, b \geq 0$

$\sqrt[n]{a^n} = a, a \geq 0 \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ y $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, a \geq 0, b > 0$

$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}, a \geq 0$

Un radical se simplifica cuando todo lo siguiente es verdadero:

1. En ningún radicando hay factores que sean potencias perfectas.
2. Ningún radicando tiene fracciones.
3. Ningún denominador tiene radicales.

Números complejos: números de la forma $a + bi$.

Potencias de *i*: $i = \sqrt{-1}, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$.

Capítulo 8 Funciones cuadráticas

Propiedad de la raíz cuadrada:

Si $x^2 = a$, donde a es un número real, entonces $x = \pm\sqrt{a}$.
Una ecuación cuadrática puede resolverse factorizando, completado el cuadrado o mediante la fórmula cuadrática.

Fórmula cuadrática: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Discriminante: $b^2 - 4ac$

Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces la ecuación tiene dos raíces reales distintas.

Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces la ecuación tiene una sola raíz real.

Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces la ecuación no tiene raíces reales.

Parábolas

Para $f(x) = ax^2 + bx + c$, el vértice de la parábola se encuentra en $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ o $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$, y la ecuación del eje de simetría es $x = -\frac{b}{2a}$.

Para $f(x) = a(x-h)^2 + k$, el vértice de la parábola es (h, k), y la ecuación del eje de simetría es $x = h$.

Si $f(x) = ax^2 + bx + c, a > 0$, la función tendrá un valor mínimo de $\frac{4ac - b^2}{4a}$ en $x = -\frac{b}{2a}$.

Si $f(x) = ax^2 + bx + c, a < 0$, la función tendrá un valor máximo de $\frac{4ac - b^2}{4a}$ en $x = -\frac{b}{2a}$.

Capítulo 9 Funciones exponenciales y logarítmicas

Función compuesta de la función f con la función g: $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$

Para determinar la **función inversa**, $f^{-1}(x)$, se intercambian todas las x y las y y resuelve la ecuación resultante en términos de y.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones inversas, entonces $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$.

Función exponencial: $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$

Logaritmo: $y = \log_a x$ significa $x = a^y, a > 0, a \neq 1$

Propiedades de los logaritmos:

$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$

$\log_a x^n = n \log_a x$

$\log_a a^x = x$

$a^{\log_a x} = x, x > 0$

Logaritmos comunes son logaritmos de base 10.

Logaritmos naturales son logaritmos de base e, donde e ≈ 2.7183.

Potencias de 10: Si $\log N = L$ entonces $N = 10^L$.

Fórmula de cambio de base: $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Función exponencial natural: $f(x) = e^x$

Para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas también se usan estas propiedades:

Si $x = y$, entonces $a^x = a^y$.

Si $a^x = a^y$, entonces $x = y$.

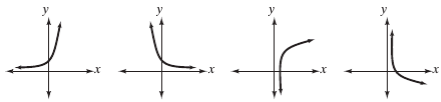
Si $x = y$, entonces $\log x = \log y \ (x > 0, y > 0)$.

Si $\log x = \log y$, entonces $x = y (x > 0, y > 0)$.

$\ln e^x = x$

$e^{\ln x} = x, x > 0$

$f(x) = a^x$, $a > 1$ | $f(x) = a^x$, $0 < a < 1$ | $f(x) = \log_a x$, $a > 1$ | $f(x) = \log_a x$, $0 < a < 1$

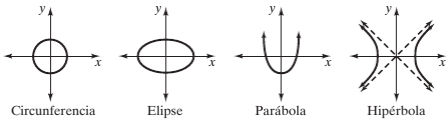


Capítulo 10 Secciones cónicas

Fórmula de distancia: $D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Fórmula del punto medio: punto medio $= \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Secciones cónicas:



Circunferencia con centro en el origen y radio r: $x^2 + y^2 = r^2$

Circunferencia con centro en (h, k) y radio r:

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Elipse con centro en el origen: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Parábola con vértice en (h, k) que abre:

hacia arriba, $a > 0$: $y = a(x - h)^2 + k$

hacia abajo, $a < 0$: $y = a(x - h)^2 + k$

a la derecha, $a > 0$: $x = a(y - k)^2 + h$

a la izquierda, $a < 0$: $x = a(y - k)^2 + h$

Hipérbolas con centro en el origen:

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, cuando el eje transversal está a lo largo del eje x.

$\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$, cuando el eje transversal está a lo largo del eje y.

$y = \pm \dfrac{b}{a} x$, ecuaciones de las asíntotas de las hipérbolas.

Capítulo 11 Sucesiones, series y el teorema del binomio

Sucesión finita: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5

Serie finita: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

Sucesión infinita: $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n \ldots$

Serie infinita: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + \cdots$

Enésima suma parcial de una sucesión: $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$

Enésimo término de una sucesión aritmética: $a_n = a_1 + (n - 1)d$

Enésima suma parcial de una sucesión aritmética: $s_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$

Enésimo término de una serie geométrica: $a_n = ar^{n-1}$

Enésima suma parcial de una sucesión geométrica: $s_n = \dfrac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}, r \neq 1$

Suma de una serie geométrica infinita con $|r| < 1$: $s_\infty = \dfrac{a_1}{1 - r}$

Factorial: $n! = n(n - 1)(n - 2)(n - 3) \ldots (1)$ y $0! = 1$

Coeficientes binomiales: $\dbinom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n - r)!}$

$\dbinom{n}{0} = 1 \dbinom{n}{1} = n \dbinom{n}{n - 1} = n \dbinom{n}{n} = 1$

Teorema del binomio:

$(a + b)^n = \dbinom{n}{0} a^n b^0 + \dbinom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \dbinom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dbinom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \cdots + \dbinom{n}{n} a^0 b^n$

Álgebra intermedia es un libro que ha sido utilizado por estudiantes que han tenido un acercamiento o no con el álgebra, ya sea mediante cursos de actualización o por simple interés. Nuestro principal objetivo es que los estudiantes puedan leer, entender y disfrutar el álgebra. Para lograrlo, hemos usado oraciones breves, explicaciones claras y muchos ejemplos con un alto nivel de detalle. Esta obra usa aplicaciones prácticas para esta asignatura a lo largo del texto.

Una de las características más importantes del texto es su énfasis en la legibilidad. La novena edición ha sido revisada con un enfoque en la mejora de la accesibilidad y el abordaje de las necesidades y estilos de aprendizaje.

Las características del texto y sus complementos lo hacen adecuado para adaptarse a diversos modelos pedagógicos, incluidos:

- ✓ Cursos presenciales
- ✓ Cursos híbridos o mixtos
- ✓ Cursos especiales
- ✓ Educación a distancia
- ✓ Cursos intensivos
- ✓ Aprendizaje autodidáctico
- ✓ Aulas inversas
- ✓ Trabajo colaborativo

www.pearsonenespañol.com

ISBN 978-607-32-4855-6

90000

9 786073 248556